

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

VIAGGI SPAZIOTEMPORALI

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Lorenzo Stefani

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

In questo elaborato di tesi si trattano alcune delle varie tipologie di viaggio spaziotemporale che sono ammesse dalla teoria della relatività di Einstein.

In primo luogo si è analizzata la struttura locale e globale dello spaziotempo, esaminando le sue caratteristiche geometriche e fisiche. Si sono studiate la metrica di Minkowski e l'equazione di Einstein che governa l'interazione tra la densità di energia e impulso e la curvatura dello spaziotempo, la quale si manifesta come campo gravitazionale.

In secondo luogo, sono state prese in esame la soluzione di Schwarzschild e quella di Kerr, la struttura dei buchi neri e le tipologie di geodetiche corrispondenti. Di particolare rilevanza sono le curve chiuse di tipo tempo che emergono all'interno del buco nero di Kerr e il conseguente utilizzo come macchina del tempo.

Infine, si sono introdotti i concetti di cunicoli spaziotemporali, tra cui il ponte di Einstein-Rosen e il wormhole di Morris-Thorne, e la possibilità di attraversarli per raggiungere regioni lontane del nostro universo o un eventuale universo parallelo.

Indice

Introduzione	1
1 Geometria dello spaziotempo	2
1.1 Geometria locale	2
1.1.1 Lo spaziotempo di Minkowski	3
1.1.2 Tensore energia-impulso	5
1.2 Geometria globale	6
1.2.1 Curvatura dello spaziotempo	8
1.2.2 L'equazione di Einstein	12
2 Metriche e singolarità	15
2.1 Caratteristiche generali e tipologie	15
2.2 Metrica di Schwarzschild	18
2.3 Metrica di Kerr	23
3 Viaggi nello spaziotempo	28
3.1 Cunicoli spaziotemporali	28
3.1.1 Attraversabilità	29
3.1.2 Ponte di Einstein-Rosen	29
3.1.3 <i>Wormhole</i> di Morris-Thorne	31
3.2 Curve chiuse di tipo tempo	35
Conclusioni	37
Bibliografia	38

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è illustrare le varie tipologie di viaggio nello spaziotempo che si possono intraprendere, almeno a livello teorico. Per fare ciò occorre innanzitutto comprendere la struttura dello spaziotempo, descritta dalla Relatività Ristretta, nel caso di sistemi di riferimento locali e inerziali, e dalla Relatività Generale, per quanto riguarda i sistemi di riferimento globali. Tempo e spazio non sono assoluti, ma costituiscono un'unica varietà differenziabile quadridimensionale la cui geometria è influenzata dalla presenza di massa (in senso relativistico, ricordando che $E = mc^2$). Questa relazione è governata dalle equazioni di campo di Einstein, che legano la curvatura intrinseca dello spaziotempo alla densità di energia e impulso.

Per trattare la teoria, sarà necessario introdurre alcune nozioni matematiche di geometria differenziale, tra cui la connessione affine, il tensore di Riemann e l'equazione della geodetica. Verranno poi analizzate alcune soluzioni soddisfacenti l'equazione di Einstein nel vuoto, in particolare quella di Schwarzschild per una massa a simmetria sferica, e quella di Kerr, per un corpo massivo rotante.

Nell'ultimo capitolo, si espongono le caratteristiche dei cunicoli spaziotemporali, tra cui il ponte di Einstein-Rosen e il wormhole di Morris-Thorne, e le curve temporali chiuse, le quali permettono di viaggiare nel tempo e tornare ad eventi avvenuti nel passato. Per concludere, si studiano le condizioni per cui un wormhole può essere utilizzato per raggiungere regioni dell'universo distanti tra loro o addirittura un universo parallelo.

Capitolo 1

Geometria dello spaziotempo

In questo primo capitolo verrà analizzata la geometria generale dello spaziotempo, partendo da quella locale data dalla Relatività Ristretta per poi passare a quella globale, descritta dalla Relatività Generale.

Nella trattazione della teoria, gli indici dei tensori scritti con lettere greche assumeranno i valori 0, 1, 2, 3 che in un quadrivettore posizione corrispondono rispettivamente alle coordinate (ct, x, y, z) . Quando invece si considereranno le sole componenti spaziali, gli indici saranno scritti con lettere latine i cui valori saranno perciò ristretti a 1, 2, 3. Si farà uso della notazione di Einstein, che prevede la somma sugli indici ripetuti:

$$x_\mu y^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu y^\mu$$

Inoltre, per comodità si adotteranno le unità naturali per cui $G = c = 1$, che verranno per questo omesse tranne nei casi in cui sarà utile esplicitarle.

1.1 Geometria locale

Nel 1905, Einstein pubblicò la sua teoria della relatività per i sistemi di riferimento inerziali. La necessità di riformulare la meccanica nacque dalla richiesta di rendere covariante la teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell.

I principi su cui si fonda la Relatività Ristretta sono i seguenti due postulati di Einstein

Principio di relatività. *Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Principio di invarianza della velocità della luce. *La velocità della luce nel vuoto è costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Questi due principi modificano profondamente i concetti di spazio e tempo che si avevano precedentemente: da assoluti quali erano diventano strettamente dipendenti l'uno dall'altro, andando a costituire un'unica struttura quadridimensionale chiamata spaziotempo di Minkowski. La geometria di questo spazio è descritta dalla matrice metrica $\eta_{\mu\nu}$ che, per convenzione, ha segnatura $(-, +, +, +)$.

1.1.1 Lo spaziotempo di Minkowski

I punti dello spaziotempo di Minkowski sono indicati dai quadrivettori posizione x^μ , i quali racchiudono le coordinate spaziotemporali di un evento riferite ad un sistema di riferimento inerziale. Le trasformazioni di coordinate $\Lambda^\mu{}_\nu$ da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sono regolate dal gruppo di Lorentz: in particolare verrà considerato il suo sottogruppo proprio ortocrono $SO^+(3, 1)$. Si definisce *boost* di Lorentz la trasformazione seguente

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.1)$$

Per quanto riguardano le misure di tempo e spazio di un fenomeno, le trasformazioni di Lorentz hanno la caratteristica peculiare di dilatare i tempi e contrarre le lunghezze di un fattore relativistico $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ quando a misurarli è un osservatore in un sistema di riferimento inerziale che si muove con velocità v al fenomeno. Si definiscono tempo proprio e lunghezza propria i valori di tempo e lunghezza se misurati nel sistema solidale.

La distanza spaziotemporale tra due eventi è data dalla forma quadratica seguente:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2)$$

la quale risulta essere un invariante relativistico. Infatti, adoperando una trasformazione di coordinate come la (1.1) e ricordando che $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$, si ha che

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^\mu{}_\rho dx^\rho) (\Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma) \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = ds^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Considerando il sistema di riferimento solidale con il corpo, tale per cui $dx = dy = dz = 0$, si ricava un invariante equivalente a s , il tempo proprio τ

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} \quad (1.4)$$

Utilizzando quest'ultimo parametro, è possibile definire la quadrivelocità u^μ e il quadripulso p^μ come segue:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (1.5)$$

$$p^\mu = m u^\mu = (\gamma m c, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \gamma \vec{p} \right) \quad (1.6)$$

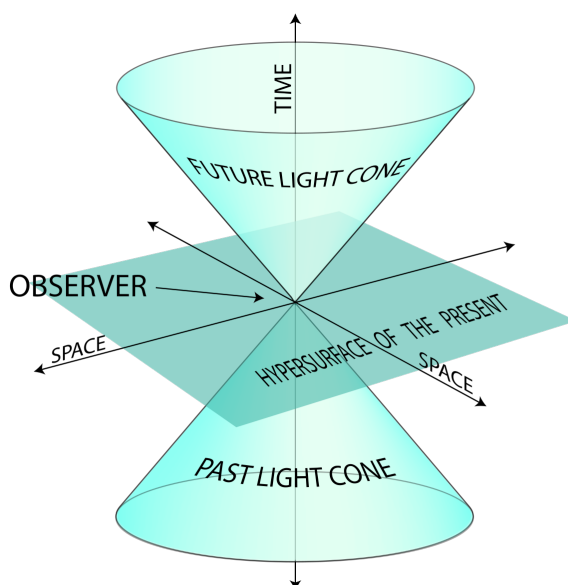


Figura 1.1: Cono luce di un osservatore nello spaziotempo di Minkowski. Si distingue un cono luce passato, che racchiude la regione dello spaziotempo da cui l'osservatore può ricevere segnali, e un cono luce futuro, che consiste nella regione dello spaziotempo che l'osservatore potrà influenzare.

da cui si ottiene che l'energia $E = \gamma mc^2$. Calcolando il modulo quadro del quadrimpulso $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$ si ricava la condizione di *mass-shell*:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.7)$$

Queste condizioni impongono dei limiti fisici sulla dinamica dei corpi: se dotati di massa, questi non potranno mai raggiungere la velocità della luce, tantomeno superarla. In un ipotetico viaggio interstellare, le cui distanze sono dell'ordine di diversi anni luce, la Relatività Ristretta e lo spaziotempo di Minkowski non permettono quindi di coprire tali distanze in tempi ragionevoli per l'uomo.

Prendendo in esame la distanza spaziotemporale tra due eventi (1.2), è immediato osservare che questa non sia definita positiva, a causa della metrica di Minkowski. Per questa ragione sarà necessario adottare la seguente nomenclatura:

- $ds^2 < 0$: distanza di tipo tempo;
- $ds^2 = 0$, distanza nulla o di tipo luce;
- $ds^2 > 0$, distanza di tipo spazio.

Il primo tipo di distanza caratterizza eventi distinti che possono essere connessi da traiettorie fisiche, ovvero cammini che possono essere percorsi con una velocità inferiore a quella della luce e quindi da corpi dotati di massa. Questa caratteristica rende tali traiettorie l'oggetto di maggiore interesse per la trattazione dei viaggi nello spaziotempo. Le distanze nulle invece contraddistinguono eventi che possono interagire solamente attraverso segnali che si propagano alla velocità della luce. Infine, le distanze di tipo spazio separano due eventi i quali non potranno comunicare in alcun modo.

L'invarianza della distanza ds rispetto alle trasformazioni di Lorentz fa sì che il suo valore non cambi da un sistema di riferimento inerziale ad un altro: la separazione di due eventi rimarrà di tipo tempo, spazio o luce rispetto a qualsiasi punto di osservazione. L'invarianza del tempo proprio $d\tau$ che deriva dalla definizione (1.4) è invece fondamentale per preservare il principio di causalità che governa i fenomeni fisici: due eventi separati temporalmente nel loro riferimento a riposo, eventualmente in relazione tra loro tramite un principio di causa-effetto, lo saranno in qualsiasi altro sistema di riferimento. Ciò che si perde è invece il concetto di simultaneità: due eventi simultanei in un sistema riferimento possono non esserlo in un altro.

