

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# Dinamica delle galassie ellittiche e delle galassie a spirale

Relatore:  
Prof./Dott. Daniele Dallacasa

Presentata da:  
Marcello Cantari

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduzione alle galassie</b>	<b>4</b>
1.1 Classificazione di Hubble . . . . .	5
<b>2 Galassie Ellittiche</b>	<b>6</b>
2.1 Il Piano Fondamentale . . . . .	7
<b>3 Galassie a Spirale</b>	<b>8</b>
3.1 Velocità di rotazione del disco . . . . .	9
3.2 Il problema dei bracci . . . . .	10
<b>4 Fluidodinamica per le galassie</b>	<b>11</b>
4.1 Urti geometrici . . . . .	11
4.2 Tempo di rilassamento . . . . .	11
4.3 CBE ed equazioni di Jeans . . . . .	13
4.4 Teorema del viriale . . . . .	14
4.5 Anisotropie nelle Galassie Ellittiche . . . . .	16
<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>

## Abstract

Questa tesi si propone di essere un introduzione al complesso mondo della dinamica delle galassie. Inizieremo con la classificazione di Hubble per poi concentrarci più nello specifico sui due diversi tipi di galassie dominanti. Parleremo poi delle galassie ellittiche e di quelle a spirali, cercando di elencare tutte le proprietà dinamiche e le leggi più importanti. Soffermandoci su alcune caratteristiche peculiari delle due galassie inizieremo ad indagare le loro relazioni con la dinamica del sistema, in particolare la forma della galassia.

Successivamente inizieremo ad impostare il problema della dinamica dal punto di vista della fluidodinamica, cercando di arrivare ad avere un modello finale esaustivo, che ci permetta di collegare forma e dinamica.

# 1 Introduzione alle galassie

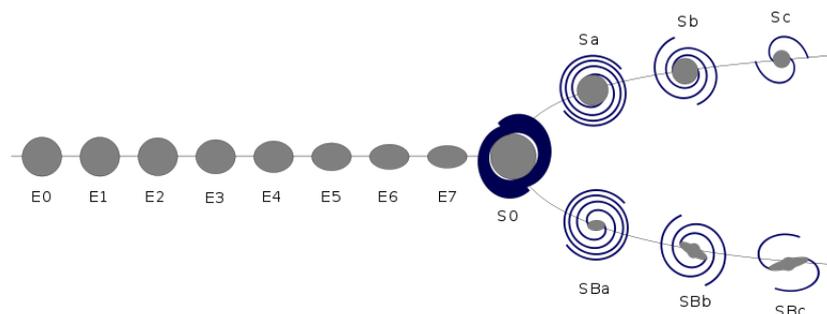
Le galassie sono enormi conglomerati di stelle, gas e polveri tenuti insieme dalla reciproca attrazione gravitazionale degli elementi che le compongono. Nelle galassie possiamo trovare strutture molto complesse come ammassi globulari, nebulose e buchi neri. perchè Le galassie stesse possono dar luogo a fenomeni fisici unici come gli *AGN*[nuclei galattici attivi], il processo di *Merging* o la *Starburst Formation* oltre che a strutture come gli Ammassi di galassie. Questo grazie all'interazione gravitazionale che lega e plasma l'enorme quantità di materia a disposizione, aumentando la complessità delle strutture e dei fenomeni che osserviamo, permettendo così ad ogni galassia di essere unica. Tuttavia nonostante tutta questa libertà di azione da parte della materia, le galassie mostrano delle caratteristiche condivise, che cadono in certi intervalli abbastanza ben definiti(ottenuti dalle osservazioni):

Grandezze fisiche	limite inferiore	limite superiore
Massa	$\approx 10^5 M_{sun}$	$\approx 10^{13} M_{sun}$
Raggio	$\approx 0.1 Kpc$	$\approx 100 Kpc$
Numero di stelle	$\approx 10^9 N_{star}$	$\approx 10^{12} N_{star}$
Distribuzione di velocità	$\approx 20 km/s$	$\approx 400 km/s$

Ci sono poi fenomeni come i *SMBH*[Super Massive Black Hole], che si trovano al centro di quasi ogni galassia con massa comparabile a:  $M_{SMBH} \approx 10^{-3} M_{Gal}$  per le galassie ellittiche e  $\approx 10^{-3} M_{Bulge}$  per le spirali. Un ulteriore fenomeno da prendere in considerazione è la proiezione, infatti noi non possiamo scegliere l'angolo di vista con il quale osserviamo la galassia. Questo crea numerose difficoltà, perché permette ad oggetti di forma diversa di avere la stessa forma.[si pensi ad una sfera ed un cilindro visto dalla base] Se poi si considera anche l'enorme quantità di galassie nell'universo[ $N_{gal} > 10^9$ ] si rimane stupiti di fronte ai pochi tipi di Morfologia disponibili. Una delle prime classificazioni Morfologiche delle galassie venne fatta da Hubble.

