

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**FORMULE  
DI  
MINKOWSKI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

**Relatore:**  
**Prof.**  
**Vittorio Martino**

**Presentata da:**  
**Limiao Jin**

**IV Sessione**  
**Anno Accademico 2019/2020**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Strumenti di analisi ed algebra lineare . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Mappa di Gauss, curvatura e seconda forma fondamentale</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Teorema della divergenza</b>	<b>18</b>
3.1	Divergenza . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Formule di Minkowski</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>35</b>
5.1	Utili caratterizzazioni per superfici in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	35
5.2	Corollari delle formule di Minkowski: teoremi di Hilbert-Liebmann e di Jellett . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Appendice</b>	<b>41</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Nel presente elaborato forniremo una dimostrazione delle formule di Minkowski che descrivono relazioni globali ed invarianti fra le principali quantità legate alla curvatura di una superficie (compatta) orientabile come la mappa di Gauss, la curvatura media e la curvatura gaussiana: in ciascuna delle due formule, considerando le variazioni di queste quantità opportunamente combinate, integrate su tutta la superficie, si ottiene una quantità costante. La forza di queste relazioni è resa evidente attraverso la prova di alcune caratterizzazioni molto eleganti di oggetti geometrici molto particolari come le sfere: mediante la sola conoscenza di proprietà topologiche (connessione/connessione ed «esser dominio stellato») e il fatto che le curvature (curvatura gaussiana/curvatura media) siano costanti, come asserito dai teoremi di Hilbert-Liebmann e di Jellett, si possono caratterizzare in modo univoco le sfere ( $\mathbb{S}^2$ ). Per arrivare a questi risultati introdurremo, nei primi due capitoli, gli strumenti differenziali elementari per trattare le superfici e le nozioni necessarie per descrivere la curvatura delle superfici cercando di render intuitivo quanto fatto mediante esempi e costruzioni che colleghino gli strumenti introdotti e quelli già posseduti: in particolare sarà necessario il linguaggio dell'analisi (funzioni di più variabili reali a valori vettoriali e relativo calcolo differenziale) e quello dell'algebra lineare (applicazioni lineari e calcolo matriciale). Nel terzo capitolo definiremo l'operatore di divergenza e dopo alcuni accenni al calcolo integrale sulle superfici proveremo il teorema della divergenza. Nel quarto capitolo metteremo assieme le nozioni ed i risultati acquisiti per enunciare e provare le formule di Minkowski. Come applicazioni nel quinto capitolo proveremo alcuni fatti come corollari delle formule di Minkowski: il Teorema di Hilbert-Liebmann ed il Teorema di Jellett. In appendice è fornita la prova dell'esistenza di una costruzione usata nella prova delle formule di Minkowski. L'ambiente in cui proveremo i risultati seguenti sarà lo spazio tridimensionale sebbene gran parte dei medesimi risultati, ed in particolare le formule di Minkowski, valgano anche in  $\mathbb{R}^n$  con  $n$  generico<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>in particolare vedi [V]

## 1.1 Strumenti di analisi ed algebra lineare

Nel seguito tutte le funzioni trattate, dove non specificato, saranno funzioni differenziabili e regolari ovvero  $C^\infty$ .

**Definizione 1** (jacobiana e jacobiano). Per  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jacobiana( $f$ ) =  $J(f)$  è la matrice  $m \times n$  delle derivate prime di  $f$  costruita mettendo per righe gli  $m$  gradienti delle  $m$  componenti di  $f$  rispetto alle  $n$  variabili :

$$J(f) = \begin{pmatrix} \nabla(f_1) \\ \nabla(f_2) \\ \vdots \\ \nabla(f_{m-1}) \\ \nabla(f_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ovvero  $(J(f))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  con  $i = 1 \dots m$   $j = 1 \dots n$ . Con  $J(f)$  indichiamo la matrice jacobiana, con  $\text{jac}(f)$  indichiamo lo jacobiano o determinante della jacobiana con  $|\text{jac}(f)|$  indichiamo il modulo dello jacobiano o valore assoluto del determinante della jacobiana.

**Teorema 1** (teorema della funzione implicita).  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$  funzione differenziabile di tre variabili a valori scalari, sia  $p = (x_0, y_0, z_0) \in O$   $c \in \mathbb{R}$ ,  $f(p) = c$  e  $\frac{\partial f(p)}{\partial z} \neq 0$  allora esistono  $U \ni (x_0, y_0)$  intorno aperto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $V \ni z_0$  intorno aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$  funzione differenziabile di due variabili a valori reali tale che  $U \times V \subseteq O$ ,  $g(x_0, y_0) = z_0$  e

$$f^{-1}(c) = \{p \in U \times V | f(p) = c\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U \text{ e } g(x, y) = z\}$$

ossia localmente in  $U \times V$  l'insieme di livello di  $f$  relativo al valore  $c$  è localmente in  $U$  il grafico della funzione  $g$ .

Come estensione dimensionale del teorema abbiamo:

**Teorema 2** (teorema della funzione inversa).  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto,  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^3$  funzione differenziabile di tre variabili a valori vettoriali, sia  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in O$  tale che  $\text{jac}(F)(p_0) = |J(F)(p_0)| = \det \left( \frac{\partial(F_1(p_0), \dots, F_n(p_0))}{\partial x_1, \dots, x_n} \right) \neq 0$ , ovvero  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia un isomorfismo lineare, allora esistono  $U \ni p_0$  intorno aperto di  $\mathbb{R}^3$  tali che  $F : U \rightarrow F(U)$  sia invertibile e differenziabile in  $F(U)$  tramite la funzione  $G$  e  $\forall y_0 \in F(U)$   $J(G)(y_0) = (J(F)(G(y_0)))^{-1}$  ossia  $F$  nell'intorno del punto con jacobiano invertibile è un diffeomorfismo locale.

**Teorema 3** (teoremi spettrali). Sia  $V$  spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare, ossia una forma bilineare simmetrica definita positiva, allora ogni endomorfismo simmetrico di  $V$  ammette una base ortonormale di autovettori. Nel

linguaggio delle matrici ogni matrice simmetrica di numeri reali  $A$  è simile ad una matrice diagonale  $D$  attraverso una matrice ortogonale  $T$  ossia  $T^{-1}AT = D$  e gli autovalori saranno tutti reali.

**Definizione 2.** Se  $V$  spazio vettoriale è dotato di un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'endomorfismo  $W$  di  $V$  tale che  $\langle Wu, v \rangle = \langle u, Wv \rangle \forall u, v \in V$  si dirà simmetrico o autoaggiunto. Nel linguaggio degli operatori lineari su spazi vettoriali diremo che un endomorfismo  $W$  di  $V$  è autoaggiunto se esiste una base dello spazio vettoriale costituita da suoi autovettori il che implica che l'endomorfismo è diagonalizzabile.

**Definizione 3** (omeomorfismi e diffeomorfismi). Dati  $X, Y$  spazi topologici una funzione  $f : X \rightarrow Y$  biettiva, continua e con inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  continua si dice omeomorfismo. Una funzione fra aperti dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$   $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$  biettiva, differenziabile e con inversa  $f^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$  differenziabile si dice diffeomorfismo.

