

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Confronto tra diverse rappresentazioni dello spostamento dovuto a una dislocazione di bordo obliqua in un mezzo elastico

**Relatore:**

Chia.ma Prof.ssa  
Maria Elina Belardinelli

**Presentata da:**

Anastasia Consorzi

**Correlatore:**

Dott. Massimo Nespoli

Anno Accademico 2018/2019



*A mia Nonna*



## Sommario

L'elaborato presentato in questa tesi si pone come scopo la dimostrazione dell'equivalenza di due metodi diversi per la rappresentazione del campo di spostamento generato in un mezzo omogeneo da una dislocazione di bordo obliqua. Tramite il teorema di rappresentazione si cercherà di trovare un'espressione per il campo di spostamento prodotto da una dislocazione di bordo verticale, ed in seguito, attraverso un cambio di sistema di riferimento, si renderanno tali espressioni adatte alla descrizione dello spostamento indotto da una dislocazione di bordo obliqua. Si vedrà dai risultati finali che tale metodo è equivalente a considerare la dislocazione obliqua come composizione di due contributi provenienti da dislocazioni tensili e di bordo verticali.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
0.1 Spostamenti e deformazioni . . . . .	1
0.2 Trazioni e sforzi . . . . .	3
0.3 Relazione costitutiva elastica . . . . .	4
0.4 Equazioni del moto . . . . .	6
<b>1 Dislocazioni Elastiche</b>	<b>9</b>
1.1 Dislocazioni e Vettore di Burgers . . . . .	9
1.2 Tensore di Somigliana . . . . .	11
1.3 Teorema di Rappresentazione . . . . .	14
1.4 Momento Tensore . . . . .	16
1.5 Dislocazione Elementare di Bordo . . . . .	17
1.6 Dislocazione Elementare Tensile . . . . .	19
1.7 Dislocazioni di Volterra Chiuse . . . . .	20
<b>2 Dislocazione Obliqua in un mezzo omogeneo</b>	<b>23</b>
2.1 Teorema di rappresentazione applicato ad una dislocazione di bordo verticale	23
2.2 Applicazione dei risultati ad una Dislocazione Obliqua . . . . .	30
2.3 Confronto con il metodo di Maccaferri et al. (2010) . . . . .	37
<b>Conclusioni</b>	<b>39</b>
<b>Appendice</b>	<b>40</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Introduzione

Il fine di tale elaborato è presentare la soluzione al problema dislocativo statico riguardante una dislocazione di bordo chiusa e obliqua in un mezzo omogeneo e isotropo. Per studiarne le caratteristiche sarà necessaria una prima parte in cui si generalizza il problema presentando il concetto di dislocazione di bordo e gli strumenti matematici che verranno adoperati. In seguito, sviluppando i calcoli derivanti dall'applicazione del Teorema di Rappresentazione, si troverà l'espressione dello spostamento per una dislocazione di bordo verticale. Infine, tramite una rotazione del sistema di riferimento, si renderà tale dislocazione obliqua. Lo studio delle dislocazioni trova utilità in sismologia nella caratterizzazione della dinamica delle faglie: esse, con opportune considerazioni, si prestano bene a rappresentare diversi tipi di stato di sollecitazione della superficie e all'interno della terra, dal moto delle placche tettoniche ai terremoti.

In primis, introduciamo di seguito concetti basilari della meccanica dei continui utili per la comprensione dell'intero elaborato.

## 0.1 Spostamenti e deformazioni

In un corpo rigido le distanze relative fra coppie di punti materiali rimangono costanti. Pertanto, una volta nota la configurazione iniziale del corpo, è sufficiente conoscere la posizione di tre punti per conoscere la configurazione di ogni altro punto ad un istante successivo. Ma, se la distanza fra i punti materiali non è fissa, cioè se il corpo è deformabile, per descrivere il corpo al tempo  $t$  occorre conoscere le coordinate di ciascun punto. Consideriamo la figura (1): sia P un punto materiale che al tempo  $t = 0$  si trova nel punto di coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ; al tempo  $t$  il punto materiale si trovi in  $\mathbf{x} + \mathbf{u} = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$ , dove  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  è il vettore spostamento, che assumeremo essere una funzione differenziabile delle coordinate;  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  indica quindi lo spostamento eseguito nell'intervallo di tempo  $[0, t]$  dal punto materiale P che si trovava in  $\mathbf{x}$  all'istante iniziale. Consideriamo un secondo punto materiale Q, prossimo a P, che si trova in  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x}$  all'istante iniziale; al tempo  $t$ , Q si sarà spostato di  $\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{u}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) = \mathbf{u} + d\mathbf{u}$  dalla posizione originaria, dove  $d\mathbf{u}$

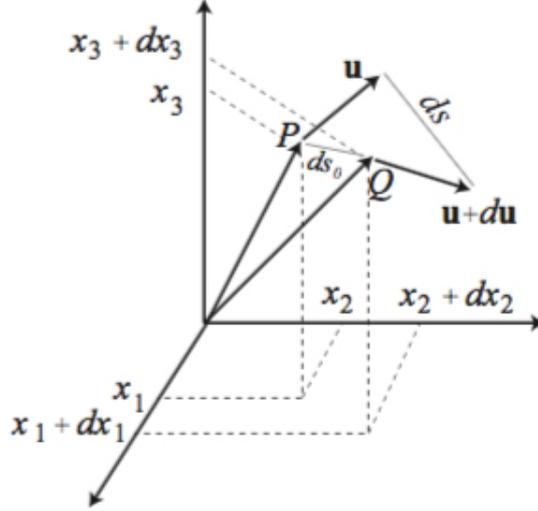


Figura 1: Nella configurazione attuale (deformata)  $P$  si è spostato di  $u_i$ ,  $Q$  di  $u_i + du_i$ . La distanza di  $Q$  da  $P$  era  $ds_0$  nella configurazione di riferimento, è  $ds$  nella configurazione attuale.

ha componenti:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Consideriamo la distanza  $ds_0$  di  $Q$  da  $P$  all'istante iniziale e la distanza  $ds$  al tempo  $t$ ; abbiamo:

$$ds_0^2 = dx_i dx_i \quad ds^2 = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i) \quad (2)$$

Quando si ha  $|d\mathbf{u}| \ll |d\mathbf{x}|$ ; parliamo allora di “piccole deformazioni” e, trascurando termini del secondo ordine in  $|d\mathbf{u}|/|d\mathbf{x}|$ , otteniamo:

$$ds^2 \simeq dx_i dx_i + 2du_i dx_i \quad (3)$$

Per definizione, in un corpo deformabile le distanze fra i suoi punti possono cambiare; quindi siamo interessati in particolare a valutare la differenza  $ds^2 - ds_0^2$ :

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \quad (4)$$

In un dato sistema di riferimento, il gradiente dello spostamento  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  è un tensore di rango 2; possiamo separarlo in una parte simmetrica e una parte antisimmetrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

Nella (4) fornisce contributo non nullo solo la parte simmetrica di  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , perchè la contrazione con  $dx_i dx_j$  cancella la parte antisimmetrica, quindi  $ds^2 - ds_0^2 = 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j$  dove

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

è detto tensore infinitesimo di deformazione. Essendo per ipotesi  $ds - ds_0 \ll ds_0$ , possiamo approssimare il primo membro della (4) nel modo seguente:  $ds^2 - ds_0^2 = (ds + ds_0)(ds - ds_0) \simeq 2ds_0(ds - ds_0)$  e quindi la (4) può essere scritta:

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \epsilon_{ij} \frac{dx_i}{ds_0} \frac{dx_j}{ds_0} \quad (7)$$

che fornisce una semplice espressione (al primo ordine) per la variazione relativa di distanza fra due punti materiali P e Q con coordinate che differiscono di  $dx_i$ . Notiamo in particolare che  $dx_i/ds_0$  è il rapporto fra il vettore  $\vec{PQ}$  e il suo modulo, quindi è il vettore unitario  $\hat{r}$  nella direzione da P a Q (nella configurazione di riferimento).

## 0.2 Trazioni e sforzi

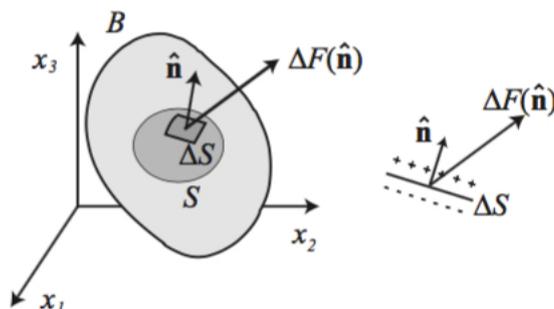


Figura 2: La forza  $\Delta F$  descrive l'azione del materiale adiacente alla faccia positiva di  $\Delta S$  (indicato con +) su quello adiacente alla faccia negativa (indicato con -). Chiaramente,  $\Delta F$  dipende dalla posizione e dall'orientamento di  $\Delta S$ .

Consideriamo un corpo B ad un certo istante  $t$ , rappresentato in figura (2). Immaginiamo al suo interno una superficie chiusa  $S$ . Consideriamo una piccola porzione  $\Delta S$  sulla superficie immaginaria  $S$ . Sia  $\hat{n}$  la normale esterna su  $\Delta S$ ; possiamo così distinguere le due facce di  $\Delta S$  secondo la direzione di  $\hat{n}$ : diremo "faccia positiva" quella rivolta

verso la normale, "faccia negativa" l'altra. Consideriamo il materiale adiacente alla faccia positiva di  $\Delta S$ , contrassegnato con dei simboli "+" in figura (2). Questo materiale esercita una forza  $\Delta \mathbf{F}$  sul materiale adiacente alla faccia negativa (contrassegnato con simboli "-"): la forza  $\Delta \mathbf{F}$  dipende dalla posizione, dall'area e dall'orientazione della superficie. Assumiamo che il rapporto  $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$  tenda ad un limite finito al tendere di  $\Delta S$  a zero e che il momento delle forze su  $\Delta S$  sia nullo (Principio di Eulero-Cauchy). Il vettore limite prende il nome di "trazione" con componenti

$$T_i(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) = \frac{dF_i}{dS} \quad (8)$$

dove abbiamo esplicitamente indicato che  $T_i$  dipende dalla posizione  $\mathbf{r}$ , dal tempo  $t$  e anche dall'orientazione  $\hat{\mathbf{n}}$  della superficie  $dS$ : infatti è chiaro che le particelle materiali che interagiscono attraverso  $dS$  sono diverse se cambio l'orientazione della normale. Consideriamo ora la superficie  $dS_k$  con normale  $\hat{\mathbf{e}}^{(k)}$  nella direzione positiva dell'asse  $x_k$  (quindi  $dS_k$  giace su un piano coordinato). Omettendo di indicare le variabili  $(\mathbf{r}, t)$ , la trazione su  $dS_k$  sarà denotata  $\mathbf{T}(\mathbf{e}^{(k)})$  con componenti  $T_1(\mathbf{e}^{(k)}), T_2(\mathbf{e}^{(k)}), T_3(\mathbf{e}^{(k)})$  lungo gli assi  $x_1, x_2$  e  $x_3$  rispettivamente. L'indice  $k$  individua la superficie sulla quale agisce la trazione. Introduciamo dei nuovi simboli

$$\tau_{k1} = T_1(\mathbf{e}^{(k)}), \quad \tau_{k2} = T_2(\mathbf{e}^{(k)}), \quad \tau_{k3} = T_3(\mathbf{e}^{(k)}) \quad (9)$$

Secondo questa notazione,  $\tau_{ki}$  è la componente  $i$ -esima della trazione che il materiale posto sulla faccia positiva di  $dS_k$  esercita sul materiale posto sulla faccia negativa: pertanto,  $\tau_{11}$  (ad esempio) è positivo se il materiale posto sulla faccia positiva tira verso di sé il materiale sulla faccia negativa. Viceversa,  $\tau_{11}$  è negativo se il materiale posto sulla faccia positiva spinge lontano da sé il materiale sulla faccia negativa. Le componenti delle trazioni sui piani coordinati prendono il nome di "sforzi" (stress); le diverse componenti dello sforzo possono essere organizzate in una matrice quadrata  $\tau_{ki}$ , in cui il primo indice denota la faccia coordinata su cui agisce la trazione e il secondo indice denota la componente della trazione: gli elementi diagonali  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$  sono detti "sforzi normali" (normal stresses) perchè agiscono in direzione normale al piano, gli altri elementi sono detti "sforzi di taglio" (shear stresses) e agiscono in direzione tangente al piano.