## 1.1 Classificazione di Hubble

La classificazione di Hubble divide le galassie in due macro-categorie: Ellittiche o *Early type* e Spirali o *Late type*.



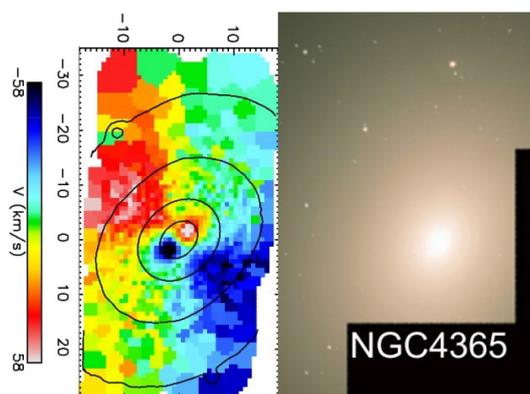
- Galassie Ellittiche[E], sono classificate in base alla loro ellitticità:  
E6 indica  $\varepsilon = 0.6$ ):  $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$ ; a= asse maggiore, b= asse minore. Possiamo notare come all'aumento dell'ellitticità corrisponda uno schiacciamento della galassia: le E0 sono quasi sferiche mentre le E7 sono molto più schiacciate. Non è possibile ottenere delle E8 perché la materia diventa instabile e ricade sul nucleo della galassia. Le galassie ellittiche non presentano una chiara struttura riconoscibile ad occhio ed inoltre, sono il tipo di galassie più variegato. Alla categoria delle galassie ellittiche infatti appartengono sia galassie molto piccole  $\approx 10^5 M_{Gal}$ , sia le galassie giganti  $\approx 10^{13} M_{Gal}$  che possiamo trovare al cento degli ammassi di galassie.
- Galassie Lenticolari[S0]  
Le galassie lenticolari rappresentano l'anello di congiunzione fra le ellittiche e le galassie a spirali. Prendono le loro caratteristiche da ambo le categorie. Hanno caratteristiche emissive simili alle galassie ellittiche, mentre la struttura ricorda una galassia a spirale. Notiamo infatti la presenza di un Bulge, che può anche essere barrato, e di un disco. Il disco però non è strutturato come nelle galassie a spirali e mancano i bracci.
- Galassie Spirali, si dividono in due famiglie: normali[S] o barrate[SB]. Sono formate da un Bulge, un nucleo dalla forma tondeggiante simile ad una piccola galassia ellittica, e dal disco diviso in disco sottile e spesso. Sul disco troviamo i bracci, delle strutture quasi immobili, dove il materiale viene perturbato e si ha la formazione stellare. Le galassie a spirale si classificano in base alla grandezza del Bulge rispetto ai bracci. Procedendo da sinistra verso destra la dimensione del Bulge diminuisce, come il numero dei bracci i quali però diventano progressivamente più aperti.

## 2 Galassie Ellittiche

Le galassie ellittiche sono una classe di galassie particolarmente variegata, dove il materiale gira intorno al nucleo in maniera disomogenea, tanto da dar vita ad un elissoide. Queste galassie sono sistemi particolarmente caotici, la velocità di rotazione attorno al nucleo è bassa e gli oggetti come le stelle, hanno forti moti propri. Questo da origine a delle forti anisotropie, che come vedremo successivamente, si rivelano fondamentali per comprendere la dinamica della galassia. Per ora ci basta comprendere che queste anisotropie sono ciò che da forma alla galassia, formando sferoidi, elissoidi prolatti oppure nel peggiore dei casi elissoidi triassiali.