**Definizione 4** (superficie).  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice **superficie** (regolare) se per ogni punto  $p \in S$  esistono un intorno di  $p$   $N \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto ed un diffeomorfismo suriettivo  $\phi : U \rightarrow S \cap N$  in modo che si possa esprimere ogni punto in  $S \cap N$  mediante la funzione  $\phi$  detta parametrizzazione/sistema di coordinate locali della superficie e le coordinate locali di  $S$  in  $p$   $(u, v) \in U$ ; in modo più esplicito vale che  $\phi(U) = S \cap N$ ,  $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = p$  inoltre tale associazione è differenziabile ossia le mappe  $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$  hanno tutte le derivate parziali continue,  $\phi$  è differenziabile quindi continua e ciò vale anche per la sua inversa  $\phi^{-1} : S \cap N \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$  vista come restrizione di  $F : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  regolare e con  $S \cap N \subseteq W$  infine essendo un diffeomorfismo  $\forall q \in U$   $(d\phi)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è iniettiva.

**Osservazione 1.** Il fatto che il differenziale non si annulli corrisponde all'idea che localmente nel piano tangente (nel senso intuitivo e che chiariremo nella definizione 7 di pagina 7) si può trovare una base di due vettori ovvero il piano tangente ha dimensione due:  $q = (u_0, v_0)$ ,  $\phi(q) = p$ ,  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \cap N \subseteq \mathbb{R}^3$   $\phi : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  con le basi canoniche euclidee  $(e_1, e_2)$  in  $\mathbb{R}^2$  e  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  in  $\mathbb{R}^3$ , indicando con  $e'_i$  il duale di  $e_i$   $i = 1, 2$ ; per definizione  $e_1$  sarà tangente alla curva  $\eta_1 : u \rightarrow (u, v_0)$  che composta con la mappa  $\phi$  costituisce l'applicazione  $u \rightarrow (u, v_0) \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$  che avrà come vettore tangente  $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  infatti per la regola della catena  $d(\phi \circ \eta_1) = \phi_u e'_1$  porremo che  $d\phi_q(e_1) = \frac{\partial \phi}{\partial u}$  ed in modo del tutto simile per la seconda coordinata con la curva  $\eta_2 : v \rightarrow (u_0, v)$  considerando la composizione  $v \rightarrow (u_0, v) \rightarrow (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$   $\frac{\partial \phi}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$  avremo  $d(\phi \circ \eta_2) = \phi_v e'_2$  e porremo  $d\phi_q(e_2) = \frac{\partial \phi}{\partial v}$  ossia  $d\phi_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$  quindi la condizione dell'iniettività del differenziale della parametrizzazione si riformula nel fatto che i due vettori colonna sono

linearmente indipendenti ovvero  $\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \neq 0$ . Per quanto sopra in modo informale una superficie sarà una regione tridimensionale parametrizzata in modo liscio tramite omeomorfismi (eventualmente differenziabili) e tale che in ogni punto si possa costruire lo spazio tangente.

**Esempio 1** (piano).  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = d; (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\}$  supponiamo che  $c \neq 0$  allora  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = Ax + By + D\}$  con  $A = -a/c, B = -b/c, D = d/c$  sia  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi : (u, v) \rightarrow (u, v, Au + Bv + D)$  e  $\phi(\mathbb{R}^2) = S, \phi^{-1} : S \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $\phi^{-1} : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2), \frac{\partial \phi}{\partial u} = (1, 0, A) \frac{\partial \phi}{\partial v} = (0, 1, B)$  che sono vettori linearmente indipendenti: il piano è una superficie per la nostra definizione.

**Esempio 2** (grafico di una funzione (regolare) di due variabili a valori reali). Il grafico di una funzione (regolare) è l'insieme  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $z = f(x, y)\}$  prendiamo  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3, \phi : (u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$  e  $\phi(U) = S, \phi^{-1} : S \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi^{-1} : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2), \frac{\partial \phi}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}) \frac{\partial \phi}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$  che sono vettori linearmente indipendenti: il grafico di una funzione è una superficie.

**Esempio 3** (sfera). Siano  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}, f : U \rightarrow \mathbb{R}, f : (u, v) \rightarrow \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ , preso  $w \in \mathbb{S}^2$  definiamo  $B_w = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 | \langle p, w \rangle = p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3 > 0\}$  un intorno di  $w$  e scegliendo il sistema di coordinate in  $\mathbb{R}^3$  a posteriori si può avere  $w = (0, 0, 1)$  e  $B_w = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 | p_3 > 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in U\}$  quindi  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \bigcup_{w \in \mathbb{S}^2} B_w$  ossia localmente abbiamo che la sfera è il grafico di una funzione e quindi è effettivamente una superficie.

**Esempio 4** (insiemi di livello di valori regolari). Sia  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione differenziabile  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c$  si dirà essere un valore regolare di  $f$  se  $\forall p \in O$  tale che  $f(p) = c$  il differenziale  $(df)_p \neq 0$ . Se  $c$  è un valore regolare per  $f$  e  $S = f^{-1}(c) \neq \emptyset$  allora  $S$  è una superficie infatti sia  $p = (x_0, y_0, z_0) \in O$   $f(p) = c$  e  $\left(\frac{\partial f(p)}{\partial x}, \frac{\partial f(p)}{\partial y}, \frac{\partial f(p)}{\partial z}\right) = \nabla(f)_p = (df)_p \neq 0$  essendo un vettore non nullo assumiamo che l'ultima componente sia non nulla  $\frac{\partial f(p)}{\partial z} \neq 0$  allora mediante il teorema della funzione implicita di pagina 3  $\exists U \times V \subseteq O$  tale che  $S \cap (U \times V) = \{p \in U \times V | f(p) = c\}$ , intorno in  $S$  di  $p \in S$ , è il grafico di una funzione differenziabile che per l'esempio 2 è una superficie.

**Definizione 5** (mappa differenziale definita su una superficie). Sia  $S$  una superficie, diremo che  $f : N \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $p \in N$  se per ogni parametrizzazione  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , con  $p \in \phi(U) \subseteq N$ ,  $f \circ \phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile, nel senso classico, in  $q$  tale che  $\phi(q) = p$ , se ciò vale per ogni punto  $p$  di  $N$ ,  $f$  sarà differenziabile in  $N$ .

**Definizione 6** (mappa differenziale a valori su una superficie). Sia  $S$  una superficie e  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto, diremo che  $g : O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow S$  è differenziabile in  $p \in S$  se per

$i : S \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mappa di inclusione  $i \circ g : O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$  è differenziabile, nel senso classico, in  $q$  tale che  $g(q) = p$ , se ciò vale per ogni punto di  $S$ ,  $g$  sarà differenziabile in  $S$ .

**Osservazione 2.** Mediante le due definizioni sopra possiamo dare un senso alla nozione di applicazione differenziabile  $f : S \rightarrow S'$  fra due superfici  $S$  e  $S'$  considerando  $i \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Possiamo inoltre verificare se due superfici sono diffeomorfe cercando un'applicazione differenziabile ed invertibile con inversa differenziabile che mappa una superficie nell'altra. Notiamo infine che  $\text{id} : S \rightarrow S$  è un diffeomorfismo, se  $\phi : S \rightarrow S'$  è un diffeomorfismo allora  $\phi^{-1} : S' \rightarrow S$  è tale e per la regola della catena anche la composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo quindi l'«esser diffeomorfi», analogamente al caso degli omeomorfismi fra spazi topologici, è una relazione di equivalenza.

