

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA RIEMANNIANA PER
LA DESCRIZIONE DI
ILLUSIONI OTTICHE DI SCALA

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
GIOVANNA CITTI

Presentata da:
GIULIA LUPI

IV Sessione
2018/2019

Indice

1	Introduzione	3
2	Modello della corteccia visiva	5
2.1	Anatomia e fisiologia dell'apparato visivo	5
2.1.1	Struttura dell'occhio	5
2.1.2	Il percorso del segnale visivo	6
2.2	Modello della corteccia indipendente dal tempo	9
2.3	Modello della corteccia dipendente dal tempo	11
3	Metriche Riemanniane e deformazioni	13
3.1	Metriche Riemanniane	13
3.2	Trovare la deformazione	15
3.3	Funzioni olomorfe	17
3.4	Osservazioni sulla deformazione	20
4	Illusioni di scala dipendenti dal tempo	22
4.1	Soluzione fondamentale dell'equazione del calore	23
4.2	Osservazioni sul modello dipendente dal tempo	27

Capitolo 1

Introduzione

Le illusioni ottico-geometriche (GOIs) sono state scoperte nel XIX da alcuni psicologi, fisiologi e fisici tedeschi, primi fra tutti Oppel e Hering, ([8],[9]).

Questa classe di fenomeni può essere definita come un insieme di situazioni in cui si ha la consapevolezza di una mancata corrispondenza delle proprietà geometriche tra un oggetto nello spazio oggettivo e la sua percezione associata.

Tipicamente questa classe di illusioni viene analizzata considerando le principali caratteristiche geometriche dello stimolo; l'obiettivo principale di questa tesi è quello di analizzare il caso particolare di illusione ottico-geometrica dovuta alla scala, introdotto in [1].

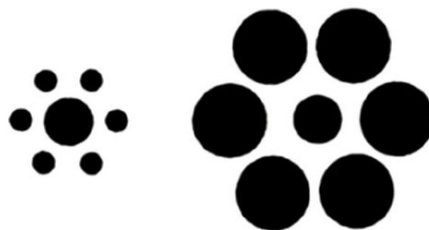


Figura 1.1: Illusione di Ebbinghaus

La Figura 1.1 mostra l'illusione di Ebbinghaus: la presenza di induttori circolari varia la grandezza percepita del cerchio centrale.

Dopo la scoperta dello psicologo tedesco Hermann Ebbinghaus (1850-1909), il fenomeno venne diffuso nel mondo inglese da Edward B. Titchener in un saggio del 1901 sulla psicologia sperimentale: è questo il motivo per cui questa illusione viene anche chiamata illusione di Titchener. Modelli geometrici per illusioni ottico geometriche dovute alla percezione dell'orientazione furono proposti dal lavoro pionieristico di Hoffman [10], in termini di gruppi di Lie, e poi da Smith [11] e da Walker [12], il quale provò a combinare la teoria neurale dell'eccitazione dei campi recettivi con strumenti matematici per spiegare la percezione errata delle linee diritte nelle GOIs.

Questi risultati, insieme a quelli di Ehm e Wackerman [14], hanno introdotto un'analisi quantitativa della deformazione percepita.

Modelli geometrici della funzionalità della corteccia visiva erano stati proposti da Hoffman [16], Mumford [17], Williams e Jacobs [21] e più recentemente da Petitot e Tondut [18] e da Citti e Sarti [15]. Questi modelli erano focalizzati principalmente sulla selezione dell'orientazione, ma sono stati estesi per descrivere anche la selezione della scala. In particolare Franceschiello, Sarti e Citti in [1] hanno proposto un modello per illusioni ottico geometriche dovute alla scala ispirato alla funzionalità delle cellule semplici della corteccia visiva.

Capitolo 2

Modello della corteccia visiva

I modelli neuromatematici mirano a codificare le caratteristiche dei primi stadi del processo visivo. In questo primo capitolo introdurremo un modello della corteccia visiva che ci permetterà di capire meglio gli strumenti matematici che utilizzeremo in seguito per modellizzare le illusioni ottiche dovute alla scala. Seguiremo la presentazione di [3].

2.1 Anatomia e fisiologia dell'apparato visivo

La vista è uno dei sensi più importanti nell'uomo ed è alla base della maggior parte della comunicazione umana.

Il sistema visivo è in grado di riconoscere alcune onde elettromagnetiche come luce visibile; lo stimolo visivo entra nell'occhio e stimola i fotorecettori della retina. In base alla loro forma e funzionalità i fotorecettori si suddividono in due strutture: i coni e i bastoncelli. I coni sono deputati alla visione diurna mentre i bastoncelli sono specializzati nella visione notturna.

La retina è collegata al talamo. Pertanto l'elaborazione delle informazioni all'interno della retina viene eseguita dai *neuroni della retina* e i segnali in uscita vengono trasportati al cervello dagli assoni delle *cellule gangliari della retina* nei *nervi ottici*. Alcuni di questi assoni si incrociano nel *chiasma ottico* ed è per questo che gli input che provengono da un lato dello spazio visivo passano al lato opposto del cervello. Gli assoni delle cellule gangliari della retina formano poi i *tratti ottici* che mandano impulsi al cervello. Il principale percorso visivo nell'uomo ha come bersaglio il *corpo genicolato laterale* (LGN) del talamo e questo nucleo, attraverso le radiazioni visive, proietta le informazioni sulla corteccia visiva.

2.1.1 Struttura dell'occhio

La parete dell'occhio è composta da 3 strati.

La parte esterna, o strato fibroso, include la *cornea* e la *sclera*. La parte intermedia, o strato vascolare, include l'*iride* e la *coroide*. Lo strato più profondo dell'occhio è la *retina* che si divide in *retina nasale* e *retina temporale*. Essa è embriologicamente derivata dal diencefalo ed è parte del sistema nervoso centrale. La retina ricopre tutta la parte posteriore dell'occhio ad eccezione del *disco ottico*, dal quale si dipartono gli assoni del *nervo ottico* che lasciano la retina.

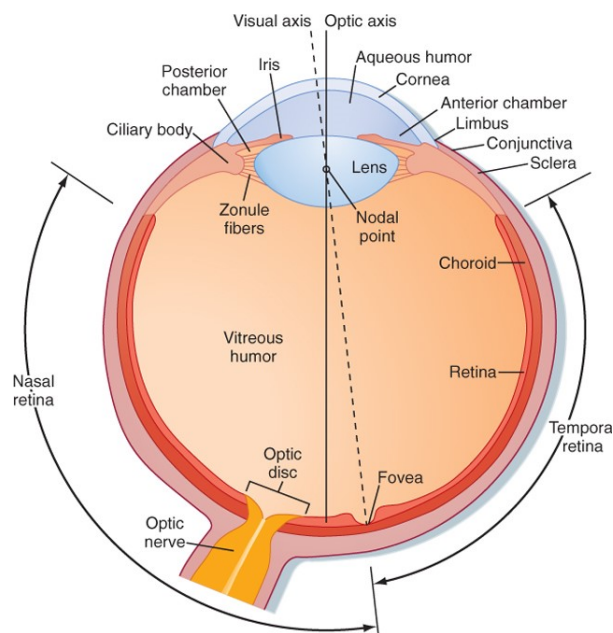


Figura 2.1: Struttura dell'occhio

La luce entra attraverso la cornea e passa attraverso una serie di strutture e fluidi trasparenti che sono: la *cornea*, l'*umore acqueo*, la *lente* e l'*umor vitreo*.

2.1.2 Il percorso del segnale visivo

Le cellule gangliari della retina trasmettono l'informazione al cervello attraverso il nervo ottico, il chiasma ottico e il tratto ottico.

Gli occhi, i nervi ottici, il chiasma ottico e i tratti sono mostrati in Figura 2.2. L'immagine dello stimolo visivo viene capovolta dal sistema delle lenti.