Questa situazione di apparente caos è dovuta alla storia evolutiva della galassia:

- Eventi di forte formazione stellare (*Starburst formation*) a cui poi sono seguite altrettante Supernovae, possono aver perturbato l'ISM circostante. Per questo L'HIM è la principale fase di ISM osservabile, l'alta temperatura ha poi fatto evaporare la polvere. Il materiale caldo, difficilmente collassa per formare stelle, e L'HIM in particolare possiede anche una densità molto bassa. Per questo motivo possiamo osservare facilmente uno spetto di *Bremsstrahlung* da parte del gas, che però a causa delle basse densità difficilmente si raffredderà.
- Eventi di Merging o un incontro ravvicinato con un'altra galassia, possono aver influenzato l'intera galassia. Portando ad eventi di *Starburst formation* o anche a fusioni fra galassie. Da questo tipo di fenomeno, possono nascere strutture bizzarre, come galassie con due diversi assi di rotazione:



- Il processo di formazione della galassia stessa, se il gas è precipitato violentemente all'interno dell'alone di materia oscura può non aver avuto il tempo di organizzarsi, producendo quei moti caotici che osserviamo oggi.

Nonostante ciò il caos che si osserva nelle galassie ellittiche è solo apparente. Esistono infatti importanti e diverse relazioni empiriche che legano fra loro le diverse grandezze

fisiche che determinano lo spettro e la forma delle galassie ellittiche. La più importante di tutte è: il Piano Fondamentale.

## 2.1 Il Piano Fondamentale

Il piano fondamentale è una relazione che nasce dalla combinazione di tre diverse leggi empiriche:

- Legge di Kormendy:  
Le galassie più luminose hanno raggi effettivi più grandi:  $L \approx R_e^a$  ;  $a \approx 1$
- Legge di Faber-Jackson:  
Le galassie ellittiche più luminose hanno dispersioni di velocità più grandi:  $L \approx \sigma^4$
- Legge che lega  $R_e$  a  $\sigma$

Se si prendono le tre leggi e le si mette in unico grafico, si trova che le galassie si dispongono su un piano con una dispersione molto bassa, il che lo rende particolarmente sottile. Da ciò è possibile scrivere l'equazione del suddetto piano:

$$\ln(L) = \alpha \ln(R_e) + \beta \ln(\sigma) + \gamma; \alpha \approx 1; \beta \approx 2;$$

Le tre leggi se prese a se stanti possiedono una dispersione intrinseca, questo perché rappresentano la proiezione del piano fondamentale, e la loro dispersione è dovuta alla sua inclinazione. La dispersione di queste è pertanto intrinseca. La cosa stupefacente però è il ridotto spessore del piano fondamentale, per molto tempo si è cercato di spiegarlo attraverso l'utilizzo del teorema del viriale:

Per un sistema all'equilibrio possiamo scrivere:

$$2T = -U; T \text{ energia cinetica, } U \text{ energia potenziale}$$

Consideriamo:

$$2T = \frac{2M_{stelle}\sigma_{viriale}^2}{2}; U = \frac{-GM_{stelle}^2}{R_{viriale}};$$

allora uguagliando i membri  $M_{stelle}$  ottengo:

$$M_{stelle} = \frac{R_{viriale}\sigma_{viriale}^2}{G}$$

Moltiplico e divido per la luminosità, chiamo  $\gamma_{stelle}$  il rapporto Massa-Luminosità:

$$L = \frac{R_{viriale}\sigma_{viriale}^2}{G\gamma_{stelle}}$$

Da qui ricavo la formula già nota:  $\ln(L) = \ln(R_{viriale}) + 2\ln(\sigma_{viriale}) + \ln G\gamma_{stelle}$

Tuttavia questo non è altro che una coincidenza della natura, il teorema del viriale non vincola le galassie al piano fondamentale. Scriviamo:

$$L = \frac{(K_{viriale})R_e K_\sigma \sigma_{oss}^2}{G\gamma_{stelle}}$$

Dove abbiamo chiamato:  $K_{viriale} = (\frac{R_{viriale}}{R_e})$ ;  $K_\sigma = (\frac{\sigma_{viriale}}{\sigma_{oss}})^2$  Se voglio ottenere una relazione in cui  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$  allora devo richiedere che il parametro di omologia sia costante:

$$L = \frac{K_{viriale} K_\sigma}{G\gamma_{stelle}}$$

Ma  $R_e$  e  $\sigma_{oss}$  non lo sono, in particolare  $R_e$  il raggio effettivo. Il raggio effettivo definisce l'area all'interno della quale io posso trovare del flusso luminoso proveniente dalla galassia e dipende perciò dalla banda di osservazione.