### 0.3 Relazione costitutiva elastica

Il prototipo zero-dimensionale di corpo elastico è fornito da una molla, nella quale l'applicazione di una forza  $\mathbf{F}$  genera un allungamento o accorciamento relativo  $\Delta u$  secondo la legge

$$\mathbf{F} = k\Delta \mathbf{u} \quad (\text{legge di Hooke}) \quad (10)$$

Quando la forza viene rimossa, la molla riacquista la sua configurazione originaria. Possiamo generalizzare tale comportamento per un materiale 3-dimensionale definendo un materiale elastico come un materiale che soddisfa i seguenti assiomi:

- in assenza di forze esterne il mezzo si trova in una configurazione (detta stato naturale) in cui sforzi e deformazioni sono identicamente nulli; questa configurazione sarà anche detta in seguito configurazione di riferimento;
- in presenza di forze esterne, il mezzo si porta in una diversa configurazione (detta configurazione attuale) che dipende con continuità dalle forze applicate;
- se detta dipendenza è lineare, come assumeremo nel seguito del capitolo, il mezzo è detto lineare elastico;
- rimuovendo le forze esterne il mezzo torna spontaneamente nel suo stato naturale, che è pertanto una configurazione di equilibrio stabile.

L'equazione di stato per un corpo elastico può essere descritta tramite il tensore di sforzo  $\tau_{ij}$ , la deformazione  $\epsilon_{ij}$  e la temperatura  $T$  (o altra variabile di stato, come l'entropia  $S$ ). Nel seguito, considereremo processi deformativi isotermi oppure adiabatici, per i quali lo sforzo può essere considerato funzione della sola deformazione. Pertanto, un corpo elastico lineare è descritto dalla seguente relazione costitutiva:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (11)$$

Per la simmetria del tensore di sforzo dobbiamo imporre che sia  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ; analogamente, per la simmetria del tensore di deformazione, possiamo in tutta generalità imporre che sia  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . Inoltre, determinate considerazioni termodinamiche richiedono che sia  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , sicché le componenti indipendenti di  $C_{ijkl}$  si riducono a 21. Generalmente, i materiali naturali sono isotropi, almeno su scala macroscopica, essendo costituiti da aggregati di micro-cristalli orientati in modo casuale. Ciò vuol dire che, esercitando uno sforzo  $\tau_{ij}$ , avrò sempre la stessa deformazione, comunque io ruoti il corpo rispetto al sistema di forze. Quindi, in un materiale isotropo, le componenti di  $C_{ijkl}$  debbono essere invarianti per rotazioni del sistema di riferimento. La relazione costitutiva di un materiale elastico isotropo lineare si può scrivere assegnando una relazione di proporzionalità fra sforzo isotropo e deformazione isotropa e una relazione fra sforzo deviatorico e deformazione deviatorica; quindi:

$$\frac{1}{3}\tau_{ij} = K\epsilon_{kk}, \quad \tau'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} \quad (12)$$

La costante  $K$  è detta *incompressibilità* e dipende dal tipo di trasformazione considerata. La costante  $\mu$  è denominata *rigidità*. Sia  $K$  che  $\mu$  devono essere positivi affinché lo stato naturale sia una configurazione di equilibrio stabile: infatti, il lavoro fatto per deformare il corpo dallo stato naturale deve essere positivo se il corpo torna spontaneamente nello stato naturale. Possiamo scrivere una relazione costitutiva unica al posto delle 2 relazioni (12) inserendo la prima nella seconda; ricordando che  $\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}$  e  $\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}$  abbiamo:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}\right] \quad \rightarrow \quad \tau_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (13)$$

ovvero:

$$\tau_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad \text{con } \lambda = K - \frac{2}{3}\mu \quad (14)$$

e  $\lambda$  e  $\mu$  prendono il nome di costanti di Lamè.

## 0.4 Equazioni del moto

Per il secondo principio della dinamica, la risultante delle forze che agiscono su un mezzo continuo deve uguagliare la derivata della quantità di moto rispetto al tempo:

$$\underbrace{\int_{B(t)} f_i(\mathbf{r}, t) dV}_{\text{forze di volume}} + \underbrace{\oint_{\partial B(t)} T_i(\mathbf{r}, t; \hat{\mathbf{n}}) dS}_{\text{forze di superficie}} = \underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{B(t)} \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dV}_{\text{derivata temporale della quantità di moto}} \quad (15)$$

Utilizzando la prima relazione di Cauchy e poi il teorema di Gauss (la cui dimostrazione è riportata in appendice), il contributo delle forze di superficie si può scrivere:

$$\oint_{\partial B(t)} T_i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{n}}) dS = \oint_{\partial B(t)} \tau_{ki} n_k dS = \int_{B(t)} \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} dV \quad (16)$$

mentre la derivata della quantità di moto a secondo membro della (15) si può scrivere tramite la l'equazione di continuità come

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \int_{B(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (17)$$

quindi l'equazione del moto (15) in forma integrale diventa:

$$\int_{B_t} \left[ f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} - \rho \frac{dv_i}{dt} \right] dV = 0 \quad (18)$$

Tale equazione si applica non solo all'interno corpo B ma anche ad ogni suo sottoinsieme; quindi, supposto che l'integrando sia continuo, esso deve essere nullo e otteniamo l'equazione del moto per un mezzo continuo in forma differenziale:

$$f_i + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (19)$$

Nel caso statico, eliminando le variabili dipendenti dal tempo, otteniamo l'equazione dell'Elastostatica:

$$\boxed{\text{Equazione dell'elastostatica : } f_i + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} = 0} \quad (20)$$



# Capitolo 1

## Dislocazioni Elastiche

In questo capitolo verranno introdotti il concetto di dislocazione elastica di bordo e i principali elementi matematici che verranno utilizzati nel corso dell'elaborato per studiarne le caratteristiche. Dalla definizione del vettore di Burgers, si passerà all'enunciato del Teorema di Rappresentazione e si darà una definizione del momento tensore. Infine si entrerà più nel dettaglio analizzando la dislocazione di bordo elementare, la dislocazione tensile, e la dislocazione di Volterra chiusa.

### 1.1 Dislocazioni e Vettore di Burgers

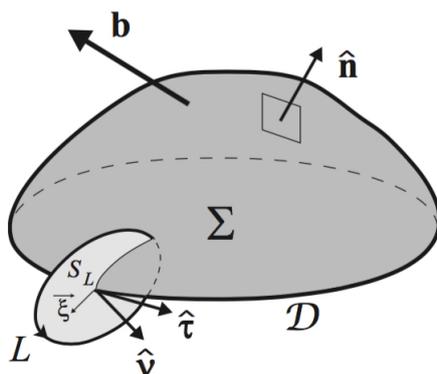


Figura 1.1: *Schema e notazioni utilizzate per descrivere la superficie di dislocazione*

Le deformazioni elastiche possono essere prodotte non solo dall'azione di forze esterne, ma anche da difetti di struttura interna. Tali sono le dislocazioni. Intuitivamente si può immaginare che nelle immediate vicinanze della dislocazione, l'alterazione del mezzo

considerato sia grande, mentre cali all'aumentare della distanza. Consideriamo allora una superficie  $\Sigma$  limitata da una curva  $\mathcal{D}$  detta linea di dislocazione ( si veda la figura (1.1) ). L'orientazione di  $\Sigma$  è definita dalla normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , mentre l'orientazione lungo  $\mathcal{D}$  è data dalla tangente  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ , il cui verso è fissato, una volta scelta l'orientazione di  $\hat{\mathbf{n}}$ , dalla regola della vite. Sia  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{b}$  (cost.) lo spostamento cui è soggetta la faccia positiva di  $\Sigma$  rispetto quella negativa. Allora si definisce vettore di Burgers della dislocazione la quantità

$$\oint_L du_i = -b_i \quad (1.1)$$

dove  $L$  è una curva chiusa attraversata dalla linea di dislocazione  $\mathcal{D}$ . Si può subito notare che nei problemi dislocativi il vettore spostamento  $\mathbf{u}$  non è continuo e la superficie  $\Sigma$  e la linea di dislocazione  $\mathcal{D}$  sono domini singolari per  $\mathbf{u}$  e le sue derivate. Tenendo questo presente, la (1.1) può essere riscritta

$$\oint_L du_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = \oint_L w_{ki} dx_k \quad (1.2)$$

dove  $w_{ki}$  prende il nome di tensore di distorsione. Si noti che la sua parte simmetrica è il tensore di deformazione. Inoltre entrambi tali tensori sono funzioni univoche delle coordinate, a differenza dello spostamento. Sfruttando il Teorema di Stokes per ciascuna componente  $i$ -esima è possibile trasformare il precedente integrale di linea in uno di superficie:

$$\oint_L w_{ki} dx_k = \oint_{S_L} e_{lmk} \frac{\partial}{\partial x_m} w_{ki} \nu_l dS \quad (1.3)$$

dove  $S_L$  è una arbitraria superficie con normale unitaria  $\hat{\boldsymbol{\nu}}$  e contorno  $L$ . La (1.1) acquisisce validità per una qualunque curva  $L$  se riscritta utilizzando la Delta di Dirac in modo che

$$b_i = \oint_{S_L} b_i \delta(\boldsymbol{\xi}) \tau_l \nu_l dS \quad (1.4)$$

dove  $\boldsymbol{\xi}$  individua un punto su  $S_L$  a partire da  $\mathcal{D}$ ; Tale integrale ha la proprietà di fornire un risultato non nullo solo se la curva  $L$  racchiude  $\mathcal{D}$ . Il prodotto  $\tau_l \nu_l dS$  è l'elemento di superficie normale a  $\mathcal{D}$ . Grazie a questa formulazione, possiamo riscrivere la (1.3) e la (1.4) come un unico integrale su una superficie arbitraria  $S_L$ ; dall'annullarsi dell'integrale segue allora

$$e_{lmk} \frac{\partial}{\partial x_m} w_{ki} + b_i \tau_l \delta(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (1.5)$$

che, contratta con con  $e_{nil}$ , e applicando l'identità  $e\text{-}\delta$ , porta a:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_i} w_{ni} + e_{nil} b_i \tau_l \delta(\boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (1.6)$$

A questo punto si può notare che se fosse possibile invertire l'ordine di derivazione i primi due termini si annullerebbero; é perciò necessario ricordarsi di non scambiare gli ordini nei punti di singolarità  $\boldsymbol{\xi} = 0$ . Sapendo che l'equazione dell'elasto-statica per un mezzo omogeneo isotropo, in assenza di forze di volume, è:

$$\frac{\partial \tau_{nj}}{\partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = 0 \quad (1.7)$$

sostituendo abbiamo:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} w_{nk} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} w_{kn} = 0 \quad (1.8)$$

dalla quale si ricava  $\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k}$  che sostituita nella (1.6) dà:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_n} w_{kk} + \frac{\partial}{\partial x_k} w_{kn} = -e_{nil} b_i \tau_l \delta(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.9)$$

infine, riscrivendo  $w_{ki}$  attraverso la sua definizione si ottiene facilmente

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = -e_{nil} b_i \tau_l \delta(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.10)$$

che in formalismo vettoriale si scrive:

$$\boxed{\frac{1}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \mathbf{b} \delta(\boldsymbol{\xi})} \quad (1.11)$$

dove  $\nu$  è il modulo di Poisson. Tale è l'equazione di equilibrio di una dislocazione, così come riportato in L. Landau, E. Lifshits (1953)<sup>[2]</sup>.