La metà sinistra dello stimolo visivo è riprodotta sulla retina nasale dell'occhio sinistro e sulla retina temporale dell'occhio destro. Quindi il campo visivo sinistro è formato dalla retina nasale sinistra e dalla retina temporale destra. Allo stesso modo la metà destra del campo visivo è riprodotta dalla retina temporale sinistra e dalla retina nasale destra. Il sistema provoca anche un'inversione dell'asse verticale, con il campo visivo superiore riprodotto sulla parte inferiore della retina e viceversa.

Gli assoni delle cellule gangliari della retina possono o non possono incrociarsi nel chiasma ottico, dipende dalla posizione della cellula gangliari nella retina. Gli assoni della porzione temporale attraversano il chiasma ottico e raggiungono la parte ipsilaterale del cervello mentre quelli della porzione nasale attraversano il chiasma ottico e giungono nella porzione controlaterale del cervello.

Come risultato si ottiene che gli oggetti nel campo visivo sinistro sono rappresentati nella parte destra del cervello e quelli nel campo visivo destro sono rappresentati nella parte sinistra del cervello.

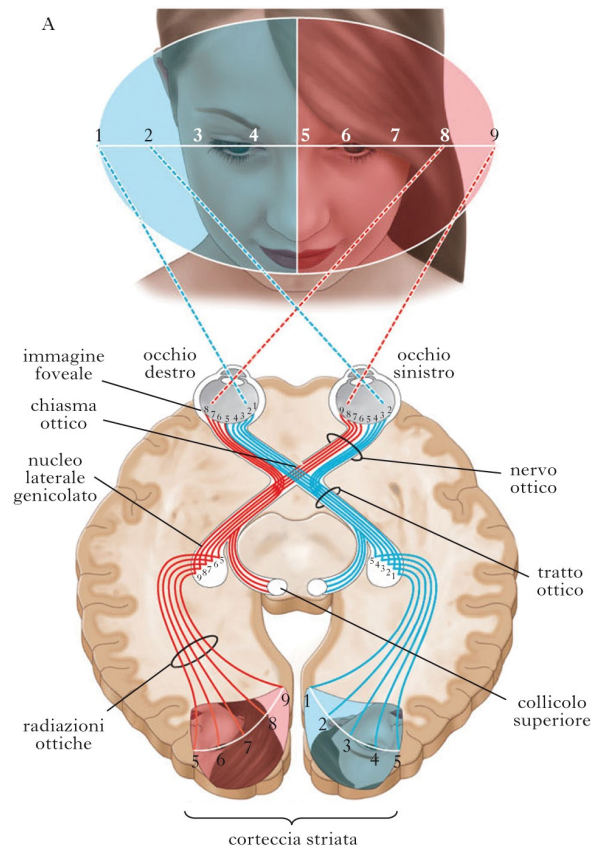


Figura 2.2: Proiezione dell'immagine ai due emisferi del cervello

Gli assoni delle cellule gangliari della retina possono trasportare lo stimolo visivo in molte parti del cervello ma colpiscono soprattutto il *nucleo genicolato laterale* (LGN) del talamo. Qui vi è una proiezione punto per punto dalla retina al LGN che lo fornisce di una struttura retinotopica. Le cellule che rappresentano una particolare posizione della retina sono allineate lungo linee che possono essere disegnate attraverso gli strati del LGN.

Il LGN proietta lo stimolo visivo sulla *corteccia visiva primaria* o *corteccia striata* (V1). Esiste una corteccia visiva per ogni emisfero cerebrale e sono localizzate nel lobo occipitale. Come abbiamo già visto la corteccia visiva sinistra riceve segnali riguardanti il campo visivo di destra e viceversa. Le cellule retiniche e di LGN mostrano capacità di selezione della scala. Queste "cellule semplici" sembra rispondano come se ricevessero input da cellule i cui campi recettivi sono cerchi concentrici messi in modo tale che i loro centri "on" siano allineati in una riga circondata da zone inibitorie, vedi Figura 2.3. I neuroni corticali in V1 spesso mostrano inoltre capacità di selezione dell'orientazione (per esempio, rispondo meglio quando lo stimolo è orientato e posizionato in modo particolare).

I neuroni corticali complessi sono simili alle cellule semplici poichè anch'essi rispondono ad una specifica orientazione, ma invece di avere delle zone eccitatorie affiancate da zone inibitorie,



Figura 2.3: Campi recettivi di input dalla retina: on-center e off-center

rispondono meglio ad una particolare orientazione dappertutto nel loro campo recettivo. Quindi il campo recettivo di una cellula complessa può essere pensato come composizione di cellule semplici adiacenti con la stessa orientazione.

Poichè le cellule complesse che selezionano la stessa orientazione tendono a trovarsi nella stessa

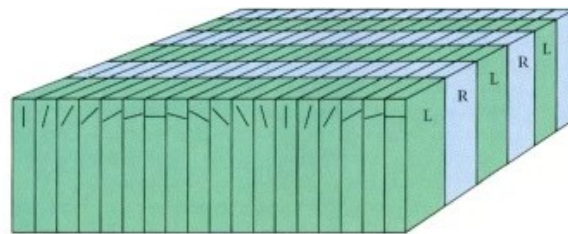


Figura 2.4: Struttura ipercolonnare

zona della corteccia, si considera che esse formino una *colonna di orientazione*. È proprio grazie a questo aspetto che possiamo considerare V1 dotata di una *struttura ipercolonnare*, vedi Figura 2.4.

Consideriamo ora il caso in cui l'immagine venga vista per un certo periodo di tempo. È naturale pensare al fatto che esistano delle cellule che memorizzano l'immagine vista ai tempi precedenti, ed effettivamente è così. Il segnale visivo nel tempo può essere raffigurato come in Figura 2.5(a): fotogrammi di un'immagine presi ai tempi $T1 - T5$ mostrano una barra bianca che si muove su un background grigio a velocità costante. La sequenza di fotogrammi può essere unita per formare un'immagine con volume (in alto a destra), con il tempo come terza dimensione. In basso a sinistra troviamo una sezione di questo volume spazio-tempo. Nella riga centrale e in basso a destra troviamo rispettivamente una sequenza di immagini in cui la polarità del contrasto della barra si inverte tra il bianco e il nero ogni volta che si sposta e il suo rispettivo grafico spazio-temporale. L'orientamento di queste particolari cellule nello spazio-tempo è dovuto alla loro velocità e al loro orientamento selezionato. Queste cellule agiscono come in Figura 2.5(b): il movimento verso destra di una barra bianca attraverso lo sfondo grigio produce una traiettoria spazio-tempo abbinata alla struttura del campo recettivo spazio-temporale della cellula che seleziona il movimento verso destra. Il movimento verso destra di una barra di inversione del contrasto produce una traiettoria spazio-temporale meglio adattata alla cellula che seleziona il movimento verso sinistra.