Per questo il piano fondamentale è così importante: perché definisce un vincolo ancora più restrittivo rispetto al teorema del viriale, e collega il campo di radiazione della galassia al suo campo di velocità.

### 3 Galassie a Spirale

Per le galassie a spirale è più difficile trovare delle leggi empiriche. Questo perché il disco risente della composizione chimica della galassia molto più del Bulge, che è assimilabile ad una piccola galassia ellittica.

Nel disco la materia è molto più organizzata rispetto al Bulge, esso viene diviso in disco sottile e disco spesso. Il disco sottile è dove possiamo trovare la maggior parte della materia del disco, mentre il disco spesso è più rarefatto. Oltre il disco spesso possiamo trovare l'alone, dove è possibile individuare gli ammassi globulari più vecchi, composti da stelle che si sono formate insieme alla galassia.

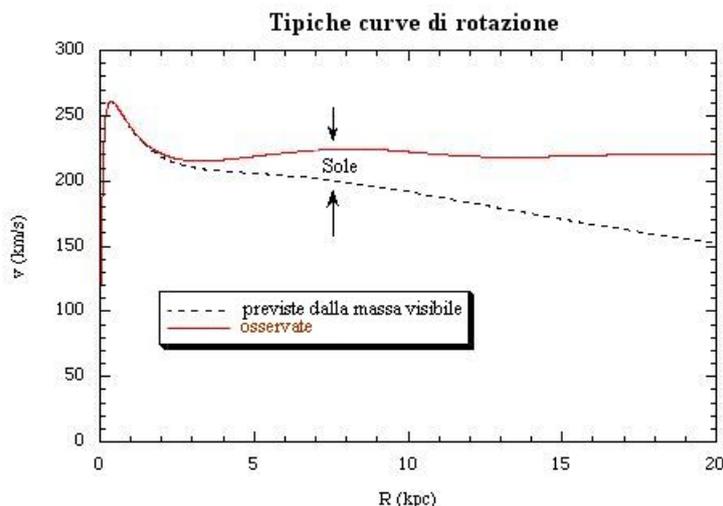
I bracci però non si estendono fino all'alone, ma si trovano nel disco e sono delle importanti zone di formazione stellare: il gas quando entra nel braccio viene perturbato e ciò può portare ad un collasso della nube. Le stelle più massive non lasciano mai il braccio ed esplodendo vanno ad arricchire immediatamente l'ISM che verrà usato dalla stella successiva. Le stelle più piccole viceversa lasciano la zona di formazione stellare e si mettono in orbita attorno al nucleo, per questo i bracci appaiono blu. In una galassia a spirale le stelle ruotano ordinatamente all'interno del disco e la velocità di rotazione è possibile ottenerla attraverso una legge empirica: La legge di Tully-Fisher.

### 3.1 Velocità di rotazione del disco

La legge di Tully-Fisher lega la luminosità con la velocità di rotazione del disco:

$$L \approx v_{disco}^4$$

Questo ci permette di notare una cosa molto importante, la curva di rotazione del disco è piatta. Se così non fosse allora dovrebbe essere la luminosità a variare, supponendo che la legge valga comunque. La curva di rotazione non è piatta solo dentro il disco ma anche all'esterno. Grazie alla riga 21 cm è stato possibile osservare la dinamica delle nubi di idrogeno neutro oltre il disco, le quali hanno permesso di confermare una curva di rotazione piatta. Tuttavia questo va apparentemente contro le leggi di Keplero e di Newton.



Se uguaglio l'accelerazione centripeta con la forza di gravità:

$$\frac{v_{rot}^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

Poi risolvo per la velocità ottengo:  $v_{rot} \approx R^{-1/2}$  che non rappresenta una curva di rotazione piatta. Questo però non significa che Newton o Keplero hanno torto, ma che forse non sappiamo come è fatta la distribuzione di massa.