Per visualizzare meglio la struttura causale dello spaziotempo di Minkowski si ricorre spesso al cono luce, illustrato in figura 1.1. L'insieme dei punti che sono connessi ad un evento tramite traiettorie nulle definiscono il suo cono luce. Al suo interno si avranno gli eventi passati e futuri raggiungibili fisicamente, mentre al suo esterno si raccolgono gli eventi con distanza di tipo spazio. In questo modo, è possibile visualizzare chiaramente quale porzione dello spaziotempo è accessibile ad un corpo che si trova nell'origine del sistema di riferimento. Considerando l'evoluzione del corpo, la sua traiettoria percorsa nello spaziotempo è chiamata linea di mondo (o di universo): la sua lunghezza è essenzialmente misurata in modo invariante dal tempo proprio e ad ogni suo punto corrisponde un nuovo cono luce.

1.1.2 Tensore energia-impulso

Prendendo in esame un sistema fisico costituito da più di una singola particella, è possibile concepirlo come un fluido caratterizzato da proprietà macroscopiche, quali ad esempio densità e pressione. Per ottenere una sua descrizione relativistica, si introduce il *tensore energia-impulso* $T^{\mu\nu}$ definendolo come il flusso di quadrimpulso p^μ attraverso la superficie data da x^ν costante. Così facendo, si ha che la componente T^{00} rappresenta il flusso di energia p^0 nella direzione x^0 (il tempo), ovvero la densità di energia ρ . Analogamente, la densità di impulso è data dalle $T^{0i} = T^{i0}$. Le componenti spaziali T^{ij} sono il flusso di impulso, o *stress*, che rappresentano le forze tra elementi infinitesimali del fluido adiacenti. I termini fuori dalla diagonale di T^{ij} sono gli sforzi di taglio, dovuti alla viscosità, mentre gli elementi della diagonale danno la componente della pressione $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ tali che

$$p_i = T^{ii} \quad (1.8)$$

dove non si effettua la somma degli indici ripetuti.

Se adesso si considera un sistema costituito da una collezione di particelle di massa m a riposo, chiamata *polvere*, si definisce il quadrivettore flusso di numero

$$N^\mu = nU^\mu \quad (1.9)$$

dove n è la densità di numero delle particelle misurata nel sistema di riferimento a riposo, nel quale la densità di energia della polvere è data da

$$\rho = mn \quad (1.10)$$

A questo punto è possibile notare che n e m sono le 0-componenti di quadrivettori nel sistema a riposo; in particolare, $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$ e $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Pertanto, la densità di energia ρ è la 0-componente del tensore $p \otimes N$ misurata nel suo sistema a riposo.

È possibile generalizzare la polvere costruendo il modello di *fluido perfetto*, il quale può essere completamente caratterizzato da due quantità: la densità di energia ρ e la pressione isotropa p del sistema a riposo. Come conseguenza dell'isotropia, il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ è diagonale nel suo sistema a riposo e può essere espresso nella seguente forma matriciale

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

mentre la sua forma tensoriale generale è data da

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Questo tensore ha le proprietà di essere simmetrico e di essere conservato. Infatti, l'equazione

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.13)$$

rappresenta la legge di conservazione delle componenti del tensore.

1.2 Geometria globale

La teoria della Relatività Generale di Einstein, pubblicata nel 1916, interpreta il campo gravitazionale come una curvatura dello spaziotempo generata dalla densità di energia e impulso. È opportuno quindi introdurre gli strumenti di geometria differenziale necessari per analizzare le caratteristiche geometriche e fisiche dello spaziotempo curvo.

Einstein costruì la sua teoria a partire dall'intuizione che in un sistema di riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale uniforme non si è in grado di rilevare l'attrazione gravitazionale: in assenza di ulteriori forze, questo sistema risulterà equivalente ad un

sistema inerziale dove non è presente la gravità. Allo stesso modo, un sistema di riferimento inerziale in cui è possibile misurare l'accelerazione di gravità g di particelle test in caduta libera non è distinguibile da un sistema di riferimento con accelerazione $-g$. Da questa considerazione, Einstein giunse al seguente principio

Principio di Equivalenza Debole (WEP). *La massa inerziale m_i e la massa gravitazionale m_g di un corpo sono uguali.*

il quale può essere espresso in una forma più forte come di seguito

Principio di Equivalenza di Einstein (EEP). *In una regione dello spaziotempo sufficientemente ristretta, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento locale in cui gli effetti del campo gravitazionale sono nulli.*

Questa affermazione ha implicazioni che portano a riformulare il concetto di sistema di riferimento inerziale. Si considerino due sistemi di riferimento K e K' con coordinate x^μ e ξ^α rispettivamente, immersi in un campo gravitazionale uniforme e tali che il primo possa misurare l'accelerazione di gravità mentre il secondo sia in caduta libera. Presa una particella anch'essa in caduta libera, la sua legge del moto nel sistema K' risulta essere quella di una particella libera:

$$K' : \quad \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.14)$$

mentre, adoperando una trasformazione di coordinate $\xi^\alpha(\tau) = \xi^\alpha(x^\mu(\tau))$ da K' a K , si ottiene la seguente espressione:

$$K : \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.15)$$

la quale, se moltiplicata per $\partial x^\mu / \partial \xi^\alpha$, restituisce la legge del moto di una particella accelerata:

$$K : \quad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.16)$$

Si tratta dell'*equazione della geodetica*, che può essere riscritta nella seguente forma

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.17)$$

dove $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ sono i simboli di Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.18)$$

mentre λ è un *parametro affine*, il quale non modifica l'equazione in quanto è una funzione del tempo proprio del tipo $\lambda = a\tau + b$, con a e b costanti.

L'accelerazione di gravità, non presente nel sistema in caduta libera, compare tramite i simboli di Christoffel dati da una trasformazione di coordinate che passa dal riferimento locale al riferimento globale. Per questo motivo in Relatività Generale si definisce sistema di riferimento inerziale proprio quello in caduta libera, in cui l'accelerazione di gravità non può essere rilevata localmente e i suoi effetti possono essere considerati nulli.

La metrica generale dello spaziotempo può essere definita a partire dalla distanza nella metrica di Minkowski (1.2): effettuando una trasformazione di coordinate si ha che

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.19)$$

da cui si ottiene che la metrica $g_{\mu\nu}$ è

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (1.20)$$

1.2.1 Curvatura dello spaziotempo

Secondo la teoria della Relatività Generale, lo spaziotempo è una struttura dinamica, assimilabile ad una varietà differenziabile quadridimensionale la cui geometria è determinata da sorgenti costituite da densità di energia e impulso, le quali curvano tale varietà e generano ciò che interpretiamo come gravità.

Le leggi della fisica espresse nello spaziotempo di Minkowski devono potersi esprimere anche in presenza di un campo gravitazionale: Einstein propose un principio di covarianza secondo cui le formule matematiche che descrivono la fisica devono assumere la stessa forma in qualsiasi sistema di coordinate [4]

Principio di Covarianza Generale. *Un'equazione della fisica è valida in presenza di un generico campo gravitazionale se le condizioni seguenti sono soddisfatte:*

1. *L'equazione è valida in assenza di gravità.*
2. *L'equazione è generalmente covariante.*

Il punto 1 implica che l'equazione deve essere consistente con le leggi della Relatività Ristretta nello spazio di Minkowski, quando la metrica è $\eta_{\mu\nu}$ e i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ si annullano. Il punto 2 invece significa che l'equazione deve preservare la forma sotto una trasformazione delle coordinate generale.

È dunque necessario sviluppare gli strumenti forniti dal formalismo tensoriale, il quale permette di scrivere le leggi della fisica in forma covariante. Per fare ciò, gli oggetti matematici visti finora che non si trasformano come tensori verranno modificati opportunamente in modo tale che si comportino come tali.

Per prima cosa si definisce la *derivata covariante*, in quanto la derivata parziale di un campo tensoriale non è anch'essa un tensore. Qui di seguito verranno riportate solo le

espressioni che determinano la derivata covariante di un vettore controvariante V^μ e di un vettore covariante ω_μ rispettivamente:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (1.21)$$

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (1.22)$$

dove $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sono i coefficienti di connessione. È possibile ricavare la formula della derivata covariante di un tensore generico componendo la (1.21) e la (1.22) in modo opportuno.

In sostanza, il Principio di Covarianza Generale sostiene che, soddisfatte certe condizioni, è possibile passare dalle leggi della fisica valide in Relatività Ristretta nello spaziotempo di Minkowski alle leggi corrispondenti espresse in forma covariante e definite in uno spaziotempo di metrica generica operando le seguenti sostituzioni:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \quad (1.23)$$

Si noti che i simboli di Christoffel non costituiscono un tensore, ma combinati insieme alla derivata parziale danno origine ad un oggetto covariante. Anche la differenza di due connessioni è a sua volta un tensore, come ad esempio il *tensore torsione*

$$T^\lambda_{\mu\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\sigma \quad (1.24)$$

È possibile determinare una connessione su una varietà con metrica $g_{\mu\nu}$ che abbia le seguenti proprietà:

- senza torsione: $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{(\mu\nu)}^\sigma$
- compatibilità con la metrica: $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$

Tale connessione prende il nome di *connessione di Levi-Civita*. La derivata covariante preserva la metrica se possiede una connessione compatibile con questa.

Data una varietà con una certa metrica, su di essa esiste un'unica connessione di Levi-Civita, la quale può essere espressa nel modo seguente

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (1.25)$$

Questa espressione sembrerebbe indicare come l'accelerazione gravitazionale rappresentata da $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ abbia come potenziale la metrica $g_{\mu\nu}$.

Un'applicazione del Principio di Covarianza Generale (1.23) può essere quella relativa al tensore energia-impulso visto nella (1.12), il quale si può esprimere come in forma covariante

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.26)$$

mentre la legge di conservazione associata (1.13) diventa

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (1.27)$$

Come verrà illustrato tra poco, questo tensore occuperà un ruolo significativo nella formulazione dell'equazione di Einstein, in quanto costituisce la sorgente del campo gravitazionale.