## 1.2 Tensore di Somigliana

Consideriamo le equazioni dell'elastostatica per un mezzo omogeneo, isotropo ed illimitato, in presenza di una forza  $\mathbf{f}$  localizzata nel punto  $\mathbf{x}'$ . La forza di volume è quindi

$$f_i = F_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.12)$$

dove  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$  è la delta di Dirac in  $R^3$ . Non è restrittivo supporre  $\mathbf{x}' = 0$ . L'equazione dell'elastostatica (20)

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1.13)$$

diviene, utilizzando le relazioni costitutive per un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -F_i \delta(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

che in formalismo vettoriale si scrive:

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{F}}{\mu} \delta(\mathbf{x}) \quad (1.15)$$

Fisicamente è lecito aspettarsi che le componenti del campo di spostamento  $u_i$  tendano a zero all'infinito. Per trovare un'espressione per queste ultime, scomponiamo il vettore  $\mathbf{u}$  in modo tale che  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ , dove  $\nabla^2 \mathbf{u}_0 = -(\mathbf{F}/\mu)\delta(\mathbf{x})$ . La soluzione per  $\mathbf{u}_0$  è analoga a quella di un potenziale elettrostatico:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{F}}{4\pi\mu R} \quad (1.16)$$

con  $R = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Si può infatti vedere che:

- per  $R \neq 0$  :

$$\nabla^2 \mathbf{u}_0 = \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = 0 ; \quad (1.17)$$

- nell'intorno di  $R = 0$ , si avrà invece un contributo

$$\int_{S_0} \nabla^2 \frac{1}{R} dV = - \oint_{\partial S_0} \frac{\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R^3} dS = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -4\pi . \quad (1.18)$$

Nell'ultimo passaggio si sono sfruttate le relazioni  $\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} = R$  e  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Ciò che si è trovato è che, essendo nullo l'integrando in ogni punto diverso da zero, la precedente relazione vale per qualunque volume contenente l'origine. Tale integrando ha così le stesse proprietà che definiscono la delta di Dirac, a meno di un fattore  $-4\pi$ . L'equazione (1.15) si scrive:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + (1 - 2\nu)\nabla^2 \mathbf{u}_1 = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \quad (1.19)$$

Essendo identicamente nullo il rotore di un gradiente, l'ultima espressione richiede che  $(1 - 2\nu)\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}_1) = 0$  e quindi, per il Teorema del massimo e del Minimo delle funzioni armoniche,  $\nabla \times \mathbf{u}_1 = 0$ . Pertanto possiamo scrivere che

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\phi \quad (1.20)$$

dove  $\phi$  è un campo scalare. Sostituendo nella (1.19):

$$\nabla[2(1 - 2\nu)\nabla^2\phi + \nabla \cdot \mathbf{u}_0] = 0 \quad (1.21)$$

Dalla precedente espressione deduciamo che il termine entro le quadre deve essere costante, e che questa sarà nulla se assumiamo che  $\nabla^2\phi, \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \rightarrow 0$  all'infinito. Eseguendo i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} 2(1 - 2\nu)\nabla^2\phi + \nabla \cdot \mathbf{u}_0 &= 2(1 - 2\nu)\nabla^2\phi + \nabla \cdot \frac{\mathbf{F}}{4\pi\mu} \frac{1}{R} = \\ &= 2(1 - 2\nu)\nabla^2\phi + \frac{1}{4\pi\mu}(\mathbf{F} \cdot \nabla)\nabla^2\frac{R}{2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Giungiamo infine alla seguente espressione:

$$\nabla^2 \left[ 2(1 - 2\nu)\phi + \frac{1}{8\pi\mu}(\mathbf{F} \cdot \nabla)R \right] = 0 \quad (1.23)$$

Sfruttando nuovamente il teorema del massimo e del minimo per le funzioni armoniche (dimostrazione in appendice) e assumendo condizioni al contorno nulle all'infinito, il termine fra parentesi deve annullarsi; otteniamo:

$$\phi = -\frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)}(\mathbf{F} \cdot \nabla)R \quad (1.24)$$

Troviamo così infine la seguente espressione per  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{F}}{4\pi\mu} \frac{1}{R} - \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)}(\mathbf{F} \cdot \nabla)R \quad (1.25)$$

che in formalismo tensoriale si scrive:

$$u_i = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{F_i}{R} - \frac{1}{4(1 - \nu)} F_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial R}{\partial x_i} \right] \quad (1.26)$$

Dato che  $\partial R / \partial x_i = x_i / R$ , avremo:

$$F_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{x_i}{R} \right) = F_k \frac{R\delta_{ik} - x_i \frac{x_k}{R}}{R^2} = \frac{F_i}{R} - \frac{F_k x_k x_i}{R^3} \quad (1.27)$$

cosicch 

$$u_i = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{F_i}{R} \left( 1 - \frac{1}{4(1-\nu)} \right) + \frac{1}{4(1-\nu)} F_k \frac{x_k x_i}{R^3} \right] \quad (1.28)$$

Semplificando la forma della precedente espressione, troviamo infine:

$$u_i = \frac{F_k}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{x_k x_i}{R^3} \right] \quad (1.29)$$

Se assumiamo che la forza  $F_k$  che appare nell'espressione sia applicata in un generico punto  $\mathbf{x}'$ , per ritrovare l'equazione corretta baster  traslare l'origine delle coordinate in tal punto sostituendo poi al suo posto il termine  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . A questo punto, considerando l'espressione (1.29), possiamo dare la definizione di **Tensore di Somigliana**:

**Tensore di Somigliana** : *in uno spazio elastico omogeneo ed isotropo, la componente  $i$ -esima dello spostamento in un punto  $\mathbf{x}$  dovuto ad una forza unitaria applicata in  $\mathbf{x}'$  in direzione dell'asse  $j$ -esimo   la componente  $\mathcal{G}_{ij}$  del tensore di Somigliana :*

$$\boxed{\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{(x_j - x'_j)(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]} \quad (1.30)$$

Il tensore di Somigliana   quindi, a tutti gli effetti, l'analogo della funzione di Green per l'elastostatica. In particolare esso   un tensore simmetrico nello scambio degli indici  $ij$  e dipende da  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  solo tramite la differenza delle loro coordinate. Come vedremo meglio nel prossimo paragrafo, la linearit  delle equazioni dell'elastostatica permette di scrivere lo spostamento dovuto ad una distribuzione di forze di volume  $f_j(\mathbf{x}')$  nella forma

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V f_j(\mathbf{x}') \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' \quad (1.31)$$

dove  $dV'$  denota un volume elementare nell'intorno  $\mathbf{x}'$

### 1.3 Teorema di Rappresentazione

Il Teorema di Rappresentazione stabilisce l'equivalenza fra una frattura (o dislocazione) che da luogo ad una discontinuit  del campo di spostamento, e il sistema di forze localizzato sulla superficie di dislocazione, che agisce come se lo stesso mezzo fosse continuo. Sia allora  $\Sigma$  una superficie di dislocazione orientata secondo la normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , sulla quale   definita una discontinuit   $b_i$  del campo di spostamento  $b_i = u_i^{(+)} - u_i^{(-)}$  dove i due termini indicano i vettori spostamento calcolati rispettivamente sulla faccia positiva e negativa

di  $\Sigma$ . Impiegando la teoria delle distribuzioni è possibile associare a questo spostamento discontinuo una deformazione singolare  $\epsilon_{ij}^{(s)}$  data dall'espressione:

$$\epsilon_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2}(n_i b_j + n_j b_i) \delta(\zeta) \quad (1.32)$$

dove  $\zeta = 0$  è l'equazione di  $\Sigma$ , e la coordinata  $\zeta = 0$  è diretta perpendicolarmente a  $\Sigma$  nel verso di  $\hat{\mathbf{n}}$ . Tale deformazione singolare non è accompagnata da uno sforzo, dato che la dislocazione implica la rottura dei legami molecolari. Se però anche in presenza di dislocazione trattiamo il mezzo come se fosse un continuo elastico, considerando in particolare la relazione costitutiva elastica  $\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$  anche sulla superficie di dislocazione, dobbiamo ricordarci di rimuovere l'effetto dello sforzo singolare indebitamente introdotto. Bisogna quindi introdurre nelle equazioni di equilibrio una forza fittizia  $f_i^{(s)}$  localizzata sulla superficie  $\Sigma$  tale da annullare l'effetto degli sforzi singolari:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i + f_i^{(s)} = 0 \quad \text{con } f_i^{(s)} = -\frac{\partial \tau_{ij}^{(s)}}{\partial x_j} = -C_{ijkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}^{(s)}}{\partial x_j} \quad (1.33)$$

da questa relazione si vede l'equivalenza tra il sistema di forze e la deformazione singolare associata alla deformazione che cercavamo. Dal momento che trattiamo il mezzo come se fosse continuo, per risolvere il problema dislocativo in uno spazio elastico, omogeneo ed isotropo in termini di spostamento, possiamo sfruttare il tensore di Somigliana  $\mathcal{G}_{ij}$  (vedi eq. 1.31).

Abbiamo così:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_j^{(s)}(\mathbf{x}') dV' \quad (1.34)$$

dove  $dV'$  ricorda che le variabili di integrazione da considerare sono quelle primarie. Sostituendo nella precedente espressione l'equazione 1.33:

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_V \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{jklm} \frac{\partial}{\partial x'_k} \epsilon_{lm}^{(s)}(\mathbf{x}') dV' \quad (1.35)$$

se si completa la divergenza si vede che è possibile usare il teorema di Gauss, pervenendo alla seguente espressione:

$$u_i(\mathbf{x}) = - \oint_{\partial V} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{jklm} \epsilon_{lm}^{(s)}(\mathbf{x}') n'_k dS' + \int_V C_{jklm} \epsilon_{lm}^{(s)}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_k} \{ \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} dV' \quad (1.36)$$

dove  $\partial V$  è la superficie "all'infinito" con normale esterna  $\hat{\mathbf{n}}'$  su  $dS'$ . Il primo termine risulta nullo, in quanto la superficie di dislocazione è tutta contenuta all'interno di  $V$ ,

mentre sul bordo si avrà  $\epsilon_{ij}^{(s)} = 0$ . Sostituendo il termine  $\epsilon_{lm}$  con la sua espressione nella (1.48) si può scrivere:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V \frac{1}{2} C_{jklm} (b_l n_m + b_m n_l) \delta(\zeta) \frac{\partial}{\partial x'_k} \{ \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} dV' \quad (1.37)$$

Ricordando che  $dV' = d\zeta d\Sigma$ , integrando in  $d\Sigma$  otteniamo:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} C_{jklm} \left\{ b_l \int_{\Sigma} n_m \frac{\partial}{\partial x'_k} \{ \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} d\Sigma + b_m \int_{\Sigma} n_l \frac{\partial}{\partial x'_k} \{ \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} d\Sigma \right\} \quad (1.38)$$

ma essendo  $C_{jklm}$  simmetrico nello scambio degli indici  $lm$ , i due addendi risultano uguali e possiamo scrivere:

$$u_i(\mathbf{x}) = C_{jklm} b_l \int_{\Sigma} n_m \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Sigma. \quad (1.39)$$

