Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

La mappa logistica come caso di studio per riflettere sull'interdisciplinarità nei sistemi complessi

Relatrice:
Prof.ssa Olivia Levrini

Correlatrice:
Dott.ssa Eleonora Barelli

Presentata da:
Simone Chiusoli

Anno Accademico 2018/2019

Abstract

La tesi riguarda un’analisi, condotta in prospettiva didattica, della mappa logistica come modello di sistema complesso e sviluppa, a partire da questa, una riflessione interdisciplinare, individuando i contributi che la matematica, la fisica e l’informatica offrono per la comprensione del modello.

La tesi è strutturata in tre capitoli.

Nel primo capitolo si presentano i concetti di interdisciplinarità e di sistema complesso partendo da un’analisi della letteratura. Quindi si cercano relazioni concettuali fra i due temi e si inquadra il lavoro della tesi all’interno di un progetto europeo sulla formazione interdisciplinare dei futuri insegnanti denominato IDENTITIES.

Nel secondo capitolo si analizza il modello di mappa logistica e si mostra come da un’equazione differenziale semplice possono conseguire numerose proprietà che fanno della mappa logistica un modello di sistema complesso.

Nel terzo capitolo si guarda al problema della mappa logistica da tre diversi punti di vista disciplinari: matematico, fisico-applicativo e informatico-computazionale. Dopodiché si mostrano le interrelazioni tra i diversi punti di vista disciplinari e la ricostruzione del quadro complessivo che tali ricongiungimenti portano.

Si conclude quindi discutendo le potenzialità didattiche di un’analisi interdisciplinare della mappa logistica al fine di sviscerarne le proprietà che la rendono un modello di sistema complesso.

Indice

Introduzione

La risposta all'esigenza dell'umanità di una migliore e più completa comprensione della realtà, che si è andata rivelando sempre più complessa e articolata, è stata quella della specializzazione, la quale ha portato ad aumentare notevolmente i punti di vista disciplinari che hanno studiato i diversi aspetti della realtà in maniera sempre più analitica. Conseguenza di questo approccio è stato però il raggiungimento di una *iper*-specializzazione, ove i punti di vista disciplinari sono esplorati talmente nel dettaglio da rendere difficile il dialogo con gli esperti in altri ambiti. Contemporaneamente è emerso fortemente un richiamo da parte delle istituzioni europee ed internazionali all'avviamento di collaborazioni interdisciplinari. Secondo recenti report, infatti, sponsorizzare un ampio assortimento di iniziative e spazi organizzativi per incoraggiare l'interdisciplinarità dovrebbe essere una priorità per le politiche europee di ricerca e sviluppo.

Questo è vero in modo particolare nel mondo contemporaneo che ci presenta sfide sempre più complesse e che richiedono approcci sempre più interdisciplinari. Basti pensare al grande tema del cambiamento climatico, dibattuto non solo a livello scientifico ma anche economico, politico e sociale, e che vede la necessità dei contributi da parte di tutte le scienze "dure" e di quelle sociali ed umanistiche.

La complessità dei nuovi problemi, e la visione interdisciplinare necessaria ad affrontarli, sono strettamente connessi al modo di affrontare i cosiddetti *sistemi complessi*, caratterizzati da forti non linearità e comportamenti caotici ed emergenti.

In questa tesi si considera un caso molto specifico di sistema complesso, quello modellizzato dalla mappa logistica, per riflettere sull'interdisciplinarità. Il discorso sarebbe molto vasto e si presta a tanti approcci. Per questa tesi si è deciso di concentrarsi su un esempio molto utilizzato nei corsi introduttivi di fisica applicata per introdurre, attraverso un formalismo semplice, molte proprietà dei sistemi complessi. I sistemi complessi si prestano a riflessioni di carattere interdisciplinare perché "vivono in zone indeterminate di studio" ed è quindi impossibile affrontarli in maniera completa da un solo punto di vista disciplinare (Klein, 2004), sebbene le singole identità disciplinari siano fondamentali per ricostruire il problema.

L'importanza delle discipline nella trattazione didattica dell'interdisciplinarità è alla base dell'approccio elaborato dai gruppi di ricerca in didattica della fisica, della matematica ed informatica del progetto europeo Erasmus+ IDENTITIES, entro cui questo lavoro si colloca. Tale progetto, coordinato dal Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna, ha come obiettivo principale quello di progettare moduli e corsi di formazione da utilizzare in contesti di didattica interdisciplinare rivolta ai docenti in formazione iniziale di fisica, matematica ed informatica.

Entro questo progetto, obiettivo della tesi è analizzare la mappa logistica come modello di sistema complesso, e sviluppare a partire da questa una riflessione interdisciplinare, individuando i contributi che la matematica, la fisica e l'informatica offrono e le relazioni tra queste. Per farlo, la tesi è strutturata in tre capitoli.

Nel primo capitolo si presentano i concetti di interdisciplinarità e sistema complesso. Poiché non esistono definizioni rigorose approvate univocamente dalla comunità scientifica di interdisciplinarità e di sistema complesso, si esplorano diverse prospettive al riguardo e si propone una loro caratterizzazione tramite idee-chiave. Si indaga quindi il possibile collegamento fra complessità ed interdisciplinarità al fine di mostrare il potenziale didattico offerto dallo studio dei sistemi complessi per educare allo studio dei problemi con un approccio interdisciplinare.

Nel secondo capitolo si presenta il modello di *mappa logistica*. In particolare, ci si focalizza sugli aspetti che permettono di caratterizzare la mappa logistica come modello di un sistema complesso.

Nel terzo capitolo si analizza il problema presentato nel secondo capitolo da un punto di vista interdisciplinare, tenendo presente le considerazioni fatte nel primo capitolo. Per farlo, si analizza il problema utilizzando le *lenti* fornite dalle discipline che concorrono alla sua modellizzazione e alla sua analisi (nello specifico, matematica, fisica e informatica). Quindi, si mettono in luce gli aspetti interdisciplinari del problema, ovvero quei concetti tramite i quali si possono evidenziare le interrelazioni tra le diverse discipline.

Capitolo 1

Quadro di riferimento: sistemi complessi ed interdisciplinarità

In questo capitolo si presenta il quadro di riferimento entro cui si colloca il lavoro della tesi. Esso si articola infatti su due rami principali – i sistemi complessi e l'interdisciplinarità – che saranno analizzati sulla base della letteratura di ricerca. Anche il presente capitolo segue la medesima articolazione. Nella sezione 1.1 si cerca di definire i sistemi complessi descrivendo una serie di proprietà legate all'idea di complessità che li differenziano dai sistemi classici. Nella sezione 1.2 si introduce il concetto di interdisciplinarità e si approfondiscono in particolare le prospettive di ricerca in didattica della fisica e della matematica con cui è stata concettualizzata la relazione tra le due discipline; in questa sezione si presenterà l'approccio all'interdisciplinarità alla base del progetto europeo Erasmus+ IDENTITIES, entro il quale questo lavoro di tesi si colloca. Infine, nella sezione 1.3 si elabora su come i sistemi complessi possano offrire spunti didattici per l'interdisciplinarità.

1.1. I Sistemi Complessi

Definire cosa siano i sistemi complessi non è cosa facile ed attualmente non esiste una rigorosa definizione approvata univocamente dalla comunità scientifica (Cilliers, 1999). Questo è in parte dovuto al fatto che tante diverse discipline hanno a che fare con sistemi complessi: sotto questo nome vanno infatti sistemi molto diversi, dal cervello umano all'economia mondiale, dal traffico di una città al clima. Come caratterizzare dunque un singolo fenomeno, chiamato complessità, presente in una ampia varietà di sistemi e tale da accomunarli nonostante la diversità degli ambiti disciplinari a cui appartengono?

Possiamo provare a definire un sistema complesso a partire da citazioni di diversi scienziati che studiano fenomeni complessi a partire da diversi ambiti disciplinari. Ne riportiamo di seguito alcune, tratte da uno stesso *special issue* di Science pubblicato nell'aprile 1999:

> *"In one characterization, a complex system is one whose evolution is very sensitive to initial conditions or to small perturbations, one in which the number of independent interacting components is large, or one in which there are multiple pathways by which the system can evolve. Analytical descriptions of such systems typically require nonlinear differential equations. A second characterization is more informal; that is, the system is "complicated" by some subjective judgment and is not amenable to exact description, analytical or otherwise."* (Whiteside & Ismagilov, 1999)

> *"Complexity theory indicates that large populations of units can self-organize into aggregations that generate pattern, store information, and engage in collective decision-making."* (Parrish & Edelstein-Keshet, 1999)

> *"In a general sense, the adjective "complex" describes a system or component that by design or function or both is difficult to understand and verify. [...] complexity is determined by such factors as the number of components and the intricacy of the interfaces between them, the number and intricacy of conditional branches, the degree of nesting, and the types of data structures."* (Weng, Bhalla & Iyengar, 1999)

> *"Common to all studies on complexity are systems with multiple elements adapting or reacting to the pattern these elements create."* (Brian Arthur, 1999)

È interessante notare le somiglianze tra queste definizioni, la ricorrenza di termini-chiave, ma anche le diversità dovute ai differenti "accenti" posti dai vari autori a seconda dell'ambito disciplinare a cui si riferivano e da cui il loro studio della complessità partiva ed era motivato: la chimica nel primo caso, l'ecologia nel secondo, la biologia nel terzo e l'economia nell'ultimo. È però grazie alla ricorrenza di termini-chiave in tutte le analisi di sistemi complessi, che James Ladyman, James Lambert e Karoline Wiesner, nell'articolo "What is a Complex System?" (2013), sono arrivati non ad una definizione ma ad una *caratterizzazione* dei sistemi complessi attraverso una serie di proprietà. Sottolineiamo sin da ora che queste proprietà non sono né condizioni sufficienti né necessarie per avere sistemi complessi, ma sono da intendersi piuttosto come idee associate alla complessità, che vanno a contraddistinguere questi sistemi rispetto a quelli classici semplici.
Di seguito riportiamo le proprietà elencate nel sopraccitato articolo, fornendone esempi da diversi ambiti delle scienze.

1) ***Non linearità***

   Un'equazione è detta non lineare quando non è esprimibile come combinazione lineare delle variabili presenti e di una costante. Mentre la fisica classica si basa su equazioni differenziali principalmente lineari (ad esempio, le equazioni differenziali ordinarie per l'oscillatore armonico e il decadimento radioattivo), i sistemi complessi sono solo raramente descrivibili tramite equazioni di questo tipo. La struttura non lineare delle equazioni alla base dei modelli di sistemi complessi porta ad importanti implicazioni.

   Prima tra queste, la non validità del principio di sovrapposizione. In un sistema non lineare, infatti, se si scompone il sistema in sottosistemi e se ne calcolano, ad esempio, le evoluzioni separatamente, non si ottiene l'evoluzione del sistema considerato come un unicum.

   Inoltre, i sistemi descritti da questo tipo di leggi esibiscono forme di causalità non lineare. I nessi causali del sistema formano strutture più complicate di catene singole, questo per via dell'esistenza di meccanismi di retroazione.

   Alla non linearità è anche collegata la non proporzionalità fra cause ed effetti: a piccole variazioni di causa possono corrispondere grandi modifiche di effetto. Questo si rispecchia in modo particolare nella determinazione delle condizioni iniziali: se l'evoluzione di un modello descritto da leggi non lineari è calcolata a partire da due condizioni iniziali differenti (anche se arbitrariamente vicine), gli stati del sistema dopo un certo tempo potranno essere molto distanti, senza avere una proporzionalità tra la variazione delle condizioni iniziali e la variazione degli stati finali. Questo fenomeno ha una forte rilevanza anche nella pratica sperimentale riguardo i sistemi non lineari: poiché ogni misura ha un'incertezza, risulta impossibile determinare con precisione arbitraria le condizioni inziali e, di conseguenza, diventa impossibile descrivere l'evoluzione del sistema in maniera deterministica. Ciò che vediamo è il caos. Questo è il concetto di caos deterministico: i sistemi, pur rimanendo governati da leggi deterministiche, esibiscono una caoticità nell'evoluzione delle variabili dinamiche a causa dell'alta sensibilità dalle condizioni inziali.