Come detto, queste cellule sono in grado di memorizzare le informazioni ed è per questa loro capacità che nel processo di visualizzazione del segnale visivo esse cambiano forma. Per capire

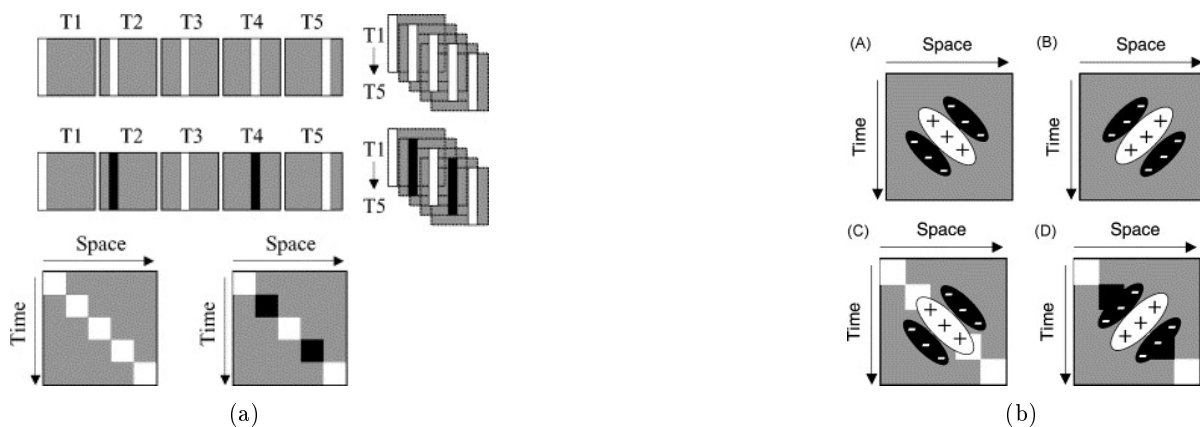


Figura 2.5: Modello spatio-temporale. A sinistra: raffigurazione del segnale visivo nel tempo. A destra: azione delle cellule [4].

meglio questo concetto vediamo un semplice esempio: supponiamo di vedere un'immagine che cambia nel tempo ai tempi $T1 - T5$. Al tempo $T1$ la cellula avrà ricevuto una sola informazione, di conseguenza la possiamo raffigurare come un punto. Al tempo $T2$ le informazioni saranno 2 quindi potremmo vedere la cellula come due punti. Al tempo $T3$ le informazioni saranno 3 e così via. Alla fine si avrà una figura che raffigurata nello spazio tempo sarà un cono. Ovviamente la forma della cellula varia in base alle proprietà dello stimolo osservato nel tempo.

V1 è un'area altamente specializzata per l'analisi dell'informazione riguardante la forma e la collocazione di oggetti statici e il loro movimento nel campo visivo. Successivamente l'informazione viene ulteriormente elaborata dall' *area visiva* V2: come V1, essa è dotata di una struttura ipercolonnare. Molti dei neuroni di quest'area sono regolati da caratteristiche visive semplici come l'orientamento, le dimensioni, il colore e la forma ma anche da caratteristiche più complesse, come l'orientamento di contorni illusori. Il segnale viene infine elaborato dalle *aree visive* V3 e V4 e così si conclude il percorso dello stimolo visivo.

Vediamo ora un modello per le illusioni ottico geometriche dovute alla scala. Una prima importante distinzione da considerare è che il modello è diverso se si considera un fenomeno statico o un fenomeno dipendente dal tempo.

2.2 Modello della corteccia indipendente dal tempo

Il campo recettivo (RF, *receptive field*) è la porzione della retina a cui il neurone reagisce, mentre il profilo recettivo (RP, *receptive profile*) $\psi(\xi)$ è la funzione che modella l'attivazione di un neurone corticale quando viene applicato uno stimolo in un punto $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ del piano retinale. Grazie alla struttura retinotopica, c'è un isomorfismo tra il piano retinale e quello corticale in V1, che noi in prima approssimazione trascureremo. Inoltre la struttura ipercolonnare, scoperta dai neurofisiologi Hubel e Wiesel negli anni Sessanta [13], organizza le cellule di V1 e V2 in colonne, dette ipercolonne, ognuna delle quali copre una parte del campo visivo $M \subset \mathbb{R}^2$ e corrisponde, per un punto fissato del piano retinale, a parametri come l'orientazione, la scala,

la direzione del movimento, il colore. Per ogni punto della retina considereremo un'intera ipercolonna di cellule, ognuna delle quali sensibile ad una specifica istanza della caratteristica f considerata. Le cellule nella corteccia verranno quindi identificate da tre parametri (x_1, x_2, f) , dove (x_1, x_2) rappresenta la posizione del punto e f è un vettore di caratteristiche estratte. Denotando con F l'insieme delle caratteristiche, lo spazio corticale sarà identificato con $\mathbb{R}^2 \times F$. Nel caso particolare analizzato in questa tesi le cellule nella corteccia visiva verranno identificate dai parametri (x_1, x_2, σ) dove (x_1, x_2) è la posizione del punto e σ è la variabile della scala, vedi Figura 2.6.

Quando uno stimolo visivo attiva i fotorecettori del piano retinale, i neuroni i cui RFs interseca-

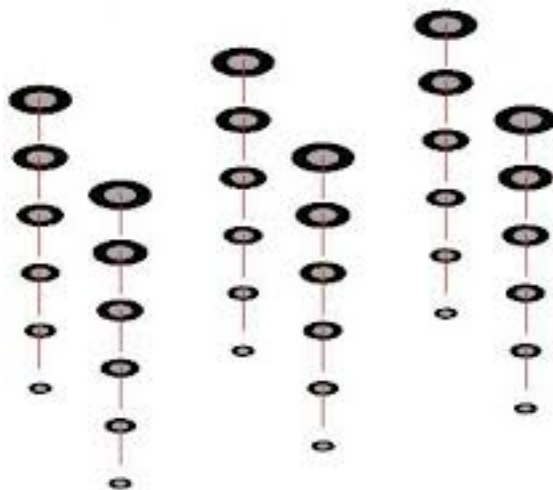


Figura 2.6: Struttura ipercolonnare per il modello della scala

no M inviano un impulso. Le frequenze di questo impulso vengono propagate dalla connettività laterale nello spazio corticale $\mathbb{R}^2 \times F$ dando origine all'attività corticale.

A questo punto l'analisi si compone di due diverse parti: il modello dello spazio visivo e della selezione della scala e la modellizzazione dell'azione della connettività neurale che induce l'attività corticale; in questo documento ci concentreremo su questo secondo aspetto.

L'idea principale è quella di considerare che lo stimolo dell'immagine modulerà la connettività neurale.

Quando viene proiettata sullo spazio visivo, la connettività neurale modulata dà origine ad una metrica Riemanniana che è all'origine della deformazione dello spazio visivo. La nuova metrica verrà espressa come:

$$\| a(x, f) \| g_F(x, f)$$

dove $a(x, f)$ è l'azione della connettività in risposta all'impulso visivo e g_F è la metrica Rie-

manniana compatibile con la connettività osservata.

Intuitivamente la metrica Riemanniana g_F descrive la distanza fra due cellule della corteccia e viene trovata nella modellizzazione dello spazio visivo: nello specifico è la struttura geometrica compatibile con la connettività osservata e che rende la base dello spazio scelta ortonormale. La metrica g_F misura il tempo di percorrenza del segnale da una cellula all'altra lungo gli assoni. La metrica dipende quindi dalla famiglia di cellule considerate. Il coefficiente a tiene conto della deformazione indotta nello spazio corticale dall'input, che modifica la metrica (esempio Figura 1.1).

Di conseguenza si avrà la percezione che la dimensione dell'oggetto centrale sia più o meno piccola a seconda che le dimensioni degli oggetti che lo circondano siano più o meno piccole.

Nel caso di illusione ottico geometrica dovuta alla scala non teniamo conto delle caratteristiche che dipendono dalla direzione, di conseguenza possiamo considerare una metrica isotropica sullo spazio. Quindi $g_F(x, f) = Id$ è l'identità e la metrica si riduce ad un singolo valore reale positivo. In questo caso la metrica indotta sarà semplicemente:

$$\mathbf{p} = \| a(x, f) \| Id.$$

2.3 Modello della corteccia dipendente dal tempo

Consideriamo ora il caso in cui il fenomeno esaminato non è più statico ma dipende dal tempo. Nel nostro caso l'illusione di Ebbinghaus dinamica si può osservare qui: <https://www.youtube.com/watch?v=hR1Wqfd5pn8>.

Dobbiamo quindi estendere il modello visto finora al caso dinamico.

Consideriamo quindi una partizione $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ del nostro intervallo di tempo $[0, T]$ e andiamo ad esaminare come varia il nostro modello ad un tempo generico t_i per $i > 1$.