**Esempio 5** (funzione distanza). Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie,  $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$  un punto fissato non appartenente alla superficie, la funzione  $\text{dist}_{p_0}^S : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dist}_{p_0}^S : p \rightarrow \|p - p_0\|$  è una mappa differenziabile essendo tale  $\text{dist}_{p_0} : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dist}_{p_0} : p \rightarrow \|p - p_0\|$  e valendo  $\text{dist}_{p_0}^S = \text{dist}_{p_0} \circ \text{id}_S = \text{dist}_{p_0|_S}$  con  $\text{id}_S = i_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i_S : p \rightarrow p$  inclusione della superficie nello spazio tridimensionale.

**Notazione 1** (traccia). Data  $A$  matrice quadrata  $n \times n$  indicheremo con  $\text{tr}(A)$  la traccia della matrice ovvero la somma degli elementi sulla diagonale principale:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) = \text{traccia}(A) &= \text{traccia} \left( \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) = \\ &= a_{11} + \dots + a_{kk} + \dots + a_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{kk} \end{aligned}$$

## Capitolo 2

# Mappa di Gauss, curvatura e seconda forma fondamentale

Come nella definizione classica di applicazione differenziabile si fa un'approssimazione lineare (al primo ordine) della funzione e una curva si approssima localmente in un punto con la retta tangente in modo analogo definiamo:

**Definizione 7** (piano tangente). *Sia  $S$  superficie e  $p \in S$ , un vettore  $v \in \mathbb{R}^3$  si dirà tangente ad  $S$  in  $p$  se esiste  $\epsilon > 0$  ed una curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ ,  $\gamma : t \rightarrow \gamma(t)$  tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = v$ ; l'insieme di tali vettori tangenti si dirà **piano tangente** alla superficie  $S$  nel punto  $p$  e si indicherà con  $T_pS$ ; diremo vettori normali ad  $S$  in  $p$  i vettori giacenti sulla retta per  $p$  perpendicolare a  $T_pS$ .*

In modo informale il piano tangente alla superficie  $S$  in un punto  $p$  corrisponde all'insieme dei punti finali dei vettori tangenti a tutte le curve sulla superficie  $S$  e con punto base  $p$ .

Esplicitiamo la nozione di differenziale per un'applicazione differenziabile con dominio su una superficie:

**Definizione 8** (differenziale per mappe con dominio su una superficie).  *$S$  superficie  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  mappa differenziabile,  $p \in S$  diciamo differenziale di  $f$  in  $p$  la mappa  $(df)_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che preso  $v \in T_pS$  e  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  curva sulla superficie tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$*

$$(df)_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} = (f \circ \gamma)'(0)$$

*Un punto  $p$  in cui  $(df)_p = 0$  si dirà punto critico per  $f$ .*

Si prova<sup>1</sup> che quella sopra è una buona definizione ovvero non dipende dalla curva scelta e che è una mappa lineare fra spazi vettoriali.

---

<sup>1</sup>vedi pagina 46 lemma 2.57 di [I]

Diamo ora una caratterizzazione analitica del piano tangente mediante le parametrizzazioni:

**Lemma 1** (il piano tangente in modo analitico). *S superficie,  $p \in S$  e  $\phi : U \rightarrow S$  parametrizzazione della superficie con  $p \in \phi(U)$  allora  $T_p S = (d\phi)_{\phi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ .*

*Dimostrazione.*  $\supseteq$ ) Siano  $w \in \mathbb{R}^2$ ,  $q = \phi^{-1}(p)$ ,  $\epsilon > 0$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha : t \rightarrow \alpha(t) = q + tw$  abbiamo che  $\alpha(0) = q$  e  $\alpha'(0) = w$ . Siano  $\epsilon > 0$  e  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$   $\beta = \phi \circ \alpha$  allora  $\beta(0) = \phi(\alpha(0)) = \phi(q) = p$  e  $\beta'(0) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \frac{d(\phi(\alpha(t)))}{d(\alpha(t))} \Big|_{t=0} \frac{d(\alpha(t))}{dt} \Big|_{t=0} = (d\phi)_q w = (d\phi)_{\phi^{-1}(p)}(w)$  quindi essendo  $w \in \mathbb{R}^2$  generico vale  $T_p S \supseteq (d\phi)_{\phi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ .  
 $\subseteq$ ) sia  $v \in T_p S$  allora esiste  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  tale che  $\beta(0) = p$  e  $\beta'(0) = v$ , sia  $\epsilon > 0$  piccolo in modo che il supporto della curva  $\beta((-\epsilon, \epsilon)) \subseteq \phi(U)$  definiamo localmente in  $U$ ,  $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \rightarrow U$ ,  $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : t \rightarrow \beta(t) \rightarrow \phi^{-1}(\beta(t))$ , vale che  $\alpha(0) = \phi^{-1}(\beta(0)) = \phi^{-1}(p) = q$  e  $v = \beta'(0) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \frac{d(\phi(\alpha(t)))}{d(\alpha(t))} \Big|_{t=0} \frac{d\alpha(t)}{dt} \Big|_{t=0} = (d\phi)_q(\alpha'(0))$  ossia ogni vettore del piano tangente ad  $S$  in  $p$  sta nell'immagine di  $(d\phi)_q$ .  $\square$

**Osservazione 3.** *Poiché lo spazio tangente ha una definizione sintetica senza alcuna scelta di una specifica parametrizzazione,  $(d\phi)_q(\mathbb{R}^2)$  non dipende da  $\phi$ . Poiché abbiamo una superficie regolare  $\frac{\partial \phi}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$  sono linearmente indipendenti e saranno una base di  $(d\phi)_q(\mathbb{R}^2)$  ossia di  $T_p S$ .*

**Lemma 2** (caratterizzazione degli insiemi di livello di valori regolari). *Sia  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione differenziabile  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c$  un valore regolare di  $f$  per l'esempio 4  $S = f^{-1}(c)$  è una superficie. Vale che  $\forall p \in S$   $T_p S = \ker((df)_p)$  con  $(df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $v \in T_p S$  allora esiste  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = v$  poiché, per definizione di  $S$ ,  $(f \circ \gamma)(t) = c \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , essendo costante  $0 = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d(f(\gamma(t)))}{d(\gamma(t))} \Big|_{t=0} \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f(\gamma(t)))}{d(\gamma(t))} \Big|_{t=0} v = (df)_p v$ , ossia  $v$  sta nel nucleo di  $(df)_p$ . Poiché  $T_p S$  e  $\ker((df)_p)$  sono due sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione due infatti  $\dim(\ker((df)_p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{im}((df)_p)) = 3 - \text{rg}((df)_p) = 3 - 1 = 2$  essendo per ipotesi  $(df)_p \neq 0$  (matrice  $1 \times 3$  non nulla) ed avendo  $T_p S \subseteq \ker((df)_p)$  allora coincidono.  $\square$