2) ***Feedback***

Il feedback è una importante condizione necessaria per avere sistemi caotici dinamici. Esso avviene quando vi è una circolarità tra cause ed effetti, ovvero quando gli effetti di un processo tornano a influenzare il processo stesso.

Prendiamo ad esempio uno stormo di uccelli. Ogni membro è influenzato nel suo percorso dai suoi vicini e allo stesso tempo influenza i loro percorsi. In questo modo un suo aggiustamento di percorso, dovuto agli uccelli circostanti, andrà ad influenzare i suoi vicini, i quali a loro volta aggiusteranno il loro percorso influenzando il moto del primo membro.

3) ***Comportamento emergente***

L'interazione tra i singoli elementi che compongono il sistema determina il suo comportamento globale e fa emergere proprietà dette emergenti che possono essere totalmente estranee agli elementi singoli.

Questo elemento mostra l'inadeguatezza del solo paradigma riduzionista per lo studio dei sistemi complessi: infatti, la conoscenza delle singole parti non è sufficiente a spiegare il comportamento del sistema nella sua totalità. I sistemi complessi hanno bisogno di una trattazione che unisce il punto di vista riduzionista (per lo studio delle leggi e delle proprietà dei singoli componenti) con quello olistico (per lo studio delle proprietà del sistema aggregato) per poter essere studiati in maniera più efficace.

Non tutti i sistemi che esibiscono comportamenti emergenti tuttavia sono complessi. Basti qui pensare a un gas ideale che esibisce proprietà riconoscibili come emergenti (pressione e temperatura come variabili macroscopiche che “emergono” da relazioni e leggi microscopiche sulle particelle di fluido) senza essere un sistema complesso (Halley & Winkler, 2008).

4) ***Auto-organizzazione***

Una condizione necessaria affinché un sistema possa essere definito complesso è che esibisca un qualche tipo di ordine spontaneo. Occorre però tenere presente che il concetto di ordine sia relativo alle informazioni dell’osservatore proiettate nel mondo fisico. Possiamo però dire che i sistemi complessi non sono né totalmente *randomici* né totalmente ordinati. Inoltre, l’ordine verso cui tendono è stabile poiché è distribuito e non è prodotto centralmente (si parla di robustezza). Si pensi al già citato esempio dello stormo di uccelli che si aggiusta a ogni piccola perturbazione ovunque essa avvenga (cambiamento del vento, un uccello che per qualche motivo sbaglia percorso…).

5) ***Organizzazione gerarchica***

Spesso nei sistemi complessi sono presenti più livelli di organizzazione che possono essere pensati come se formassero una struttura gerarchica di sistemi e sottosistemi interagenti. Basti pensare al cervello, a un ecosistema o a una cellula. Oppure all’universo stesso con la sua struttura gerarchica di atomi, molecole, composti chimici fino ad arrivare a stelle e galassie.

6) ***Sistema aperto***

Solitamente i sistemi complessi interagiscono continuamente con l’ambiente esterno in maniera significativa. Si pensi a un organismo vivente la cui interazione con l’ambiente causa cambiamenti strutturali interni, e a cui ci si riferisce col termine di adattamento.

In generale i sistemi complessi sono sistemi dinamici caotici e quindi, di fatto, imprevedibili. Per lo studio di questi sistemi diventano necessari metodi computazionali che, attraverso simulazioni al computer, non diano una previsione univoca e deterministica dell’evoluzione del sistema dinamico, ma offrano proiezioni dei futuri scenari possibili.

Inoltre, ai diversi sottosistemi che interagiscono in maniera non lineare fra loro, vengono associate diverse discipline di studio. L’integrazione tra queste discipline diventa necessaria per ottenere una visione d’insieme completa del sistema complesso, ed è compito dell’interdisciplinarità farlo (Newell, 2001).

1.2 L’interdisciplinarità

Se è stato difficile nella sezione precedente caratterizzare i sistemi complessi, ancor di più è complicato dare una definizione di interdisciplinarità. Già da una consultazione di Wikipedia, emergono notevoli differenze tra le definizioni date nella lingua inglese e in quella italiana. La pagina inglese esordisce:

> *Interdisciplinarity or interdisciplinary studies involves the combining of two or more academic disciplines into one activity (e.g., a research project). It draws knowledge from several other fields like sociology, anthropology, psychology, economics etc. It is about creating something by thinking across boundaries.* (Interdisciplinarity, n.d.)

Invece, la pagina italiana, molto più concisa nei contenuti, recita:

> *Il termine interdisciplinarità indica un argomento, una materia, una metodologia o un approccio culturale, che abbraccia competenze di più settori scientifici o di più discipline di studio. È molto diffuso nel linguaggio, scientifico, tecnico e professionale contemporaneo, in quanto evidenzia quel processo di integrazione di competenze che spesso è indispensabile per affrontare in modo completo ed efficace determinati problemi. […] Tale termine non va confuso con multidisciplinarità, pluridisciplinarità, e transdisciplinarità, che hanno significato differente.* (Interdisciplinarità, n.d.)

La versione inglese pone l'accento sul *superamento* dei confini disciplinari per creare qualcosa di nuovo (ad esempio, un progetto di ricerca). La versione italiana, invece, dà una definizione di interdisciplinarità come qualcosa che *abbraccia* più discipline per poter risolvere determinati problemi. Sebbene possa sembrare una sottile distinzione, riteniamo che veicolino idee molto diverse rispetto al ruolo che nell'interdisciplinarità possono in essa ricoprire le discipline. Torneremo su questo aspetto più avanti in questo capitolo.

Al giorno d'oggi l'interdisciplinarità è un tema caldo nel dibattito internazionale, non solo accademico ma anche politico. Ad esempio, il sommario per i decisori politici redatto dalla Commissione Europea (in particolare dai Direttorati per Ricerca e Innovazione, per Sviluppo di politiche e coordinamento, e per Politiche scientifiche, previsioni e dati) nel 2015, dal titolo "Quests for interdisciplinarity: A challenge for the ERA and HORIZON 2020", esordisce sottolineando la priorità da conferire all'interdisciplinarità in tutte le politiche di ricerca e innovazione:

> *"Sponsoring a wide range of initiatives and organizational venues to foster, harness, and leverage collaborative interdisciplinarity should become a key priority for EU research and innovation policy."* (EC, 2015; p. 4)

Dopo aver enunciato la priorità di lavoro, vengono riassunte le ragioni della sua importanza. Qui di seguito riportiamo le principali:

- La scienza deve trovare soluzioni più rapide ed efficaci per grandi sfide e analisi di sistemi complessi che richiedono di attraversare i confini dipartimentali per generare nuova conoscenza;
- Stimolare innovazioni dirompenti per accelerare la creazione di valore in diversi settori e rami della conoscenza attraverso la fusione intellettuale in campi emergenti di grande potenziale (ad esempio, biologia sintetica, nanoscienze, salute globale o città intelligenti);
- Intraprendere e rafforzare la "ricerca trasversale" per colmare il divario tra le comunità di ricerca e il mondo reale al di fuori dell'Accademia e dare il via a un cambiamento epistemico di paradigma.

Il rilievo dell'approccio interdisciplinare deriva innanzitutto da un'evoluzione storica del processo di costruzione della conoscenza in diversi ambiti del sapere. Storicamente, infatti, si è andati incontro a una sempre maggior specializzazione per poter avere una sempre maggiore comprensione della realtà. Sono così aumentati i punti di vista disciplinari che hanno studiato diversi aspetti della realtà. Allo stesso tempo è stata riconosciuta l'importanza di comunicare ed integrare i diversi campi del sapere per riuscire a trovare una sintesi tra i diversi punti di vista specialistici. Lo stesso oggetto come ad esempio un organismo è simultaneamente un oggetto fisico (atomico), chimico (molecolare), biologico (macromolecolare), fisiologico, mentale, sociale e culturale (Klein, 2004). Tuttavia, a causa dell'iperspecializzazione disciplinare a cui si è andati incontro, non è raro che i punti di vista delle diverse discipline su uno stesso sistema o porzione di esso fatichino a "parlarsi" fra loro. Uno dei compiti dell'interdisciplinarità diventa quindi quello di creare un terreno comune che comporti la modifica o la reinterpretazione di componenti o relazioni delle diverse discipline per far emergere i punti in comune e identificare i collegamenti tra i sottosistemi (Newell, 2001).

In questa tesi affronteremo il tema dell'interdisciplinarità focalizzandoci sulle discipline STEM (Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica) ed in particolare sulla relazione tra fisica, matematica ed informatica.

1.2.1 L'interdisciplinarità tra matematica e fisica

Sebbene i diversi oggetti di studio, fin dalla loro nascita, le due discipline matematica e fisica sono state particolarmente interconnesse. Già Galileo, ne "Il Saggiatore" aveva riconosciuto che il linguaggio che viene utilizzato dalla fisica era quello matematico, perché matematico era il linguaggio della natura:

> *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a*

intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. (Galilei, 1623)

Oggi nel dibattito sull'interdisciplinarità tra matematica e fisica si corre il rischio di banalizzare questa vitale relazione. Da un lato, la matematica rischia di essere intesa come un mero strumento nelle mani della fisica. Dall'altro, la fisica può essere vista dalla matematica solamente come un suo contesto applicativo.
Analizzando invece lo sviluppo storico delle due discipline, si può riconoscere che le due discipline hanno interagito in modi non "strumentali" nel processo di evoluzione modificandosi a vicenda, andandosi meglio a definire nel loro significato profondo e dando luogo ad innovazioni (Tzanakis, 2016). Spesso il formalismo matematico può portare infatti a un cambio nell'interpretazione fisica dei fenomeni, fino ad istigare rivoluzioni scientifiche (Brush, 2015). Dall'altra parte lo studio di sistemi fisici può portare progressi alla matematica e influenzarne il metodo di lavoro.

Per portare due semplici esempi, Newton sviluppò il calcolo differenziale in maniera astratta e tipicamente matematica per poter effettuare studi inerenti la meccanica, oggi il principale argomento di studio della fisica di base. D'altra parte, l'introduzione di grandezze come il rotore e la divergenza sono nate da esigenze della fisica, per descrivere le grandezze e le leggi dell'elettromagnetismo, ma hanno un loro significato anche se analizzate dal solo punto di vista matematico.

Un esempio di analisi interdisciplinare matematico-fisica che mette in luce l'interessante mutua relazione tra le due discipline è quella elaborata da Branchetti, Levrini e Cattabriga nell'articolo "Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: the case of the blackbody" (2019). In questo lavoro si sviluppa un'analisi della radiazione del corpo nero in cui si mostra come la matematica fornisca strutture formali che ci permettono di ragionare su fenomeni nuovi rispetto a quelli noti (Kragh, 2015). La matematica, come strutturale del modello fisico, porta all'interdisciplinarità tra le due discipline che diventano un tutt'uno nello studio dei problemi influenzandosi e modificandosi reciprocamente anche da un punto di vista epistemologico (Branchetti et al., 2019).

1.2.2 *L'interdisciplinarità nella didattica e il progetto IDENTITIES*

Il dibattito sul significato della mutua relazione tra fisica e matematica è un tema chiave della ricerca in didattica di queste discipline. Capire – e talvolta ri-costruire (Duit, Gropengießer, Kattmann, Komorek & Parchmann, 2012) – il ruolo che le due discipline ricoprono nell'affrontare diversi temi (sia temi di frontiera sia temi che sono ad oggi presenti in tutti i curricula scolastici), è fondamentale per costruire approcci didattici innovativi che tengano conto della complessità della relazione tra le discipline. In questa prospettiva si colloca il progetto IDENTITIES che costituisce il quadro di riferimento entro cui questo lavoro di tesi è stato condotto.