Come abbiamo visto il cervello è in grado di memorizzare le informazioni date dalle immagini ai tempi precedenti. Di conseguenza il modello al tempo t_i dipenderà da t_j per ogni $j = 1, \dots, i$. Per comprendere meglio ciò che stiamo facendo possiamo raffigurare i punti dello spazio corticale attraverso le coordinate polari (s_i, θ_i) e successivamente raffigurare il nostro modello su un piano cartesiano: i tempi t_i sulle ordinate e le s_i sulle ascisse.

Nel modello statico la deformazione è dovuta solamente agli induttori presenti nell'immagine al tempo fissato, vedi Figura 2.7(a). Diversamente nel modello dinamico la deformazione è causata sia dagli induttori presenti nell'immagine al tempo fissato ma anche dagli induttori presenti nelle immagini precedenti, vedi Figura 2.7(b). Quindi se per esempio il cerchio centrale è circondato da cerchi più piccoli e se questi cerchi erano ancora più piccoli ai tempi precedenti allora il target centrale sembrerà ancora più grande. Viceversa se il cerchio centrale è circondato da cerchi più grandi e se questi cerchi erano ancora più grandi ai tempi precedenti allora il target centrale sembrerà ancora più grande.

Quello che faremo sarà quindi considerare un tempo fissato t_i e estendere la formula trovata per la deformazione al caso in cui la deformazione dipenda anche dagli induttori ai tempi precedenti a t_i . La nuova metrica verrà quindi espressa come:

$$\mathbf{p} = \| a(x, f, t) \| Id$$

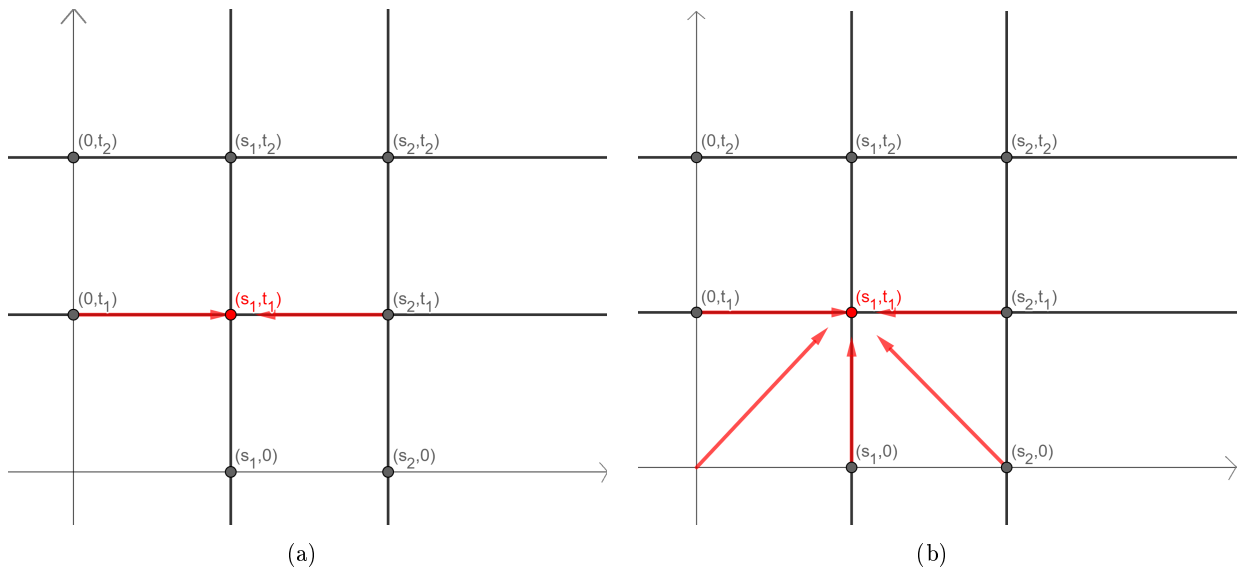


Figura 2.7: A sinistra: grafico del modello statico. A destra: grafico del modello dinamico.

In questa tesi troveremo esplicitamente solo la deformazione dell'illusione ottico geometrica statica; per l'illusione ottico geometrica dinamica considereremo solamente la formula dell'azione della connettività a .

Il problema che si pone ora è quello di trovare la deformazione indotta dalla nuova metrica \mathbf{p} nel caso statico, ma prima risulta necessario approfondire il concetto di metrica Riemanniana.

Capitolo 3

Metriche Riemanniane e deformazioni

In questo capitolo richiamiamo la nozione di metrica Riemanniana seguendo la presentazione di [5]. Applichiamo questa deformazione al modello di corteccia, studiando la deformazione indotta dallo stimolo. Questa dà luogo ad un sistema di equazioni differenziali che generalizza la condizione di Cauchy Riemann.

3.1 Metriche Riemanniane

Definizione 1 (Metrica Riemanniana).

Una metrica Riemanniana su una varietà differenziabile M è data da un prodotto scalare su ogni spazio tangente T_pM che dipende in modo continuo dal punto base p . Una varietà Riemanniana è una varietà differenziabile munita di una metrica Riemanniana

Per capire meglio il concetto di metrica Riemanniana, abbiamo bisogno di studiare la rappresentazione in coordinate locali.

Siano quindi $x = (x_1, \dots, x_d)$ coordinate locali. Con queste coordinate, una metrica è rappresentata da una matrice simmetrica e definita positiva:

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$$

in cui i coefficienti g_{ij} dipendono in modo continuo da x . Si avrà quindi: $g_{ij} = g_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, d$ e $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0 \quad \forall \xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \neq 0$.

Il prodotto di due vettori tangenti $v, w \in T_pM$ di coordinate $v = (v^1, \dots, v^d) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $w = (w^1, \dots, w^d) = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ è quindi

$$\langle v, w \rangle := g_{ij}(x(p))v^i w^j \quad (3.1)$$

In particolare, $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = g_{ij}$.

Allo stesso modo, la lunghezza del vettore v è data da:

$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Ora vogliamo studiare il comportamento della metrica nel cambio di coordinate. Sia $y = f(x)$ un cambio di coordinate locali. In queste coordinate si avrà $v = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^d)$ e $w = (\tilde{w}^1, \dots, \tilde{w}^d)$

con $\tilde{v}^j = v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$, $\tilde{w}^j = w^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$. Sia $h_{kl}(y)$ la metrica nelle nuove coordinate. Segue che:

$$h_{kl}(f(x))\tilde{v}^k\tilde{w}^l = \langle v, w \rangle = g_{ij}(x)v^i w^j, \quad (3.2)$$

Quindi:

$$h_{kl}(f(x))\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j}v^i w^j = g_{ij}(x)v^i w^j,$$

e, poichè questo vale per ogni v, w vettori tangenti, si ottiene:

$$h_{kl}(f(x))\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j} = g_{ij}(x). \quad (3.3)$$

Esempio 1.

L'esempio più semplice di metrica Riemanniana è la metrica Euclidea. Per $v = (v^1, \dots, v^d)$, $w = (w^1, \dots, w^d) \in T_x \mathbb{R}$, il prodotto scalare Euclideo è semplicemente:

$$\delta_{ij}v^i w^j = v^i w^j,$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

è il simbolo di Kronecker standard.

Sia ora $[a, b]$ un intervallo chiuso di \mathbb{R} , $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva di classe C^∞ . La lunghezza di γ è definita come

$$L(\gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| dt$$

Questa espressione può essere scritta in coordinate locali. Lavorando con le coordinate $(x^1(\gamma(t)), \dots, x^d(\gamma(t)))$ usiamo l'abbreviazione

$$\dot{x}^i(t) := \frac{d}{dt}(x^i(\gamma(t))).$$

Quindi:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\gamma(t)))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)} dt$$

Ricordiamo inoltre che la lunghezza di una curva continua e regolare a tratti può essere definita come la somma delle lunghezze dei tratti regolari.