Il disco è assimilabile ad un anello, a differenza di una distribuzione sferica qui non vale il secondo teorema di Newton e gli strati più esterni non sono più ignorabili. Cerco quindi una distribuzione di massa  $[\rho(r)]$  tale da ottenere una curva di rotazione piatta: Dove  $\alpha$  è da determinare:

$$\rho(r) = \frac{A}{R^\alpha}$$

Allora la massa si calcola con:

$$M = 4\pi A \int_0^r t^{2-\alpha} dt = \frac{4\pi AR^{3-\alpha}}{3-\alpha}$$

E la relazione precedente diventa:

$$\frac{v_{rot}^2}{R} = \frac{4\pi AR^{3-\alpha}}{3-\alpha}$$

Allora la distribuzione di massa cercata è di:

$$\rho(r) = \frac{A}{R^2}$$

Questo però rivela un altro problema, manca la massa necessaria per poter giustificare una curva di rotazione del genere: la materia osservabile non è sufficiente, la densità di stelle nel disco decresce con  $R \approx e^{-R}$  diventando praticamente nulla appena fuori dal disco. Questa è una delle prove a sostegno della materia oscura, si suppone quindi la presenza di particelle non interagenti con la radiazione elettromagnetica che contribuisce alla massa totale della galassia. La galassia a spirale è quindi immaginabile come avvolta in un alone di materia oscura che costituisce la maggior parte della materia della galassia. Ad oggi si pensa che circa il 90% della massa dell'universo sia materia oscura, e che essa sia fondamentale per la formazione, evoluzione e stabilità delle galassie.

## 3.2 Il problema dei bracci

Se è vero che la curva di rotazione delle galassie a spirale non è quella di un corpo rigido, allora dovremmo vedere i bracci del disco sfaldarsi nel giro di poche rotazioni. Questo perché nel disco gli oggetti non impiegano un tempo fisso a fare un giro attorno al nucleo, ma il tempo richiesto cresce con la lontananza dal Bulge: perché la velocità è costante, ma non il tempo impiegato.

Tuttavia i bracci si dimostrano essere strutture semi-permanenti e quasi immobili, sono addirittura zone di formazione stellare e devono sopportare l'esplosione di stelle massicce. I bracci sono in grado di sopportare tutto questo perché non sono caratteristiche materiali del disco o della galassia ma caratteristiche strutturali. Per questo sopravvivono, perché non sono fisici, noi li vediamo solo perché le stelle massicce ce li rendono ben visibili. I bracci si muovono ad una loro velocità caratteristica predetta dalla teoria delle onde di densità sviluppata da C.C. Lin e Frank Shu, mentre gli oggetti che li compongono procedono ad una velocità loro, indipendente.

## 4 Fluidodinamica per le galassie

Le galassie come già detto sono sistemi molto complessi, ci chiediamo se sia comunque possibile sviluppare dei modelli che possano descrivere almeno alcuni comportamenti di questi oggetti. Cercheremo di concentrarci sullo schiacciamento della galassia e sulla sua connessione con l'anisotropia. Per trattare il problema la fluidodinamica ci viene in aiuto perché ci permette di descrivere un fluido composto da "pallini". Possiamo trattare le stelle come pallini? Per prima cosa assumiamo che tutte le stelle della galassia siano identiche al Sole. Quindi verifichiamo se questa assunzione è ragionevole e indaghiamo su ulteriori proprietà del fluido di stelle.

### 4.1 Urti geometrici

Uno dei principali ostacoli all'assunzione delle stelle  $\rightarrow$  pallini è la moltitudine di fenomeni che si manifestano nel caso di un incontro ravvicinato fra due stelle. Ad esempio l'influenza del campo di attrazione mareale oppure i fenomeni di trasferimento di materia, o il *Merging* stellare che in condizioni di grande densità permettono la formazione di BSS [*Blue Strangle Stars*].

Chiamiamo quindi:  $\frac{4\pi R^3}{3}$  lo spazio in cui le nostre stelle si muovono, assimilabile al volume di una galassia sferica. Poi prendiamo le nostre stelle simil-Sole e definiamo:  $\pi r_{solare}^2$  come la superficie della stella.

Se la stella si muove all'interno del volume allora possiamo chiamare con  $\lambda$  la distanza percorsa prima dell'urto. Consideriamo una galassia formata da  $N^{11}$  stelle, e consideriamo cosa accade quando il cilindro che descrive il moto delle stelle ha occupato tutto il volume disponibile e quindi è molto probabile che sia avvenuto un urto. Allora possiamo scrivere:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = N\pi r_{solare}^2 \lambda$$

Se usiamo  $R = 3 * 10^4 pc$ ,  $r_{solare} = 2.3 * 10^{-8} pc$  otteniamo una  $\lambda$  pari a  $10^{11}$  volte il raggio galattico. Possiamo quindi assumere che le galassie come oggetti trasparenti, la probabilità di urto geometrico fra due stelle è pressochè uguale a zero.