Il progetto IDENTITIES è un progetto europeo Erasmus+ avviato nel Settembre 2019 e di durata triennale. Il titolo si riferisce all'acronimo "Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to InTerdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges". Il partenariato è costituito da cinque Università: l'Università di Bologna che, tramite il Dipartimento di Fisica e Astronomia, coordina il progetto, l'Università di Parma, l'Università di Creta, l'Università di Montpellier e l'Università di Barcellona.
Obiettivo del progetto è progettare moduli e corsi di formazione innovativi da utilizzare in contesti di didattica interdisciplinare rivolta a docenti in formazione iniziale (principalmente, studenti dei corsi di laurea magistrale in didattica della fisica, della matematica e dell'informatica).

Questa esigenza nasce dal fatto che le sfide della società contemporanea (tra cui il cambiamento climatico, l'intelligenza artificiale, le nanotecnologie e i big data) necessitano l'acquisizione di competenze e conoscenze interdisciplinari che il corrente insegnamento delle scienze e della matematica, organizzato in discipline, non è in grado di fornire. Anche gli insegnanti sono formati tradizionalmente dai curricula universitari entro ambiti disciplinari molto rigidi, mentre manca una loro preparazione interdisciplinare sistematica.

Gli aspetti chiave innovativi del progetto IDENTITIES riguardano:

1) L’attenzione a due tipi di temi interdisciplinari: a) argomenti STEM avanzati intrinsecamente interdisciplinari (ad esempio il cambiamento climatico, l’intelligenza artificiale, e le applicazioni delle tecnologie quantistiche) il cui insegnamento richiede il supporto di nuovi materiali; b) temi interdisciplinari curricolari riguardanti “problemi di frontiera” (ad esempio il corpo nero) che se opportunamente trattati potrebbero rendere le discipline più coinvolgenti, rilevanti e significative.
2) L’approccio all’interdisciplinarità esplicitamente finalizzato a superare due forme di banalizzazione: l’interdisciplinarità come a-disciplinarità (composta solo da temi trasversali) o l’interdisciplinarità come un uso strumentale dei concetti presi da una disciplina (per esempio la matematica) per risolvere un problema formulato in un’altra disciplina (per esempio la fisica). Il rispetto delle identità epistemologiche delle singole discipline (*identities*) e la ricerca di una emergente “epistemologia dell’interdisciplinarità” sono i principi alla base del progetto e dei moduli che saranno da esso sviluppati.
3) La scelta di analizzare l’interdisciplinarità anche attraverso un’ottica linguistica per comparare i linguaggi di diverse comunità e riconoscere i discorsi comuni che emergono da esse, caratterizzando così i “linguaggi dell’interdisciplinarità”.

Gli aspetti più innovativi del progetto riguardano l’idea di costruire l’interdisciplinarità attraverso “attivatori epistemologici e linguistici”, concetti epistemologici e linguistici o temi in grado di attivare un meta-livello di analisi dei contenuti disciplinari per confrontarle e interconnetterle, muovendosi attraverso i dettagli e il disegno complessivo.
Concretamente, il progetto elaborerà i seguenti risultati (Intellectual Outputs):

- moduli di insegnamento sull’interdisciplinarità emergente in materie STEM avanzate;
- moduli di insegnamento su temi curricolari interdisciplinari;
- guide per progettare e condurre moduli sull’interdisciplinarità curricolare e sull’interdisciplinarità STEM emergente nella formazione iniziale degli insegnanti;
- Risorse Didattiche Aperte per moduli misti (con parti online e in presenza) e MOOCs (Massive Open Online Courses);
- raccomandazioni per i decisori politici per promuovere l’interdisciplinarità e prospettive innovative per l’educazione all’insegnamento nelle materie STEM.

1.3 Sistemi complessi ed interdisciplinarità

Dopo aver trattato nelle sezioni precedenti le proprietà dei sistemi complessi ed aver introdotto il dibattito sul tema dell'interdisciplinarità, proponiamo ora alcune riflessioni che permettono di intersecare questi due piani, apparentemente distanti.

Una prima analogia tra l'interdisciplinarità e i sistemi complessi la si può notare nel fatto che i problemi reali tendono ad essere sia complessi che interdisciplinari. Sia che si tratti di agricoltura, di industria, di biotecnologie, di finanza o di genetica, ci si trova a dover studiare sistemi complessi che necessitano di una trattazione interdisciplinare, affrontata da molteplici prospettive disciplinari esperte (Klein, 2004).
Esiste poi un'analogia tra l'abbandono del paradigma riduzionista nello studio olistico dei sistemi complessi e l'abbandono dello studio delle singole discipline specializzate come realtà separate in virtù di una visione interdisciplinare che è più della somma delle parti.
Inoltre, notiamo che sia nei sistemi complessi sia nell'interdisciplinarità sono riconoscibili interazioni (tra agenti e processi nel caso dei sistemi complessi, tra prospettive disciplinari nel caso dell'interdisciplinarità) che non solo si sommano o si compongono, ma provocano una ristrutturazione e una nuova organizzazione dell'oggetto di studio di partenza (il sistema complesso in esame, nel primo caso, il tema interdisciplinare trattato, nel secondo) (Klein, 2004).
Infine ricordiamo che il tentativo di definire in maniera univoca i sistemi complessi è già di per sé un problema interdisciplinare che mostra come sistemi complessi e interdisciplinarità siano legati fra loro fin dal processo di dover definire cosa sia un sistema complesso.

Il legame sembra talmente forte che, secondo alcuni autori, il compito dell'interdisciplinarità stia proprio nel focalizzarsi sui modelli di sistemi complessi (Newell, 2001).

Per via di tutte le analogie evidenziate e a fronte di una richiesta sempre più pressante di integrare le discipline ed educare all'interdisciplinarità a tutti i livelli scolastici ed accademici, i sistemi complessi possono essere considerati una risorsa per mostrare come, per studiare uno stesso sistema, vengano utilizzati approcci apparentemente diversi. Infatti, la relazione tra diversi elementi in studio costituisce un concetto chiave per la complessità (Caetano et al., 2000). Dunque, il fatto che i sistemi complessi offrano una forte validazione al processo interdisciplinare li rende meritevoli di un ruolo centrale nell'epistemologia interdisciplinare, e quindi nella didattica interdisciplinare.

L'interdisciplinarità diventa inoltre molto importante in ambito didattico in quanto favorisce l'apprendimento dello studente che ha la necessità di unificare in una sintesi le informazioni delle diverse discipline. Possiamo arrivare a tale conclusione grazie agli studi effettuati dallo psicologo Jean Piaget durante la metà del XX secolo che ci mostrano come l'apprendimento non avvenga tramite una giustapposizione delle nuove informazioni alle vecchie, ma tramite una continua riorganizzazione delle strutture apprese.

Mostrare come le diverse discipline collaborino e concorrano alla trattazione di uno stesso sistema può inoltre essere rilevante didatticamente anche al fine della comprensione delle singole discipline e delle motivazioni per le quali le stesse vengono studiate.

Capitolo 2

Il modello di mappa logistica

Dopo aver dato definizioni generali ed elencato nel capitolo 1 le proprietà principali dei sistemi complessi, andiamo ora ad analizzare un particolare modello di sistema complesso: la mappa logistica. Scegliamo questo caso di studio in quanto mostra come da un'equazione differenziale molto semplice può emergere un comportamento caotico, descrivendo così un sistema che esibisce proprietà tipicamente complesse.

La mappa logistica è una mappa polinomiale di secondo grado, introdotta dal biologo Robert May nel 1976. May elaborò la mappa a partire dall'equazione logistica del matematico Pierre François Verhulst che, tra il 1838 e il 1847, la utilizzò per descrivere l'evoluzione di una popolazione nel tempo.

L'equazione logistica di Verhulst ha la forma di un'equazione differenziale di primo ordine non lineare:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)(1 - f(x))$$

e sua soluzione è la funzione logistica (sigmoide):

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-r(x-x_0)}}$$

con:

L = il massimo valore della curva,

x_0 = il valore centrale di x della funzione,

r = frequenza di riproduzione riuscita.

La discretizzazione dell'equazione logistica porta alla mappa logistica elaborata da May:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

dove x_n è un valore compreso tra 0 e 1 che rappresenta la frequenza di popolazione esistente sulla massima popolazione possibile e r è un parametro positivo.

Questa mappa riproduce due effetti identificabili nei due termini (rx_n) e $(1 - x_n)$:

- *riproduzione* (rx_n): la popolazione cresce proporzionalmente alla popolazione corrente con r termine di proporzionalità che identifica la frequenza di riproduzione riuscita;
- *mortalità* $(1 - x_n)$: la popolazione non può superare la portata dell'ambiente in cui cresce. Questo termine si avvicina a zero man mano che la popolazione raggiunge il suo valore massimo possibile.

2.1 Dipendenza dal parametro r

In base alla scelta del parametro r si osservano diversi comportamenti:

- $0 < r < 1$: la popolazione va velocemente a zero e si estingue, indipendentemente dal valore iniziale di x_n;
- $1 \leq r < 2$: la popolazione tende al valore $\frac{r-1}{r}$ indipendentemente dal valore iniziale di x_n (un esempio dell'indipendenza dal valore iniziale è mostrato in Tabella 1 dove da un valore di r pari ad 1.5 si arriva allo stesso valore finale stabile di popolazione a partire da una frequenza di popolazione iniziale pari a 0.0001, 0.5 e 0.9999);
- $2 \leq r < 3$: la popolazione tende al valore $\frac{r-1}{r}$ dopo averci oscillato attorno;
- $3 \leq r < (1+\sqrt{6}) \approx 3.44949$: la popolazione arriva ad oscillare tra due valori dipendenti da r;
- $1+\sqrt{6} \leq r < 3.56995$: la popolazione arriva ad oscillazioni periodiche tra 2^k valori;
- $3.56995 \leq r < 4$: non ci sono più oscillazioni di periodo finito. Al valore 3.56995 avviene l'insorgenza del caos;

- $r \geq 4$: la popolazione diverge oltre il valore massimo.

Tabella 1: Indipendenza della popolazione finale dalla popolazione iniziale con r fissato (qua uguale a 1.5).