Per una superficie di dislocazione infinitesima, il risultato trovato si può approssimare in tal modo, come riportato in Boschi e Dragoni (1999)<sup>[1]</sup>:

$$u_i(\mathbf{x}) = C_{jklm} b_l n_m A_{\Sigma}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = M_{jk} \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.40)$$

dove  $A_{\Sigma}$  è l'area della superficie di dislocazione collocata in  $\mathbf{x}'$ . In ultimo è stato introdotto il tensore Momento della Dislocazione, definito formalmente come:

$$M_{jk} = C_{jklm} b_l n_m A_{\Sigma}. \quad (1.41)$$

## 1.4 Momento Tensore

Il tensore momento della dislocazione gode della proprietà di essere simmetrico in quanto  $C_{jklm}$  è a sua volta simmetrico negli indici  $jk$ . Per tale motivo ammette autovalori reali e autovettori ortogonali. Assumendo che il mezzo trattato sia isotropo, il tensore delle costanti elastiche ha tale forma:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}); \quad (1.42)$$

il momento si scrive perciò:

$$M_{ij} = [\lambda b_k n_k \delta_{ij} + \mu (b_i n_j + b_j n_i)] A_{\Sigma}; \quad (1.43)$$

Nel caso che ci accingeremo ad analizzare, ovvero per una dislocazione di taglio, per la quale cioè il vettore di Burgers è tangente alla superficie di dislocazione, si avrà  $b_k n_k = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , e l'espressione precedente si semplifica in:

$$M_{ij} = [\mu (b_i n_j + b_j n_i)] A_{\Sigma} \quad \textit{Dislocazioni di Taglio} \quad (1.44)$$

Risulta evidente constatare che in questo caso la traccia del tensore momento sarà nulla, così come il determinante. Tale ultimo risultato è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento dato che il determinante è invariante per rotazioni. Detti  $M_1, M_2, M_3$  gli autovalori, ordinati in ordine crescente, essendo

$$\begin{cases} M_{kk} = M_1 + M_2 + M_3 \\ \det ||M_{jk}|| = M_1 M_2 M_3 = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

ne risulta che in una dislocazione di taglio uno degli autovalori deve essere nullo, ovvero  $M_2$ , mentre gli altri due saranno uno l'opposto dell'altro.

## 1.5 Dislocazione Elementare di Bordo

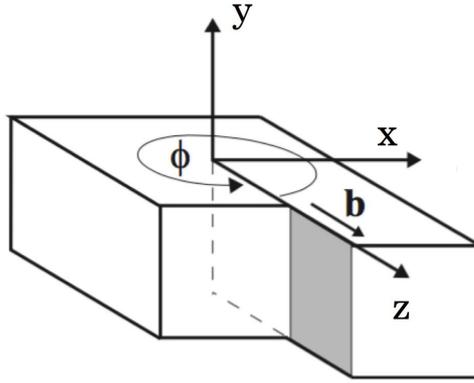


Figura 1.2: *Dislocazione di Bordo.* Il vettore di Burgers è tangente alla superficie di dislocazione e diretto nel verso delle  $z$ .

Consideriamo l'equazione (1.11) nel caso in cui la superficie di dislocazione sia il semipiano delle  $y, z$ . La linea di dislocazione coincide con l'asse  $y$ , mentre il vettore di Burgers è parallelo all'asse  $z$ :  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{k}}$ . L'equazione di dislocazione si scrive:

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = b\hat{\mathbf{i}}\delta(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

dove  $\mathbf{r} = (z, x)$ . Trattandosi di dislocazione piana, considerazioni di invarianza traslazionale e simmetria richiedono che sia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, z)$  e  $u_y = 0$ . Ricordiamo inoltre che la soluzione deve soddisfare la condizione di dislocazione  $\oint_L du_i = b_i$ . Per semplificare

i calcoli è utile scomporre il vettore  $\mathbf{u}$  in due termini,  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$  attribuendo al primo il compito di soddisfare la condizione (1.1), mentre al secondo quello di soddisfare l'equazione di dislocazione (1.11). Una buona scelta per il primo termine è

$$v_z = -\frac{b}{2\pi}\phi, \quad v_x = -\frac{b}{2\pi} \ln(r) \quad (1.47)$$

dove  $\phi = -A \tan\left(\frac{z}{x}\right)$  è l'angolo fra il semiasse  $z > 0$  e il punto  $\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + z^2}$  visto in senso antiorario da  $y$ . In particolare sarà:

$$-\phi = A \tan\left(\frac{z}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{z}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{z}{x}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

Tale scelta per  $v_z$  è dovuta al fatto che essa è la parte reale della stessa funzione analitica di cui  $\phi$  è la parte immaginaria. In tal modo  $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$  per  $r \neq 0$ . Inoltre è  $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ , come è facile vedere esplicitamente sia per  $r \neq 0$ , sia per il volume racchiuso in un cilindretto centrato in  $r = 0$ : detto  $C$  tale cilindro di raggio  $r$  e altezza unitaria lungo  $y$ , la normale alla superficie laterale sarà  $\hat{\mathbf{n}} = (-\sin \phi, 0, -\cos \phi)$  e perciò avremo:

$$\int_C \nabla \cdot \mathbf{v} dC = \oint_{\partial C} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\phi \cos \phi + \ln(r) \sin \phi] r d\phi = 0. \quad (1.49)$$

Infine non rimane che determinare  $\nabla^2 \mathbf{v}$  in  $\mathbf{r} = 0$ . Sfruttando ancora la stessa integrazione sul cilindretto  $C$  e il Teorema di Gauss si ottiene:

$$\int_C \nabla^2 \mathbf{v} dC = \oint_{\partial C} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{v} dl = \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} = \begin{cases} 0 & \text{componente } z \\ -b & \text{componente } x \end{cases} \quad (1.50)$$

da cui ricaviamo proprio  $\nabla^2 \mathbf{v} = -b \hat{\mathbf{i}} \delta(\mathbf{r})$ , e così possiamo riscrivere l'equazione (1.46) in termini di  $\mathbf{w}$ :

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \nabla^2 \mathbf{w} = 2b \hat{\mathbf{i}} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.51)$$

che rappresenta l'equazione dell'elastostatica in presenza di forze di volume  $\mathbf{f} = -2\mu b \hat{\mathbf{i}} \delta(x) \delta(z)$  e la soluzione per  $\mathbf{w}$  può essere ottenuta integrando il tensore di Green su tutto lo spazio in cui sono presenti forze di volume

$$w_i = \int dx' \int dy' \int [-2\mu b \delta(x') \delta(z')] \mathcal{G}_{i1} = -2\mu b \int_{-\infty}^{\infty} dy' \mathcal{G}_{i1}(x, y - y', z) \quad (1.52)$$

Sfruttando l'espressione esplicita del tensore di Green, risulta quindi per  $i = 1$

$$w_x = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{[r^2 + (y-y')^2]^{1/2}} + \frac{x^2}{[r^2 + (y-y')^2]^{3/2}} \right\} dy' \quad (1.53)$$

Per risolvere il problema che ci si presenta al primo integrale (ovvero il fatto che sia divergente), ricordiamo che siamo interessati alle deformazioni a meno di moti di traslazione, che si rimuovono tramite una derivata spaziale. Perciò, detto  $I(r, y) = \int \frac{dy'}{[r^2 + (y - y')^2]^{1/2}}$ , avremo:

$$\frac{\partial I}{\partial r} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dy'}{[r^2 + (y - y')^2]^{3/2}} = -\frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad I = -2 \ln r + C \quad (1.54)$$

dove C è una costante di integrazione. Risulta così:

$$w_x = \frac{b(3 - 4\nu)}{2\pi 2(1 - \nu)} \ln r - \frac{b x^2}{4\pi(1 - \nu)r^2}. \quad (1.55)$$

Per il caso di  $w_z$ :

$$\begin{aligned} w_z &= -\frac{b}{8\pi(1 - \nu)} xz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[r^2 + (y - y')^2]^{3/2}} = \\ &= -\frac{b}{8\pi(1 - \nu)} xz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[r^2 + t^2]^{3/2}} = \\ &= -\frac{b}{4\pi(1 - \nu)} \frac{xz}{r^2} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Possiamo così ricondurci alle due espressioni per gli spostamenti:

$$\begin{cases} u_x = \frac{b}{4\pi(1 - \nu)} \left[ (1 - 2\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} \right] = b h_1(x, z) \\ u_z = \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi - \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{xz}{r^2} \right] = b h_3(x, z) \end{cases} \quad (1.57)$$

## 1.6 Dislocazione Elementare Tensile

Consideriamo adesso l'equazione (1.11) nel caso in cui il vettore di Burgers sia in direzione dell'asse  $x$ ,  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{i}}$ . L'equazione della dislocazione sarà:

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = -b\hat{\mathbf{j}}\delta(\mathbf{r}) \quad (1.58)$$

dove  $\mathbf{r} = (x, z)$ . Considerazioni di invarianza traslazionale e simmetria richiedono che sia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, z)$  e  $u_y = 0$ . La soluzione dovrà inoltre soddisfare alla condizione di dislocazione  $\oint du_x = -b$ . Come nel caso precedente scomponiamo lo spostamento  $\mathbf{u}$  in un termine discontinuo e uno continuo  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ . In questo caso è opportuno scegliere, usando la precedente definizione di  $\phi$  (1.48) :

$$v_x = -\frac{b}{2\pi}\phi = \frac{b}{2\pi} \text{Atan}\left(\frac{z}{x}\right), \quad v_z = \frac{b}{2\pi} \ln r \quad (1.59)$$

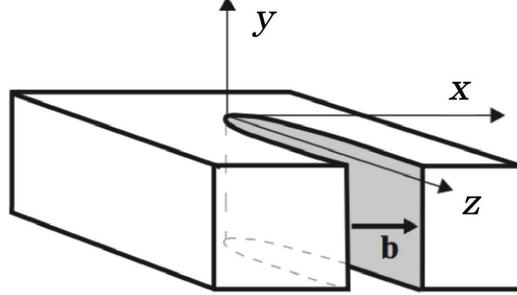


Figura 1.3: *Dislocazione elementare tensile. La superficie di dislocazione giace sul piano  $(y, z)$ , mentre il vettore di Burgers é normale a quest'ultima, diretto nel verso delle  $x$ .*

In tal modo, infatti, sono nulli sia  $\nabla^2 v$  che  $(\nabla v)$  per  $r \neq 0$ . Integrando  $\nabla^2 v$  su un circoletto attorno all'origine si dimostra facilmente che

$$\nabla^2 v = b \hat{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.60)$$

e quindi l'equazione per  $\mathbf{w}$  diventa:

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \nabla^2 \mathbf{w} = -2b \hat{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.61)$$

che può essere risolta integrando il tensore di Green sull'asse  $y$ , in analogia con il procedimento seguito per le dislocazioni di bordo.

$$w_i = 2\mu b \int_{-\infty}^{\infty} dy' \mathcal{G}_{i3}(x, y - y', z) \quad (1.62)$$

Ottenendo infine:

$$\begin{cases} u_x = \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{xz}{r^2} \right] = b g_1(x, z) \\ u_z = \frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r + \frac{x^2}{r^2} \right] = b g_3(x, z) \end{cases} \quad (1.63)$$

## 1.7 Dislocazioni di Volterra Chiuse

Si definisce "chiusa" una dislocazione che si apre lungo una linea di dislocazione per poi chiudersi su un'altra. Nel nostro caso studieremo una dislocazione verticale la cui