Si vuole definire adesso la *derivata covariante direzionale* lungo un cammino $x^\mu(\lambda)$

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (1.28)$$

così da ottenere l'*equazione del trasporto parallelo* di un dato campo vettoriale V^μ lungo un cammino $x^\mu(\lambda)$

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0 \quad (1.29)$$

Per studiare la geometria dello spaziotempo, è necessario introdurre il tensore di Riemann, che racchiude le proprietà della curvatura di una varietà differenziale. Per definirlo, si prenda in esame il trasporto parallelo di un vettore V^ρ lungo un loop generato da altri due vettori A^μ e B^ν : la variazione di V^ρ è data da

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu \quad (1.30)$$

Per valutare l'effetto di questo trasporto parallelo, si considera il commutatore delle derivate covarianti lungo le direzioni definite da A^μ e B^ν :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\rho V^\rho \quad (1.31)$$

dove $T^\lambda_{\mu\nu}$ è la torsione definita dalla (1.24), mentre $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ è il *tensore di Riemann*, che può essere espresso in termini della connessione affine

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (1.32)$$

È possibile contrarre due indici e ottenere il tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (1.33)$$

e dalla traccia di quest'ultimo ottenere lo scalare di Ricci:

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

che consiste nello scalare di curvatura. Ogni qual volta la metrica ha componenti costanti e perciò rappresenta uno spazio piatto, il tensore di Riemann si annulla.

La curvatura di Riemann è una proprietà della geometria intrinseca dello spazio, che può essere misurata da qualsiasi osservatore indipendentemente dal suo sistema di riferimento.

Di seguito si elencano alcune caratteristiche utili del tensore di Riemann. Come prima cosa, si costruisce il tensore di Riemann con tutti gli indici abbassati

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} \quad (1.35)$$

così da evidenziare le seguenti proprietà

1. Simmetria della prima coppia di indici con la seconda: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$
2. Antisimmetria nei primi due indici: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$
3. Antisimmetria negli ultimi due indici: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$
4. Ciclicità negli ultimi tre indici: $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$

Grazie a queste quattro relazioni, le 64 componenti del tensore di Riemann di una varietà quadridimensionale si riducono a 20 componenti indipendenti. Il tensore di Ricci, dato dalla (1.33), ne avrà invece 10. Esaminando adesso la derivata covariante del tensore (1.35), è possibile ricavare l'identità di Bianchi

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (1.36)$$

Contraendo doppiamente questa identità, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= \nabla^{\mu} R_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} R + \nabla^{\nu} R_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (1.37)$$

ovvero

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R \quad (1.38)$$

Si definisce quindi il tensore di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.39)$$

il quale è conservato in senso covariante, cosa che è possibile dedurre dalla (1.38) se riscritta nella forma equivalente

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.40)$$

Il tensore di Riemann, oltre a valutare la curvatura di una varietà, descrive anche la *deviazione geodetica*, che consiste nella tendenza di geodetiche vicine ad avvicinarsi o allontanarsi l'un l'altra. Si consideri una famiglia di geodetiche $\gamma_S(t)$ ad un parametro, con t parametro affine. La collezione di queste geodetiche forma una superficie bidimensionale liscia, incorporata in una varietà M . L'intera superficie è l'insieme dei

punti $x^\mu(s, t) \in M$. Si possono costruire due campi vettoriali: quello formato dai vettori tangenti alle geodetiche

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \quad (1.41)$$

e quello dei vettori di deviazione

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \quad (1.42)$$

Per costituire una base vettoriale del sistema di coordinate, il loro commutatore deve annullarsi $[S, T] = 0$. Inoltre, si definiscono la velocità relativa delle geodetiche

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu \quad (1.43)$$

e l'accelerazione relativa delle geodetiche

$$A^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu \quad (1.44)$$

Infine, sviluppando i calcoli, si ricava l'equazione di deviazione geodetica

$$A^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \quad (1.45)$$

Nel contesto della Relatività Generale, la deviazione geodetica è interpretabile come la forza mareale esercitata da un campo gravitazionale non uniforme. È quindi di fondamentale importanza quando si ha a che fare con regioni dello spaziotempo estese in cui l'effetto della gravità non può essere trascurato ovunque, poiché agisce diversamente in ogni suo punto.

1.2.2 L'equazione di Einstein

La teoria della gravitazione di Newton era stata confermata con elevata precisione da numerosi dati sperimentali della meccanica celeste, per questo motivo quando Einstein elaborò la Relatività Generale dovette fare in modo che questa fosse in accordo con i precedenti risultati. Il campo gravitazionale di Newton è descritto dall'equazione di Poisson per il potenziale Newtoniano Φ

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.46)$$

dove $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ è il Laplaciano nello spazio, G è la costante di gravitazione universale di Newton e ρ è la densità di massa.

L'equazione di Einstein deve essere formulata in modo tale da essere consistente con l'equazione (1.46) nel limite Newtoniano, dato dalle seguenti condizioni

1. limite non-relativistico: $v \ll c$
2. limite di campo debole: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$
3. campo statico: $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$

Con le dovute considerazioni, si giunge all'equazione di Einstein¹:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.47)$$

Questa equazione descrive la gravità generata da un tensore di energia-impulso $T^{\mu\nu}$ come curvatura dello spaziotempo. È possibile semplificarla se ci si limita a considerare l'effetto della massa solo al suo esterno, dove il tensore energia-impulso è nullo $T_{\mu\nu} = 0$ e di conseguenza lo è anche il tensore di Einstein (1.39) $G_{\mu\nu} = 0$. Calcolando la sua traccia si verifica che

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2}Rg^\mu{}_\mu = 0 \quad \iff \quad R = 0 \quad (1.48)$$

e infine si ottiene l'equazione di campo di Einstein nel vuoto:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.49)$$

L'equazione di Einstein mette in relazione la distribuzione di energia e impulso con le componenti del tensore di curvatura. Per valutare che genere di campo gravitazionale è generato da una certa sorgente, si può considerare l'evoluzione dell'espansione θ di una famiglia di geodetiche di tipo tempo. Si immagini una collezione di particelle test disposte a formare una piccola sfera che si muove lungo geodetiche con quadrivelocità U^μ : seguendo la sua evoluzione, l'espansione $\theta = \nabla_{mu}U^\mu$ indica come il volume della sfera cresce ($\theta > 0$) o si restringe ($\theta < 0$) ad ogni istante di tempo. Gli effetti della gravità sono codificati nell'evoluzione dell'espansione, che è governata dall'equazione di Raychaudhuri, che fornisce la seguente espressione per la derivata dell'espansione rispetto al tempo proprio τ lungo le geodetiche:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \quad (1.50)$$

dove ω è la rotazione delle geodetiche, mentre σ rappresenta lo *shear*. La combinazione dell'equazione di Einstein (1.47) e dell'equazione di Raychaudhuri (1.50) può essere usata

¹La versione completa dell'equazione di campo comprende anche il termine $\Lambda g_{\mu\nu}$ sommato al primo membro, dove Λ è la costante cosmologica. Fu introdotta inizialmente da Einstein per ottenere un universo statico, mentre oggi serve a spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'universo. Secondo l'attuale modello, questa è dovuta all'energia del vuoto prevista dalla meccanica quantistica: $\Lambda = 8\pi G\rho_{vac}$.

per descrivere come l'energia-impulso influenza il moto delle particelle test, dal momento che la prima lega $T_{\mu\nu}$ con $R_{\mu\nu}$ mentre la seconda mette in relazione $R_{\mu\nu}$ con $d\theta/d\tau$.

L'equazione di Einstein descrive come la densità di energia e la pressione influenzano il tensore di Ricci in un modo tale da attrarre insieme le particelle quando ρ e p sono positive. Per le componenti del tensore di Riemann che non sono incluse nel tensore di Ricci si ricorre al tensore di Weyl, qui espresso in 4 dimensioni:

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{3}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R - g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} + g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho} \quad (1.51)$$

Il tensore di Ricci consiste nella traccia del tensore di Riemann, mentre il tensore di Weyl è la parte senza traccia; insieme, forniscono una completa caratterizzazione della curvatura.

Capitolo 2

Metriche e singolarità

L'equazione di campo di Einstein non è certo facile da risolvere: è composta da equazioni non lineari alle derivate prime e seconde della metrica. Si studieranno soluzioni al di fuori del corpo massivo, descritte dall'equazione di Einstein nel vuoto (1.49); inoltre, se si considerano sistemi dotati di particolari simmetrie è possibile semplificarle ulteriormente. In questo capitolo si andranno ad esporre le loro proprietà generali e ad analizzare alcune soluzioni specifiche: la metrica di Schwarzschild e la metrica di Kerr.

2.1 Caratteristiche generali e tipologie

Lo spaziotempo costituisce una varietà differenziabile, la cui geometria è definita da una metrica che deve soddisfare l'equazione di campo di Einstein.

Una varietà M possiede una simmetria se la geometria è invariante per certe trasformazioni che mappano M in se stessa. Le simmetrie della metrica sono chiamate *isometrie*. In generale, le simmetrie di una varietà possono essere determinate individuando il corrispettivo *vettore di Killing* K^μ , definito dall'*equazione di Killing*

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0 \quad (2.1)$$

Ciò significa che ogni vettore K^μ che soddisfa questa equazione comporta che $K_\nu p^\nu$ si conservi lungo la traiettoria geodetica.

I campi vettoriali di Killing su una varietà corrispondono a simmetrie continue della metrica di tale varietà. Ciascun vettore di Killing implica l'esistenza di quantità conservate associate al moto geodetico. La metrica non cambia lungo la direzione del vettore di Killing.

Orizzonte di Killing. Dato un campo vettoriale di Killing χ^μ , la superficie nulla Σ lungo la quale il campo vettoriale di Killing è nullo si chiama *orizzonte di Killing* di χ^μ .

A ciascun orizzonte di Killing si può associare una *gravità di superficie*. Si consideri un vettore di Killing χ^μ con orizzonte di Killing Σ . Poiché χ^μ è normale a Σ , lungo l'orizzonte di Killing obbedisce all'equazione geodetica

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu \quad (2.2)$$

dove il parametro κ è la gravità di superficie. Usando l'equazione di Killing (2.1) e il fatto che $\chi_{[\mu} \nabla_\nu \chi_{\sigma]} = 0$, si deriva una formula per la gravità di superficie:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu) \quad (2.3)$$

Si illustrano di seguito le principali simmetrie di una varietà che verranno considerate.