X_0=0.0001	X_0=0.5	X_0=0.9999
X_{92}=0.333333	X_{92}=0.333333	X_{92}=0.333333
X_{93}=0.333333	X_{93}=0.333333	X_{93}=0.333333
X_{94}=0.333333	X_{94}=0.333333	X_{94}=0.333333
X_{95}=0.333333	X_{95}=0.333333	X_{95}=0.333333
X_{96}=0.333333	X_{96}=0.333333	X_{96}=0.333333
X_{97}=0.333333	X_{97}=0.333333	X_{97}=0.333333
X_{98}=0.333333	X_{98}=0.333333	X_{98}=0.333333
X_{99}=0.333333	X_{99}=0.333333	X_{99}=0.333333
X_{100}=0.333333	X_{100}=0.333333	X_{100}=0.333333

Tabella 2: Popolazioni al variare di r nei principali intervalli a partire dalla popolazione iniziale $x_n = 0.5$.

r=0.5	r=1.7	r=2.8	r=3.2	r=3.45	r=3.8
$X_{991}\approx 10^{-300}$	$X_{991}\approx$0.411765	$X_{991}\approx$0.642857	$X_{991}\approx$0.799455	$X_{991}\approx$0.847358	$X_{991}\approx$0.855332
$X_{992}\approx 10^{-300}$	$X_{992}\approx$0.411765	$X_{992}\approx$0.642857	$X_{992}\approx$0.513045	$X_{992}\approx$0.446231	$X_{992}\approx$0.470209
$X_{993}\approx 10^{-300}$	$X_{993}\approx$0.411765	$X_{993}\approx$0.642857	$X_{993}\approx$0.799455	$X_{993}\approx$0.852526	$X_{993}\approx$0.946628
$X_{994}\approx 10^{-300}$	$X_{994}\approx$0.411765	$X_{994}\approx$0.642857	$X_{994}\approx$0.513045	$X_{994}\approx$0.433754	$X_{994}\approx$0.191991
$X_{995}\approx 10^{-301}$	$X_{995}\approx$0.411765	$X_{995}\approx$0.642857	$X_{995}\approx$0.799455	$X_{995}\approx$0.847359	$X_{995}\approx$0.589495
$X_{996}\approx 10^{-301}$	$X_{996}\approx$0.411765	$X_{996}\approx$0.642857	$X_{996}\approx$0.513045	$X_{996}\approx$0.446228	$X_{996}\approx$0.919565
$X_{997}\approx 10^{-301}$	$X_{997}\approx$0.411765	$X_{997}\approx$0.642857	$X_{997}\approx$0.799455	$X_{997}\approx$0.852525	$X_{997}\approx$0.281069
$X_{998}\approx 10^{-302}$	$X_{998}\approx$0.411765	$X_{998}\approx$0.642857	$X_{998}\approx$0.513045	$X_{998}\approx$0.433756	$X_{998}\approx$0.767864
$X_{999}\approx 10^{-302}$	$X_{999}\approx$0.411765	$X_{999}\approx$0.642857	$X_{999}\approx$0.799455	$X_{999}\approx$0.847361	$X_{999}\approx$0.677346
$X_{1000}\approx 10^{-302}$	$X_{1000}\approx$0.411765	$X_{1000}\approx$0.642857	$X_{1000}\approx$0.513045	$X_{1000}\approx$0.446225	$X_{1000}\approx$0.830483

In Tabella 2 viene mostrato il comportamento della popolazione dopo un certo numero di iterazioni a seconda del valore r e dell'intervallo di cui fa parte a partire da una popolazione iniziale x_n=0.5. In particolare, a ogni colonna è associato uno dei primi 6 intervalli di valore di r descritti qui sopra.

Forniamo ora una rappresentazione grafica del comportamento della mappa per i suddetti intervalli:

- $0 < r < 1$: il sistema collassa sempre a zero (Figura 1);

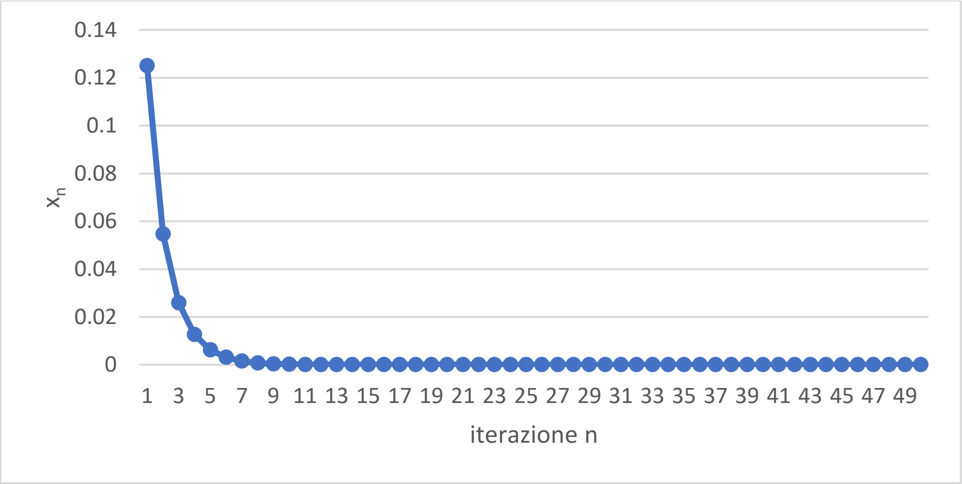

Figura 1. Evoluzione della popolazione all'aumentare delle iterazioni quando $0<r<1$ (qua r=0.5 a titolo di esempio; x_0=0.5).

- $1\leq r < 3$: il sistema tende a un preciso livello di popolazione (Figura 2 e Figura 3);

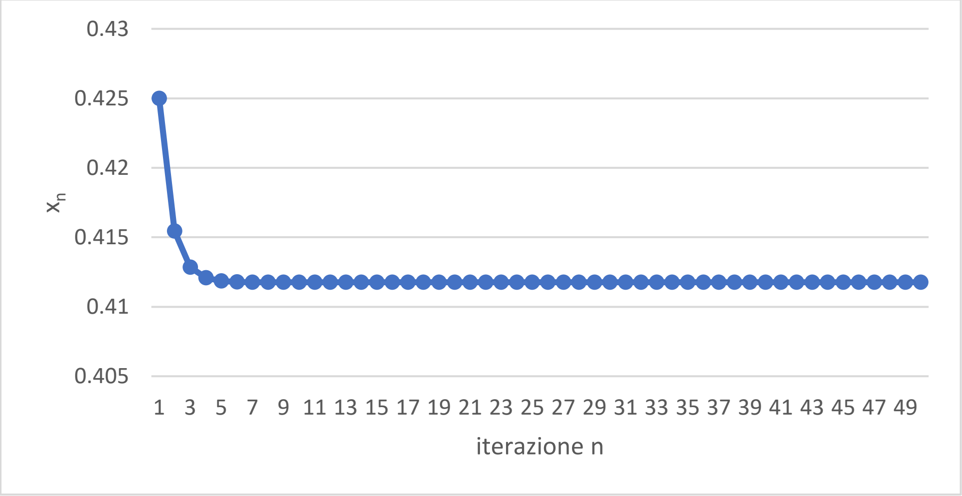

Figura 2. Evoluzione della popolazione all'aumentare delle iterazioni quando $1\leq r<2$ (qua r=1.7 a titolo di esempio; x_0=0.5).

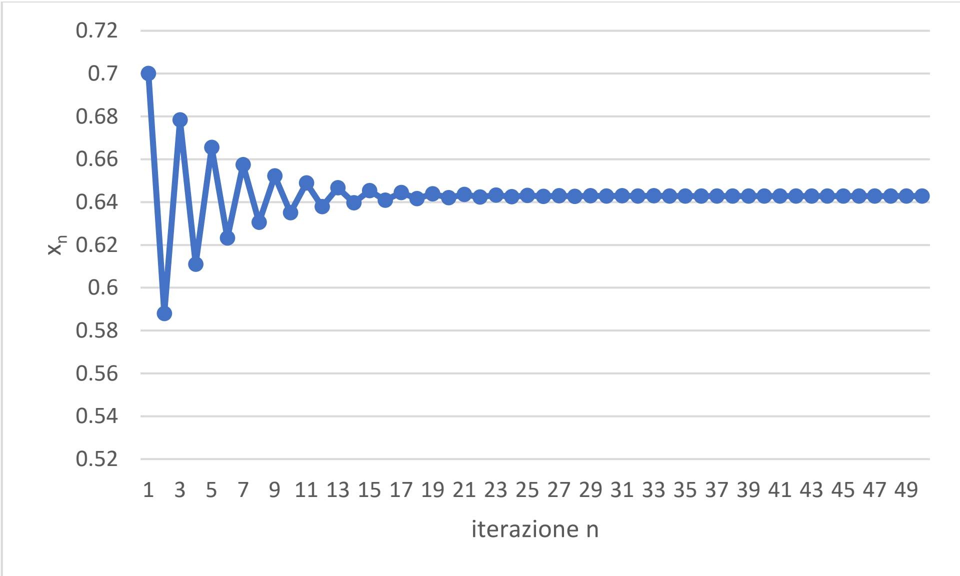

Figura 3. Evoluzione della popolazione all'aumentare delle iterazioni quando $2 \leq r < 3$ (qua $r=2.8$ a titolo di esempio; $x_0=0.5$). Si noti che questa oscilla prima di stabilizzarsi.

- $3 \leq r < 1+\sqrt{6}$: il sistema oscilla attorno a due valori (vedi Figura 4);

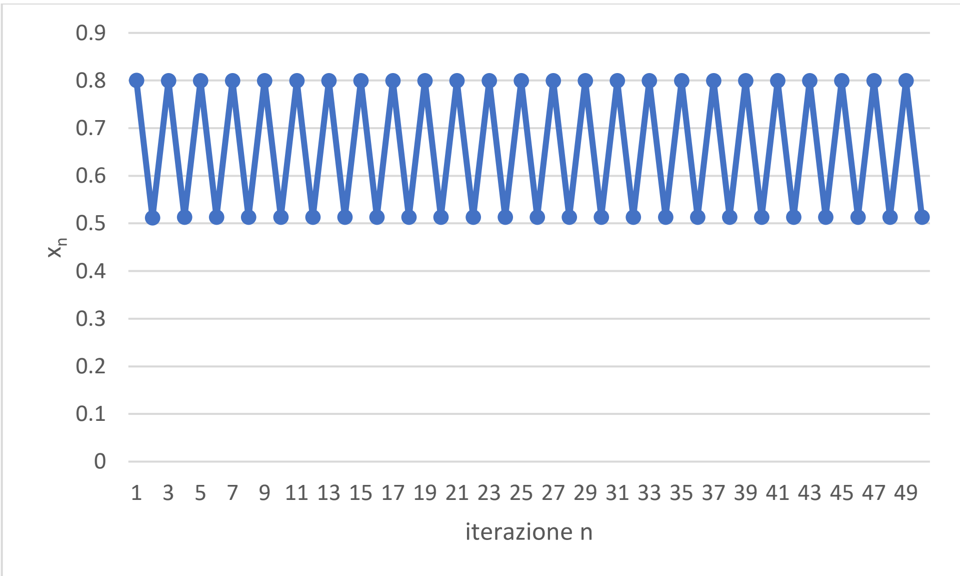

Figura 4. Evoluzione della popolazione all'aumentare delle iterazioni quando $3 \leq r < 1+\sqrt{6}$ (qua $r=3.2$ a titolo di esempio; $x_0=0.5$).

- $1+\sqrt{6} \leq r < 3.56995$: il sistema oscilla attorno a 2^k valori (4,8,16,32…) (vedi Figura 5);

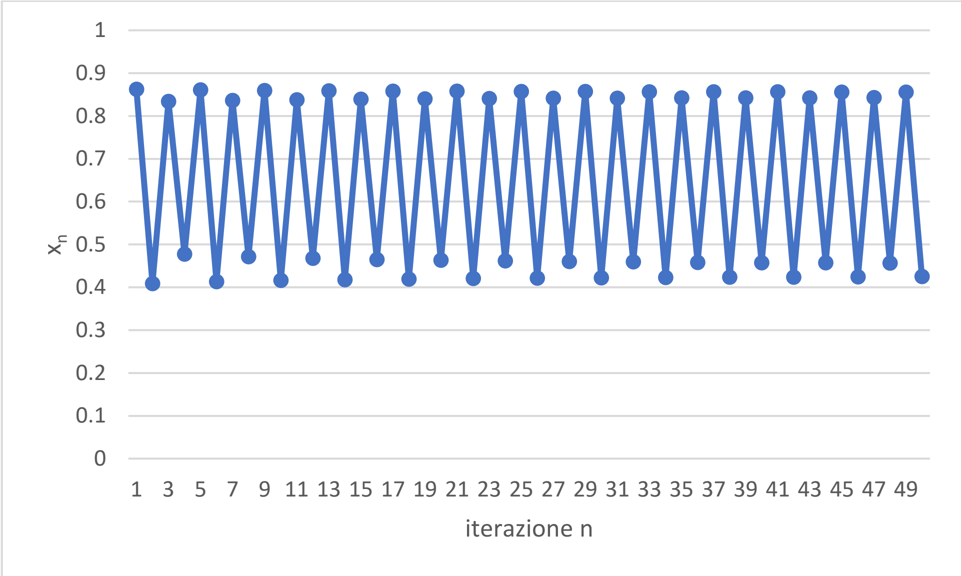

Figura 5. Evoluzione della popolazione all'aumentare delle iterazioni quando $1+\sqrt{6} \leq r < 3.56995$ (qua $r=3.45$ a titolo di esempio; $x_0=0.5$). In questo caso i valori attorno a cui il sistema oscilla sono 4.