**Esempio 6** (piano). *Siano  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  e sia  $P = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 = \langle p - p_0, w \rangle = w_1(x - x_0) + w_2(y - y_0) + w_3(z - z_0)\} = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 x + w_2 y + w_3 z = w_1 x_0 + w_2 y_0 + w_3 z_0\}$  il piano passante per  $p_0$  e normale a  $w$ . Definiamo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : p \rightarrow f(p) = \langle p - p_0, w \rangle$  allora per il lemma sopra  $\forall p \in P = f^{-1}(0)$ ,  $T_p P = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0\}$  ossia per ogni punto il piano tangente a  $P$  è il piano perpendicolare alla normale nel punto e le linee normali al piano tangente nei diversi punti sono parallele.*

**Esempio 7** (sfera). Sia  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  ed  $r > 0$   $\mathbb{S}_r^2(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = \|p - p_0\|^2 = r^2\}$ . Definiamo  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : p \rightarrow f(p) = \|p - p_0\|^2$  allora  $\mathbb{S}_r^2(p_0) = f^{-1}(r^2)$  quindi per il lemma sopra  $\forall p \in \mathbb{S}_r^2(p_0) = f^{-1}(r^2)$ ,

$$T_p \mathbb{S}_r^2(p_0) = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, v \rangle = 0\}$$

ossia il piano tangente per una sfera in un punto  $(p)$  è il piano ortogonale al vettore posizione  $(p - p_0)$  relativo al punto rispetto al centro  $(p_0)$  e le linee normali al piano tangente nei diversi punti della sfera si incontrano nel centro  $(p_0)$ .

Come accennato negli esempi sopra spesso alcuni problemi si esprimono in modo più sintetico e compatto considerando piuttosto che lo spazio tangente la retta perpendicolare al piano tangente nel punto. Per introdurre questa nozione nel nostro caso particolare diamo questa definizione generale.

**Definizione 9** (campo di vettori).  $S$  superficie di  $\mathbb{R}^3$  diremo campo vettoriale differenziabile<sup>2</sup> su  $S$  una mappa differenziabile  $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diremo campo di vettori tangenti alla superficie  $v_{//} : S \rightarrow T_p S$ ,  $v_{//} : p \rightarrow v_{//}(p)$  e campo di vettori normali alla superficie  $v_{\perp} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $v_{\perp} : p \rightarrow v_{\perp}(p)$  tale che  $v_{\perp}(p) \perp T_p S \forall p \in S$ . Considereremo anche il campo dei vettori normali<sup>3</sup> alla superficie  $S$  e di norma unitaria ovvero tale che  $\|v_{\perp}(p)\| = 1 \forall p \in S$  e lo indicheremo con  $N$  quindi  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  porta un punto  $p$  nel vettore unitario, applicato nel punto, perpendicolare al piano tangente alla superficie  $S$  nel punto  $p$ ; tale mappa  $N$  la si dirà **mappa di Gauss** sulla superficie  $S$ .

Caratterizziamo ora in modo analitico il campo di vettori normali.

**Lemma 3** (caratterizzazione locale ed analitica del campo di vettori normali). Siano  $S$  una superficie e  $\phi : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione di  $S$  allora esiste localmente su  $\phi(U)$  un campo di vettori normali.

*Dimostrazione.* Sia  $q \in U$ ,  $\frac{\partial \phi(q)}{\partial u}$   $\frac{\partial \phi(q)}{\partial v}$  sono una base di  $T_{\phi(q)} S$ . Sia  $N^{\phi}(q) = \frac{\frac{\partial \phi(q)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi(q)}{\partial v}}{\|\frac{\partial \phi(q)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi(q)}{\partial v}\|}$  tale vettore è normalizzato e perpendicolare a  $T_{\phi(q)} S$  per definizione di prodotto vettoriale. Definiamo su tutto  $U$  la mappa  $N^{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $N^{\phi} : q \rightarrow \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\|}(q)$  e definiamo  $N = N^{\phi} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  per cui per ogni  $p \in S \cap N = \phi(U)$  con  $p = \phi(q)$  esiste  $N(p) = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\|}(q)$ .  $\square$

Poiché localmente esiste una retta perpendicolare allo spazio tangente esistono due vettori normalizzati perpendicolari allo spazio tangente e ciò vale anche globalmente confrontando le mappe di vettori normali:

<sup>2</sup>Se non specificato in seguito i nostri campi di vettori saranno lisci o differenziabili

<sup>3</sup>A volte per alleggerire, nel caso locale, parleremo di vettore normale intendendo che per ogni punto vi è un vettore, immagine della mappa, secondo l'associazione data dal campo di vettori

**Lemma 4.** *Siano  $S$  una superficie connessa,  $N_1$  e  $N_2$  due campi di vettori normali differenziabili allora o  $N_1 = N_2$  oppure  $N_1 = -N_2$ .*

*Dimostrazione.*  $\forall p \in S$ ,  $N_1(p)$  e  $N_2(p)$  sono vettori unitari perpendicolari allo stesso piano  $T_p S$  quindi o sono coincidenti o opposti. Avremo che  $S = S_+ \cup S_-$  con  $S_+ = \{p \in S | N_1(p) = N_2(p)\}$  e  $S_- = \{p \in S | N_1(p) = -N_2(p)\}$  disgiunti e chiusi essendo  $N_1, N_2$  continue e gli insiemi  $S_+, S_-$  controimmagini di chiusi (il punto 0) ma  $S$  è connesso quindi o  $S = S_+$  e  $S_- = \emptyset$  o  $S = S_-$  e  $S_+ = \emptyset$ .  $\square$

Le superfici di cui ci occuperemo in seguito saranno una classe più ristretta di quelle viste fino ad ora e per cui abbia senso parlare di mappa gaussiana:

**Definizione 10** (superficie orientabile). *Sia  $S$  superficie, se esiste globalmente su tutta la superficie il vettore normale diciamo che  $S$  è orientabile e diremo tale campo l'orientazione della superficie, quando specificata l'orientazione per la superficie diremo quest'ultima orientata.*

Per il lemma 3 esiste localmente un orientazione per la superficie e per il lemma 4, sotto ipotesi di connessione ed orientabilità, esistono esattamente due orientazioni. Esistono però anche superfici non orientabili come il Nastro di Moebius.