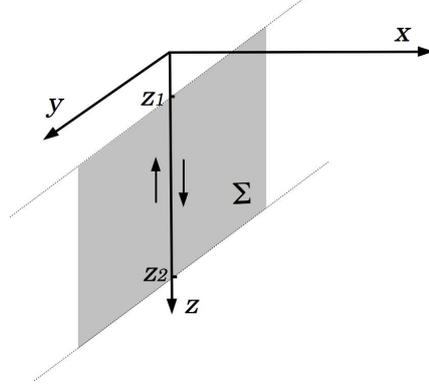


Figura 1.4: *Dislocazione verticale di bordo chiusa. La superficie di dislocazione giace sul piano  $(y, z)$ , estendendosi sulle  $y$  in  $[-\infty, \infty]$  ma rimane limitata nelle  $z$  entro i punti  $z_1$  e  $z_2$ .*

superficie si apre lungo l'asse  $z$  ad una certa profondità ( $z = z_1, x = 0$ ), e si chiude in ( $z = z_2, x = 0$ ), risultando cioè delimitata dalle due linee di dislocazione parallele a  $y$  che intersecano tali punti. Le soluzioni per il campo di spostamento generato da tali dislocazioni possono essere facilmente ottenute per sovrapposizione, considerando la somma della soluzione avente un vettore di Burgers  $\mathbf{b}$  e linea di dislocazione in ( $z = z_1, x = 0$ ), e della soluzione con vettore di Burgers  $-\mathbf{b}$  e linea di dislocazione in ( $z = z_2, x = 0$ ). Ciò che si ottiene in tal modo è che il campo di spostamento sarà discontinuo solo nella striscia  $z_1 < z < z_2, x = 0$ . In formule:

- per una dislocazione di bordo verticale:

$$\begin{aligned}
 u_x(\mathbf{x}) &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r_1 - \frac{x^2}{r_1^2} \right] - \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r_2 - \frac{x^2}{r_2^2} \right] = \\
 &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} - x^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right] = b h_1^c(x, z)
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}
 u_z(\mathbf{x}) &= \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi_1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z-z_1)}{r_1^2} \right] - \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi_2 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z-z_2)}{r_2^2} \right] = \\
 &= \frac{b}{2\pi} \left[ \phi_2 - \phi_1 - \frac{x}{2(1-\nu)} \left( \frac{(z-z_1)}{r_1^2} - \frac{(z-z_2)}{r_2^2} \right) \right] = b h_3^c(x, z)
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

- per una dislocazione tensile verticale:

$$\begin{aligned}
u_x(\mathbf{x}) &= \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi_1 + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z-z_1)}{r_1^2} \right] - \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi_2 + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z-z_2)}{r_2^2} \right] = \\
&= \frac{b}{2\pi} \left[ \phi_2 - \phi_1 + \frac{x}{2(1-\nu)} \left( \frac{z-z_1}{r_1^2} - \frac{z-z_2}{r_2^2} \right) \right] = b g_1^c(x, z)
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}
u_z(\mathbf{x}) &= -\frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r_1 + \frac{x^2}{r_1^2} \right] + \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r_2 + \frac{x^2}{r_2^2} \right] = \\
&= -\frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} + x^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right] = b g_3^c(x, z)
\end{aligned} \tag{1.67}$$

dove abbiamo usato i termini  $\phi_1, \phi_2, r_1, r_2$  si riferiscono a:

$$\phi_1 = -\arctan \frac{z-z_1}{x} \quad \phi_2 = -\arctan \frac{z-z_2}{x} \tag{1.68}$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (z-z_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (z-z_2)^2} \tag{1.69}$$

Si noti che nel caso di dislocazione chiusa la definizione di  $\phi$  differisce dalla precedente (1.48) in quanto il termine  $\pi/2$  si elimina nell'effettuare la differenza fra le due dislocazioni semi-illimitate.

Le dislocazioni chiuse con vettore di Burgers assegnato e costante prendono il nome di Dislocazioni di Volterra. Altrimenti, in casi in cui la discontinuità dello spostamento è sì assegnata, ma varia sulla superficie di dislocazione, si parla di Dislocazione di Somigliana. Per i fini di tale elaborato, prederemo sempre in considerazione solo dislocazioni di Volterra.

## Capitolo 2

# Dislocazione Obliqua in un mezzo omogeneo

Nel presente capitolo si vedrà nel dettaglio come attraverso il teorema di rappresentazione è possibile arrivare alle espressioni dello spostamento nel caso di una dislocazione di bordo obliqua e chiusa. Si applicherà il teorema di rappresentazione per la dislocazione di bordo verticale, ed in seguito si cercherà un'espressione valida per un sistema di riferimento rispetto al quale la superficie di dislocazione risulti obliqua. In ultimo, confronteremo le espressioni trovate con quelle presentate in Maccaferri et al. (2010)<sup>[3]</sup>.

### 2.1 Teorema di rappresentazione applicato ad una dislocazione di bordo verticale

Consideriamo una terna di assi cartesiani con l'asse  $z$  diretto verso il basso e l'asse  $y$  uscente nel foglio. La dislocazione di bordo che vogliamo considerare si apre lungo l'asse  $z$  nel punto  $z = z_1$  per chiudersi poi in  $z = z_2$ , situato a maggior profondità. Perciò la superficie di dislocazione è una striscia infinita lungo l'asse  $y$  e delimitata in  $z$ , come raffigurato in figura (2.1). Identifichiamo di seguito  $x$  con  $x_1$ ,  $y$  con  $x_2$ ,  $z$  con  $x_3$ . Sia  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  il punto in cui vogliamo calcolare lo spostamento, dove i pedici indicano gli assi a cui ci si riferisce. Il vettore di Burgers è diretto lungo  $z$ , perciò il momento tensore per unità di superficie  $m_{ij}$  si scriverà:

$$m_{ij} = \mu b \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

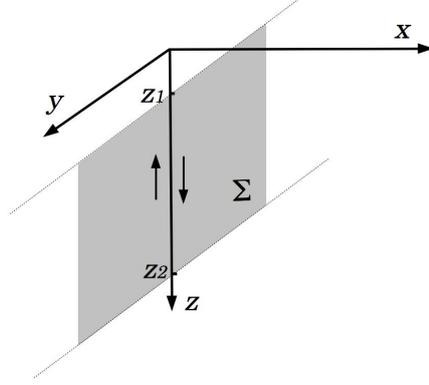


Figura 2.1: *Dislocazione chiusa verticale.*

Considerando la (1.39), possiamo scrivere per in un mezzo elastico omogeneo ed isotropo:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} m_{jk} \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Sigma \quad (2.2)$$

dove con  $\mathbf{x}'$  si è indicato il punto in cui è applicata la forza unitaria. Essendo gli unici termini non nulli del momento tensore quelli ad indici 13, 31, nel nostro caso la precedente espressione si scriverà esplicitamente, per le tre componenti del vettore di spostamento:

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} \left\{ m_{13} \frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{11}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + m_{31} \frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{13}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d\Sigma, \\ u_2(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} \left\{ m_{13} \frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{21}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + m_{31} \frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{23}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d\Sigma, \\ u_3(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} \left\{ m_{13} \frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{31}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + m_{31} \frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{33}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Gli elementi del tensore di Somigliana che andiamo a considerare sono dunque:

- per l'espressione di  $u_1(\mathbf{x})$ :

$$\mathcal{G}_{11} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{(x_1 - x'_1)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \quad (2.4)$$

$$\mathcal{G}_{13} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(x_3 - x'_3)(x_1 - x'_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]$$

- per l'espressione di  $u_2(\mathbf{x})$ :

$$\mathcal{G}_{21} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \quad (2.5)$$

$$\mathcal{G}_{23} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(x_3 - x'_3)(x_2 - x'_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]$$

- per l'espressione di  $u_3(\mathbf{x})$ :

$$\mathcal{G}_{31} = \mathcal{G}_{13} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \quad (2.6)$$

$$\mathcal{G}_{33} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3 - 4\nu) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{(x_3 - x'_3)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]$$

Eseguendo tali calcoli, secondo quanto indicato dalle nostre specifiche necessità, avremo:

- per l'espressione di  $u_1(\mathbf{x})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{11} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(3 - 4\nu)(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{3(x_1 - x'_1)^2(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right] \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{13} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ -\frac{(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{3(x_1 - x'_1)^2(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right]$$

- per l'espressione di  $u_2(\mathbf{x})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{21} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{3(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{23} = 16\pi\mu(1-\nu) \left[ \frac{3(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right]$$

- per l'espressione di  $u_3(\mathbf{x})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{31} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ -\frac{(x_1 - x'_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{3(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{33} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(3 - 4\nu)(x_1 - x'_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{3(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right]$$

Disponiamo ora di tutti gli elementi necessari per effettuare l'integrazione. La superficie che consideriamo sarà  $d\Sigma = dx'_2 dx'_3$  dove  $dx'_2 \in [-\infty, \infty]$  e  $dx'_3 \in [z_1, z_2]$ . Per la componente in  $x$  dello spostamento,  $u_1$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{\Sigma} \left\{ m_{13} \frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{11}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + m_{31} \frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{13}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d\Sigma = \\ &= \frac{\mu b}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} dx'_3 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2(1-2\nu)(x_3 - x'_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(x_1 - x'_1)^2(x_3 - x'_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{5/2}} \right] dx'_2 = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Per il primo integrale,  $I_1$ , similmente a quanto fatto nel paragrafo (1.5), possiamo chiamare  $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$ ,  $t = (x_2 - x'_2)$  in modo da avere:

$$I_1 = \frac{\mu b 2(1-2\nu)}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} (x_3 - x'_3) dx'_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r^2 + t^2)^{3/2}} dt = \quad (2.11)$$

Attuando la sostituzione  $t = r \sinh \alpha$ ,  $dt = r \cosh \alpha d\alpha$ , si perviene facilmente alla semplice espressione :

$$I_1 = \frac{\mu b 2(1-2\nu)}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x_3 - x'_3)}{r^2} dx'_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\cosh^2 \alpha)} d\alpha = \frac{2(1-2\nu)}{16\pi(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} (x_3 - x'_3) \frac{2}{r^2} dx'_3 \quad (2.12)$$

infine, semplificando i termini costanti e integrando rispetto ad  $x'_3$  :

$$I_1 = \frac{b(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x_3 - x'_3)}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2} dx'_3 = \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left( -\ln \frac{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - z_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - z_1)^2}} \right) = \\ &= -\frac{b(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{r_{z_2}}{r_{z_1}} \right) = \\ &= \frac{b(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{r_{z_1}}{r_{z_2}} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove abbiamo indicato i due termini del logaritmo a numeratore e denominatore con  $r_{z_2}$ ,  $r_{z_1}$  per comodità.

Ora invece analizziamo la seconda parte dell'integrale:

$$I_2 = \frac{\mu b}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{6(x_1 - x'_1)^2(x_3 - x'_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{5/2}} dx'_3 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{3b (x_1 - x'_1)^2}{8\pi (1 - \nu)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x_3 - x'_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{5/2}} dx'_3 = \\
&= \frac{b (x_1 - x'_1)^2}{8\pi (1 - \nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{3/2}} \right|_{z_1}^{z_2} dx'_2 = \\
&= \frac{b (x_1 - x'_1)^2}{8\pi (1 - \nu)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'_2}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - z_2)^2)^{3/2}} + \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'_2}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - z_1)^2)^{3/2}} \right) = \\
&= \frac{b (x_1 - x'_1)^2}{8\pi (1 - \nu)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_2^2 + t^2} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_1^2 + t^2} dt \right) = \\
&= \frac{b (x_1 - x'_1)^2}{4\pi (1 - \nu)} \left[ \frac{1}{r_{z_2}^2} - \frac{1}{r_{z_1}^2} \right]. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Nei calcoli precedenti si è prima integrato in  $dx'_3$ , in seguito, si è fatta la stessa sostituzione attuata in (2.11) per l'integrazione in  $dx'_2$ .