- $3.56995 \leq r < 4$: il diagramma mostra un valore diverso per ogni generazione lanciata: non esistono punti fissi o cicli limite (vedi Figura 6).

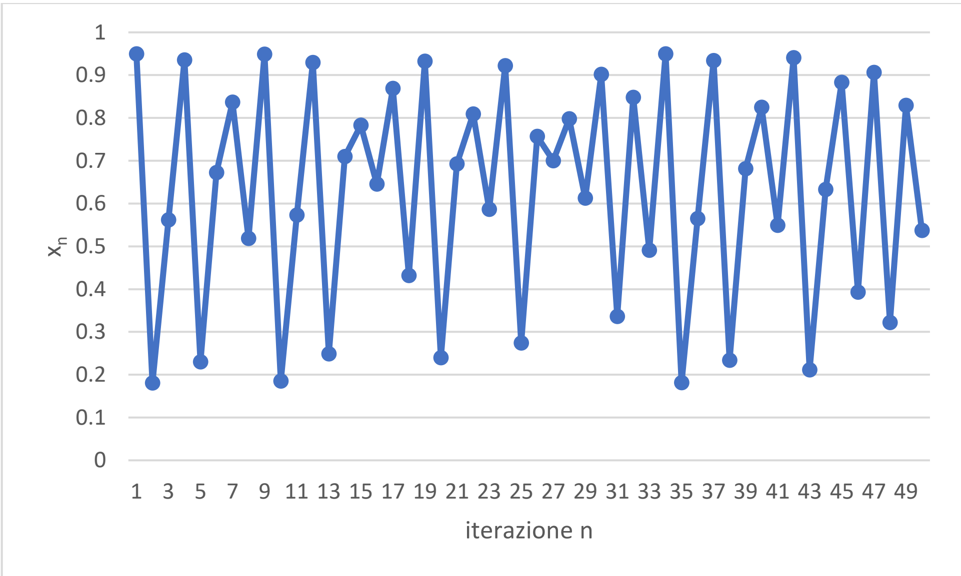

Figura 6. Evoluzione della popolazione all'aumentare delle iterazioni quando $3.56995 \leq r < 4$ (qua $r=3.8$ a titolo di esempio; $x_0=0.5$).

2.2 Attrattori e biforcazione

Un attrattore è un sottoinsieme aperto dello spazio delle fasi verso il quale converge un sistema dinamico dopo un certo numero di iterazioni, indipendentemente dalle condizioni iniziali. L'esistenza degli attrattori nei sistemi dinamici reali è dovuta al fatto che i sistemi reali sono solitamente dissipativi.

Esistono diversi tipi di attrattori:

- *Punto fisso*: punto corrispondente ad uno stato del sistema che rimane costante. Nel caso della mappa logistica se fissiamo r tra 0 e 1 abbiamo che x_n=0 è il punto fisso attrattore.
- *Ciclo limite*: orbita periodica del sistema isolata. Nel caso della mappa logistica se fissiamo r tra 3 e $1+\sqrt{6}$ il sistema oscilla tra due valori dipendenti da r.
- *Attrattore strano*: attrattore con dimensione frattale o la cui dinamica è caotica. Lo osserviamo dopo l'insorgenza del caos per r compreso tra 3.56995 e 4. Il sistema oscilla senza mai ripetere se stesso.

Si ha invece una biforcazione quando una piccola variazione dei valori dei parametri causa un cambiamento qualitativo o topologico del sistema: cambia cioè il numero di punti di equilibrio e/o la loro natura. Nel caso della mappa logistica, è possibile ottenere un diagramma di biforcazione in funzione del parametro r (alle ascisse) rappresentando sull'asse delle ordinate i valori delle popolazioni da una certa iterazione in poi. Tale diagramma è riportato in Figura 7.

Anche da questo grafico possiamo notare i comportamenti evidenziati nel paragrafo precedente in dipendenza dal parametro r. In particolare, per $3.56995 \le r < 4$, sorpassiamo la cosiddetta insorgenza del caos (si veda Figura 6) e siamo in presenza di una struttura frattale: non importa quanto ingrandiamo l'immagine, osserviamo la stessa struttura di biforcazione a ogni scala e non siamo quindi in grado di dire se l'immagine sia ingrandita o meno, o di quanto sia ingrandita nel caso lo sia, avendo come unica informazione l'immagine stessa. Questa proprietà delle strutture frattali è detta *auto-similarità* ed è evidenziata nell'immagine in Figura 8.

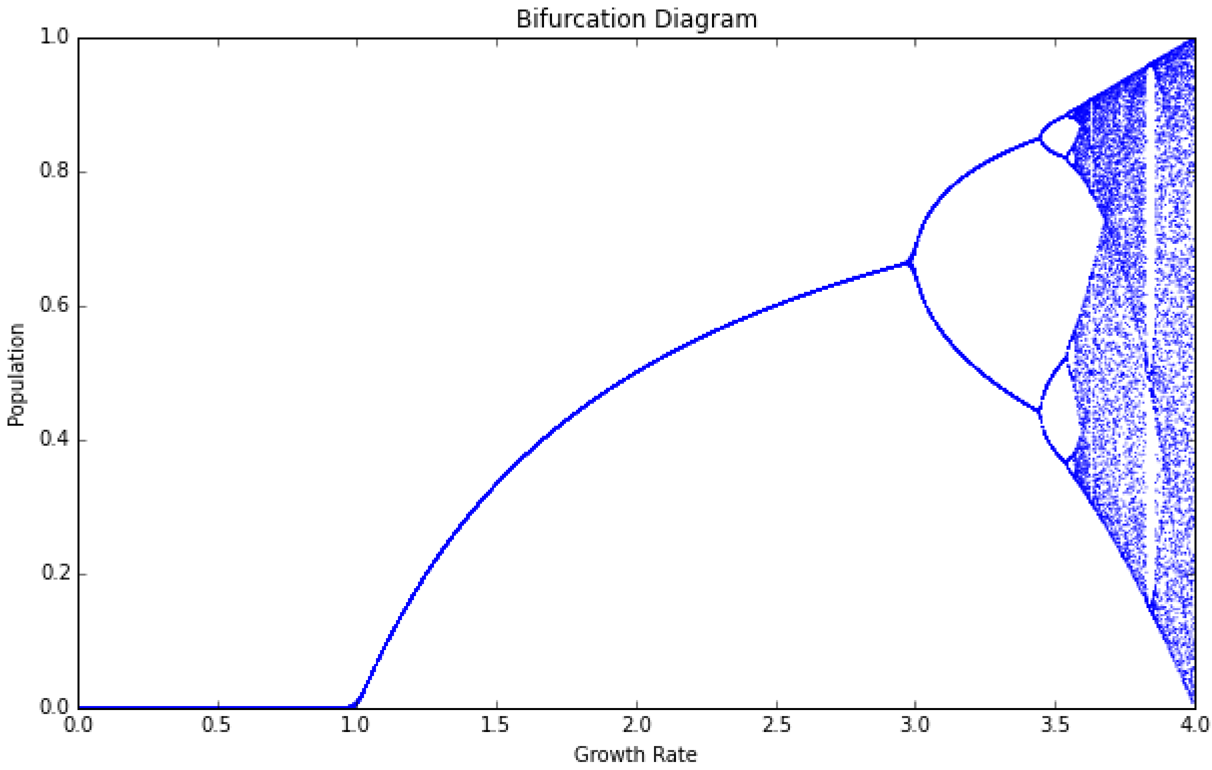

Figura 7. Diagramma di biforcazione.

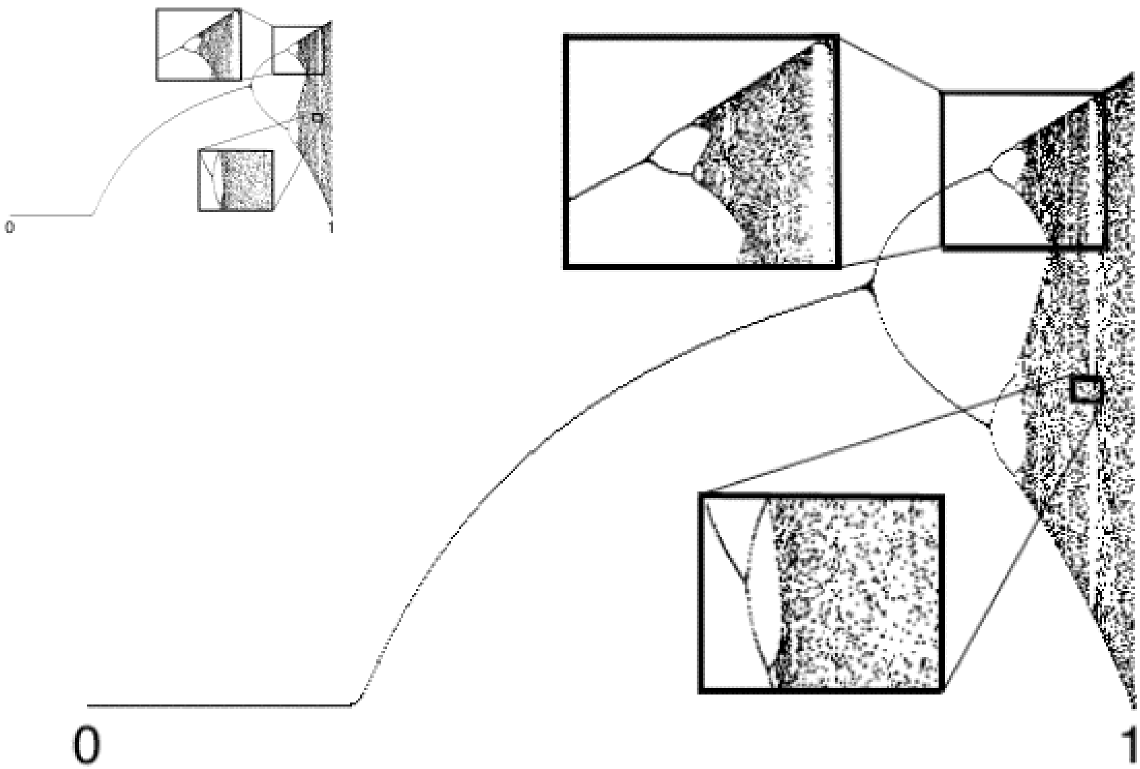

Figura 1. Struttura frattale del diagramma di biforcazione.

2.3 La parabola logistica

Alla mappa logistica ci si riferisce anche come "parabola logistica". Questo perché se andiamo a rappresentare graficamente x_{n+1} in funzione di x_n in regime caotico (ovvero per 3.56995≤r<4) otteniamo una parabola. In Figura 9 si *plottano* diverse parabole al variare del valore del parametro r da 3.6 a 3.95, con intervalli di 0.5.