### 4.2 Tempo di rilassamento

Esiste un secondo tipo di urto da dover considerare: l'urto gravitazionale. La gravità infatti ha un raggio di influenza illimitato e va con  $R^{-2}$ , quindi tutti gli oggetti nella galassia si influenzano fra loro. Esiste però la possibilità di considerare trascurabili tutte queste interazioni e ciò avviene se il nostro sistema ha un  $t \ll t_{2b}$ : dove  $t_{2b}$  è chiamato tempo di rilassamento.

Se siamo in questa condizione allora il nostro fluido è detto non collisionale, e i singoli pallini non si "vedono" fra loro ma sentono solo il potenziale centrale. Questo

ci permetterebbe di semplificare enormemente i conti da fare, perciò siamo interessati a calcolare il tempo di rilassamento.

Il calcolo del tempo di rilassamento è un po' articolato perciò cerchiamo di riportare solo i punti più importanti. Partiamo prendendo una stella di test, e la spariamo con velocità  $V_{tangenziale}$  sulla stella 1. La stella di prova fa un urto iperbolico a questo punto rimuoviamo la stella 1, prendiamo la stella 2 e le facciamo fare un urto iperbolico con la stella di test. Rimuoviamo la stella di test e facciamo fare alla stella 3 un urto iperbolico con la stella 2 . . .

Facciamo questo per tutte le stelle a nostra disposizione, questo perché non siamo in grado di risolvere un problema degli  $N^{11}$  corpi. Pertanto risolviamo tanti problemi a due corpi e ne sommiamo i risultati, consci del fatto che la soluzione divergerà con l'aumentare del numero di urti da parte della stella di test. Ogni urto scalderebbe la stella di prova lungo la perpendicolare alla velocità tangenziale con cui è stata sparata.

Questa è la parte più importante perché adesso definiamo il tempo di rilassamento come il tempo che impiega la stella di test ad avere un'energia cinetica perpendicolare comparabile a quella tangenziale:

$$\frac{M_{test} V_{t\parallel}^2}{2} \approx \sum \frac{M_{test} \Delta V_{t\perp}^2}{2}$$

Ogni urto scalda la stella di una quantità:

$$\Delta V_{t\perp} \approx \frac{4(GM)^2}{(bV_i)^2}$$

Dove  $b$  è detto parametro di impatto, ovvero la distanza a cui passerebbe l'oggetto di test se non interagisse con il pallino più vicino.

È utile esprimere il tempo di rilassamento in rapporto al tempo dinamico che è il tempo che impiega l'oggetto ad attraversare il sistema. Se lo facciamo otteniamo l'utile relazione:

$$\frac{t_{2b}}{t_{din}} \approx \frac{N}{\ln(N)12}$$

Per arrivare a questa scrittura sono state utilizzate alcune approssimazioni come l'approssimazione impulsiva, o il teorema del viriale che però non pregiudicano il risultato finale.

Notare che se usiamo un valore tipico di oggetti, come  $N^{11}$ , otteniamo come risposta  $10^{11} t_{din}$  che è un tempo enorme. Quindi le galassie non sono sistemi collisionali e non lo diventeranno mai.

### 4.3 CBE ed equazioni di Jeans

La funzione di distribuzione descrive lo spazio delle fasi del sistema. Attraverso questa funzione possiamo ottenere informazioni su ognuna delle  $N^{11}$  stelle, come ad esempio posizioni e velocità, e possiamo usarla per andare a definire delle quantità importanti come:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} f d^3\mathbf{v} \\ \bar{v}_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} f v_i d^3\mathbf{v} \\ \overline{v_i v_j}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} f v_i v_j d^3\mathbf{v}\end{aligned}$$

L'evoluzione temporale della funzione di distribuzione però è una funzione ancora più interessante e prende il nome di CBE o *Collisionless Boltzmann Equation*:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v} | \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla \Phi_T | \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0$$

$$\Phi_T = \Phi + \Phi_{ext}$$

$$\Delta \Phi = 4G\pi \int_{\mathbb{R}^3} f d^3\mathbf{v}$$

$\phi$  descrive un potenziale gravitazionale  $\rightarrow -G \int \frac{\rho(\xi) d^3\xi}{|\mathbf{x}-\xi|}$ , e  $\Phi_{ext}$  descrive il potenziale creato dalla massa esterna al nostro sistema.