Nel nostro caso, i punti  $z_1$  e  $z_2$  in cui rispettivamente si apre e si chiude la linea di dislocazione, si trovano entrambi sull'asse  $z$ , e quindi possiamo porre  $x'_1 = 0$ . Perciò semplificando le precedenti espressioni, si trova per lo spostamento  $u_1$ :

$$\boxed{u_1(\mathbf{x}) = \frac{b}{4\pi(1 - \nu)} \left\{ -(1 - 2\nu) \ln \frac{r_{z_1}}{r_{z_2}} + x_1^2 \left[ \frac{1}{r_{z_2}^2} - \frac{1}{r_{z_1}^2} \right] \right\}} \tag{2.17}$$

Vediamo la componente in  $y$ . Per la geometria del problema, trattandosi cioè di una dislocazione piana, possiamo già prevedere che in tale direzione lo spostamento sarà nullo. Verifichiamolo calcolando :

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \left\{ m_{13} \frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{21}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + m_{31} \frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{23}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d\Sigma \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
u_2(\mathbf{x}) &= \frac{\mu b}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} 2 \frac{3(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{(5/2)}} dx'_3 = \\
&= \frac{3\mu b(x_1 - x'_1)}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - x'_2) dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x_3 - x'_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{(5/2)}} dx'_3 = \\
&= \frac{9\mu b(x_1 - x'_1)}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - x'_2) \left| \frac{1}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{(3/2)}} \right|_{z_1}^{z_2} dx'_2 = \\
&= \frac{9\mu b(x_1 - x'_1)}{8\pi\mu(1-\nu)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - x'_2)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - z_2)^2)^{(3/2)}} dx'_2 + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - x'_2)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - z_1)^2)^{(3/2)}} dx'_2 \right) = \\
&= \frac{9\mu b(x_1 - x'_1)}{8\pi\mu(1-\nu)} \left( \left| \frac{1}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - z_2)^2)^{(1/2)}} \right|_{-\infty}^{\infty} + \right. \\
&\quad \left. - \left| \frac{(x_2 - x'_2)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - z_1)^2)^{(1/2)}} \right|_{-\infty}^{\infty} \right) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Come già anticipato, i precedenti integrali sono entrambi nulli per  $x'_2 \rightarrow \pm\infty$ . In realtà si poteva già osservare, a partire dalla seconda riga, che l'espressione (1.18) è antisimmetrica rispetto a  $(x_2 - x'_2)$ , e che quindi, integrata da  $-\infty$  a  $\infty$  risulta nulla.

Infine, vediamo  $u_3(\mathbf{x})$ :

$$u_3(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \left\{ m_{13} \frac{\partial}{\partial x'_3} \mathcal{G}_{31}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + m_{31} \frac{\partial}{\partial x'_1} \mathcal{G}_{33}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d\Sigma = \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
u_3(\mathbf{x}) &= \frac{\mu b}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{2(1-2\nu)(x_1 - x'_1)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{3/2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)^2}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{5/2}} \right) dx'_3 = I_3 + I_4 \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Come per  $u_1(\mathbf{x})$  consideriamo prima il primo termine integrale e poi il secondo.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{b}{16\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{2(1-2\nu)(x_1 - x'_1)}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{3/2}} dx'_3 = \\
&= \frac{b(1-2\nu)(x_1 - x'_1)}{8\pi(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{2}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2)} dx'_3 = \tag{2.22} \\
&= -\frac{b(1-2\nu)(x_1 - x'_1)}{4\pi(1-\nu)} \frac{\arctan \frac{(x_3 - x'_3)}{(x_1 - x'_1)}}{(x_1 - x'_1)} \Big|_{z_1}^{z_2}
\end{aligned}$$

Ponendo  $x'_1 = 0$  l'espressione ottenuta è:

$$I_3 = -\frac{b(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{(x_3 - z_2)}{x_1} - \arctan \frac{(x_3 - z_1)}{x_1} \right] \quad (2.23)$$

Per la seconda parte:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\mu b}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{6(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)^2}{((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{5/2}} dx'_3 = \\ &= \frac{3b(x_1 - x'_1)}{8\pi(1-\nu)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{4(x_3 - x'_3)^2}{3((x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2)} dx'_3 = \\ &= -\frac{b(x_1 - x'_1)}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{2} \left[ \frac{\arctan \frac{(x_3 - x'_3)}{(x_1 - x'_1)} \Big|_{z_1}^{z_2}}{(x_1 - x'_1)} - \frac{(x_3 - x'_3)}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2} \Big|_{z_1}^{z_2} \right] = \\ &= -\frac{b(x_1 - x'_1)}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{(x_3 - z_2)}{(x_1 - x'_1)} - \arctan \frac{(x_3 - z_1)}{(x_1 - x'_1)} + \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{(x_3 - z_2)}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - z_2)^2} - \frac{(x_3 - z_1)}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - z_1)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ponendo  $x'_1 = 0$  e sostituendo con i termini  $r_{z_1}, r_{z_2}$

$$I_4 = -\frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{x_3 - z_2}{x_1} - \arctan \frac{x_3 - z_1}{x_1} - x_1 \left( \frac{x_3 - z_2}{r_{z_2}^2} - \frac{x_3 - z_1}{r_{z_1}^2} \right) \right] \quad (2.25)$$

Unendo così i risultati trovati e raccogliendo a fattore comune abbiamo:

$$u_3(\mathbf{x}) = I_3 + I_4 = -\frac{b}{2\pi} \left[ \arctan \frac{x_3 - z_2}{x_1} - \arctan \frac{x_3 - z_1}{x_1} - \frac{x_1}{2(1-\nu)} \left( \frac{x_3 - z_2}{r_{z_2}^2} - \frac{x_3 - z_1}{r_{z_1}^2} \right) \right] \quad (2.26)$$

Che in forma più compatta può essere scritta:

$$u_3(\mathbf{x}) = \frac{b}{2\pi} \left\{ \Phi_{z_2} - \Phi_{z_1} + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ x_1 \left( \frac{x_3 - z_2}{r_{z_2}^2} - \frac{x_3 - z_1}{r_{z_1}^2} \right) \right] \right\} \quad (2.27)$$

con

$$\Phi_{z_1} = -\arctan \frac{x_3 - z_1}{x_1}, \quad \Phi_{z_2} = -\arctan \frac{x_3 - z_2}{x_1} \quad (2.28)$$

## 2.2 Applicazione dei risultati ad una Dislocazione Obliqua

Riportiamo per chiarezza quanto abbiamo trovato, seguendo il teorema di rappresentazione, per una dislocazione di bordo verticale:

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \ln \frac{r_{z_1}}{r_{z_2}} - x_1^2 \left[ \frac{1}{r_{z_1}^2} - \frac{1}{r_{z_2}^2} \right] \right\} = b f_1(x_1, x_3) \quad (2.29)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = \frac{b}{2\pi} \left\{ \Phi_{z_2} - \Phi_{z_1} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \left[ x_1 \left( \frac{x_3 - z_1}{r_{z_1}^2} - \frac{x_3 - z_2}{r_{z_2}^2} \right) \right] \right\} = b f_3(x_1, x_3) \quad (2.30)$$

Le definizioni di  $r_{z_1}, r_{z_2}$  sono le stesse usate fino ad ora ( si veda la 2.14), così come  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  sono quelle definite in (2.28). Si noti la sostanziale uguaglianza con le espressioni (1.64) e (1.65) trovate per la dislocazione verticale di bordo di Volterra chiusa riportate nel paragrafo (1.7). Effettivamente era prevedibile che la soluzione per lo spostamento potesse scriversi come somma di due contributi: quello dipendente da  $z_1$ , rappresentante lo spostamento dovuto ad una dislocazione semi-illimitata con vettore di Burgers  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{i}}$  e linea di dislocazione parallela all'asse  $x_2$  collocata in  $(0, 0, z_1)$ , e quello dipendente da  $z_2$ , rappresentante lo spostamento dovuto ad una dislocazione semi-illimitata con vettore di Burgers  $\mathbf{b} = -b\hat{\mathbf{i}}$ , e linea di dislocazione parallela all'asse  $x_2$  collocata in  $(0, 0, z_2)$ . Possiamo allora continuare prendendo in esame il caso di una dislocazione semi-illimitata, scegliendo una delle due componenti, magari quella dipendente da  $z_1$ , tenendo conto che tutti i prossimi risultati saranno ugualmente validi anche per quella dipendente da  $z_2$ . Perciò abbiamo:

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \ln r_{z_1} - \frac{x_1^2}{r_{z_1}^2} \right\} \quad (2.31)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = \frac{b}{2\pi} \left\{ -\Phi_{z_1} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \left[ x_1 \left( \frac{x_3 - z_1}{r_{z_1}^2} \right) \right] \right\} \quad (2.32)$$

A questo punto possiamo provare ad ottenere le formule per una dislocazione di bordo obliqua. Per farlo ci mettiamo in un sistema di riferimento rispetto al quale la superficie di dislocazione risulti inclinata. Consideriamo allora la seguente rotazione di angolo  $\delta - \frac{\pi}{2}$ , raffigurata in figura (2.2). La matrice  $C$  del cambiamento di base avrà come colonne gli elementi della vecchia base espressi in termini della nuova base. Perciò:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = C\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{con } C = \begin{vmatrix} \sin \delta & 0 & \cos \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \delta & 0 & \sin \delta \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

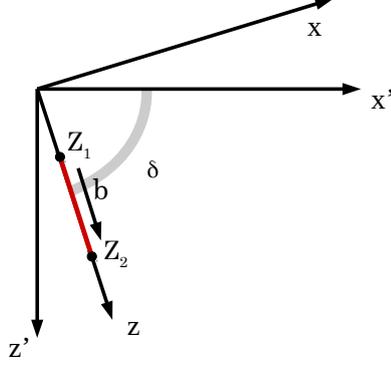


Figura 2.2: Si considera un nuovo sistema di riferimento ruotato di un angolo  $\delta$  rispetto al vecchio in cui la dislocazione si trovava lungo l'asse  $x_3$ , e la superficie di dislocazione risulta quindi inclinata rispetto agli assi del nuovo sistema di riferimento  $x'$ .