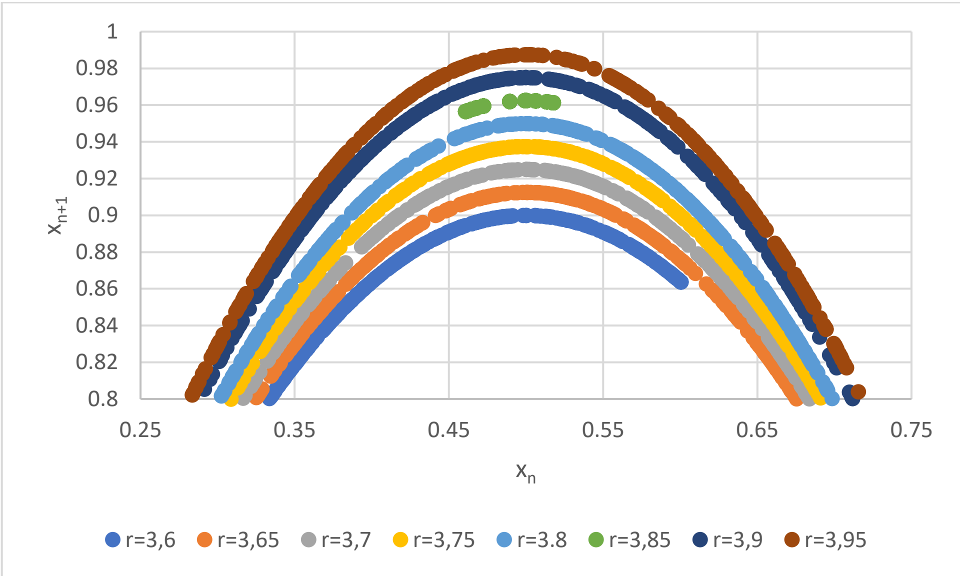

Figura 2. Parabola logistica in regime caotico (x_0 = 0.5)

Da questo grafico possiamo mettere in evidenza la differenza tra caos e casualità.

Osservando un grafico come quello di x_n in funzione di n in Figura 6 o come il diagramma di biforcazione di Figure 7 e 8 non riusciamo a determinare dalle irregolarità osservate se il sistema sia o non sia *randomico*. La parabola logistica mostra invece una regolarità non osservabile nei sistemi *randomici*. Questo fatto ci porta a concludere la natura caotica – non *randomica* - del sistema in esame.

Dal grafico in Figura 9, notiamo che per 3.85 sembra che ci siano cicli limite. In effetti se ingrandiamo il diagramma di biforcazione per r=3.85 ritroviamo dei cicli limite, come mostrato in Figura 10.

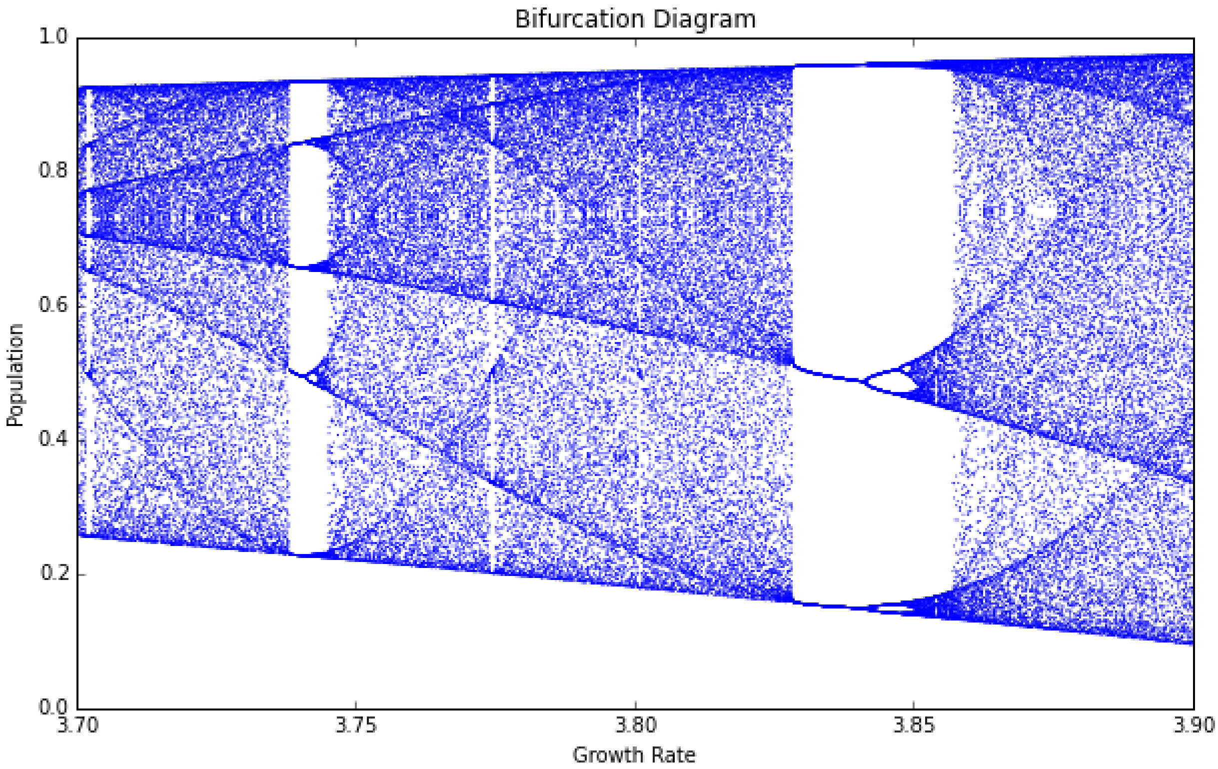

Figura 3. Ingrandimento del diagramma di biforcazione di Figura 7 in regime caotico (3.70<r<3.90).

2.4 Il caos nella mappa logistica

Abbiamo già incontrato il caos deterministico anche nelle sezioni precedenti ma qui andiamo a dettagliare l'analisi in modo più sistematico.

Se nella mappa logistica prendiamo due valori molto vicini di x_0 come 0.80000 e 0.80001 e un valore di r compreso tra 3.56995 e 4 (intervallo che abbiamo associato al regime caotico), osserviamo che, dopo poche iterazioni, le curve che descrivono la popolazione divergono l'una dall'altra: è il fenomeno dell'alta sensibilità dalle condizioni iniziali dal quale emerge un comportamento caotico.

Tal comportamento è dovuto alla non linearità del sistema ed emerge dalla struttura iterativa della mappa: il termine quadratico nella formula della mappa causa una sensibilità quadratica agli errori che si diffonde a ogni iterazione.

Il modello, pur seguendo leggi deterministiche molto semplici, mostra un comportamento caotico determinato dalla sensibilità dalle condizioni iniziali: è il caos deterministico. Il fatto che le misure sperimentali non siano mai infinitamente precise fa sì che diventi impossibile la previsione dello sviluppo futuro del sistema dopo un certo numero di iterazioni.

In Tabella 3 e in Figura 9 vengono mostrate le evoluzioni delle popolazioni per iterazione con r=3.8 a partire da due valori di popolazione iniziale molto vicini fra loro: 0.80000 e 0.80001. Come si può notare, gli sviluppi delle due popolazioni sono completamente differenti.

Tabella 3: Evoluzione di due popolazioni a partire da valori molto vicini di popolazione iniziale con r=3.8.

X_0=0.80000	X_0=0.80001
X_{25}≈0.6466	X_{25}≈0.232207
X_{26}≈0.868332	X_{26}≈0.677489
X_{27}≈0.43446	X_{27}≈0.830291
X_{28}≈0.933677	X_{28}≈0.535451
X_{29}≈0.235312	X_{29}≈0.945224
X_{30}≈0.683773	X_{30}≈0.196746
X_{31}≈0.821664	X_{31}≈0.600541
X_{32}≈0.556821	X_{32}≈0.911588
X_{33}≈0.937731	X_{33}≈0.306263
X_{34}≈0.221888	X_{34}≈0.807371

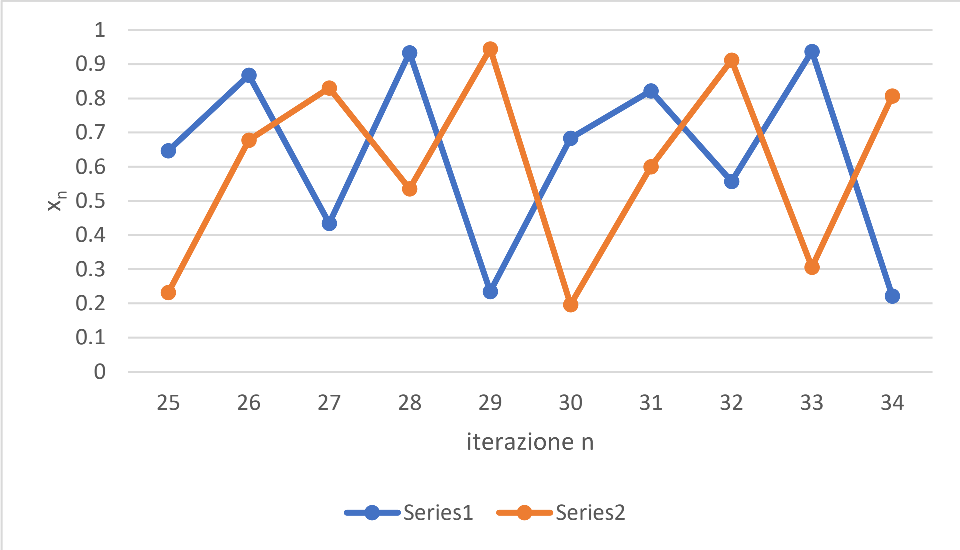

Figura 4. Evoluzione di due popolazioni i cui valori iniziali sono 0.80000 (per la Serie 1) e 0.80001 (per la Serie 2), con r=3.8 fissato.

Si ha un comportamento analogo anche fissando x_0 e prendendo due valori di r molto vicini fra loro (si vedano la Tabella 4 e la Figura 10 dove viene fissato il valore di x_0=0.5 e si noti la diversa evoluzione della popolazione a partire dai valori r=3.80000 e r=3.80001).

Tabella 4: Evoluzione di una popolazione a partire dalla stessa popolazione iniziale x_0=0.5 per r molto vicini.

r=3.80000	r=3.80001
$X_{25}\approx 0.274354$	$X_{25}\approx 0.678177$
$X_{26}\approx 0.756518$	$X_{26}\approx 0.829363$
$X_{27}\approx 0.699954$	$X_{27}\approx 0.537776$
$X_{28}\approx 0.79807$	$X_{28}\approx 0.94458$
$X_{29}\approx 0.612387$	$X_{29}\approx 0.198926$
$X_{30}\approx 0.902003$	$X_{30}\approx 0.605549$
$X_{31}\approx 0.335897$	$X_{31}\approx 0.907668$
$X_{32}\approx 0.847666$	$X_{32}\approx 0.318467$
$X_{33}\approx 0.490687$	$X_{33}\approx 0.824776$
$X_{34}\approx 0.94967$	$X_{34}\approx 0.54918$

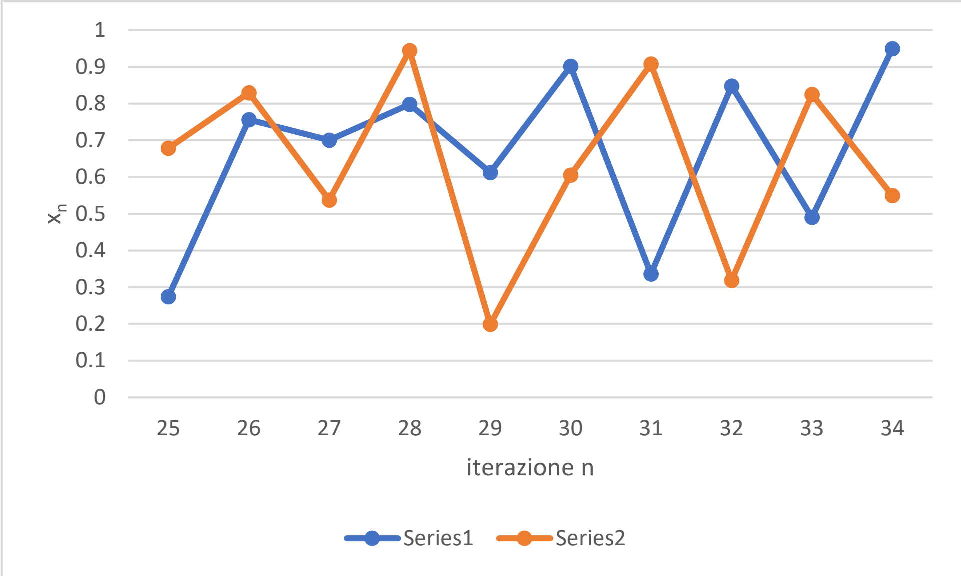

Figura 5. Evoluzione di due popolazioni per lo stesso valore iniziale di popolazione ma con due parametri r diversi fra loro, anche se molto vicini (r=3.80000 per la Serie 1; r=3.80001 per la Serie 2).