**Esempio 8** (piano). *Siano  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  e  $|w| = 1$  e  $P = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = \langle p - p_0, w \rangle = w_1(x - x_0) + w_2(y - y_0) + w_3(z - z_0)\}$  per quanto visto nell'esempio 6 relativo al piano  $T_p P = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 | \langle v, w \rangle = 0\}$  quindi  $N : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $N : p \rightarrow N(p) = w$  è un campo vettoriale normale ed unitario su  $P$ .*

**Esempio 9** (sfera). *Sia  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  ed  $r > 0$   $\mathbb{S}_r^2(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^3 | \|p - p_0\|^2 = r^2\}$ . Per l'esempio 7 relativo alla sfera sappiamo che il piano tangente  $T_p \mathbb{S}_r^2(p_0)$  per una sfera in un punto  $(p)$  è il piano ortogonale al vettore posizione  $(p - p_0)$  relativo al punto  $(p)$  rispetto al centro  $(p_0)$  quindi definendo  $N : \mathbb{S}_r^2(p_0) \rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $N : p \rightarrow \frac{p - p_0}{r}$  diremo ogni vettore di tale campo normale esterna alla superficie puntando in modo radiale verso l'esterno della superficie ed il campo si dirà normale esterno.*

**Esempio 10** (grafico di una funzione). *Sia  $S$  superficie grafico di una funzione regolare  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\phi : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\phi : (u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$  una parametrizzazione*

di  $S$ . Sia  $\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial v} & \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} =$

$(-f_u, -f_v, 1)$  e  $\|\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$  e sia  $N^\phi = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$  definiamo

$N = N^\phi \circ \phi^{-1} : S \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $N = N^\phi \circ \phi^{-1} : p = \phi(q) \rightarrow q \rightarrow \frac{(-f_u(q), -f_v(q), 1)}{\sqrt{1 + f_u^2(q) + f_v^2(q)}}$

che per definizione di prodotto vettoriale è perpendicolare al piano tangente  $T_p S = \text{Span} \left( \frac{\partial \phi(q)}{\partial u}, \frac{\partial \phi(q)}{\partial v} \right)$ .

**Esempio 11** (insieme di livello). Sia  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto e  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$  funzione differenziabile,  $c \in \mathbb{R}$  valore regolare per  $f$ ,  $S = f^{-1}(c) \neq \emptyset$ , sappiamo che  $T_p S = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (\nabla f)_p, v \rangle = 0\}$  quindi per ogni punto  $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$  è un campo normale su  $S$  quindi normalizzando definiamo il campo normale unitario  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  

$$N : p \rightarrow \frac{(f_x(p), f_y(p), f_z(p))}{\sqrt{f_x^2(p) + f_y^2(p) + f_z^2(p)}}.$$

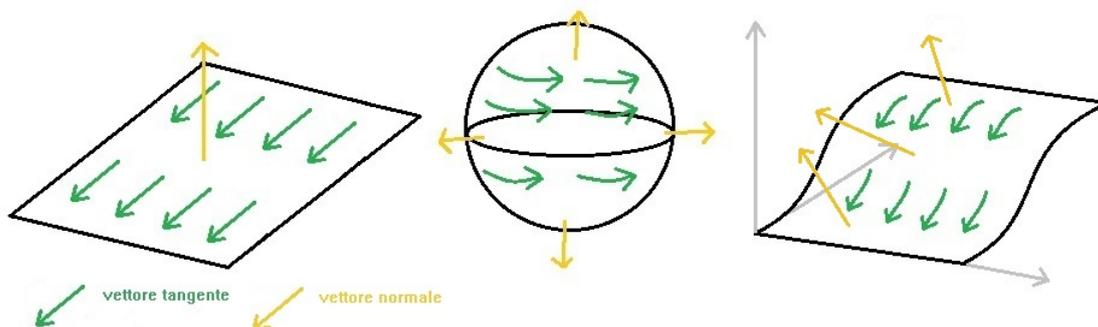


Figura 2.1: mappe di Gauss per piano sfera e grafico di funzione

Tornando alla definizione 9 di mappa di Gauss specifichiamo quando muovendosi in modo continuo sulla superficie anche il vettore normale ha una variazione continua e come localmente la mappa di Gauss descrive la superficie nel suo variare in un intorno fissato.

**Osservazione 4.** Poiché  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  è un diffeomorfismo  $(dN)_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  è un isomorfismo lineare ma per quanto visto sulla sfera  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \oplus N(p) = \mathbb{R}^3 = T_p S \oplus N(p)$  quindi  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = T_p S$  ossia il differenziale della mappa di Gauss è un endomorfismo di  $T_p S$ . Essendo un'applicazione lineare fra spazi di dimensione due avrà una matrice associata rispetto alle basi scelte (es. quelle canoniche dello spazio euclideo)  $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , annullandone il polinomio caratteristico, che è definito in modo indipendente dalle basi e dipende solo dalla classe di similitudine ovvero dall'applicazione che stiamo rappresentando, otteniamo  $0 = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - (\text{tr}(W))\lambda + (\det(W))$  e poiché tale ragionamento non dipende dalla matrice scelta  $\lambda^2 - (\text{tr}((dN)_p))\lambda + (\det((dN)_p)) = 0$ . Le radici di tale polinomio saranno

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{(\text{tr}((dN)_p)) \pm \sqrt{(\text{tr}((dN)_p))^2 - 4\det((dN)_p)}}{2} = \\ &= \frac{2\left(\frac{\text{tr}((dN)_p)}{2}\right) \pm \sqrt{4\left(\frac{\text{tr}((dN)_p)}{2}\right)^2 - 4\det((dN)_p)}}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{tr}((dN)_p)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr}((dN)_p)}{2}\right)^2 - \det((dN)_p)}$$

Considerando dunque le radici di  $\lambda^2 - (\text{traccia}((dN)_p))\lambda + (\det((dN)_p)) = 0$ , polinomio caratteristico di  $(dN)_p$ , abbiamo:

**Definizione 11** (curvature e direzioni principali). *Diremo i due autovalori della matrice  $W$  associata a  $(dN)_p$ , rispetto ad una qualche base, se distinti, **curvature principali** di  $S$  in  $p$  ed i due autospazi **direzioni principali** di  $S$  in  $p$ .*

**Definizione 12** (curvatura di Gauss e curvatura media). *Sia  $(dN)_p : T_pS \rightarrow T_pS$  il differenziale della mappa di Gauss nel punto  $p$ , definiamo  $K(p) = \det((dN)_p)$  detta **curvatura di Gauss** della superficie nel punto  $p$  e definiamo  $H(p) = \frac{1}{2}\text{tr}((dN)_p)$  detta **curvatura media** della superficie nel punto  $p$ .*

Gli autovalori dell'endomorfismo per definizione sono le radici del polinomio caratteristico  $\lambda^2 - 2(\text{tr}(W)/2)\lambda + (\det(W)) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p)$  quindi le curvature principali in base alla curvatura gaussiana e media hanno la seguente forma:

$$\lambda_{1,2} = +\frac{\text{tr}((dN)_p)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr}((dN)_p)}{2}\right)^2 - \det((dN)_p)} = +H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(P)}$$

Per avere radici reali deve valere  $(2H(p))^2 - 4K(p) \geq 0$  ossia  $H(p)^2 \geq K(p)$  e vale l'uguale se e solo se le curvature principali coincidono nel punto e tale punto si dirà **ombelicale**, se gli autovalori sono distinti le direzioni principali sono perpendicolari essendo relativi a vettori ortonormali base diagonalizzante di  $W$ .