Per quanto riguarda il punto  $\mathbf{x} = (x_1, 0, x_3)$ , nel nuovo sistema di riferimento avrà coordinate  $\mathbf{x}' = (x'_1, 0, x'_3)$  e la relazione fra le vecchie e le nuove coordinate sar :

$$\mathbf{x} = C^T \mathbf{x}' \quad \text{con } C^T = \begin{vmatrix} \sin \delta & 0 & -\cos \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \delta & 0 & \sin \delta \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

e quindi:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta \\ x_3 = x'_1 \cos \delta + x'_3 \sin \delta \end{cases} \quad (2.35)$$

Eseguendo allora i calcoli, e riesprimendo le variabili secondo le nuove coordinate, per una dislocazione semi-illimitata avremo:

- per la prima componente:

$$u_1(\mathbf{x}')' = b \sin \delta f_1(x'_1, x'_3) + b \cos \delta f_3(x'_1, x'_3) = \quad (2.36)$$

$$= \sin \delta \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \ln r_{z'_1} - (x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta)^2 \frac{1}{r_{z'_1}^2} \right\} \quad (2.37)$$

$$+ \cos \delta \left( \frac{b}{2\pi} \right) \left[ -\Phi_{z'_1} - \frac{(x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta)(x'_1 \cos \delta + x'_3 \sin \delta) - z'_1}{2(1-2\nu)r_{z'_1}^2} \right]$$

- per la seconda componente:

$$u_3(\mathbf{x}')' = -\cos \delta b f_1(x'_1, x'_3) + \sin \delta b f_z(x'_1, x'_3) = \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} &= -\cos \delta \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \ln r_{z'_1} - (x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta)^2 \frac{1}{r_{z'_1}^2} \right\} \\ &+ \sin \delta \left( \frac{b}{2\pi} \right) \left[ -\Phi_{z'_1} - \frac{(x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta)}{2(1-2\nu)} \left( \frac{(x'_1 \cos \delta + x'_3 \sin \delta) - z'_1}{r_{z'_1}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove si è indicato con:

$$\begin{aligned} r_{z'_1} &= \sqrt{(x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta)^2 + (x'_1 \cos \delta + x'_3 \sin \delta - z'_1)^2}, \\ \Phi_{z'_1} &= -\arctan \left( \frac{(x'_1 \cos \delta + x'_3 \sin \delta) - z'_1}{x'_1 \sin \delta - x'_3 \cos \delta} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Di seguito, senza perdere generalità, poniamo la superficie di dislocazione nell'origine, ponendo  $z'_1 = 0$ . Inoltre, avendo trovato le espressioni per la dislocazione obliqua, per alleggerire la notazione indicheremo  $x'_1$  con  $x$  e  $x'_3$  con  $z$ ,  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $\phi = -\arctan(z/x)$ , ed elimineremo tutti i simboli " ' " agli apici, considerando esclusivamente il nuovo sistema di riferimento. A questo punto, è interessante sviluppare i calcoli. Per iniziare, consideriamo  $u_1(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} [-\sin \delta (x \sin \delta - z \cos \delta)^2 \\ &- \cos \delta (x \sin \delta - z \cos \delta)(x \cos \delta + z \sin \delta)] + \sin \delta \frac{b(1-2\nu) \ln r}{4\pi(1-\nu)} + \cos \delta \frac{b}{2\pi} (-\phi) = \\ &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} [-(x^2 \sin^3 \delta + z^2 \cos^2 \delta \sin \delta - 2xz \sin^2 \delta \cos \delta) \\ &\quad -x^2 \sin \delta \cos^2 \delta - xz \sin^2 \delta \cos \delta + xz \cos^3 \delta \\ &\quad + z^2 \sin \delta \cos^2 \delta] + \sin \delta \frac{b(1-2\nu) \ln r}{4\pi(1-\nu)} + \cos \delta \frac{b}{2\pi} (-\phi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

raggruppando i termini e semplificando, troviamo:

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} (-x^2 \sin \delta + xz \cos \delta) + \sin \delta \frac{b(1-2\nu) \ln r}{4\pi(1-\nu)} + \cos \delta \frac{b}{2\pi} (-\phi) \quad (2.42)$$

ed infine, raccogliendo i seni e i coseni:

$$u_1(\mathbf{x}) = \underbrace{\sin \delta \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} \right]}_{b g_1(x,z)} + \cos \delta \underbrace{\frac{b}{2\pi} \left[ -\phi + \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{xz}{r^2} \right]}_{b h_1(x,z)} \quad (2.43)$$

In quest'ultima espressione possiamo notare, riconoscendo la presenza delle (1.57) e (1.63), che lo spostamento  $u_1(\mathbf{x})$  per la dislocazione obliqua può considerarsi come la composizione degli spostamenti in  $x$  di una dislocazione verticale tensile e di una dislocazione verticale di bordo, moltiplicati rispettivamente per il coseno e il seno dell'angolo  $\delta$ . Allo stesso modo si può vedere che per lo spostamento  $u_3(\mathbf{x})$  valgono le stesse considerazioni, ma riferite agli spostamenti in  $z$ :

$$\begin{aligned}
u_3(\mathbf{x}) &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} [\cos \delta (x \sin \delta - z \cos \delta)^2 \\
&- \sin \delta (x \sin \delta - z \cos \delta)(x \cos \delta + z \sin \delta)] - \cos \delta \frac{b(1-2\nu) \ln r}{4\pi(1-\nu)} + \sin \delta \frac{b}{2\pi} (-\phi) = \\
&= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} [(x^2 \sin^2 \delta \cos \delta + z^2 \cos^3 \delta - 2xz \sin \delta \cos^2 \delta) \\
&- x^2 \sin \delta^2 \cos \delta - xz \sin^3 \delta + xz \cos^2 \delta \sin \delta \\
&+ z^2 \sin^2 \delta \cos \delta] - \cos \delta \frac{b(1-2\nu) \ln r}{4\pi(1-\nu)} + \sin \delta \frac{b}{2\pi} (-\phi)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

e raccogliendo come prima, e raggruppando seni e coseni, si trova:

$$\begin{aligned}
u_3(\mathbf{x}) &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} (z^2 \cos \delta - xz \sin \delta) - \cos \delta \frac{b(1-2\nu) \ln r}{4\pi(1-\nu)} + \sin \delta \frac{b}{2\pi} (-\phi) = \\
&= \cos \delta \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{z^2}{r^2} - (1-2\nu) \ln r \right] + \sin \delta \frac{b}{2\pi} \left[ -\phi - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{xz}{r^2} \right] = \\
&= \cos \delta \underbrace{\frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x^2}{r^2} + (1-2\nu) \ln r \right]}_{b g_3(x,z)} + \sin \delta \underbrace{\frac{b}{2\pi} \left[ -\phi - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{xz}{r^2} \right]}_{b h_3(x,z)},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

come già anticipato. Le ultime due espressioni di  $u_3(\mathbf{x})$  sono equivalenti poichè differiscono di una costante. Come detto prima, quanto trovato si applica anche alla parte delle (2.29), (2.30) dipendente da  $z_2$ .

Perciò sarà quindi possibile riscrivere nel sistema di riferimento  $(x, y, z)$  con gli assi obliqui rispetto la dislocazione, le formule (2.29) e (2.30) ottenute dal Teorema di rappresentazione per una dislocazione chiusa obliqua come segue:

$$u_1(\mathbf{x}) = \cos \delta b g_1^c(x, z) + \sin \delta b h_1^c(x, z); \tag{2.46}$$

$$u_3(\mathbf{x}) = \cos \delta b g_3^c(x, z) + \sin \delta b h_3^c(x, z); \tag{2.47}$$

dove  $h_1^c$ ,  $h_3^c$ ,  $g_1^c$ ,  $g_3^c$  sono definite in (1.64-67). Si noti come le formule (2.46-7) si riducano alle formule (2.29-30) se  $\delta = \frac{\pi}{2}$  cioè in assenza di rotazione.

Riportiamo di seguito i grafici rappresentati la prima e la terza componente del campo di spostamento che ritroviamo applicando le formule della dislocazione di bordo chiusa obliqua rispetto agli assi del sistema di riferimento. Considerando  $x$  asse orizzontale e  $z$  asse verticale, ciò che osserviamo è lo spostamento caratteristico di una "faglia normale" o "diretta", con angolo di dip pari a  $\delta$  in cui il blocco soprastante scivola verso il basso rispetto al blocco sottostante, come mostrato nelle figure 2.3-4 (vettori rossi).

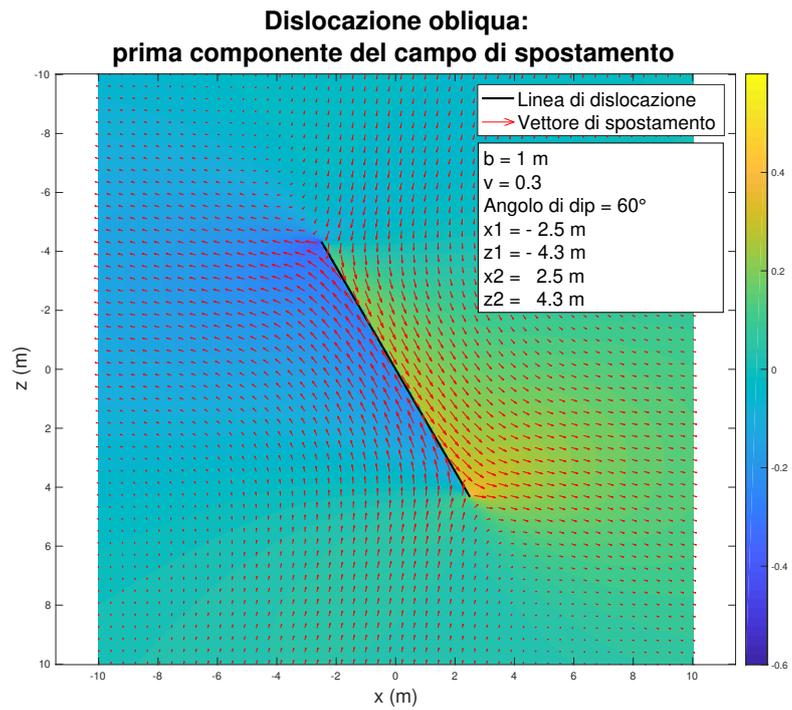


Figura 2.3: Componente  $u_1(\mathbf{x})$ : é ben visibile che in prossimità della dislocazione l'entità dello spostamento sia più grande, e vada calando man mano che ci si allontana. In realtà, già a distanze confrontabili con le dimensioni della faglia stessa si ha una notevole diminuzione di quest'ultimo.

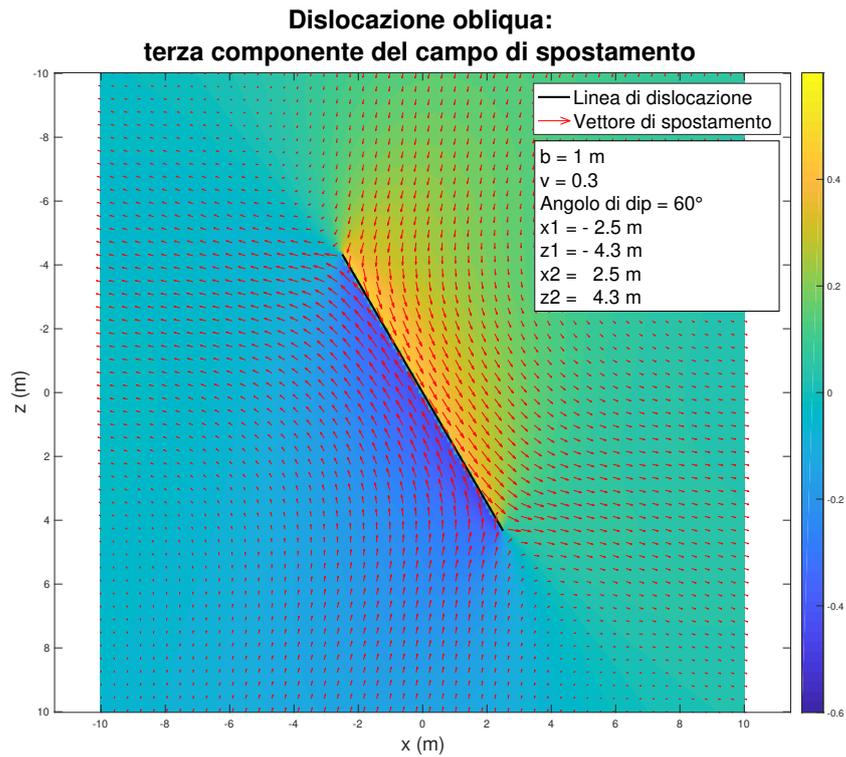


Figura 2.4: Componente  $u_3(\mathbf{x})$ : l'andamento con la distanza dell'entità dello spostamento è simile a quella della componente  $u_1(\mathbf{x})$ . Anche qui si vede lo slittamento delle due facce a sinistra e a destra della discontinuità.