Capitolo 3

Analisi interdisciplinare della mappa logistica

Dopo aver fornito nel precedente capitolo una descrizione della mappa logistica e averne individuato i connotati che la rendono adatta a modellizzare l'evoluzione di un sistema complesso, ne facciamo ora un'analisi interdisciplinare. Già nella trattazione del capitolo precedente abbiamo implicitamente usato competenze riguardanti tre discipline in particolare: la matematica, la fisica e l'informatica. In questo capitolo renderemo prima espliciti i contributi di ciascuna disciplina valorizzandone le identità, mentre nell'ultima sezione ne evidenzieremo le interrelazioni e il tipo di interdisciplinarità emergente.

3.1 Aspetti matematici

Da un punto di vista della matematica partiamo da un'equazione differenziale nel quale compare un termine quadratico. Usiamo il metodo delle differenze finite per discretizzare l'equazione approssimando la derivata a una differenza finita, ottenendo così la mappa logistica. Da un punto di vista matematico, essendo un'approssimazione, si vanno a trascurare termini di ordine superiore della serie di Taylor associata alla funzione di cui vogliamo discretizzare la derivata.

Possiamo interpretare la mappa logistica matematicamente in diversi modi.

Una prima via di interpretazione nasce dal rappresentare graficamente la mappa su vari piani. Nel capitolo 2 si sono viste tre tipologie di grafici:

- Grafico di x_n (frequenza di popolazione) vs[1] n (numero dell'iterazione) con r (frequenza di riproduzione riuscita) fissato. Un esempio è quello in Figura 12.
- Grafico di x_n (frequenza di popolazione in funzione del numero di iterazione) vs r (frequenza di riproduzione riuscita). Un esempio è quello in Figura 7.
- Grafico di x_{n+1} (frequenza di popolazione alla generazione attuale) vs x_n (frequenza di popolazione alla generazione precedente). Un esempio è quello in Figura 9.

Notiamo che questi grafici hanno una diversa rappresentazione del tempo, rappresentato e discretizzato tramite il numero di iterazione n. Nel primo caso il tempo scorre orizzontalmente da sinistra a destra; nel secondo scorre verticalmente senza un verso in quanto vengono *plottati* diversi valori di n per r fissato; nel terzo il tempo si osserva spostandosi dalla coordinata in ascissa (la popolazione all'iterazione precedente) alla coordinata in ordinata (la popolazione all'iterazione attuale).

In alternativa o in aggiunta alle interpretazioni grafiche, la mappa può essere letta e realizzata seguendo una serie di istruzioni:

1) Dato un certo numero x_n, sottraiamo il suo quadrato e moltiplichiamo il risultato per una costante r;
2) Chiamiamo il risultato x_{n+1};
3) Diamo a x_{n+1} il nuovo nome x_n;
4) Ripetiamo il primo passaggio con il valore trovato nel passaggio 3.

Le prime tre istruzioni formano una mappatura di un numero in un altro:

$$m : x_n \to r x_n (1 - x_n)$$

e l'aggiunta del quarto passaggio porta ad avere una mappa iterativa.

[1] Per convenzione per "A vs B" si intende che A si trova alle ordinate come variabile dipendente e B alle ascisse come variabile indipendente.

Chiamo $m^n(x_n)$ la n-esima iterazione del valore originale x_n e otteniamo una serie di numeri chiamata orbita:

$$x_n, m(x_n), m^2(x_n), m^3(x_n), \dots, m^n(x_n), \dots$$

A questo punto possiamo studiare al variare di r a cosa tendono i valori di x_n.

1) $0 \leq r < 1$: $m^n(x_n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ per ogni x_n iniziale;
2) $1 \leq r < 3$: $m^n(x_n) \rightarrow \frac{r-1}{r}$ per $n \rightarrow \infty$ per ogni x_n iniziale;
3) $3 \leq r < 1+\sqrt{6}$: $m^n(x_n) \rightarrow x_1$ per $n=2m$ con $m > z(x_0)$, $m,z \in Z$,

   $m^n(x_n) \rightarrow x_2$ per $n=2m+1$ con $m > z(x_0)$, $m,z \in Z$ per ogni x_n iniziale;
4) E via di seguito.

In realtà questo problema non è risolvibile analiticamente poiché l'equazione differenziale è non lineare, per cui è necessario fare uso di una simulazione computazionale.

3.2 Aspetti applicativi, tra cui aspetti fisici

Il modello logistico può anche essere letto utilizzando la lente delle sue applicazioni: esso è ad esempio uno dei modelli più studiati dalla fisica applicata.

Da un punto di vista delle applicazioni, il fenomeno più noto che la mappa logistica aiuta a indagare è la crescita demografica di una popolazione. Sono state tuttavia studiate altre applicazioni di questo modello – in versioni più elaborate – nel campo della fisica dei materiali, per lo studio dell'assorbimento di fotoni infrarossi da molecole poliatomiche (Ferretti & Rahman, 1988). Di seguito, riferiremo la nostra analisi al caso della crescita di popolazione.

Una popolazione non può crescere all'infinito perché non può superare la portata dell'ambiente in cui si sviluppa. Ipotizziamo inoltre, da considerazioni di ragionevolezza, che la riproduzione sia proporzionale alla popolazione corrente: più individui ci saranno ad un certo tempo, più prodotti della riproduzione si otterranno alla generazione seguente. Usiamo come costante di proporzionalità il parametro r che rappresenta la frequenza di riproduzione riuscita. Quest'ultima deve tenere conto del fatto che non si riprodurranno tutti gli animali, non tutti quelli che ci proveranno saranno fertili e non tutte le gravidanze saranno portate a termine.

Ipotizziamo quindi un modello matematico che descriva la crescita demografica attraverso due principali termini:

- rx_n che rappresenta la crescita della popolazione data dalla riproduzione;
- $(1-x_n)$ dovuto al fatto che più la popolazione si avvicina alla portata (qui normalizzata a 1) e più farà fatica a crescere.

Il fatto che sia necessaria una discretizzazione del problema matematico non costituisce un problema da un punto di vista interpretativo: i valori delle popolazioni sono sempre finiti, e cambiano in maniera discreta ogni volta che nasce o muore un elemento della popolazione.

A questo punto possiamo analizzare quali sono le conseguenze di questo modello e verificare se queste sono in accordo con i dati sperimentali. Dai risultati ottenuti dall'utilizzo della matematica e dell'informatica, possiamo concludere che tutto dipende principalmente dal parametro r. Provvediamo dunque a darne interpretazioni legate al fenomeno che stiamo studiando:

- $0 \leq r < 1$: x_n andrà inevitabilmente a zero. Ciò significa che una popolazione con una frequenza di riproduzione data da un parametro r compreso tra questi valori si estinguerà inevitabilmente. Effettivamente se in una popolazione di x abitanti la media di figli a coppia è minore di 2 è inevitabile che questa decresca fino ad estinguersi.
- $1 \leq r < 3$: x_n tende a stabilizzarsi su un valore dipendente da r indipendentemente dalla popolazione di partenza. Questo fenomeno è osservabile ad esempio nella crescita demografica del lievito. In ambiente controllato la curva logistica interpola perfettamente i dati sperimentali mentre in un sistema aperto possiamo notare come la curva sia corretta ma in presenza di fortissime turbolenze dovute a fattori esterni che entrano in gioco.
- $3 \leq r < 1+\sqrt{6}$: x_n tende a un ciclo limite in cui la popolazione assume due valori che si scambiano tra loro a ogni cambio di generazione. Quando la popolazione assume il valore minore fra i 2, essa si espande grazie a un'alta frequenza di riproduzione; quando assume il valore massimo fra i 2, le limitate risorse dell'ambiente fanno sì che la popolazione decresca.

- $1+\sqrt{6} \leq r < 3.56995$: x_n tende a un ciclo limite in cui la popolazione oscilla tra 2^k valori: succede come nel punto precedente ma possiamo distinguere valori ciclici intermedi.
- $r \geq 3.56995$: non esistono cicli limite: la popolazione evolve in maniera caotica e imprevedibile.

Questo modello ci dice anche che da un certo valore del parametro r la situazione diventa imprevedibile: vediamo sul diagramma di biforcazione che dato un parametro r ogni generazione avrà un valore diverso. Inoltre, se prendiamo due parametri r molto vicini fra loro abbiamo due sviluppi della popolazione molto diversi. Il fatto che il modello matematico sia un'equazione differenziale suggerisce che il sistema in esame sia un sistema deterministico. Tuttavia, dobbiamo tenere conto dell'incertezza sperimentale sempre presente nell'indagine scientifica e in questo caso specifico: non potremo mai misurare un valore di r senza incertezza. Ma se i risultati cambiano in maniera significativa, a partire da piccolissime variazioni di r avremo un'impossibilità nel prevedere il futuro a partire dalle condizioni iniziali.

Ecco perché possiamo concludere che il sistema della crescita demografica di una popolazione sia un sistema dinamico caotico e deterministico. Considerando anche la non linearità dell'equazione, la struttura frattale del diagramma di biforcazione, la presenza di un feedback (dovuto alla iteratività della mappa) e il fatto che stiamo analizzando un sistema necessariamente aperto all'ambiente e influenzato da esso si può concludere che la mappa logistica descrive un sistema complesso.

3.3 Aspetti informatico-computazionali

Dal un punto di vista dell'informatica sappiamo che una simulazione al computer è un modello formulato come programma informatico. Entro un paradigma di tipo procedurale-imperativo, interpretiamo la mappa iterativa come un insieme di istruzioni da far eseguire ad un computer ed ottenere una simulazione.

Prendiamo ad esempio il linguaggio c++ molto utilizzato in ambito scientifico e realizziamo un semplice programma che rappresenta il modello della mappa logistica.

```
#include <iostream>
using namespace std;
  int main(){
   double r=-1;
   while (r<=0^r>=4) cout << "dammi r tra 0 e 4" , cin >> r;
   double x=-1;
   while (x<=0^x>=1) cout << "dammi x tra 0 e 1", cin >> x;
   for (int i=1;i<=1000;i++){
    double x1=r*x*(1-x);
    cout << "dopo " << i << " iterazioni la frequenza di popolazione è = " << x1
<< endl;
    x=x1;}
 }
```

In questo programma, si chiede all'esecutore del programma di scrivere un valore di r compreso tra 0 e 4 (poiché se r fosse minore di 0 verrebbe una popolazione negativa fisicamente impossibile, mentre se r fosse maggiore o uguale a 4 la popolazione divergerebbe). Allora, un ciclo `while` fa sì che la domanda venga posta nuovamente e il programma non prosegua nel caso in cui l'esecutore dovesse scrivere un valore di r non compreso fra quei valori. Analogamente accade per il valore della popolazione iniziale x_n richiesta fra 0 e 1.