La CBE descrive l'evoluzione temporale in maniera affidabile fino a quando il  $t \ll t_{2b}$ ,  $\Phi_T \approx \Phi_{ext}$ , e questa è la prima comodità di cui possiamo usufruire trattando un fluido non collisionale. Se potessimo sapere esattamente come evolve la CBE, di una determinata galassia, allora non avremmo bisogno di andare oltre, saremmo già a conoscenza di tutte le informazioni necessarie per poter capire la dinamica.

Non è possibile ottenere una soluzione della CBE, l'unica cosa che possiamo fare è quella di cercare di svilupparla per poter, comunque, carpire delle informazioni. Per fare ciò utilizziamo il metodo dei momenti ed otteniamo così un sistema infinito di equazioni, queste equazioni prendono il nome di Equazioni di Jeans. Il momento di ordine zero è questo e corrisponde all'equazione di continuità:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (CBE) d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$$

Il momento di ordine uno invece corrisponde all'equazione di Eulero:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (CBE) v_i d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

Per chiudere il sistema ci troviamo costretti a fare delle supposizioni sul valore di  $\overline{v_i v_j}$ . Il valore può essere ottenuto considerando  $\sigma^2_{ij} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}$ , questo oggetto è chiamato tensore di dispersione delle velocità, e l'abbiamo già incontrato nella relazione di Faber-Jackson. Nel caso io mi trovi in un sistema all'equilibrio termodinamico, il tensore diventa uno scalare, rappresentabile come la matrice identità moltiplicata per uno scalare. Ciò non è più vero fuori da un ambiente termalizzato, come il nostro caso in cui operiamo in  $t \ll t_{2b}$ , il tensore in questo caso non è più riducibile ad uno scalare. Otteniamo così tre diverse dispersioni di velocità, se siamo in  $\mathfrak{R}^3$ , una per ogni asse e queste costituiscono delle misure di anisotropia.

#### 4.4 Teorema del viriale

Il passo successivo è quello di utilizzare il teorema del viriale. Il teorema del viriale è una serie infinita di identità tensoriali di tutti gli ordini a cui noi possiamo appoggiarci se consideriamo l'integrazione spaziale delle equazioni di Jeans.

Definiamo subito delle quantità:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \overline{v_i v_j} d^3 \mathbf{x}$$

$$Tr(K_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) d^3 \mathbf{x} = K$$

Chiamato tensore di Energia Cinetica Totale;

$$\Pi_{ij} = \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \overline{\sigma_{ij}^2} d^3 \mathbf{x}$$

$$Tr(\Pi_{ij}) = \int_{\mathfrak{R}^3} \rho (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) d^3 \mathbf{x} = \Pi$$

Chiamato tensore di Energia Cinetica di dispersione;

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \overline{v_i} \overline{v_j} d^3 \mathbf{x}$$

$$Tr(T_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) d^3 \mathbf{x} = T$$

Chiamato tensore di Energia Cinetica Ordinata.

I tre tensori sono legati dalla relazione:  $K_{ij} = T_{ij} + \frac{1}{2} \Pi_{ij}$  che usando le tracce diventa  $K = T + \frac{1}{2} \Pi$ . Necessitiamo poi anche dei tensori di momento di inerzia:

$$I_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho x_i x_j d^3 \mathbf{x}$$

$$Tr(I_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d^3 \mathbf{x} = I$$

e di autoenergia:

$$U_{ij} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \Phi d^3 \mathbf{x} = Tr(U_{ij}) = Tr(U_{ji})$$

Queste quantità sono contenute dentro l'equazione di jeans in particolare possiamo notare che:

$$\int x_i \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} d^3 \mathbf{x} = - \int x_i \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} - \int x_i \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x} - \int x_i \rho \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x}$$

è riscrivibile come:

$$\frac{1}{2} \ddot{I}_{ij} = 2K_{ij} + U_{ij} + (W_{ij} + W_{ji})/2$$

Per far apparire la derivata secondo dell'inerzia è necessario usare anche la prima equazione di jeans. La W invece è un potenziale che non è detto sia sempre simmetrico.

$$W = \int \rho \langle \mathbf{x}, \nabla \phi_{ext} \rangle d^3 \mathbf{x}$$

Ed inoltre non rappresenta l'energia potenziale nel campo esterno, perché quella si scrive come:

$$U_{ext} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \Phi_{ext} d^3 \mathbf{x}$$