Simmetria sferica. Una varietà possiede *simmetria sferica* se e solo se esistono tre campi vettoriali di Killing (R, S, T) tali da soddisfare le seguenti relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} &= T \\ [S, T] &= R \\ [T, R] &= S \end{aligned} \quad (2.4)$$

Grazie al teorema di Frobenius, la proprietà (2.4) significa che le varietà simmetriche rispetto al gruppo delle rotazioni $SO(3)$ possiedono una foliazione formata da sfere. Qualsiasi metrica del vuoto con simmetria sferica possiede un vettore di Killing di tipo tempo.

Stazionarietà. Una metrica che possiede un vettore di Killing che è di tipo tempo vicino all'infinito è detta *stazionaria*.

Staticità. Una metrica è chiamata *statica* se possiede un vettore di Killing di tipo tempo ortogonale ad una famiglia di ipersuperfici.

Un campo vettoriale v^μ ortogonale ad una ipersuperficie obbedisce alla condizione

$$v_{[\mu} \nabla_\nu] v_\sigma = 0 \quad (2.5)$$

Se si scelgono coordinate così che le componenti di $g_{\mu\nu}$ sono tutte indipendenti da t , le superfici alle quali il vettore di Killing sarà ortogonale sono definite dalla condizione $t = \text{costante}$. I termini della metrica che sono misti di tempo e spazio saranno assenti. Una definizione alternativa di metrica statica è stazionaria e invariante per inversione temporale $t \rightarrow -t$.

Oltre a queste proprietà, una metrica è generalmente caratterizzata da *singolarità*, punti nei quali uno o più scalari costruiti a partire dal tensore di Riemann divergono. Questi possono essere lo scalare di Ricci (1.34), ma anche $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\lambda\tau} R_{\lambda\tau}{}^{\mu\nu}$ e così via.

Insieme alle singolarità dello spaziotempo, di norma si trovano uno o più orizzonti degli eventi

Orizzonte degli eventi. Una superficie oltre la quale una particella non può mai fuggire verso l'infinito è chiamata *orizzonte degli eventi*.

In altre parole, una superficie costituisce un orizzonte degli eventi se la velocità di fuga necessaria per allontanarsi da essa è pari alla velocità della luce: ciò implica che tale superficie sia nulla e che niente, compresi i fotoni, può sfuggirle una volta raggiunta. Un *buco nero* si tratta appunto di una singolarità dello spaziotempo avvolta da un orizzonte degli eventi. Al contrario, una *singolarità nuda* è tale se non è una non nascosta dietro ad orizzonti degli eventi. A riguardo, esiste la seguente congettura

Ipotesi di censura cosmica. *Una singolarità nuda non può originarsi in un collasso gravitazionale da stati generici inizialmente non singolari in uno spaziotempo asintoticamente piatto che obbedisce alla condizione di energia dominante.*

Nessuno vieta però l'esistenza di singolarità nude: questa ipotesi stabilisce solo l'impossibilità di una loro formazione in tali circostanze.

Per finire, si riporta un teorema che introduce il *paradosso della perdita di informazioni* che avviene durante la nascita di un buco nero:

Teorema no-hair. *Le soluzioni della relatività generale accoppiata all'elettromagnetismo per buchi neri stazionari e asintoticamente piatti, che sono non singolari al di fuori dell'orizzonte degli eventi, sono pienamente caratterizzate dai parametri di massa, carica elettrica e magnetica e momento angolare.*

A seconda di quali proprietà possiede una massa, lo spaziotempo che questa genera è descritto da una metrica particolare. Le principali soluzioni alle equazioni di campo di Einstein nel vuoto sono le seguenti:

- Metrica di Schwarzschild (1916), data da una massa a simmetria sferica, non rotante e con carica nulla;
- Metrica di Reissner-Nordström (1916-18), per un corpo carico e con simmetria sferica;
- Metrica di Kerr (1963), generata da un corpo massivo rotante;
- Metrica di Kerr-Newman (1965), prodotta da una massa carica rotante.

Nelle sezioni successive di questo capitolo verranno analizzate la soluzione di Schwarzschild e quella di Kerr, nelle quali si considerano i soli termini di massa e momento angolare di spin, mentre si assume nulla la carica elettrica posseduta dalla massa che genera la metrica.

2.2 Metrica di Schwarzschild

La scoperta di soluzioni soddisfacenti l'equazione di campo di Einstein iniziò immediatamente: nello stesso anno di pubblicazione della Relatività Generale, Schwarzschild determinò una metrica valida nel vuoto esterno ad una massa con simmetria sferica, definita come segue

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.6)$$

dove $d\Omega^2$ è la metrica di una 2-sfera unitaria

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

La metrica di Schwarzschild si riduce al caso di campo debole, definito nel punto 2 del limite Newtoniano a pagina 13, quando $r \gg R_S$, dove R_S è il *raggio di Schwarzschild*:

$$R_S = 2GM \quad (2.7)$$

Noto il raggio di Schwarzschild, è possibile definire il parametro M , interpretabile come la massa newtoniana della sorgente, ma che non sarà semplicemente la somma delle masse dei costituenti, poiché si dovrà tenere conto anche di un contributo fornito dall'energia di legame gravitazionale. Si noti che per $M \rightarrow 0$ si recupera la metrica di Minkowski, come è logico aspettarsi in uno spazio dove la massa e il campo gravitazionale associato sono assenti. La metrica (2.6) diventa progressivamente minkowskiana anche per $r \rightarrow \infty$: questa proprietà caratterizza uno spazio asintoticamente piatto.

Riguardo alla soluzione di Schwarzschild esiste un importante teorema [5] che stabilisce la sua unicità per le equazioni di Einstein nel vuoto quando si richiede uno spaziotempo a simmetria sferica:

Teorema di Birkhoff. *La metrica di Schwarzschild è l'unica soluzione nel vuoto con simmetria sferica; qualsiasi spaziotempo a simmetria sferica con $R_{\mu\nu} = 0$ è perciò statico.*

Ciò significa che non esistono soluzioni dipendenti dal tempo di questa forma. I termini della metrica (2.6) divergono per $r = 0$ e $r = 2GM$, ma esiste una sostanziale differenza tra questi due punti. In $r = 0$ la metrica di Schwarzschild presenta una singolarità non eliminabile, per la quale l'invariante di curvatura seguente diverge:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 M^2}{r^6} \quad (2.8)$$

Al contrario, $r = 2GM$ costituisce una singolarità eliminabile: nessuno degli invarianti di curvatura diverge per questo valore e, come verrà mostrato più avanti, può essere rimossa con un cambio di coordinate appropriato.

Per comprendere la geometria dello spaziotempo di Schwarzschild si può esaminare la sua struttura causale, definita dai coni luce. Si inizia col considerare le curve nulle radiali, per le quali le variabili θ e ϕ sono costanti e $ds^2 = 0$:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 \quad (2.9)$$

dalla quale si ricava

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (2.10)$$

Questa equazione misura l'inclinazione dei coni luce in un diagramma dello spaziotempo del piano t - r . Per grandi valori di r la pendenza è ± 1 , come lo sarebbe in uno spazio piatto, mentre avvicinandosi a $r = 2GM$ si ha che $dt/dr \rightarrow \pm\infty$ e i coni luce si chiudono. Si manifesta l'impossibilità di raggiungere il raggio di Schwarzschild, ma è solo apparente: se si osserva da lontano un corpo cadere verso il buco nero, questo sembrerà avvicinarsi sempre più ma anche impiegare un tempo infinito per raggiungerlo. Inoltre, la frequenza di emissione del segnale di una sorgente luminosa che precipita verso il buco nero sembrerà rallentare, poiché l'intervallo del suo tempo proprio corrisponderà ad un intervallo sempre maggiore nel sistema di riferimento dell'osservazione. Il fatto che non sia mai possibile vedere un corpo raggiungere $r = 2GM$ non significa che questo non lo raggiunga davvero. Effettuando un cambio di coordinate opportuno, risulta addirittura possibile poter superare il raggio di Schwarzschild. Risolvendo la condizione (2.10) si ottiene

$$\begin{aligned} t &= \pm r^* + \text{costante} \\ r^* &= r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove r^* è chiamata coordinata di Regge-Wheeler e assume i valori $-\infty < r^* < \infty$, mentre $r > 2GM$. In termini di queste nuove coordinate la metrica di Schwarzschild diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.12)$$

Adesso i coni luce non sembrano più chiudersi e nessuno dei termini della metrica diverge per $r = 2GM$, (anche se g_{tt} e $g_{r^*r^*}$ diventano zero). Tuttavia sorge un nuovo problema: la superficie $r = 2GM$ appare trovarsi all'infinito, per $r^* = -\infty$. Difatti r^* è anche nota come *tortoise coordinate*, in riferimento al paradosso di Zenone di Achille e la tartaruga.

Si procede definendo le seguenti variabili

$$\begin{aligned} v &= t + r^* \\ u &= t - r^* \end{aligned} \quad (2.13)$$

così che le geodetiche nulle entranti sono caratterizzate da $v = \text{costante}$, mentre quelle uscenti soddisfano $u = \text{costante}$. Se adesso si sostituisce la coordinata t con v , si ottengono le *coordinate di Eddington-Finkelstein* (v, r, θ, ϕ) e la metrica di Schwarzschild assume la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2d\Omega^2 \quad (2.14)$$

In questo modo, benché il coefficiente della metrica g_{vv} si annulla per $r = 2GM$, non ci sono più degenerazioni; il determinante della metrica è $g = -r^4 \sin^2 \theta$, del tutto regolare per $r = 2GM$, pertanto la metrica è invertibile. Nelle coordinate di Eddington-Finkelstein la condizione per le curve nulle radiali è risolta da

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{(entranti)} \\ 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & \text{(uscenti)} \end{cases} \quad (2.15)$$

In queste coordinate i coni luce si comportano bene in $r = 2GM$ e la superficie si trova ad un valore finito delle coordinate. Non risulta più esserci alcun problema nel tracciare i cammini di tipo luce o di tipo tempo che attraversano la superficie. Sebbene i coni luce non si chiudano più, succede che si pieghino in modo tale che per $r < 2GM$ le traiettorie dirette verso il futuro siano interamente rivolte verso la singolarità, nella direzione di r decrescente. La superficie $r = 2GM$ funge da punto di non ritorno: una volta oltrepassata qualsiasi particella, massiva o meno, non può tornare indietro. Si tratta quindi di un orizzonte degli eventi, definito a pagina 17.