**Definizione 13** (prima e seconda forma fondamentale). *Consideriamo la restrizione del prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$   $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$  a  $T_pS$  ed otterremo  $\langle \cdot \rangle_p = \langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} |_{T_pS} = \langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \circ i_{T_pS}$  con  $i_{T_pS} : T_pS \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i_{T_pS} : v \rightarrow v$  inclusione del piano tangente nello spazio tridimensionale; diremo  $\langle \cdot \rangle_p$  **prima forma fondamentale** alla superficie  $S$  in  $p$ . Definiamo la seguente forma bilineare<sup>4</sup> su  $T_pS$ ,  $\langle \langle \cdot \rangle \rangle_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle \langle \cdot \rangle \rangle_p : (v, w) \rightarrow -\langle (dN)_p(v), w \rangle$  detta **seconda forma fondamentale** alla superficie  $S$  in  $p$ .*

**Lemma 5.** *La seconda forma fondamentale  $\langle \langle \cdot \rangle \rangle_p$  è una forma bilineare simmetrica in  $T_pS$  ossia il differenziale della mappa di Gauss  $(dN)_p$  è un endomorfismo autoaggiunto su  $T_pS$ .*

<sup>4</sup>essendo bilineare la prima forma fondamentale, come restrizione del prodotto scalare nello spazio tridimensionale che è bilineare, ed essendo lineare il differenziale della mappa di Gauss

*Dimostrazione.*  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , con  $(u, v) \in U$ ,  $\phi_u(u, v)$  e  $\phi_v(u, v)$  sono una base di  $T_{\phi(u, v)}S$  e  $N \circ \phi(u, v)$  è perpendicolare a  $T_{\phi(u, v)}S$  quindi  $\langle N \circ \phi, \phi_u \rangle = 0$  e  $\langle N \circ \phi, \phi_v \rangle = 0$ , derivando rispetto a  $v$  ed  $u$  rispettivamente ed usando la regola di Leibnitz,

$$\langle (N \circ \phi)_v, \phi_u \rangle + \langle N \circ \phi, \phi_{uv} \rangle = 0 \text{ e } \langle (N \circ \phi)_u, \phi_v \rangle + \langle N \circ \phi, \phi_{vu} \rangle = 0$$

poiché per il teorema di Schwarz  $\phi_{vu} = \phi_{uv}$ , sottraendo un'equazione all'altra vale

$$\langle (N \circ \phi)_v, \phi_u \rangle = \langle (N \circ \phi)_u, \phi_v \rangle \quad (2.1)$$

$(N \circ \phi) : U \rightarrow S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(N \circ \phi) : (u, v) \rightarrow \phi(u, v) \rightarrow (N \circ \phi)(u, v)$  per la regola della catena  $\frac{\partial (N \circ \phi)(u, v)}{\partial u} = (dN)_{\phi(u, v)}(d\phi)_{(u, v)} \frac{\partial (u, v)}{\partial u} = (dN)_{\phi(u, v)} \left( \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v} \right) (1, 0) = (dN)_{\phi(u, v)} \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u}$ , al medesimo modo  $\frac{\partial (N \circ \phi)(u, v)}{\partial v} = (dN)_{\phi(u, v)} \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v}$ . Per come definita la seconda forma fondamentale e per la regola della catena, fissato  $q = (u, v)$ ,

$$\langle \langle \phi_u, \phi_v \rangle \rangle_{\phi(q)} = - \langle (dN)_{\phi(q)}(\phi_u), \phi_v \rangle_{\phi(q)} = - \langle (N \circ \phi)_u, \phi_v \rangle_{\phi(q)}$$

e

$$\langle \langle \phi_v, \phi_u \rangle \rangle_{\phi(q)} = - \langle (dN)_{\phi(q)}(\phi_v), \phi_u \rangle_{\phi(q)} = - \langle (N \circ \phi)_v, \phi_u \rangle_{\phi(q)}$$

e per la relazione 2.1 sopra queste quantità sono uguali ossia  $\langle \langle \phi_u, \phi_v \rangle \rangle_{\phi(q)} = \langle \langle \phi_v, \phi_u \rangle \rangle_{\phi(q)}$  ma  $\phi_u, \phi_v$  sono una base di  $T_{\phi(q)}S$  quindi la seconda forma fondamentale è simmetrica  $\langle (dN)_{\phi(q)}(\phi_u), \phi_v \rangle = \langle (dN)_{\phi(q)}(\phi_v), \phi_u \rangle$  e per simmetria della prima forma fondamentale  $\langle (dN)_{\phi(q)}(\phi_v), \phi_u \rangle = \langle \phi_u, (dN)_{\phi(q)}(\phi_v) \rangle$  ossia  $(dN)_{\phi(q)}$  è autoaggiunto.  $\square$

Per definizione 2 pagina 4 un operatore autoaggiunto è diagonalizzabile mediante la sua base di autovettori quindi in particolare  $-(dN)_{\phi(q)}$  è diagonalizzabile con autovalori reali che indicheremo<sup>5</sup> con  $\lambda_1^p$  e  $\lambda_2^p$  con  $p = \phi(q)$ : ecco le curvatures principali di  $S$  in  $p$  definite sopra. Esplicitiamo le relazioni fra la prima e la seconda forma fondamentale:

**Osservazione 5** (in modo costruttivo). *In generale quanto visto nel lemma sopra è valido in quanto dati  $\langle \cdot \rangle$  prodotto scalare su  $V$  spazio vettoriale reale e  $A$  matrice di un endomorfismo di  $V$  l'applicazione  $\beta_A(v, w) = \langle Av, w \rangle$  da  $V \times V$  in  $\mathbb{R}$  è una forma bilineare ed è simmetrica se e solo se  $A$  è simmetrica e vale anche che data una forma bilineare  $\beta$  esiste un unico endomorfismo rappresentato con  $B$  tale che  $\beta(v, w) = \langle Bv, w \rangle$  quindi ha senso l'identificazione fra endomorfismi (per noi il differenziale della mappa di Gauss) di uno spazio vettoriale (il piano tangente) e le applicazioni bilineari (seconda forma fondamentale) sullo spazio vettoriale stesso. In particolare considerando la seconda forma fondamentale come una forma bilineare simmetrica esisterà  $W : T_p S \rightarrow T_p S$  endomorfismo simmetrico (corrispondente all'opposto del differenziale della mappa di Gauss) detto endomorfismo di Weingarten tale che  $\langle \langle a, b \rangle \rangle_p = \langle Wa, b \rangle_p \forall a, b \in T_p S$ , per*

<sup>5</sup>spesso ragionando in un punto fissato ometteremo l'indicazione del punto ad apice

il teorema spettrale tale endomorfismo  $W$  sarà diagonalizzabile con una base ortonormale di autovettori ed autovalori reali:  $W$  sarà simile a  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  i due autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  saranno le curvatures principali e gli autospazi (autovettori) relativi le direzioni principali e  $\lambda_1\lambda_2 = \det(W) = K(p)$  e  $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \text{tr}(W)/2 = H(p)$ .