Su una varietà Riemanniana M , definiamo la *distanza* tra due punti p, q come:

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ curva regolare a tratti con } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

Vogliamo dimostrare che la distanza appena definita è in effetti una distanza. Per cominciare vediamo che la definizione data è ben posta, cioè che, dati comunque due punti $p, q \in M$, essi possono sempre essere connessi da una curva regolare a tratti. Sia

$$E_p = \{q \in M : p \text{ e } q \text{ possono essere connessi da una curva regolare a tratti}\}$$

Con l'aiuto della coordinate locali si vede facilmente che E_p è aperto. D'altra parte anche $M \setminus E_p = \bigcup_{q \notin E_p} E_q$ è aperto. Siccome M è connesso e $E_p \neq \emptyset$ ($p \in E_p$) concludiamo che $M = E_p$.

Dimostriamo infine che la definizione data soddisfa le proprietà della distanza:

Lemma 1.

$$(i) \quad d(p, q) \geq 0 \quad \forall p, q \in M \quad \text{e} \quad d(p, q) > 0 \quad \forall p \neq q$$

$$(ii) \quad d(p, q) = d(q, p)$$

$$(iii) \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) \quad \forall p, q, r \in M \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

Dimostrazione. (ii) e (iii) sono ovvie. Per (i) dobbiamo mostrare solamente che $d(p, q) > 0$ per $p \neq q$. Sia quindi $x : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una parametrizzazione con $p \in U$. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$D_\varepsilon(x(p)) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x(p)| \leq \varepsilon \cap x(U)\}$$

e

$$q \neq x^{-1}(D_\varepsilon(x(p))) \tag{3.4}$$

Sia $(g_{ij}(x))$ la matrice che rappresenta la metrica nella nostra parametrizzazione. Siccome $(g_{ij}(x))$ è definita positiva e regolare, quindi continua in x e $D_\varepsilon(x(p))$ è compatto, esiste $\lambda > 0$ tale che

$$g_{ij}(y)\xi^i\xi^j \geq \lambda |\xi|^2 \tag{3.5}$$

per ogni $y \in D_\varepsilon(x(p))$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbb{R}^d$. Quindi, per ogni curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tale che $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$

$$L(\gamma) \geq L(\gamma \cap x^{-1}(D_\varepsilon(x(p)))) \geq \lambda\varepsilon > 0, \tag{3.6}$$

poichè $x(\gamma)$ da (3.4) deve contenere un punto $z \in \partial D_\varepsilon(x(p))$, quindi un punto la cui distanza Euclidea da $x(p)$ è ε . Da (3.5), z è distante da $x(p)$ almeno $\lambda\varepsilon$, in funzione di g_{ij} .

3.2 Trovare la deformazione

L'azione congiunta della connettività neurale a lungo e corto raggio, descritta nel capitolo 2, induce un tensore Riemanniano \mathbf{p}^{-1} sul piano retinale \mathbb{R}^2 .

A questo punto la questione matematica è come ricostruire la deformazione partendo dal tensore di deformazione \mathbf{p} . Pensiamo alla deformazione indotta da un'illusione ottico geometrica come ad una mappa da \mathbb{R}^2 con la metrica \mathbf{p} a \mathbb{R}^2 con la metrica Euclidea \mathbf{Id} :

$$\phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{Id})$$

Dal punto di vista matematico questo significa che stiamo cercando il cambio di coordinate indotto dalla nuova metrica, quindi:

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} Id_{kl} \frac{\partial \phi^l}{\partial x_j} = p_{ij}(x)$$

con $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ottenendo la relazione:

$$\mathbf{p}(x) = (\nabla\phi)^T(\nabla\phi) \quad (3.7)$$

Notiamo che \mathbf{p}^{-1} corrisponde a ϕ^{-1} , la mappa che rappresenta il processo che costruisce la connettività neurale modulata (di cui abbiamo parlato prima). In teoria della deformazione \mathbf{p} che soddisfa (3.7) è detto *tensore di Cauchy-Green destro* associato alla deformazione ϕ . Dal punto di vista fisico $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una mappa che associa i punti della chiusura di un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (configurazione iniziale del corpo) a $\phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ (configurazione deformata). È possibile definire la deformazione come una mappa

$$\bar{u}(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2) - (x_1, x_2)$$

dove $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Segue quindi

$$\nabla\bar{u} = \nabla\phi - Id.$$

Possiamo ora esprimere il tensore di Cauchy-Green destro in funzione della deformazione:

$$\mathbf{p} = p_{ij}(x) = (\nabla\phi)^T(\nabla\phi) = (\nabla\bar{u} + Id)^T(\nabla\bar{u} + Id) = (\nabla\bar{u})^T(\nabla\bar{u}) + (\nabla\bar{u}) + (\nabla\bar{u})^T + Id$$

Uno dei tensori di deformazione per grandi deformazioni è il così detto *tensore di deformazione di Green-Lagrange* o *tensore di deformazione di Green-Saint Venant* ed è definito come:

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - Id) = \frac{1}{2}((\nabla\phi)^T(\nabla\phi) - Id).$$

Può essere anche scritto in funzione della deformazione e risulta:

$$E(\bar{u}) = \frac{1}{2}((\nabla\bar{u}) + (\nabla\bar{u})^T + (\nabla\bar{u})^T(\nabla\bar{u}))$$

Per *deformazioni infinitesimali* di un corpo continuo, in cui il gradiente della deformazione è piccolo ($\|\nabla\bar{u}\| \ll 1$), è possibile operare una linearizzazione geometrica del tensore di deformazione appena introdotto, in cui vengono trascurati i termini non lineari del secondo ordine. Il *tensore di Green-Saint Venant linearizzato* che ne risulta ha la seguente forma:

$$E(\bar{u}) \approx \epsilon(\bar{u}) = \frac{1}{2}((\nabla\bar{u}) + (\nabla\bar{u})^T).$$

Nel caso generale $\epsilon(\bar{u})$ si esprime in componenti come:

$$\epsilon_{ij}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}) & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

dove $\bar{u} = (u, v)$. Esprimendo ϵ_{ij} in funzione della metrica $(p_{ij})_{i,j}$ di cui è stato fornito inizialmente il corpo, otteniamo:

$$E = \frac{1}{2}((p_{ij})_{ij} - Id) \approx \epsilon_{ij}(\bar{u}),$$

in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1}) & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Poichè noi analizziamo solamente il caso isotropico, la metrica \mathbf{p} verrà semplificata ed espressa come:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

in cui abbiamo indicato con a il valore $a = \| a(x, f) \|$.

Partendo da (3.8) e da (3.9) si ottiene:

$$\begin{cases} p_{11} - 1 = a - 1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ p_{22} - 1 = a - 1 = \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ p_{12} = p_{21} = 0 = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_2} u + \frac{\partial}{\partial x_1} v) \end{cases} \quad (3.10)$$

Da (3.10) si trova facilmente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{cases} \quad (3.11)$$

Ovvero \bar{u} soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.

Nel prossimo capitolo analizzeremo meglio le conseguenze di questo risultato ma per il momento ci limitiamo a notare che differenziando il sistema (3.10) otteniamo:

$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial u}{\partial x_2}) = \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial v}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-\frac{\partial v}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_1 x_2} - \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_2 x_1} = 0 \\ \nabla v &= \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial v}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial v}{\partial x_2}) = \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}(-\frac{\partial u}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial u}{\partial x_1}) = -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1 x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2 x_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vediamo ora alcune nozioni importanti che ci permetteranno di fare ulteriori osservazioni sulla deformazione \bar{u} .

3.3 Funzioni olomorfe

La condizione di Cauchy Riemann richiamata in (??) ha un ruolo fondamentale nello studio delle funzioni complesse, quindi vogliamo ora studiare le funzioni complesse definite in aperti del piano complesso.

Sarà utile adottare le seguenti notazioni:

Se $r > 0$ e $a \in \mathbb{C}$,

$$D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$$

è il disco aperto con centro a e raggio r . $\bar{D}(a, r)$ è la chiusura di $D(a, r)$ e

$$D'(a, r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$$

è il disco puntato centrato in a di raggio r .