Nelle coordinate (v, r) è permesso oltrepassare l'orizzonte degli eventi seguendo cammini diretti verso il futuro, ma è sempre possibile scegliere la coordinata u al posto di v ed ottenere la metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)du^2 - (dudr + drdu) + r^2d\Omega^2 \quad (2.16)$$

con la quale è ammesso passare l'orizzonte degli eventi tramite curve diretto verso il passato.

Con le coordinate di Eddington-Finkelstein si sono costruite traiettorie di tipo tempo sia entranti che uscenti attraverso la superficie $r = 2GM$, estendendo lo spaziotempo verso il futuro e verso il passato. Si richiede adesso di seguire geodetiche di tipo spazio, adottando coordinate che siano valide ovunque.

Utilizzando contemporaneamente le coordinate (v, u) al posto di (t, r) si ottiene

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dvdu + dudv) + r^2d\Omega^2 \quad (2.17)$$

con r definito implicitamente in termini di v e u da

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad (2.18)$$

Si ha di nuovo la degenerazione per cui $r = 2GM$ si trova all'infinito, in questo caso o per $v = -\infty$ o per $u = \infty$. Si scelgono quindi delle coordinate che portino questi punti a valori finiti, come le seguenti

$$\begin{aligned} v' &= e^{v/2R_S} = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{(r+t)/4GM} \\ u' &= -e^{-u/2R_S} = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{(r-t)/4GM} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nel sistema (v', u', θ, ϕ) la metrica di Schwarzschild è

$$ds^2 = -\frac{16G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (dv' du' + du' dv') + r^2 d\Omega^2 \quad (2.20)$$

Finalmente emerge la non singolarità del raggio di Schwarzschild.

Sia v' che u' sono coordinate nulle, nel senso che le loro derivate parziali $\partial/\partial v'$ e $\partial/\partial u'$ sono vettori nulli. Generalmente, si preferisce lavorare in un sistema nel quale una coordinata è di tipo tempo e le altre sono di tipo spazio. Si definiscono dunque le *coordinate di Kruskal* (T, R, θ, ϕ) (talvolta chiamate coordinate di Kruskal-Szekeres), dove T e R sono date da

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(v' + u') = \left(\frac{r}{R_S} - 1\right)^{1/2} e^{r/2R_S} \sinh\left(\frac{t}{2R_S}\right) \\ R &= \frac{1}{2}(v' - u') = \left(\frac{r}{R_S} - 1\right)^{1/2} e^{r/2R_S} \cosh\left(\frac{t}{2R_S}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

La metrica di Schwarzschild nelle coordinate di Kruskal diventa

$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.22)$$

dove r è definito implicitamente da

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) e^{r/2GM} \quad (2.23)$$

Come con le coordinate (2.11), le curve nulle radiali risultano avere la stessa forma che avrebbero nello spazio piatto:

$$T = \pm R + \text{costante} \quad (2.24)$$

Diversamente nelle coordinate (t, r^*) , l'orizzonte degli eventi $r = 2GM$ non è infinitamente lontano, è invece determinato da

$$T = \pm R \quad (2.25)$$

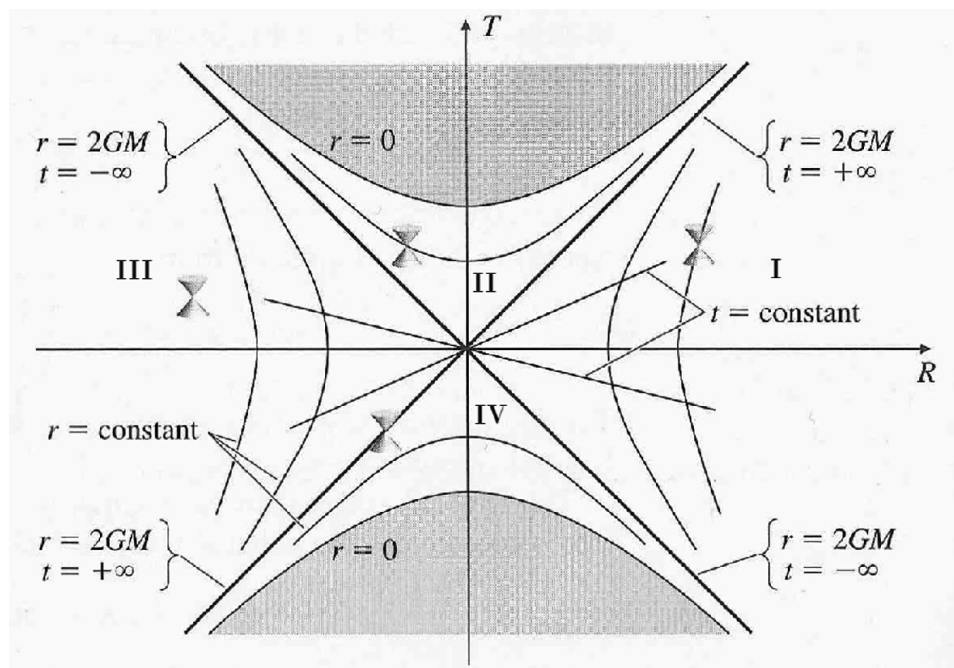


Figura 2.1: Diagramma di Kruskal della soluzione di Schwarzschild. Ciascun punto del diagramma è una 2-sfera. Le superfici di r costante sono delle iperboli, mentre quelle di t costante sono delle rette passanti per l'origine. Tutti i coni luce sono di $\pm 45^\circ$. L'orizzonte degli eventi è rappresentato dalle due bisettrici che separano il diagramma in quattro regioni, descritte nel testo principale.

Dalla (2.23) si ricava che le superfici con $r = \text{costante}$ soddisfano

$$T^2 - R^2 = \text{costante} \quad (2.26)$$

dunque appaiono come iperboli nel piano R - T . Inoltre, le superfici di t costante sono date da

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{2R_S}\right) \quad (2.27)$$

e quindi rappresentate da rette passanti per l'origine con pendenza $\tanh(t/2R_S)$. Si noti che per $t \rightarrow \pm\infty$, la (2.27) diventa uguale alla (2.25); pertanto $t \rightarrow \pm\infty$ riproduce la stessa superficie di $r = 2GM$.

Le coordinate (T, R) possono assumere i valori degli intervalli seguenti

$$\begin{aligned} -\infty &\leq R \leq \infty \\ T^2 &< R^2 + 1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

A questo punto è possibile ritrarre la soluzione di Schwarzschild tramite il diagramma di Kruskal, illustrato in figura 2.1. Il diagramma mostra lo spaziotempo nel piano T - R

(con θ e ϕ sopresse), nel quale ciascun punto consiste in una 2-sfera.

Il diagramma di Kruskal rappresenta l'estensione massimale della geometria di Schwarzschild: le coordinate ricoprono l'intera varietà descritta da questa soluzione, mentre le coordinate (t, r) erano valide solo per $r > 2GM$, che costituisce solo una parte della varietà descritta dal diagramma.

L'orizzonte degli eventi $r = R_S$, composto dalle due bisettrici del piano T - R , divide il diagramma di Kruskal in quattro regioni distinte, osservabili in figura 2.1. La regione I corrisponde allo spaziotempo esterno all'orizzonte degli eventi, dato da $r > 2GM$. Percorrendo le curve nulle dirette verso il futuro, si raggiunge la regione II, che consiste nell'interno del buco nero. Una volta entrati, non è più possibile uscirne ed è inevitabile precipitare verso la singolarità $r = 0$. Infatti, quando $r < 2GM$ nelle coordinate originali accade che t diventa di tipo spazio e r diventa di tipo tempo.

Se invece si seguono le traiettorie nulle dirette verso il passato si raggiunge la regione IV, che consiste nella versione della regione II con lo scorrere del tempo invertito. Questa regione può essere pensata come un *buco bianco*, una singolarità nel passato dalla quale l'universo sembra fuoriuscire. Il confine della regione II è l'orizzonte degli eventi futuro, mentre quello della regione IV è l'orizzonte degli eventi passato. Infine, esplorando le geodetiche di tipo spazio si viene guidati verso la regione III, la quale non può essere raggiunta dalla regione I e viceversa, che si stia viaggiando in avanti o indietro nel tempo. Si tratta di un'altra regione asintoticamente piatta dello spaziotempo, speculare alla nostra. Si può pensare che sia connessa alla regione I tramite un ponte di Einstein-Rosen, discusso nel capitolo 3 successivo.

2.3 Metrica di Kerr

Nel 1963, il matematico neozelandese Roy P. Kerr determinò la soluzione all'equazione di campo di Einstein nel vuoto (1.49) che descrive lo spaziotempo esterno ad un corpo massivo rotante [7]. La difficoltà avuta nel formularla, che ha ritardato la scoperta di quasi mezzo secolo rispetto alle altre, risiede nella perdita della simmetria sferica che caratterizzava le soluzioni trovate fino ad allora. La metrica di Kerr espressa in coordinate di Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) ha la seguente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2 \quad (2.29)$$

dove:

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (2.30)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.31)$$

Le costanti M e a parametrizzano le possibili soluzioni. Il parametro M rappresenta la massa, mentre a corrisponde al momento angolare per unità di massa:

$$a = J/M \quad (2.32)$$

dove J è il momento angolare¹. Per $a \rightarrow 0$ la soluzione si riduce alla metrica di Schwarzschild. Se a viene fissata e $M \rightarrow 0$ la metrica diventa:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2)} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.33)$$

la cui parte spaziale consiste in uno spazio piatto in coordinate ellittiche. Queste sono legate alle coordinate cartesiane nello spazio Euclideo:

$$\begin{aligned} x &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos \phi \\ y &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.34)$$

I vettori di Killing della metrica di Kerr (2.29) sono due: dal momento che la metrica è indipendente dalle variabili t e ϕ , sia $K = \partial_t$ che $R = \partial_\phi$ sono vettori di Killing. R^μ rappresenta la simmetria assiale della soluzione, mentre K^μ indica che è stazionaria, ma non statica, poiché il buco nero è in rotazione.

La metrica di Kerr possiede anche un tensore di Killing. Si può definire il tensore

$$\sigma_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

dove i due vettori l e n sono dati da

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a) \\ n^\mu &= \frac{1}{2\rho^2} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Entrambi i vettori sono nulli e soddisfano

$$l^\mu l_\mu = 0, \quad n^\mu n_\mu = 0, \quad l^\mu n_\mu = -1$$

Le coordinate di Boyer-Lindquist sono state scelte in modo tale da ottenere gli orizzonti degli eventi per quei valori di r tali che $g^{rr} = 0$. Poiché $g^{rr} = \Delta/\rho^2$ e $\rho^2 \geq 0$, ciò si verifica quando

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 = 0 \quad (2.37)$$

¹Per la precisione, M e J consistono rispettivamente nella energia di Komar e nel momento angolare di Komar.