Vediamo come poter fare dei calcoli con gli strumenti sopra introdotti:

**Osservazione 6** (in modo operativo). Fissiamo una parametrizzazione della superficie  $\phi : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  sia  $q = (u, v)$  tale che  $\phi(q) = p$  in  $T_p S$  abbiamo la base  $\left(\frac{\partial\phi(q)}{\partial u}, \frac{\partial\phi(q)}{\partial v}\right) = (\phi_u, \phi_v)$  per definizione di prodotto scalare rispetto ad una base il prodotto scalare indotto sul piano tangente ossia la prima forma fondamentale sarà rappresentato dalla matrice simmetrica, essendo tale il prodotto scalare standard,

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_u, \phi_u \rangle & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_v, \phi_u \rangle & \langle \phi_v, \phi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Quindi la prima forma fondamentale su due vettori di coordinate  $(\alpha, \beta)$  e  $(\alpha', \beta')$  rispetto alla base  $(\phi_u, \phi_v)$  sarà

$$\langle (\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \rangle_p = (\alpha \ \beta) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

Sia  $\gamma = \phi \circ (u, v)$  con  $(u, v) : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$  una curva su  $U$  allora

$$\gamma'(t) = \phi_u(u(t), v(t))u' + \phi_v(u(t), v(t))v'$$

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= (\phi_{uu}(u(t), v(t))u' + \phi_{uv}(u(t), v(t))v')u' + (\phi_{uv}(u(t), v(t))u' + \phi_{vv}(u(t), v(t))v')v' + \\ &+ \phi_u(u(t), v(t))u'' + \phi_v(u(t), v(t))v'' = \phi_{uu}u'^2 + 2\phi_{uv}u'v' + \phi_{vv}v'^2 + \phi_u u'' + \phi_v v'' \end{aligned}$$

Preso la mappa di Gauss relativa alla parametrizzazione  $\phi$   $N^\phi = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$  poiché  $\phi_u u'' + \phi_v v'' \in T_p S$   $\langle \phi_u u'' + \phi_v v'', N^\phi \rangle = 0$  quindi  $\langle \gamma'', N^\phi \rangle = \langle \phi_{u^2}, N^\phi \rangle (u')^2 + 2\langle \phi_{uv}, N^\phi \rangle u'v' + \langle \phi_{v^2}, N^\phi \rangle (v')^2$  definiamo

$$e = \langle \phi_{u^2}, N^\phi \rangle, \quad f = \langle \phi_{uv}, N^\phi \rangle, \quad g = \langle \phi_{v^2}, N^\phi \rangle$$

allora

$$\langle \gamma'', N^\phi \rangle = (u' \ v') \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

la forma bilineare simmetrica sullo spazio tangente che rispetto alla base  $(\phi_u, \phi_v)$  ha la matrice sopra detta è, come vedremo nella dimostrazione del teorema 4, la seconda forma fondamentale.

**Esempio 12** (piano). Dall'esempio 8 fissato un punto  $p_0$ , il piano  $P$  dei vettori  $p - p_0$  ortogonali ad un vettore  $w$  fissato rispetto al punto base  $p_0$  ha come mappa di Gauss  $w$  normalizzato ossia  $N \equiv w$  quindi  $(dN)_p \equiv 0$  (come funzione)  $\forall p \in P$  quindi  $\langle \langle \cdot \rangle \rangle_p \equiv 0$   $\forall p \in P$  ovvero la seconda forma fondamentale di un piano è nulla in ogni punto, in particolare essendo  $(dN)_p$  nulla  $K(p) = \det((dN)_p) = 0$  e  $H(p) = \text{tr}((dN)_p) = 0$  quindi curvatura media, gaussiana e le curvatures principali sono nulle.

**Esempio 13** (sfera). Dall'esempio 9,  $\mathbb{S}_r^2(p_0)$  ha normale  $N(p) = \frac{p-p_0}{r} \forall p \in \mathbb{S}_r^2(p_0)$  e  $(dN)_p(v) = \frac{v}{r}$  quindi  $\langle \langle v, w \rangle \rangle_p = -\frac{1}{r} \langle v, w \rangle_p \forall v, w \in T_p \mathbb{S}_r^2(p_0)$  ossia per ogni punto della superficie sferica la prima e la seconda forma sono proporzionali e rispetto ad una base di  $T_p \mathbb{S}_r^2(p_0)$ ,  $+(dN)_p(v_1, v_2) = +\left(\frac{v_1}{r}, \frac{v_2}{r}\right) = \begin{pmatrix} +1/r & 0 \\ 0 & +1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  quindi  $K(p) = +\frac{1}{r^2}$  e  $H(p) = +\frac{1}{r} \forall p \in \mathbb{S}_r^2(p_0)$  quindi la curvatura gaussiana di una superficie sferica è costante uguale al quadrato del reciproco del raggio e la curvatura media è costante uguale al reciproco dell'opposto del raggio e le curvatures principali sono costanti uguali all'opposto dell'inverso del raggio.

**Teorema 4.** La curvatura gaussiana e la curvatura media per una qualsiasi superficie  $S$  sono mappe differenziabili. Le curvatures principali sono funzioni continue e differenziabili in aperti di punti in cui tali curvatures sono distinte.

*Dimostrazione.* Per il lemma 3 esiste una mappa di Gauss sull'aperto  $\phi(U)$  della superficie  $S$ , con  $\phi : U \rightarrow S$  parametrizzazione di  $S$ ,  $N = N^\phi \circ \phi^{-1}$  con  $N^\phi = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$ . Fissato un punto  $q \in U$ ,  $\phi(q) = p$ ,  $(\phi_u, \phi_v)$  sono una base di  $T_{\phi(q)}S$ , usando quanto visto nell'osservazione 6, rispetto alla base scelta, la matrice della prima forma fondamentale è

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ con } E, F, G : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle_p \quad F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle_p \quad G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle_p$$

mappe differenziabili, essendo la composizione di mappe differenziabili; la matrice della seconda forma fondamentale è

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \text{ con } e, f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad e = \langle \langle \phi_u, \phi_u \rangle \rangle_p \quad f = \langle \langle \phi_u, \phi_v \rangle \rangle_p \quad g = \langle \langle \phi_v, \phi_v \rangle \rangle_p$$

Anche tali coefficienti sono mappe differenziabili usando quanto visto nel lemma 5:

$$e = \langle \langle \phi_u, \phi_u \rangle \rangle_p = \langle -(dN)_p \phi_u, \phi_u \rangle_p = -\langle (dN)_p \phi_u, \phi_u \rangle_p = -\langle (N \circ \phi)_u, \phi_u \rangle_p$$

poiché  $\frac{\partial \langle N \circ \phi, \phi_u \rangle_p}{\partial u} = \langle (N \circ \phi)_u, \phi_u \rangle_p + \langle N \circ \phi, \phi_{uu} \rangle_p$  e  $\langle N \circ \phi, \phi_u \rangle_p = 0$  per definizione di mappa gaussiana si ha che  $\langle N \circ \phi, \phi_{uu} \rangle_p = -\langle (N \circ \phi)_u, \phi_u \rangle_p$  ossia  $e = \langle N \circ \phi, \phi_{uu} \rangle_p$  quindi  $e = \langle (N^\phi \circ \phi^{-1}) \circ \phi, \phi_{uu} \rangle_p = \langle N^\phi, \phi_{uu} \rangle_p = \frac{\langle \phi_u \wedge \phi_v, \phi_{uu} \rangle_p}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$  ricordando che il prodotto

misto di tre vettori tridimensionali  $\langle u \wedge v, w \rangle$  è il determinante della matrice con le tre colonne i tre vettori nell'ordine si ha

$$e = \langle N^\phi, \phi_{uu} \rangle_p = \frac{\langle \phi_u \wedge \phi_v, \phi_{uu} \rangle_p}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = \frac{\det(\phi_u, \phi_v, \phi_{uu})}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} \quad (2.2)$$