Definizione 2 (funzione olomorfa).

Sia f una funzione definita in $\Omega \in \mathbb{C}$ aperto. Se $z_0 \in \Omega$ e esiste

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.13)$$

definiamo (3.13) la derivata di f in z_0 e la denotiamo con $f'(z_0)$.

Se $f'(z_0)$ esiste per ogni $z_0 \in \Omega$ diciamo che f è olomorfa (o analitica) in Ω . $H(\Omega)$ denoterà la classe delle funzioni olomorfe in Ω .

Per essere più espliciti, $f'(z_0)$ esiste se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{per ogni } z \in D'(z_0; \delta). \quad (3.14)$$

Quindi $f'(z_0)$ è un numero complesso ottenuto come quoziente di numeri complessi.

Notiamo che se $f \in H(\Omega)$ e $g \in H(\Omega)$ allora anche $f + g \in H(\Omega)$ e $fg \in H(\Omega)$ e quindi $H(\Omega)$ è un anello; valgono le usuali regole di differenziazione.

Più interessante è il fatto che la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa. Se $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega_1$, $g \in H(\Omega_1)$ e $h = g \circ f$ allora $h \in H(\Omega)$ e h' si trova con la regola della catena:

$$h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0) \quad (z_0 \in \Omega)$$

Per provarlo, fissiamo $z_0 \in \Omega$ e poniamo $\omega_0 = f(z_0)$. Allora si ha:

$$f(z) - f(z_0) = [f'(z_0) + \epsilon(z)](z - z_0) \quad (3.15)$$

$$g(\omega) - g(\omega_0) = [g'(\omega_0) + \eta(\omega)](\omega - \omega_0) \quad (3.16)$$

dove $\epsilon(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow z_0$ e $\eta(\omega) \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \omega_0$. Ponendo $\omega = f(z)$ e sostituendo (3.15) in (3.16), se $z \neq z_0$,

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = [g'(f(z_0)) + \eta(f(z))][f'(z_0) + \epsilon(z)]. \quad (3.17)$$

Pochè f è differenziabile allora è continua in z_0 . Di conseguenza (3.3) segue da (3.17).

Esempio 2. Per $n = 0, 1, 2, \dots$, z^n è olomorfa su \mathbb{C} e lo stesso vale per ogni polinomio in z . Si verifica facilmente che $1/z$ è olomorfa in $\{z : z \neq 0\}$. Quindi, prendendo $g(\omega) = 1/\omega$ nella regola della catena, vediamo che se $f_1, f_2 \in H(\Omega)$ e $\Omega_0 \subset \Omega$ è un aperto tale f_2 non abbia zeri in Ω_0 allora $f_1/f_2 \in H(\Omega_0)$.

Un altro esempio di una funzione olomorfa su tutto il piano (tali funzioni sono dette intere) è la funzione esponenziale. Infatti, l'esponenziale è differenziabile per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $(e^z)' = e^z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Supponiamo ora che f sia una funzione complessa definita su $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Consideriamo f come una funzione che rappresenta Ω in \mathbb{R}^2 e supponiamo che f abbia il differenziale in qualche punto $z_0 \in \Omega$. Per semplicità, supponiamo $z_0 = f(z_0) = 0$. La nostra ipotesi di differenziabilità è equivalente all'esistenza di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (le derivate parziali di f in $z_0 = 0$ rispetto a x e a y) tali che:

$$f(z) = \alpha x + \beta y + \eta(z)z \quad (z = x + iy) \quad (3.18)$$

dove $\eta(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow 0$.

Poichè $2x = z + \bar{z}$ e $2iy = z - \bar{z}$, (3.18) può essere riscritta nella forma:

$$f(z) = \frac{\alpha - i\beta}{2}z + \frac{\alpha + i\beta}{2}\bar{z} + \eta(z)z \quad (3.19)$$

Questa forma suggerisce di introdurre i seguenti operatori differenziali:

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (3.20)$$

In questo modo (3.19) diventa:

$$\frac{f(z)}{z} = (\partial f)(0) + (\bar{\partial} f)(0) \cdot \frac{\bar{z}}{z} + \eta(z) \quad (z \neq 0) \quad (3.21)$$

Se $z \in \mathbb{R}$ si ha $\frac{\bar{z}}{z} = 1$; se $z \in \mathbb{C}$ si ha $\frac{\bar{z}}{z} = -1$ quindi $\frac{f(z)}{z}$ ha limite a 0 se e solo se $(\bar{\partial} f)(0) = 0$. Otteniamo quindi la seguente caratterizzazione delle funzioni olomorfe:

Teorema 1. *Sia f una funzione complessa in Ω tale che f sia differenziabile in ogni punto di Ω . Allora $f \in H(\Omega)$ se e solamente se vale la condizione di Cauchy Riemann:*

$$(\bar{\partial})(z) = 0 \quad (3.22)$$

per ogni $z \in \Omega$. In questo caso abbiamo:

$$f'(z) = (\partial f)(z) \quad (z \in \Omega). \quad (3.23)$$

Se $f = u + iv$, con u e v reali, (3.22) si separa nella coppia di equazioni:

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x \quad (3.24)$$

dove u_x, v_x e u_y, v_y indicano le derivate parziali di u e v rispettivamente rispetto a x e a y .

Queste sono le equazioni di Cauchy Riemann che devono essere soddisfatte sia dalla parte reale che dalla parte immaginaria di una funzione olomorfa, e sono esattamente (??).

Definizione 3. *Sia f una funzione complessa definita su $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto tale che per ogni $z \in \Omega$ esistano f_{xx} e f_{yy} . Il Laplaciano di f è definito come:*

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad (3.25)$$

Se f è continua in Ω e vale:

$$\Delta f = 0 \quad (3.26)$$

in ogni punto di Ω , allora f è detta armonica in Ω .

Poichè il Laplaciano di una funzione reale è reale (se esiste), è chiaro che *una funzione complessa è armonica in Ω se e solamente se sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria sono armoniche in Ω* :

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Notiamo che:

$$\Delta f = 4\bar{\partial}\partial f \tag{3.27}$$

se $f_{xy} = f_{yx}$, e questo accade per ogni f che ha le derivate seconde continue.

Se f è olomorfa, allora $\bar{\partial} = 0$ e f ha le derivate di ogni ordine continue, di conseguenza (3.27) mostra che:

Teorema 2. *Le funzioni olomorfe sono armoniche.*

3.4 Osservazioni sulla deformazione

Tornando quindi al sistema (3.10) e differenziando otteniamo:

$$\begin{cases} \nabla u = 0 \\ \nabla v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = a - 1 \end{cases} \tag{3.28}$$

Questo ci dice che sia u che v sono armoniche.

È possibile dimostrare che anche $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}$ è armonica e di conseguenza si ha che

$$a = 1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

è armonica.

Infatti a è costante in ciascuna delle regioni che si considerano e quindi è armonica.

Ci interessa però il variare di a al variare della regione considerata: questo effetto è stato trascurato al momento della linearizzazione.

Nella Figura 3.1 è illustrata l'illusione di Ebbinghaus con sei induttori, il coefficiente (u, v) e l'induttore centrale dopo la deformazione [1].

Nel prossimo capitolo analizzeremo l'azione della connettività nel caso in cui il modello sia statico e nel caso in cui il modello sia dinamico, definendo la funzione a e giustificando le illusioni.