Possono verificarsi tre casi:

- $GM < a$, dove la metrica presenta una singolarità nuda;
- $GM = a$, per cui la soluzione risulta instabile;
- $GM > a$.

Concentrandosi solamente l'ultima condizione, di maggiore interesse fisico, si ottengono due radici per le quali Δ si annulla, date da

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - a^2} \quad (2.38)$$

I due raggi r_{\pm} risultano essere entrambi due superfici nulle che consistono in due orizzonti degli eventi, uno interno all'altro. Tuttavia, questi non sono orizzonti di Killing per il vettore di Killing $K = \partial_t$ di traslazione temporale asintotica, in quanto la metrica di Kerr è stazionaria ma non statica. La norma di K^{μ} è data da

$$K^{\mu} K_{\mu} = -\frac{1}{\rho^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \quad (2.39)$$

che non si annulla sull'orizzonte degli eventi esterno; infatti, per $r = r_+$ (dove $\Delta = 0$) si ha che

$$K^{\mu} K_{\mu} = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \geq 0 \quad (2.40)$$

Il vettore di Killing è quindi di tipo spazio sull'orizzonte esterno, tranne ai poli nord e sud per $\theta = 0, \pi$ in cui è nullo. Il luogo dei punti nel quale $K^{\mu} K_{\mu} = 0$ è la superficie di limite stazionario, data da

$$(r - GM)^2 = G^2 M^2 - a^2 \cos^2 \theta \quad (2.41)$$

mentre l'orizzonte degli eventi esterno è dato da

$$(r_+ - GM)^2 = G^2 M^2 - a^2. \quad (2.42)$$

Tra queste due superfici si trova una regione chiamata *ergosfera*, nella quale si verifica un fenomeno conosciuto come *effetto di trascinamento (frame-dragging)*: all'interno dell'ergosfera, un sistema di riferimento è costretto a muoversi nella direzione di rotazione del buco nero, data dalla coordinata ϕ ; è comunque possibile spostarsi verso l'orizzonte degli eventi o allontanarsi da esso, uscendo dall'ergosfera. La struttura del buco nero di Kerr è illustrata in figura 2.2

Si consideri un fotone emesso nella direzione di ϕ ad un certo raggio r sul piano equatoriale del buco nero di Kerr, che corrisponde a $\theta = \pi/2$. Nell'istante in cui viene

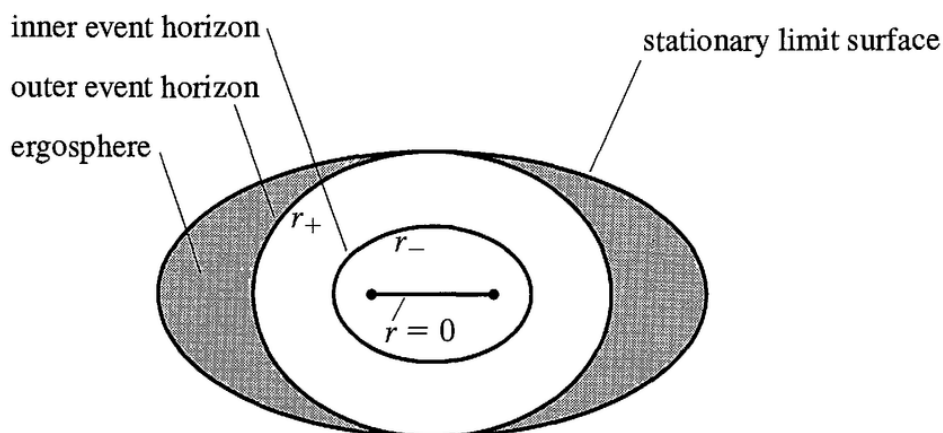


Figura 2.2: Sezione di un buco nero di Kerr. La singolarità ad anello, che nell'immagine appare come una linea, si ha per $r = 0$ ed è racchiusa da due orizzonti degli eventi: uno interno di raggio r_- ed uno esterno di raggio r_+ ; tra quest'ultimo e la superficie di limite stazionario si trova l'ergosfera, in cui è presente un effetto di trascinamento.

emesso, l'impulso del fotone non avrà componenti nella direzione di r o θ , perciò la condizione per la quale la traiettoria è nulla sarà data da

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dtd\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (2.43)$$

Risolviendo questa equazione si ottiene

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (2.44)$$

Se questa quantità viene valutata sulla superficie di limite stazionario della metrica di Kerr, si ha che $g_{tt} = 0$ e le due soluzioni sono

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{2G^2M^2 + a^2} \quad (2.45)$$

La seconda soluzione, avendo lo stesso segno di a visto nella (2.32), viene interpretata come il fotone che si muove attorno al buco nero nella stessa direzione della rotazione di quest'ultimo. La prima soluzione significa che un fotone diretto in senso contrario rispetto alla rotazione del buco nero risulterà rimanere fermo in questo sistema di coordinate. Particelle massive, le quali devono viaggiare più lentamente dei fotoni, saranno necessariamente trascinate con la rotazione del buco nero una volta entrate all'interno della superficie di limite stazionario. Questo trascinamento continua fino all'orizzonte

degli eventi esterno per r_+ . La velocità angolare dell'orizzonte degli eventi stesso, Ω_H , può essere definita come la minima velocità angolare di una particella sull'orizzonte. Dalla (2.44) si trova che

$$\Omega_H = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_- (r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (2.46)$$

Nella metrica di Kerr, la singolarità non si verifica per $r = 0$, piuttosto per $\rho = 0$, per il quale l'invariante di curvatura $R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu}$ diverge. Dal momento che $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ è la somma di due quantità positive, può essere nullo solo quando entrambe sono uguali a zero, cioè

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.47)$$

Questo insieme di punti costituisce un anello.

Tramite una continuazione analitica, è possibile analizzare cosa succede se si attraversa l'interno dell'anello: ciò che si trova è un nuovo spaziotempo asintoticamente piatto, descritto dalla metrica di Kerr per $r < 0$. Come risultato, si ha che Δ non si annulla mai e non sussiste alcun orizzonte. Inoltre, la regione vicina alla singolarità presenta una particolarità: curve chiuse di tipo tempo, affrontate nella sezione 3.2 del capitolo successivo.

Capitolo 3

Viaggi nello spaziotempo

Una volta compresa la struttura dello spaziotempo, ci si chiede quali tipi di viaggio siano possibili nello scenario formulato dalla Relatività Ristretta e dalla Relatività Generale. In questo ultimo capitolo, si approfondiscono quindi le varie tipologie di cammini percorribili secondo quanto previsto e ammesso dalla teoria di Einstein. Verranno illustrati i tragitti più esotici tra quelli visti finora, quali i cunicoli spaziotemporali, utilizzabili per coprire grandi distanze dello stesso universo oppure giungere in un universo parallelo, e le curve chiuse di tipo tempo, che permettono di viaggiare nel passato.

3.1 Cunicoli spaziotemporali

La Relatività Ristretta impone dei limiti notevoli alla dinamica dei corpi: per quanto riguarda i viaggi nello spaziotempo, il più rilevante tra questi è l'impossibilità di superare la velocità della luce nel vuoto, pari a circa $c = 3 \times 10^8$ m/s. Percorrere distanze galattiche in tempi umani risulta così un'impresa insormontabile: la stella più vicina al Sistema Solare, Proxima Centauri, dista circa 4.2 anni luce da noi. Ciò vuol dire che per raggiungerla con i mezzi attualmente in nostro possesso ci vorrebbero migliaia di anni. I viaggi di questo tipo diventano pura fantascienza, almeno per le conoscenze e le risorse tecnologiche ad oggi a disposizione dell'uomo.

La Relatività Generale riaccende la speranza per l'esplorazione dell'universo. Essa infatti fornisce strutture che sembrerebbero collegare regioni molto lontane dello spazio, chiamate cunicoli spaziotemporali o *wormhole*. Già nella sezione 2.2 si è visto che la soluzione di Schwarzschild, nell'estensione massimale data dalle coordinate di Kruskal, prevede il ponte di Einstein-Rosen tra il nostro spaziotempo ed un altro speculare, mentre nella sezione 2.3 si è accennato al tunnel presente per $r < 0$ all'interno di un buco nero di Kerr. Nel 1988, Morris e Thorne pubblicarono un articolo nel quale trattano varie tipologie di *wormhole*, analizzando la loro stabilità e attraversabilità per poi studiare il loro ipotetico utilizzo per viaggi interstellari [9].

3.1.1 Attraversabilità

Per prima cosa bisogna dire che i buchi neri non sono generalmente adatti per il viaggio interstellare per vari motivi. Innanzitutto, sull'orizzonte degli eventi di un buco nero di massa M le forze di marea, generate dalla deviazione geodetica (1.45) dovuta alla non omogeneità del campo gravitazionale, producono un'accelerazione relativa enorme tra la testa e i piedi dell'astronauta di altezza L , di intensità $\sim L(2GM/c^3)^{-2}$. A meno che il buco nero non sia più massivo di 10^4 soli così da avere l'orizzonte con circonferenza di $4\pi GM/c^2$, superiore quindi ai 10×10^5 km, l'avventuriero verrebbe ucciso dalla gravità di marea ancor prima di raggiungere l'orizzonte. Inoltre, i viaggi bidirezionali non sono ammessi, in quanto una volta superato l'orizzonte degli eventi non è più possibile tornare indietro; in ogni caso, per quelli monodirezionali è necessario che dall'altra parte ci sia un oggetto da cui è possibile riemergere, come ad esempio un buco bianco. Questi ultimi sono caratterizzati da *antiorizzonti* (orizzonti degli eventi passati) i quali hanno il difetto di essere molto instabili per piccole perturbazioni: anche una piccola quantità di luce cadendovi all'interno andrebbe incontro ad un *blueshift* gravitazionale che aumenterebbe la sua energia esponenzialmente fino a convertire l'antiorizzonte in un normale orizzonte nel giro di pochi secondi.