## 2.3 Confronto con il metodo di Maccaferri et al. (2010)

Nell'articolo di Maccaferri et al. (2010)<sup>[3]</sup> per l'introduzione di un modello numerico rappresentante la propagazione di dicchi magmatici in mezzi elastici stratificati si sfrutta un approccio diverso per la determinazione delle espressioni dello spostamento generato da una dislocazione obliqua.

Gli autori, una volta ricavate le formule per la dislocazione verticale tensile e di bordo, identiche a quelle riportate in (1.57), (1.63), osservano che in caso si traslasse la linea di dislocazione, da  $x = 0, z = 0$  a  $x = x_1, z = z_1$ , per ottenere le nuove equazioni sarebbe sufficiente sostituire nelle suddette formule  $x$  e  $z$ , con  $x - x_1$  e  $z - z_1$ , coordinate della linea di dislocazione traslata. Allo stesso tempo, in quanto le equazioni (1.1), (1.11) non dipendono dall'orientazione della superficie di dislocazione, si osserva che se quest'ultima slittasse di un angolo  $\delta \neq \pi/2$  rispetto al piano orizzontale  $z = 0$ , le stesse equazioni continuerebbero a valere purchè si sostituisca l'angolo  $\phi$  con l'angolo  $\phi'$ , e ponendo la discontinuità di salto sulla superficie di dislocazione. A questo punto gli autori introducono le variabili  $n, s$  rispettivamente normale e tangente alla superficie di dislocazione inclinata,

$$\begin{cases} n = (x - x_1) \sin \delta - (z - z_1) \cos \delta \\ s = (x - x_1) \cos \delta + (z - z_1) \sin \delta \end{cases} \quad (2.48)$$

dalle quali scrivono:

$$\phi' = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{s}{n} & \text{se } n > 0 ; \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{s}{n} & \text{se } n < 0 ; \end{cases} \quad (2.49)$$

Si noti che le variabili " $\phi$ " e " $\phi'$ " hanno segno opposto a quelle da noi considerate. La sola sostituzione di  $\phi$  e  $\phi'$ , non modifica il vettore di Burgers che, nel caso di dislocazione tensile obliqua, non sarà più perpendicolare alla superficie di dislocazione, mentre nel caso di dislocazione di bordo, non sarà più parallelo alla superficie di dislocazione. Introducendo allora i vettori di Burgers inclinati normale  $\mathbf{b}^{(n)}$  per una dislocazione tensile, e tangente  $\mathbf{b}^{(s)}$  per una dislocazione di bordo, determinano le seguenti espressioni per il campo di spostamento per una dislocazioni tensile e di bordo obliqua:

$$\text{Dislocazione tensile obliqua : } \begin{cases} u_x^{(n)} = b^{(n)} g_1 \sin(\delta) - b^{(n)} h_1 \cos(\delta) \\ u_z^{(n)} = b^{(n)} g_3 \sin(\delta) - b^{(n)} h_3 \cos(\delta) \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\text{Dislocazione di bordo obliqua : } \begin{cases} u_x^{(s)} = b^{(s)} g_1 \cos(\delta) + b^{(s)} h_1 \sin(\delta) \\ u_z^{(s)} = b^{(s)} g_3 \cos(\delta) + b^{(s)} h_3 \sin(\delta) \end{cases} \quad (2.51)$$

Le funzioni  $g_i(x, z)$ ,  $h_i(x, z)$  sono le espressioni delle componenti del campo di spostamento (1.57) e (1.63), di una dislocazione tensile e di bordo rispettivamente, ottenute se si considera il vettore di Burgers  $\mathbf{b}$  unitario. La relazione (2.51) è identica alle (2.43) e (2.45) ricavate nel presente elaborato, se  $b = b^{(s)}$ . La riproduzione della (2.50), che è stata riportata per completezza, invece esula dall'obiettivo del presente elaborato. Combinando due dislocazioni semi-illimitate oblique rispetto agli assi del sistema di riferimento si può quindi ottenere l'espressione (2.46) relativa ad una dislocazione chiusa e obliqua, che in questa tesi è stata ricavata dal teorema di rappresentazione. I due metodi possono così dirsi equivalenti. Inoltre, un'analogia rappresentazione per la dislocazione dip-slip obliqua chiusa compare anche in Nespoli et al. (2019)<sup>[4]</sup>.

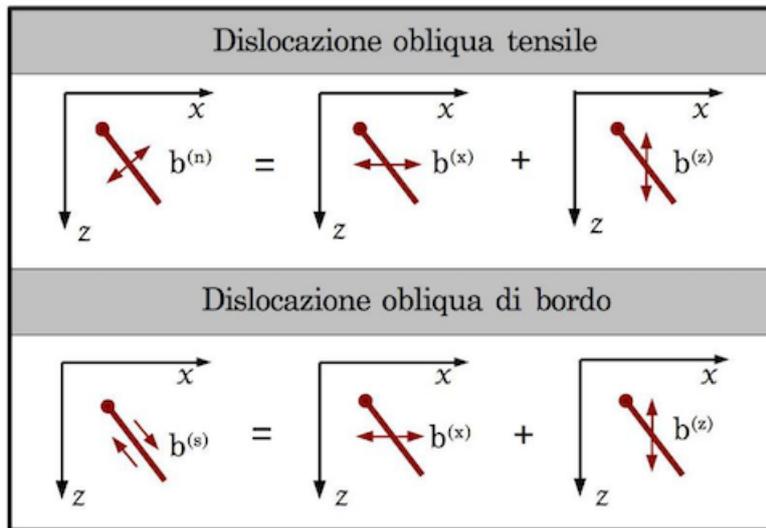


Figura 2.5: Lo schema mostra che la rappresentazione di una dislocazione tensile obliqua (o di una dislocazione di bordo obliqua) si può ottenere tramite combinazione lineare di una dislocazione di bordo verticale e una tensile verticale.

# Conclusioni

A seguito di quanto visto in queste pagine, possiamo concludere che grazie al teorema di rappresentazione si è in grado di descrivere in formule il campo di spostamento generato da una qualunque dislocazione, obliqua o verticale, tensile o di bordo. Lo sviluppo dei calcoli ci ha inoltre portato a verificare il risultato non banale secondo il quale il campo di spostamenti per una dislocazione chiusa obliqua è dato dalla composizione degli spostamenti dovuti a due dislocazioni: una tensile e una di bordo, opportunamente moltiplicati per il coseno e il seno dell'angolo che la superficie di dislocazione forma con l'asse  $x$ , rispettivamente. Perciò, si potrebbero utilizzare le conclusioni di questa tesi come dimostrazione della validità della formula (2.46-7) nella descrizione di una faglia inclinata con superficie limitata.



# Appendice

## Teorema di Gauss

Consideriamo una funzione vettoriale  $A$  dipendente dalle coordinate spaziali  $x, y, z$  e differenziabile all'interno di un volume  $V$ , racchiuso dalla superficie chiusa  $S_V$  orientata secondo la normale esterna. Si definisce "flusso" di  $A$  attraverso una superficie  $dS$  con normale  $\hat{n}$  la quantità  $A \cdot \hat{n} dS$ . Il teorema di Gauss (o della divergenza) fornisce il seguente importante risultato:

$$\oint_{S_V} A \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot A dV \quad (2.52)$$

Una dimostrazione elementare di tale risultato si ottiene considerando il cubo infinitesimo  $dV = dx dy dz$  con vertice in  $P(x, y, z)$ : il flusso di  $A$  uscente dalla faccia  $dy dz$  posta in  $x$  (con normale uscente rivolta nel verso  $-x$ ) vale  $-A_x(x, y, z) \times (dy dz)$ ; il flusso uscente dalla faccia opposta è  $+A_x(x + dx, y, z) \times (dy dz)$ ; la somma dei due contributi è quindi  $\frac{\partial A}{\partial x} dx \times (dy dz)$ . Analogamente la somma dei flussi sulle facce opposte poste in  $y$  e  $y + dy$  vale  $\frac{\partial A}{\partial y} dy \times (dx dz)$  e la somma sulle facce poste in  $z$  e  $z + dz$  vale  $\frac{\partial A}{\partial z} dz \times (dx dy)$ . Complessivamente quindi il flusso uscente dalle 6 facce del cubo vale  $(\nabla \cdot A) dV$ . Scomponendo un volume  $V$  finito in tanti volumetti elementari  $dV$ , il flusso uscente dalle facce di un cubetto posto all'interno di  $V$  si cancella con il flusso entrante nelle facce dei cubetti adiacenti e resta solo il contributo delle facce esterne dei cubetti disposti lungo  $S_V$ .

## Teorema del massimo e del minimo per le funzioni armoniche

Sia  $A \subset R^n$  limitato e  $\nabla^2 f = 0$  in  $A$ , con  $f$  funzione armonica continua in  $\bar{A} = A + \partial A$ .

Allora il massimo (minimo) di  $f$  si trova su  $\partial A$ .

Infatti, siano

$$M = \max_{\partial A} f \quad M_0 = \max_A f = f(\mathbf{x}_0) \quad (2.53)$$

supponiamo  $M < M_0$  e consideriamo la funzione

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{M_0 - M}{D^2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \quad (2.54)$$

dove  $D$  è un numero maggiore del diametro  $D_A$  di  $\bar{A}$ , e  $g(\mathbf{x}_0) = M_0$ . Perciò avremo che

$$g(\mathbf{x}) \leq M + \frac{D_A^2(M_0 - M)}{D^2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \quad \text{su } \partial A \quad (2.55)$$

Quindi anche  $g$  deve avere il massimo in un punto interno ad  $A$ . Ma dato che:

$$\nabla^2 g = \nabla^2 f + 2n \frac{M_0 - M}{D^2} > 0 \quad (2.56)$$

(con  $n$  dimensione dello spazio  $R^n$ ), mentre la condizione necessaria affinché  $g$  abbia un massimo all'interno di  $A$  è invece  $\nabla^2 g \leq 0$ . Ne segue che non può essere  $M_0 > M$ , e il massimo di  $f$  deve essere sulla frontiera di  $A$ . La dimostrazione per il minimo segue dalla precedente ma applicata a  $-f$ . Il teorema può essere esteso a funzioni armoniche su domini  $A$  illimitati, considerando una successione  $A_k$ ,  $\{k \in N\}$  di domini limitati che tendono a ricoprire  $A$  per  $k \rightarrow \infty$ .

# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la Prof.ssa Belardinelli e il Dott. Nespoli per avermi seguita con pazienza e disponibilità durante tutta la stesura di questa tesi. Inoltre, ci tengo anche a ringraziare il Prof. Bonafede, autore delle dispense da cui ho preso spunto in questi capitoli. Un grazie speciale anche ai miei genitori, Andrea e Anna, e a mia sorella, Elettra, che da sempre mi hanno appoggiata in ogni mia scelta, e che hanno sempre fatto l'impossibile per la mia felicità. Non dimentico le amiche che mi sono accanto da sempre, Laura, Maria Anna ed Eleonora, e gli amici incontrati in questa esperienza universitaria, Caterina, Cristina, Gabriele, Michael e Nirvana, con i quali ho condiviso bellissimi momenti. Devo un grazie anche a tutte quelle persone che ci sono state per me, ma che ora non ci sono più; non ultimo, ringrazio Marco, il mio moroso, che mi ha sopportata in questo periodo delicato e incoraggiata a dare sempre il massimo.



# Bibliografia

- [1] E.Boschi, M.Dragoni (1999). *Sismologia*.
- [2] L.D. Landau, E.M. Lifshits (1953). *Fisica Teorica VII - Teoria dell'Elasticità*.
- [3] Maccaferri et al. (2010). *A numerical Model of dyke propagation in layered elastic media*.
- [4] Nespoli et al. (2019). *Fault dip variations related to elastic layering*, *Geophysical Journal International*  
<https://doi.org/10.1093/gji/ggz505>