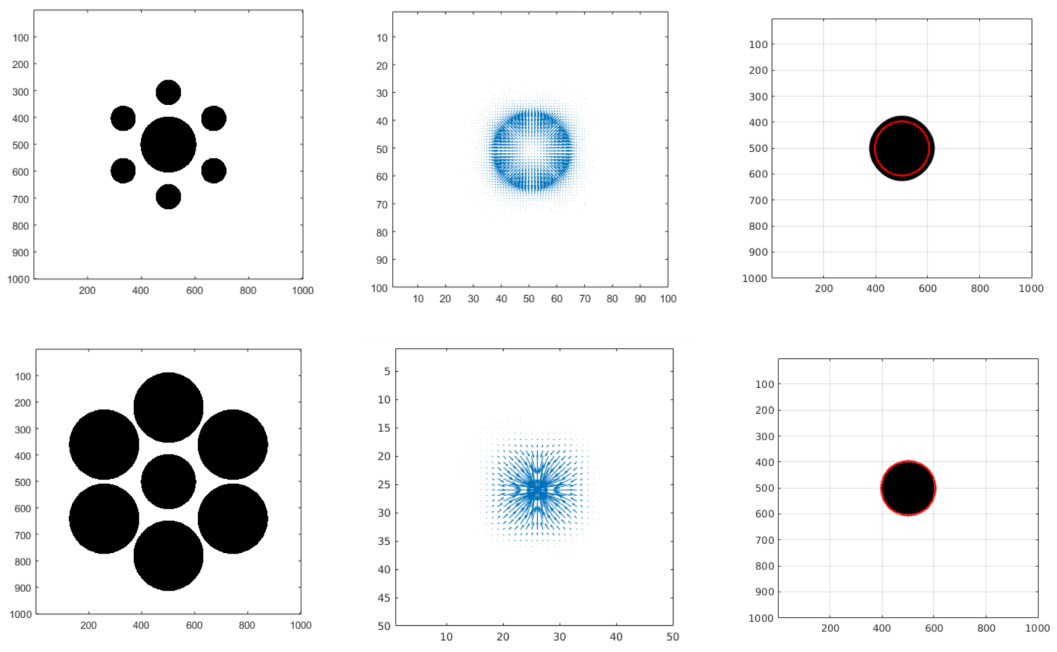


Figura 3.1: Illusione di Ebbinghaus [1]

Capitolo 4

Illusioni di scala dipendenti dal tempo

Estendiamo il modello al caso dipendente dal tempo.

Se una famiglia di cellule è stata descritta in $\mathbb{R}^2 \times F$, con una metrica g_F e nucleo della connettività K_F , il problema è quello di descrivere l'azione della connettività che induce l'attività corticale. Può essere descritta con un'equazione di campo medio, la cui formulazione generale ha la seguente espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} a(x, t) = -a(x, t) + \int K_f(x - x', f - f') \psi(a(x', f', t')) + O(x', f') - C dx' df'$$

dove ψ è una funzione sigmoide e C è un fattore di normalizzazione. L'equazione nel caso generale può essere risolta e l'equazione stazionaria associata soddisfa:

$$a(x, t) = \int K_f(x - x', f - f') \psi(a(x', f', t')) + O(x', f') - C dx' df' \quad (4.1)$$

Vediamo ora come trovare l'azione della connettività nel caso in cui il modello sia statico, ovvero non dipenda dal tempo.

Abbiamo visto che nel caso di illusioni ottico geometriche dovute alla scala possiamo considerare una metrica isotropica sullo spazio; di conseguenza g_f è semplicemente l'identità e la metrica diventa:

$$\mathbf{p} = \| a(x, f) \| Id$$

Di conseguenza, il nucleo della connettività sarà una funzione che decade con la distanza Euclidea tra gli oggetti che compongono lo stimolo:

$$K_F(x - x') = \exp^{-c|x-x'|}$$

L'interazione a lungo raggio decade quando la distanza spaziale tra le cellule decresce. In analogia con l'equazione (4.1), l'equazione stazionaria verrà espressa come il prodotto tra il nucleo della connettività e la dimensione trovata degli oggetti:

$$a(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp^{-c|x-x'|} (a(x') - \rho_0) dx' \quad (4.2)$$

dove ρ_0 è un termine di normalizzazione globale che denota la *dimensione effettiva* dell'oggetto. Poichè siamo interessati a valutare la deformazione del cerchio centrale, scegliamo $\rho_0 = \rho(0)$, così che ρ_0 rappresenti la dimensione effettiva del cerchio centrale. Notiamo che la soluzione trovata per l'azione della connettività a è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Vediamo quindi come si trova questa soluzione fondamentale.

4.1 Soluzione fondamentale dell'equazione del calore

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.3)$$

Supponiamo di fissare la variabile t e facciamo la trasformata di Fourier nella sola variabile x :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\omega^2 \hat{u} & \omega \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) & \omega \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.4)$$

Ora pensiamo che sia invece fissata la variabile ω e consideriamo questa come un'equazione nella sola variabile t . La soluzione sarà

$$\hat{u} = \hat{f} e^{-\omega^2 t}$$

Sappiamo inoltre che:

$$e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}} = \mathcal{F} \left(\frac{|c|}{\sqrt{\pi}} e^{-(cx)^2} \right) (\omega)$$

Pertanto scegliendo $c = \frac{1}{\sqrt{4t}}$ si ottiene

$$\hat{u} = \hat{f} \mathcal{F} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \mathcal{F} \left(f * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right).$$

Ne segue che

$$u = f * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Definizione 4. La funzione $\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ si dice *soluzione fondamentale dell'equazione del calore*

Teorema 3. La soluzione fondamentale ha il seguente comportamento:

- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x, t) = 0$ se $x \neq 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x, t) = +\infty$ se $x = 0$
- $(\partial_t - \partial_{xx})\Gamma(x, t) = 0$ per $t > 0$

- $\int \Gamma(x, t) dx = 1$ per ogni t

Dimostrazione:

Verifichiamo la prima. Supponiamo infatti che $x \neq 0$. L'argomento dell'esponenziale che definisce Γ tende a $+\infty$ per $t \rightarrow 0$. Quindi

$$e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow 0$$

per $t \rightarrow 0$. E siccome l'esponenziale tende a 0 più velocemente del polinomio al denominatore risulta che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x, t) = 0 \quad x \neq 0.$$

Consideriamo la seconda condizione. Per $x = 0$ l'espressione di Γ diventa

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \rightarrow +\infty$$

per $t \rightarrow 0$.

La condizione

$$(\partial_t - \partial_{xx})\Gamma(x, t) = 0$$

per $t > 0$ è una verifica diretta.

Consideriamo l'ultima condizione:

$$\int \Gamma(x, t) dx = \int \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dx =$$

con il cambio di variabile $y = \frac{x}{2\sqrt{t}}$

$$\int \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1.$$

Si può infine dimostrare il seguente:

Teorema 4.

$\Gamma(x, t)$ soddisfa il problema dato. Ovvero:

- $u_t = u_{xx} \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$

Osserviamo esplicitamente che il problema della diffusione del calore si può studiare anche in \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

In questo caso la soluzione fondamentale si scrive nella forma

$$\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}$$

e la soluzione si scriverà

$$u * \Gamma,$$

dove la convoluzione è da intendersi in \mathbb{R}^n .