Lo stesso vale per un buco nero rotante di Kerr: sebbene la sua metrica possieda al loro interno un tunnel attraverso l'iperspazio verso altri universi o regioni del nostro stesso universo, di fatto si applica soltanto all'esterno dei buchi neri rotanti, poiché non si può dimostrare cosa succeda al loro interno. Anche se un tunnel del genere si formasse effettivamente, avrebbe vita breve data la sua alta instabilità. Supponendo che ci siano le giuste condizioni affinché il tunnel si stabilizzi, e che la massa e la rotazione del buco nero siano sufficientemente elevate da far sì che un uomo possa raggiungere la singolarità ad anello e passarci attraverso illeso, ciò non avverrebbe comunque perché le radiazioni previste dalla teoria quantistica dei campi emesse dalla singolarità per rottura del vuoto sarebbero tali da uccidere l'uomo. Per di più, se si riuscisse ad attraversare un tunnel di Kerr e raggiungere una regione distante del nostro stesso universo, si potrebbe riemergere in qualsiasi momento si voglia, eventualmente violando il principio di causalità.

3.1.2 Ponte di Einstein-Rosen

Il diagramma di Kruskal della soluzione di Schwarzschild mette in luce la possibilità che questa rappresenti un wormhole, che in questo caso prende il nome di *ponte di Einstein-Rosen*. Come già detto nella sezione 2.2, le regioni I e III rappresentano universi asintoticamente piatti, oppure regioni distinte dello stesso universo, che possono essere connessi tramite un wormhole. Entrambi i casi sono illustrati dal diagramma *embedded* (incapsulato) in figura 3.1. La topologia di un wormhole è $\mathbb{R} \times S^2$. In questo caso l'intera varietà possiede una foliazione di 2-sfere. Se si sopprime una dimensione e si disegnano le 2-sfere come cerchi, il cunicolo assume la forma della figura 3.1 (a).

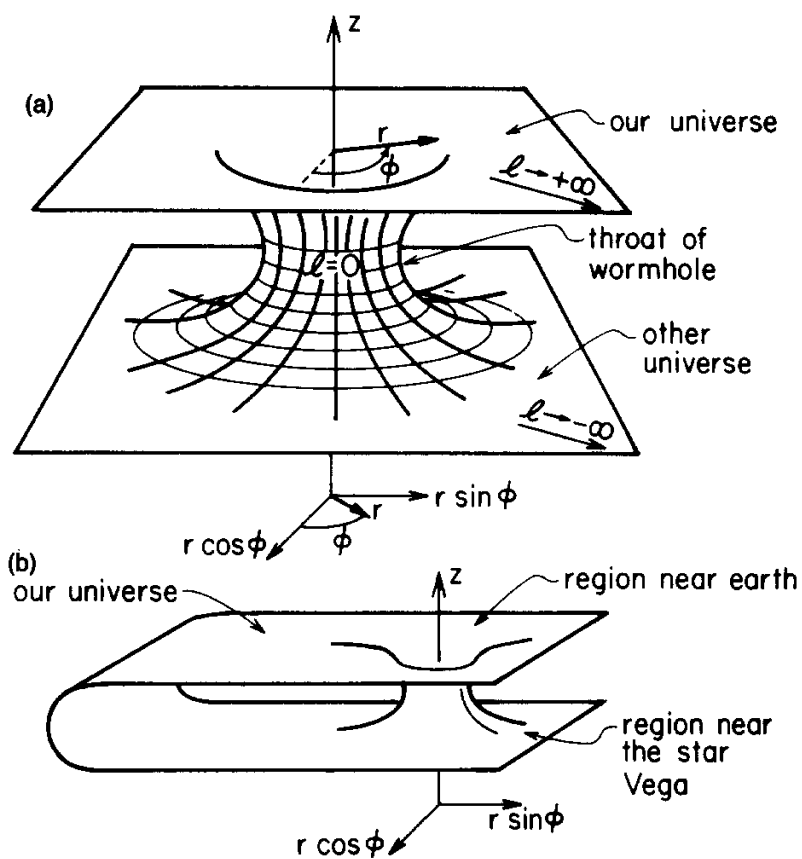


Figura 3.1: (a) Diagramma di embedding per un wormhole che connette due universi differenti. (b) Diagramma di embedding per un wormhole che connette due regioni distanti del nostro stesso universo. Ciascun diagramma raffigura la geometria di una sezione equatoriale ($\theta = \pi/2$) dello spazio ad uno specifico istante di tempo ($t = \text{costante}$).

Per raffigurare il diagramma di Kruskal come una superficie bidimensionale, occorre congelare due delle quattro coordinate della metrica di Schwarzschild: se ad esempio vengono posti $t = \text{costante}$ e $\theta = \pi/4$, la (2.6) si riduce a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.1)$$

Si tratta della metrica della superficie quadratica $x^2 + y^2 = (z^2/4R_S + R_S)^2$ nello spazio tridimensionale.

Anche questo tipo di cunicolo spaziotemporale è da escludere per l'impiego di viaggi interstellari: oltre alle forze mareali già accennate, così intense da essere fatali, si deve tenere conto del suo essere non affatto statico. Un wormhole di Schwarzschild infatti è dinamico, si espande e si restringe in continuazione: come il tempo scorre, la circonferenza della sua gola passa dall'essere zero, con i due universi disconnessi, ad un valore massimo, per cui gli universi si connettono, per poi tornare di nuovo ad essere nulla e a separarli. Anche se si raggiungesse l'elevata velocità della luce, si finirebbe schiacciati nella gola senza avere il tempo necessario per attraversare completamente il cunicolo.

3.1.3 *Wormhole* di Morris-Thorne

Buchi neri e ponti di Einstein-Rosen sembrano quindi inadeguati per qualsiasi tipo di vaiggio si voglia intraprendere. Per questo motivo Morris e Thorne si chiesero quali caratteristiche dovrebbe possedere un cunicolo spaziotemporale affinché sia stabile e attraversabile dall'uomo.

Esistono infatti soluzioni esatte all'equazione di campo di Einstein che descrivono wormhole privi delle problematiche citate precedentemente.

Le proprietà auspicabili per un wormhole attraversabile sono le seguenti:

1. La metrica dovrebbe essere a simmetria sferica e statica (indipendente dal tempo).
2. La soluzione deve obbedire ovunque alle equazioni di campo di Einstein.
3. La soluzione deve essere fornita di una gola che connette due regioni asintoticamente piatte dello spaziotempo.
4. Si richiede inoltre che non ci siano orizzonti degli eventi che impedirebbero viaggi in entrambe le direzioni.
5. Le forze mareali devono essere deboli o quantomeno sopportabili.
6. Il tempo che si impiega per attraversare il tunnel deve essere relativamente breve sia per coloro che intraprendono il viaggio, sia per coloro che vi assistono al di fuori del wormhole, da una parte o dall'altra.

7. La massa e i campi che generano la curvatura dello spaziotempo del wormhole devono possedere un tensore di energia-impulso fisicamente ragionevole.
8. La soluzione deve essere stabile sotto perturbazioni, in particolare quelle causate dal passaggio di un astronave.
9. La sua realizzazione deve richiedere una massa e un tempo che siano inferiori a quelli dell'universo.

La proprietà 1 richiede che la metrica sia della forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - b/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.2)$$

dove $\Phi = \Phi(r)$ e $b = b(r)$ sono due funzioni del raggio arbitrarie, da sottoporre a restrizioni. La funzione $b(r)$ determina la forma spaziale del wormhole e sarà per questo chiamata *funzione di forma*, mentre $\Phi(r)$ determina il redshift gravitazionale, per cui prende il nome di *funzione di redshift*. La coordinata r rappresenta la coordinata radiale dello spazio di embedding mostrato in figura 3.1: costituisce il raggio di una sezione della gola del wormhole, che avrà quindi circonferenza pari a $2\pi r$. La variabile r è quindi non monotona: decresce da $+\infty$ fino ad un valore minimo b_0 quando dall'universo inferiore si entra all'interno della gola; dopodiché aumenta fino a tornare $+\infty$ spostandosi fuori dalla gola e verso l'universo superiore.

Ponendo le funzioni $\Phi = 0$ e $b = b_0^2/r$ e definendo la coordinata $l = \pm(r^2 - b_0^2)^{1/2}$, tale da assumere il segno $+$ nell'universo superiore e il segno $-$ in quello inferiore, si ricava un semplice esempio di metrica di un wormhole attraversabile

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

Per calcolare il tensore di Einstein (1.39), si utilizzano le formule (1.25) e (1.32) per la connessione affine e il tensore di Riemann rispettivamente. Se si adotta una base di vettori ortonormali, la quale costituisce il sistema di riferimento proprio di un osservatore che rimane a riposo nel sistema di coordinate (r, θ, ϕ) costanti):

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\hat{t}} &= e^{-\Phi} \vec{e}_t, & \vec{e}_{\hat{r}} &= (1 - b/r)^{1/2} \vec{e}_r, \\ \vec{e}_{\hat{\theta}} &= r^{-1} \vec{e}_\theta, & \vec{e}_{\hat{\phi}} &= (r \sin \theta)^{-1} \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove $\vec{e}_t = c^{-1} \partial/\partial t$, $\vec{e}_r = \partial/\partial r$, $\vec{e}_\theta = \partial/\partial \theta$, $\vec{e}_\phi = \partial/\partial \phi$ costituiscono la base vettoriale delle coordinate di partenza.

In questa base ortonormale la metrica assume la forma standard, ovvero

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

e le 24 componenti non nulle del tensore di Riemann acquiscono una forma più semplice. Da questi si ricava il tensore di Riccisi e lo scalare di curvatura. Alla fine si trovano le componenti non nulle del tensore di Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\hat{t}\hat{t}} &= b'/r^2 \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= -b/r^3 + 2(1 - b/r)\Phi'/r \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove l'apostrofo indica la derivata rispetto alla coordinata radiale r .

Il teorema di Birkhoff a pagina 18 stabilisce che l'unico tipo di soluzione del vuoto a simmetria sferica che soddisfa le equazioni di campo di Einstein è la metrica di Schwarzschild. Avendo constatato che il wormhole di Schwarzschild non è attraversabile, un wormhole che lo sia deve essere alimentato da materia e campi caratterizzati da un tensore di energia-impulso non nullo.

Poiché l'equazione di Einstein (1.47) richiede che il tensore $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ sia proporzionale al tensore $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, questi avranno la stessa struttura algebrica: le sole componenti non nulle del tensore energia-impulso devono essere $T_{\hat{t}\hat{t}}$, $T_{\hat{r}\hat{r}}$ e $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$. Dal momento che i vettori base sono quelli usati da un osservatore statico, ciascuna di queste componenti ha la semplice interpretazione fisica in termini di misure che l'osservatore statico potrebbe fare:

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r)c^2, \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r), \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \quad (3.7)$$

dove $\rho(r)$ è la densità totale di massa ed energia, $\tau(r)$ è la tensione per unità di superficie che si misura in direzione radiale, mentre $p(r)$ è la pressione che si misura in direzione laterale (ortogonale a quella radiale). Il fluido perfetto è un caso speciale delle equazioni (3.7): è caratterizzato da $-\tau = p$.