Dopodiché inizia un ciclo `for` che è il cuore del programma:

1) si definisce una variabile x1 assegnandole il valore di rx(1-x);
2) il programma mostra in output il valore di x1;
3) quest'ultimo viene assegnato alla variabile x;
4) la procedura si ripete 1000 volte.

Bisogna tenere presente che nel programma informatico la popolazione non arriverà mai a 0, ma solo a valori molto vicini allo 0 (si veda la prima colonna da sinistra della Tabella 2). Nel programma non è inclusa l'assunzione fisica per la quale si sta studiando una popolazione e che non ha senso fisico un valore di popolazione che vada sotto al valore che rappresenta un singolo individuo.

3.4 Aspetti interdisciplinari

Nei paragrafi precedenti abbiamo evidenziato i contributi disciplinari della matematica e dell'informatica, ed abbiamo messo in luce gli aspetti interpretativi tipici delle scienze applicate, una volta considerata l'applicazione del modello di mappa logistica al caso della crescita di una popolazione. Cerchiamo ora di delineare aspetti interdisciplinari che "scorrono" attraverso le discipline e permettono di valorizzarle ulteriormente. Le analisi disciplinari hanno infatti fatto emergere alcuni temi-chiave che le discipline interpretano in modo diverso ma che concorrono tutti a dare significato profondo al tema in oggetto.

Un primo tema è quello della *discretizzazione*. Da un punto di vista matematico, la discretizzazione è quella tecnica che ci permette di passare da un'equazione differenziale ad una mappa. Il processo di discretizzazione è però anche il processo necessario per poter studiare il problema attraverso l'informatica poiché i computer lavorano con algoritmi computazionali che hanno alla loro base entità discrete (in ultima analisi, gli 0 e 1 del sistema binario). Da un punto di vista applicativo e interpretativo, la discretizzazione dell'equazione significa passare dal considerare la popolazione come un tutto indistinto di cui importano solo le variazioni (come era nell'equazione logistica) al considerarla come un insieme di singoli individui.

Un secondo tema è quello della *normalizzazione*. Da un punto di vista matematico, è una tecnica che permette di semplificare il problema e di trattarlo indipendentemente dal valore assoluto delle variabili in gioco; si passa infatti da studiare il problema nel dominio [0, N] a studiarlo nel dominio [0, 1]. Questa non è un'operazione neutra dal punto di vista applicativo, dato che è importante considerare che nella mappa si ha a che fare con frequenze di popolazione rispetto a una popolazione massima e non con numeri assoluti: una volta studiato il problema, se voglio conoscere ad esempio il numero di individui a una data generazione è necessario ritornare al dominio [0, N].

Un terzo tema è rappresentato dalla *mappa* stessa. Tale concetto nasce nella matematica intesa come una funzione iterativa del tipo $x_{n+1} = Ax_n + b$, con A matrice qualsiasi e b vettore. Fisicamente, una funzione iterativa rappresenta un sistema in cui gli effetti tornano a influenzare le cause: il risultato di una generazione diventa la condizione iniziale per la generazione successiva.

Da un punto di vista informatico la mappa è simulata dal ciclo `for` all'interno di un programma procedurale. Quelle che da un punto di vista matematico erano una serie di istruzioni di una mappa iterativa, da un punto di vista informatico diventano un ciclo `for`. Una differenza sostanziale fra le due discipline è però che nel caso della matematica possiamo procedere all'infinito (non vi è nella mappa alcun riferimento a un tempo o a una generazione massima), mentre nel caso dell'informatica il numero di iterazioni è necessariamente finito (nella nostra implementazione riportata nella sezione precedente, 1000).

Questi tre temi e la concorrenza delle tre identità disciplinari sono riassunte in Tabella 5.

Tabella 5. Temi interdisciplinari connessi con la mappa logistica e contributi delle singole discipline per studiarli.

	Aspetti matematici	**Aspetti interpretativi/applicativi**	**Aspetti computazionali**
Discretizzazione	Dall'equazione differenziale ad una mappa	Da una popolazione come un tutto indistinto a un insieme di singoli individui	Necessità per la trattazione con algoritmi computazionali
Normalizzazione	Dal dominio [0, N] al dominio [0, 1]	Dal numero di individui a una data generazione alle frequenze relative	
Mappa	Funzione iterativa all'infinito	Circolarità tra cause ed effetti	Ciclo finito, per essere implementato in un programma

Analizziamo ora le interrelazioni tra matematica e fisica per quanto riguarda le idee legate alla complessità che possiamo rintracciare nella mappa logistica.

- *Non linearità + feedback*

Queste due proprietà insieme portano alla non proporzionalità tra cause ed effetti. Poiché le misure hanno un'incertezza sperimentale, la conseguenza è quella di avere un'evoluzione di fatto imprevedibile del sistema. Ciò che si osserva è il caos deterministico: le leggi che governano il sistema rimangono deterministiche ma quello che si osserva è un comportamento caotico. Questo concetto nasce da una interrelazione tra matematica e vincoli sperimentali o tecnologici che impediscono di avere sempre le “stesse” condizioni iniziali: possiamo concludere il fatto che il sistema sia modellizzato con una struttura deterministica grazie alla matematica e a quel che ci dice sulle soluzioni univoche delle equazioni differenziali, mentre concludiamo che il sistema sia caotico grazie a considerazioni di tipo fisico, informatico o tecnologico che nascono dall’incertezza di misura o dall’impossibilità di generare le stesse condizioni iniziali. Fondendo questi due concetti e guardando il problema da un punto di vista interdisciplinare otteniamo il caos deterministico.

- *Auto-organizzazione*

La mappa logistica presenta degli attrattori. Matematicamente questo vuol dire che l’equazione tende a determinati valori dopo un diverso numero di iterazioni. Se osservato nella sua globalità, “da fuori”, si dice che il sistema tende ad auto-organizzarsi e che si osservano proprietà emergenti. Non possiamo però dire che il sistema in esame sia *totalmente* ordinato perché i suoi attrattori hanno struttura frattale. Concludiamo quindi che il sistema non sia totalmente ordinato né totalmente *randomico*, ma che esibisca un qualche tipo di ordine spontaneo determinato dai suoi attrattori.

- *Sistema aperto*

Il sistema che stiamo studiando è un sistema che interagisce con l’ambiente circostante. Pertanto, ha una portata massima che dipende dalla quantità di risorse presenti nell’ambiente in cui si sviluppa la popolazione. Per poter tradurre in formula questo fatto si usa il termine $(1 - x_n)$ che azzera la popolazione quando x_n raggiunge il valore massimo e la rende negativa quando la popolazione supera quel valore. In tal caso dobbiamo ricordarci che non ha senso fisico una popolazione negativa.

Conclusioni

Obiettivo della tesi era quello di riflettere sui concetti di interdisciplinarità e sistema complesso, a partire dall'analisi di un modello di un sistema complesso. Per l'analisi si è scelto la mappa logistica e si è voluto mostrare come l'interdisciplinarità permetta di mettere in evidenza le proprietà che rendono quel modello un modello di sistema complesso.

È evidente come diverse discipline, tra cui nello specifico matematica, fisica e informatica, contribuiscano interagendo tra loro nello studio del problema della mappa logistica.

Senza la matematica a dirci cos'è un'equazione differenziale non potremmo fisicamente concludere che siamo davanti a un sistema deterministico.

Senza comprendere la validità della simulazione informatica non potremmo trarre conclusioni di carattere fisico a partire dai risultati di quella simulazione.

Senza la capacità di discretizzare il problema matematico e interpretarlo come una serie di informazioni non saremmo riusciti a scrivere un programma informatico in grado di simulare il sistema.

Senza considerazioni di carattere fisico, come l'inevitabilità delle incertezze di misura sperimentali, non potremmo concludere la natura caotica del sistema in esame.

Un'analisi interdisciplinare della mappa logistica aiuta quindi a capire meglio gli specifici contributi forniti dalle discipline e a vedere il problema da diversi punti di vista che però si ricongiungono per ricostruirne il quadro complessivo.

Bibliografia

A Theory of Interdisciplinary Studies - MIT. (n.d.). Retrieved from http://web.mit.edu/jrankin/www/interdisciplinary/interdisc_Newell.pdf.

Arthur, W. B. (1999). Complexity and the Economy. *Science*, *284*(5411), 107–109. doi: 10.1126/science.284.5411.107

Branchetti, L., Cattabriga, A., & Levrini, O. (2019). Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody. *Physical Review Physics Education Research*, *15*(2). doi: 10.1103/physrevphyseducres.15.020130

Brush, S. G. (2015). Mathematics as an Instigator of Scientific Revolutions. *Science & Education*, *24*(5-6), 495–513. doi: 10.1007/s11191-015-9762-x

Caetano, J. C., Curado, H. and Jacquinet, M. (2000). "On transdisciplinarity in organizations, innovation, and law," in R. Häberli, R. W. Scholz, A. Bill and M. Welti (eds.), *Transdisciplinarity: Joint problem-solving among science, technology and society. Workbook I: Dialogue Sessions and Idea Market*. (Vol. 1), Zürich: Haffmans Sachbuch Verlag, pp. 528-33.

Cilliers, P. (1999). Complexity and postmodernism. Understanding complex systems Reply to David Spurrett. *South African Journal of Philosophy*, *18*(2), 275–278. doi: 10.1080/02580136.1999.10878188

Duit, R., Gropengießer, H., Kattmann, U., Komorek, M., & Parchmann, I. (2012). The Model of Educational Reconstruction – a Framework for Improving Teaching and Learning Science1. *Science Education Research and Practice in Europe*, 13–37. doi: 10.1007/978-94-6091-900-8_2

Ferretti, A., & Rahman, N. (1988). A study of coupled logistic map and its applications in chemical physics. *Chemical Physics*, *119*(2-3), 275–288. doi: 10.1016/0301-0104(88)87190-8

Galilei, G. (1864). *Il saggiatore*. Firenze: G. Barbèra.

George M. Whitesides and Rustem F. Ismagilov. Complexity in chemistry. Science, 284:89–92, April 1999

Halley, J. D., & Winkler, D. A. (2008). Classification of emergence and its relation to self-organization. *Complexity*, *13*(5), 10–15. doi: 10.1002/cplx.20216

European Commission (2015). Quests for interdisciplinarity: A challenge for the ERA and HORIZON 2020. Policy Brief by the Research, Innovation, and Science Policy Experts (RISE). Luxembourg: Publications Office of the European Union. doi: 10.2777/499518

Interdisciplinarità. (2019, November 14). Retrieved from https://it.wikipedia.org/wiki/Interdisciplinarità.

Interdisciplinarity. (2019, November 14). Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Interdisciplinarity.

Klein, J. T. (2004). Interdisciplinarity and complexity: An evolving relationship. *Emergence: Complexity and Organization*. 6, pp. 2-10.

Kragh, H. (2014). Mathematics and Physics: The Idea of a Pre-Established Harmony. *Science & Education*, *24*(5-6), 515–527. doi: 10.1007/s11191-014-9724-8

Ladyman, J., Lambert, J., Wiesner, K. (2013). What is a Complex System?. *European Journal for Philosophy of Science, 3*(1), 33-67. doi: 10.1007/s13194-012-0056-8

Mackay, R. S. (2008). Nonlinearity in complexity science. *Nonlinearity*, *21*(12). doi: 10.1088/0951-7715/21/12/t03

Parrish, J. K. (1999). Complexity, Pattern, and Evolutionary Trade-Offs in Animal Aggregation. *Science*, *284*(5411), 99–101. doi: 10.1126/science.284.5411.99

Tzanakis, C. (2016). *Mathematics & physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning*. Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics, July 2016, Montpellier, France. <hal-01349231>

Weng, G. (1999). Complexity in Biological Signaling Systems. *Science*, *284*(5411), 92–96. doi: 10.1126/science.284.5411.92