Consideriamo ora su tutto lo spazio un problema diverso, ovvero la diffusione del calore in presenza di una sorgente g

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Supponiamo di fissare la variabile t e facciamo la trasformata di Fourier nella sola variabile x :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\omega^2 \hat{u} + \hat{g} & \omega \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ \hat{u}(\omega, 0) = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ora pensiamo che sia invece fissata la variabile ω e consideriamo questa come un'equazione differenziale nella sola variabile t . Portiamo tutta la dipendenza da u a primo membro:

$$\hat{u}_t + \omega^2 \hat{u} = \hat{g}$$

La soluzione si cerca con il metodo del fattore integrante. Il fattore integrante è in questo caso $e^{\omega^2 t}$ quindi moltiplicando per questo fattore si ha

$$\hat{u}_t e^{\omega^2 t} + \omega^2 \hat{u} e^{\omega^2 t} = \hat{g} e^{\omega^2 t}$$

Al primo membro viene la derivata di un prodotto:

$$\frac{d}{dt} (\hat{u} e^{\omega^2 t}) = \hat{g} e^{\omega^2 t}$$

Integriamo

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} (\hat{u} e^{\omega^2 \tau}) = \int_0^t \hat{g}(\omega, \tau) e^{\omega^2 \tau} d\tau$$

Quindi

$$\hat{u} = \int_0^t \hat{g}(\omega, \tau) e^{-\omega^2(t-\tau)}$$

Ricordiamo che

$$e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}} = \mathcal{F} \left(\frac{|c|}{\sqrt{\pi}} e^{-(cx)^2} \right) (\omega)$$

Pertanto scegliendo $c = \frac{1}{\sqrt{4(t-\tau)}}$ si ottiene

$$\hat{u} = \int_0^t \hat{g}(\omega, \tau) \mathcal{F} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \right) =$$

E quindi, antitrasformando

$$u = \int_0^t g *_{x} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(y, \tau) \Gamma(x-y, t-\tau) dy d\tau$$

La funzione g e la soluzione fondamentale sono definite solo per valori positivi del tempo. Possiamo pensare che siano nulle, per valori del tempo negativi. Quindi se $\tau < 0$, $g(\omega, \tau) = 0$, se $\tau > t$, $\Gamma(x - y, t - \tau) = 0$. Quindi la soluzione si scrive

$$u = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(y, \tau) \Gamma(x - y, t - \tau) dy d\tau = g *_{\mathbb{R}^2} \Gamma$$

Anche in questo caso vale il seguente

Teorema 5.

La soluzione trovata soddisfa il problema, ovvero se $g \in C_0^\infty$, allora

$$u_t - u_{xx} = g \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

Consideriamo infine il problema del calore con dato iniziale e sorgenti. Consideriamo quindi il problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Indichiamo con u_1 la soluzione del problema con dato iniziale diverso da 0:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$u_1 = \Gamma_{\mathbb{R}} f$$

Indichiamo con u_2 la soluzione con dato iniziale nullo e con una sorgente:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$u_2 = \Gamma_{\mathbb{R}^2} g$$

Consideriamo ora la funzione

$$u = u_1 + u_2$$

Questa verifica

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_{xx})u = (\partial_t - \partial_{xx})u_1 + (\partial_t - \partial_{xx})u_2 = g & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quindi u è la soluzione del problema completo e si rappresenta

$$u = \Gamma_{\mathbb{R}} f + \Gamma_{\mathbb{R}^2} g$$

4.2 Osservazioni sul modello dipendente dal tempo

Come abbiamo osservato, nel modello statico a è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore:

$$a(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp^{-c|x-x'|} (a(x') - \rho_0) dx'$$

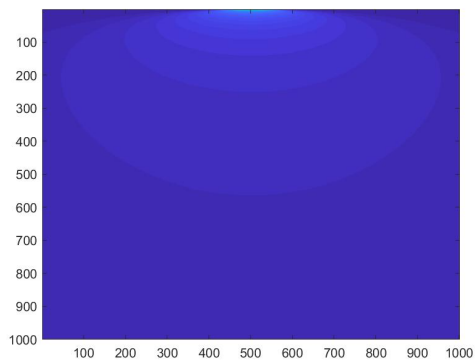
dove ρ_0 è un termine di normalizzazione globale che denota la dimensione effettiva dell'oggetto. Poichè siamo interessati a valutare la deformazione del cerchio centrale, scegliamo $\rho_0 = \rho(0)$, così che ρ_0 rappresenti la dimensione effettiva del cerchio centrale.

Notiamo che nel caso in cui il modello sia dinamico, la funzione $a = a(x, f)$ dipende anche dal tempo, poichè la deformazione percepita è diversa a tempi diversi. Quindi sarà $a = a(x, f, t)$ e la soluzione diventerà:

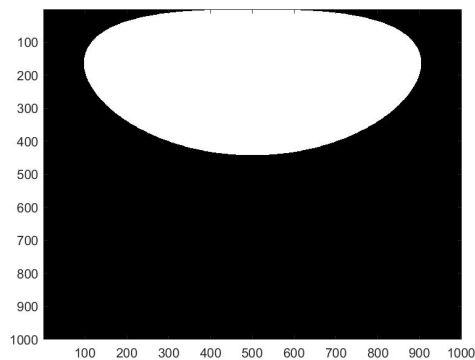
$$a(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\exp^{-c\left(\frac{|x-x'|}{|t-t'|}\right)}}{t-t'} (a(x', t') - \rho_0) dx' dt'$$

Con la condizione che $t - t' > 0$, ovvero $t' < t$, il che conferma il fatto che il dato per calcolare a deve essere preso dal passato.

Gli insiemi di livello della soluzione fondamentale dell'equazione del calore hanno la seguente forma:



(a) Visualizzazione di $\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$



(b) $\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} > 1$

realizzando il modello cercato.

Bibliografia

- [1] B.Franceschiello, A.Sarti, G.Citti: *A neuro-mathematical model for size and context related illusions*. arXiv preprint arXiv:1908.10162 (2019)
- [2] B.Franceschiello, A.Sarti, G.Citti: *A neuro-mathematical model for geometrical optical illusions*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **60**(1), 94-108 (2018)
- [3] M.Koeppen, A.Stanton: *Berne & Levy Phisiology*, Seventh Edition. Elsevier (2017)
- [4] C.W.G. Clifford, M.R. Ibbotsom: *Fundamental mechanisms of visual motion detection: models, cells and functions*. Progress in Neurobiology **68**(6), 409-437 (2003)
- [5] J.Jürgen: *Riemannian geometry and geometric analysis*, Fifth edition. Springer (2008)
- [6] W.Rudin: *Real and complex analysis*, Third edition. McGraw-Hill Education (1986)
- [7] G.Citti: *Equazione del calore su tutto lo spazio*.
<http://www.dm.unibo.it/citti/html/AnalisiLS/esercizi/appunti5.pdf>
- [8] Opperl,J.J: *Uber geometrisch-optische tauschungen*. Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt am Main, (1855)
- [9] Hering,H.E.: *Beiträge zur physiologie*. 1-5. Leipzig, W.Engelmann, (1861)
- [10] Hoffman, W.C.: *Visual illusions of angle as an application of Lie transformation groups*. Siam Review **13**(2), 169-184 (1971)
- [11] Smith, D.A.: *A descriptive model for perception of optical illusions*. Journal of Mathematical Psychology **17**(1), 64-85 (1978)
- [12] Walker, E.H.: *A mathematical theory of optical illusions and figural aftereffects*. Perception& Psychophysics **13**(3), 467-486 (1973)
- [13] Hubel, D.H., Wiesel, T.N.: *Ferrier lecture: Functional architecture of macaque monkey visual cortex*. Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences **198**(1130), 1-59 (1977)
- [14] Ehm, W., Wackermann, J.: *Modelling geometric-optical illusions: A variational approach*. Journal of Mathematical Psychology **56**(6), 404-416 (2012)

- [15] Citti, G., Sarti, A.: *A cortical based model of perceptual completion in the roto-traslation space*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **24**(3), 307-326 (2006)
- [16] Hoffman, W.C.: *The visual cortex is a contact bundle*. Applied Mathematics and Computation **32**(2), 137-167 (1989)
- [17] Mumford, D.: *Elastica and computer vision*. In: Algebraic geometry and its applications, pp. 491-506. Springer (1994)
- [18] Petitot, J., V.F.P.B., Roy, J.M.: *Naturalizing phenomenology: Issues in contemporary phenomenology and cognitive science*. Stanford University Press (1999)
- [19] Sarti, A., Citti, G., Petitot, J.: *The symplectic structure of the primary visual cortex*. Biological Cybernetics **98**(1), 33-48 (2008)
- [20] Sarti, A., Citti, G., Petitot, J.: *Functional geometry of the horizontal connectivity in the primary visual cortex*. Journal of Physiology-Paris **103**(1), 37-45 (2009)
- [21] Williams, L.R., Jacobs, D.W.: *Stochastic completion fields: A neural model of illusory contour shape and salience*. Neural computation **9**(4), 837-858 (1997)