Le equazioni di campo di Einstein (1.47) valutate per il tensore di Einstein (3.6) e il tensore energia-impulso (3.7) sono

$$b' = \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho \quad (3.8)$$

$$\Phi' = \frac{-8\pi G c^{-4} \tau r^3 + b}{2r(r - b)} \quad (3.9)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - 2(p + \tau)/r \quad (3.10)$$

Le equazioni (3.8) e (3.9) sono rispettivamente la parte temporale e la parte radiale delle equazioni di campo. L'equazione (3.10) invece è la parte $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ laterale, che consiste nell'equazione di equilibrio idrostatico per il materiale che alimenta il wormhole.

È conveniente riscrivere le equazioni (3.8)-(3.10) nella forma seguente:

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G c^{-2} r^2} \quad (3.11)$$

$$\tau = \frac{b/r - 2(r-b)\Phi'}{8\pi G c^{-4} \tau r^2} \quad (3.12)$$

$$p = \frac{r}{2} [(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] \quad (3.13)$$

così da calcolare i parametri che permettono al wormhole di avere le giuste caratteristiche per essere attraversabile.

In alcuni casi si potrebbe richiedere che la curvatura del wormhole prodotta dal tensore di energia-impulso si possa estendere fino ad un raggio arbitrario. In altre circostanze può essere utile confinarla in una sfera di raggio $r = R_S$. Per quest'ultima opzione, le equazioni (3.1.3)-(3.1.3) richiedono che la tensione radiale τ vada regolarmente a zero man mano che si avvicina a $r = R_S$ dal basso, ma permettono a ρ e p di interrompersi con discontinuità. Questa restrizione fa sì che la geometria dello spaziotempo nel vuoto, esterno a $r = R_S$, abbia la forma di Schwarzschild

$$b(r) = b(R_S) = \text{cost} \equiv B \quad \text{per } r > R_S \quad (3.14)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln(1 - B/r) \quad \text{per } r > R_S \quad (3.15)$$

Se non c'è alcun *cut-off* del tensore energia-impulso, si richiede comunque che il campo muoia abbastanza velocemente così che lo spaziotempo sia asintoticamente piatto:

$$b/r \rightarrow 0 \quad e \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Questo tipo di restrizioni si ripercuotono sulla densità, sulla tensione e sulla pressione date dalle equazioni -. Sulla gola del wormhole, dove $r = b = b_0$ e $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$, si ottiene una tensione τ_0 enorme. Nelle vicinanze della gola si può indagare un aspetto di questa tensione definendo la funzione adimensionale

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|} \quad (3.17)$$

La richiesta che il wormhole sia connesso con uno spaziotempo asintoticamente piatto implica che la superficie dell'incapsulamento si apra come mostrato in figura 3.1. Ciò significa che $d^2r/dz^2 > 0$. La superficie dell'embedding $z = z(r)$ deve soddisfare

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (3.18)$$

quindi si ricava che

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2} \quad (3.19)$$

da cui risulta immediato calcolare la derivata seconda

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad \text{sulla o vicino alla gola, } r = b \quad (3.20)$$

Combinando le equazioni e si ottiene

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|} \quad (3.21)$$

Col fatto che $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ e che ρ e b' debbano essere quantità finite, si può riscrivere la condizione come

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \quad \text{sulla o vicino alla gola, } r = b = b_0. \quad (3.22)$$

Quest'ultima condizione, in particolare che $\tau_0 > \rho_0 c^2$, è profondamente problematica, poiché significa che la tensione nella gola deve essere così elevata da superare la densità totale di massa e energia. Un materiale simile con la proprietà $\tau_0 > \rho_0 c^2 > 0$ viene chiamato *esotico* poiché attualmente non se ne conosce la natura.

3.2 Curve chiuse di tipo tempo

Generalmente si è abituati a pensare a curve chiuse soltanto nello spazio tradizionale, ovvero a traiettorie che cominciano (ad un dato istante t_i) in un certo punto dello spazio tridimensionale $x_0 \in \mathbb{R}^3$ e, dopo un determinato percorso, ritornano al punto di partenza x_0 (per un istante $t_f > t_i$). Difatti, la definizione matematica di curva chiusa è la seguente

Curva chiusa. Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e (γ, ϕ) una curva, dove $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ è il sostegno e $\phi \in C(I, \mathbb{R}^n)$ una sua parametrizzazione. Se $\phi(a) = \phi(b)$ si dice che la curva è *chiusa*, o che è un ciclo.

In fisica, quando si vuol descrivere il moto di un corpo, si determina la sua traiettoria $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ e come parametrizzazione si utilizza una funzione del tempo $\phi(t)$ tale che $\gamma = \text{Im}(\phi)$.

Più difficile risulta immaginare una curva che sia chiusa nel tempo. Si ha a che fare con un oggetto di questo tipo quando una traiettoria, avanzando nello spaziotempo, ritorna all'istante di tempo iniziale, senza dover ricorrere ad una inversione temporale. Si richiede infatti che la traiettoria sia fisica e quindi caratterizzata da uno scorrere del tempo in avanti, verso il futuro. Le curve chiuse di tipo tempo (CTC, Closed Timelike Curves) sono quindi linee di universo chiuse.

Un esempio di soluzione all'equazione di Einstein che permette questa tipologia di curve è la metrica di Taub-NUT (Newman, Unti, Tamburino), che descrive un modello

cosmologico omogeneo ma anisotropo, oppure una sua versione 1+1-dimensionale semplificata, data dallo spazio di Misner.

A seguito di questa scoperta, Hawking elaborò la seguente ipotesi [8]

Congettura di protezione cronologica. *Le leggi della fisica non permettono la comparsa di curve temporali chiuse.*

Questo, secondo Hawking, dev'essere valido per non incorrere in violazioni del principio di causalità, almeno su scale che non siano microscopiche, dove entra in gioco la meccanica quantistica.

Un altro esempio di CTC emerge nella soluzione di Kerr trattata nella sezione 2.3 del capitolo precedente. Il buco nero di Kerr è caratterizzato da due orizzonti degli eventi, uno interno all'altro, i quali avvolgono una singolarità ad anello. In questa regione della metrica (2.29), si possono costruire curve chiuse di tipo tempo.

Se si considerano traiettorie che ruotano in ϕ mentre si mantengono θ e t costanti e r ad un piccolo valore negativo, l'elemento di linea lungo un cammino simile è

$$ds^2 \approx a^2 \left(1 + \frac{2GM}{r} \right) d\phi^2 \quad (3.23)$$

il quale è negativo per piccoli r negativi. Dal momento che questi cammini sono curve chiuse di tipo tempo, nelle vicinanze di una singolarità ad anello della metrica di Kerr è possibile viaggiare nel tempo: partendo da un evento del presente e seguendo uno di questi percorsi, si potrebbe raggiungere un evento avvenuto nel passato nonostante si viaggi verso il futuro.

Conclusioni

Si può concludere questa tesi osservando che i viaggi spaziotemporali hanno dei grandi limiti imposti dalla teoria della relatività di Einstein. La velocità non può superare quella della luce nel vuoto, il che implica l'impossibilità di coprire grandi distanze in tempi ragionevolmente umani. Si potrebbe ricorrere al sonno criogenico, col quale ibernare i viaggiatori così da sopravvivere alla durata del viaggio. Così facendo non si risolve però l'avanzare degli anni sulla Terra: gli astronauti in missioni al di fuori del sistema solare dovranno con molta probabilità dire addio a coloro che conoscono sul pianeta natale.

Ulteriori complicazioni sono date dalle condizioni estreme e dalle enormi forze mareali presenti nelle vicinanze di buchi neri o cunicoli spaziotemporali, a meno che non si soddisfino i requisiti formulate da Morris e Thorne che caratterizzano un wormhole attraversabile. In caso contrario, si va presumibilmente incontro al fenomeno noto come *spaghettificazione*, che riduce i corpi in forme sempre più allungate fino alla conseguente rottura. Supponendo che si possa attraversare e addirittura realizzare un wormhole, si avrebbe una scorciatoia che congiunge due regioni lontane del nostro universo e ciò aprirebbe la strada ad esplorazioni intergalattiche, oppure verso universi paralleli.

Un'ipotetica curva temporale chiusa, che costituirebbe una macchina del tempo, permetterebbe di tornare ad eventi del passato, ma non si è certi dei risvolti che questo possa avere. Incontrando il se stesso del passato, si potrebbe violare il principio di causalità e creare paradossi spaziotemporali. Per questo motivo Stephen Hawking formulò la Congettura di protezione cronologica. In ogni caso, anche se fosse possibile viaggiare nel tempo, manca ancora da capire quali sarebbero gli effetti subiti dal viaggiatore stesso, a livello biologico e psicofisico. Ad esempio, gli effetti delle CTC potrebbe influenzare anche il nostro cervello e si potrebbe quindi subire una perdita della memoria, tale da non rendersi conto di aver intrapreso il viaggio temporale.

Bibliografia

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Teoria dei campi*, Roma, Editori Riuniti university press, 2010;
- [2] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, 2009;
- [3] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Cambridge University Press, 2019;
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Inc., 1972;
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago, University of Chicago press, 1984;
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, S. Francisco, W.H. Freeman and co., 1973;
- [7] R. P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Physical Review Letters, vol. 11, n. 5, pp. 237-238, 1963;
- [8] S. W. Hawking, *Chronological Protection Conjecture*, Phys. Rev. D, vol. 46, 603 (1992);
- [9] M. S. Morris, K. S. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, American Journal of Physics, vol. 56, n. 5, pp. 395-412, 1988;

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professor A. Kamenchtchik per avermi guidato e assistito durante l'elaborazione di questa tesi.

Ringrazio di cuore la mia famiglia, che mi ha supportato in ogni modo possibile.

Grazie ai miei amici e compagni di corso, che mi hanno accompagnato lungo questo percorso.

Un ringraziamento particolare va Martina e Cheng Yi per essermi stati vicini.

Vorrei infine ringraziare Arianna, che mi ha incoraggiato fin dal primo giorno ad intraprendere questo viaggio, e Filippo, per essere stato fonte di innumerevoli spunti su cui riflettere.