Possiamo notare che se siamo nella situazione in cui  $W=0$  ed anche  $\ddot{I} = 0$  allora l'equazione si riscrive come:

$2K + U = 0$  e siccome  $K = \frac{M v_{vir}^2}{2}$  mentre  $U = -\frac{GM}{R_{vir}}$  allora possiamo scrivere:  $R_{vir} v_{vir}^2 = GM$  che permette di stimare la massa della galassia se si è in grado di determinare le due quantità viriali. La massa ottenuta però non è la sola massa barionica ma comprende anche la materia oscura della galassia, se volgiamo porre  $W=0$  infatti ci dobbiamo mettere nel caso in cui non è presente massa all'esterno del nostro sistema che genera un potenziale, ciò è possibile solo se includiamo anche l'alone di materia oscura all'interno del sistema. Infine porre  $\ddot{I} = 0$  corrisponde a richiedere nel nostro sistema non ci sia un flusso di massa verso l'esterno: un sistema che possiede  $\ddot{I} = 0$  è costretto a perdere elementi o materia in questo caso. Un esempio di  $\ddot{I} = 0$  lo possiamo avere quando si attiva il fenomeno della catastrofe-gravotermica data dall'azionamento della termodinamica,  $t > t_{2b}$  in un sistema tenuto insieme dalla gravità. Gli oggetti si organizzano con una distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann, la coda finale della velocità eccede sicuramente la velocità di fuga del sistema, il sistema perde massa e la velocità di fuga cala. Il materiale infine si riorganizzerà in una nuova curva di Maxwell-Boltzmann e il processo ricomincerà da capo. Questo tipo di fenomeno è osservabile negli ammassi aperti e sancisce la disgregazione dell'ammasso, anche gli ammassi globulari subiscono questo processo ma riescono a fermarlo. Più stelle perde l'ammasso più si contrae e diventa denso fino a dar vita a molteplici sistemi binari, questi iniziano a

restringersi permettendo all'ammasso di non perdere corpi e di fermare la catastrofe-gravotermica. La catastrofe-gravotermica ricomincia nel momento in cui i sistemi binari raggiungono il loro limite e iniziano i processi di *Merging* stellare che li eliminano.

## 4.5 Anisotropie nelle Galassie Ellittiche

L'ultimo passo consiste nell'applicazione del teorema del viriale. Usando il teorema in forma tensoriale definiamo i tre assi del moto x,y e z. Il sistema ruota attorno all'asse z, pertanto:  $W_{xx} = W_{yy}$  mentre  $W_{ij} = 0$ . Otteniamo il sistema:

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0$$

$$\Pi_{zz} + W_{zz} = 0; T_{zz} = 0$$

Dove per  $\Pi$  vale la relazione:

$$\Pi_{xx} = M\sigma_o^2$$

e

$$\Pi_{zz} = (1 - \delta)M\sigma_o^2$$

$\delta < 1$  è l'anisotropia e  $\sigma_o^2 = \frac{1}{M} \int \rho \sigma_{xx}^2 d^3\mathbf{x}$  è la velocità di dispersione lungo la linea di vista. Ora possiamo scrivere:

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \frac{\Pi_{xx} + 2T_{xx}}{\Pi_{zz}} = \frac{1}{1 - \delta} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_o^2}{\sigma_o^2}\right)$$

Qui possiamo notare che se una galassia è schiacciata in nel piano xy allora siamo nel caso  $W_{zz} > W_{xx}$ . Questo dimostra come la massa esterna, la materia oscura, influenzi in modo decisivo la forma e la rotazione di una galassia, e come questa distribuzione di massa causi anisotropie nei moti degli oggetti in orbita. Possiamo quindi dedurre che galassie ellittiche e spirali non condividano la stessa percentuale di materia oscura, e che quindi l'alone che l'avvolge abbia caratteristiche diverse che influenzano direttamente la dinamica interna della galassia ospite.

## Bibliografia

- “Appunti di Astrofisica Extragalattica”, lezioni frontali.
- “Appunti di MHD e Processi di Radiazione”, E.Ceccotti.
- “Dispense di Astrofisica delle galassie”, S.Pellegrini.
- “Lezione 6”, Marconi università di Firenze.
- “Appunti di Dinamica stellare”, L.Ciotti.