In modo del tutto analogo

$$f = \langle N^\phi \circ \phi, \phi_{uv} \rangle_p = \frac{\langle \phi_u \wedge \phi_v, \phi_{uv} \rangle_p}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = \frac{\det(\phi_u, \phi_v, \phi_{uv})}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} \quad (2.3)$$

$$g = \langle N^\phi \circ \phi, \phi_{vv} \rangle_p = \frac{\langle \phi_u \wedge \phi_v, \phi_{vv} \rangle_p}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = \frac{\det(\phi_u, \phi_v, \phi_{vv})}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} \quad (2.4)$$

Anche in tal caso, dunque, l'espressione a sinistra è differenziabile in quanto composizione di mappe differenziabili. La matrice  $A$  dell'endomorfismo  $(dN)_p$  rispetto alla base scelta per lo spazio tangente è tale che  $-A \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$  ossia

$$A = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

avendo  $tr((dN)_p) = tr(A)$  e  $det((dN)_p) = det(A) = det(-A)$  si ottiene in modo esplicito

$$(H \circ \phi)(q) = +\frac{1}{2}tr((dN)_{\phi(q)}) = \frac{1}{2}tr(A) = -\frac{1}{2} \frac{eG - fF - fF + gE}{EG - F^2}$$

$$(K \circ \phi)(q) = det((dN)_{\phi(q)}) = det(A) = det(-A) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

con  $EG - F^2 = det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = 6\|\phi_u \wedge \phi_v\|^2 > 0$  essendo  $(\phi_u, \phi_v)$  una base dello spazio tangente e quindi non proporzionali fra loro. Poiché quanto sopra vale per una generica parametrizzazione  $\phi$ ,  $K$  ed  $H$  sono funzioni differenziabili su  $S$ . Poiché le curvatures principali sono le radici del polinomio caratteristico della matrice dell'endomorfismo associato alla seconda forma fondamentale  $\lambda^2 - 2 \left( \frac{tr(A)}{2} \right) \lambda + (det(A)) = \lambda^2 - 2H\lambda + K$   $\lambda_i = \frac{+2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} = +H \pm \sqrt{H^2 - K} i = 1, 2$  quindi poiché composizioni di applicazioni differenziabili tali sono le curvatures principali.  $\square$

---

<sup>6</sup>infatti  $|(a_1, a_2, a_3) \wedge (b_1, b_2, b_3)|^2 = |det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}|^2 = |(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)|^2 = a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1$  e  $det \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle \end{pmatrix} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3$  confrontando i due termini si ha l'uguaglianza  $|a \wedge b|^2 = det \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle \end{pmatrix} = |a|^2|b|^2 - (\langle a, b \rangle)^2$

Dalla dimostrazione del teorema si evince che fissata una parametrizzazione, e facendone derivate prime e seconde, abbiamo la possibilità di usare tutti gli strumenti definiti sopra espressi nel linguaggio dell'algebra lineare lavorando sullo spazio (vettoriale) tangente. Diamo un'ultima definizione riguardante la differenziabilità:

**Definizione 14** (hessiana sui punti critici). *S superficie  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  mappa regolare,  $p \in S$  punto critico per  $f$  diremo hessiana di  $f$  in  $p$  la mappa  $(d^2f)_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$*

$$(d^2f)_p(v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)|_{t=0} = (f \circ \gamma)''(0)$$

con  $v \in T_pS$  e  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  curva sulla superficie tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ .

In modo del tutto analogo al caso del differenziale del primo ordine nella definizione 8 si prova<sup>7</sup> che tale mappa è ben definita ovvero non dipende dalla curva scelta. Inoltre vale<sup>8</sup> una sorta di corrispondenza (almeno locale) fra definitezza della matrice e tipologia dei punti critici in modo analogo a quanto avviene con le derivate seconde per la caratterizzazione di punti di massimo e minimo per funzioni di variabile reale:

**Proposizione 1.** *Per una funzione differenziabile  $f$  definita sulla superficie  $S$  a valori reali:*

- 1)  $(d^2f)_p$  è una forma quadratica su  $T_pS$ .
- 2) Se  $f$  ha un punto di massimo/minimo in  $p$  allora  $(d^2f)_p$  è semidefinita negativa/positiva.
- 3) Se  $(d^2f)_p$  è definita negativa/positiva allora  $f$  ha un punto di massimo/minimo locale isolato in  $p$ .

---

<sup>7</sup>vedi pagina 86 proposizione 3.35 di [I]

<sup>8</sup>per una dimostrazione vedere pagina 86 proposizione 3.35 di [I]

# Capitolo 3

## Teorema della divergenza

In modo analogo a come abbiamo trattato le proprietà delle funzioni definite su superfici ed i rudimenti del calcolo differenziale su superfici usando le parametrizzazioni ed in ultima istanza riducendoci al caso euclideo, come fatto nel primo e nel secondo capitolo, una via analoga si può percorrere nel calcolo integrale.

**Definizione 15** (modulo dello jacobiano).  $f : S_1 \rightarrow S_2$  mappa  $C^\infty$  fra superfici,  $p \in S_1$  e  $(e_1, e_2)$  base ortonormale di  $T_p(S_1)$ ,  $df_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$  diciamo valore assoluto dello jacobiano<sup>1</sup> di  $f$  in  $p$   $|jac(f)|(p) = |\det((df_p)(e_1) \wedge (df_p)(e_2))|$ . Tale definizione non dipende dalla base e  $|jac(f)|(p) \neq 0$  equivale a  $(df_p)$  isomorfismo.

Sempre in analogia col caso degli aperti euclidei definiamo lo jacobiano

**Definizione 16** (modulo dello jacobiano). Sia  $\mathbb{A} \subseteq S$  aperto a chiusura compatta,  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto e presi  $a < b \in \mathbb{R}$   $\phi : O \rightarrow \mathbb{A} \times (a, b)$   $\phi^1 : O \rightarrow \mathbb{A}$  prima componente di  $\phi$  ossia  $\phi = (\phi^1, \phi^2)$  e  $((d\phi^1)_q, (d\phi^2)_q) = (d\phi)_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\phi_1(q)}(S) \times \mathbb{R}$  diciamo valore assoluto dello **jacobiano**:

$$|jac(\phi)|(q) = |\det((d\phi)_q)|$$

con  $\det((d\phi))$  determinante della matrice (quadrata) del determinante di  $\phi$  rispetto a due basi di  $\mathbb{R}^3$  e  $T_{\phi_1(q)}(S) \times \mathbb{R}$  (di uguale dimensione); il modulo del determinante della mappa lineare  $d\phi$  non dipende dalle basi scelte per gli spazi vettoriali ed il non annullarsi equivale all'esser  $\phi$  isomorfismo. Inoltre  $|\det(g \circ f)| = |\det(g)||\det(f)|$  con  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$  mappe fra spazi vettoriali euclidei di uguale dimensione.

Quanto sopra vale allo stesso modo nel caso di mappe differenziabili fra aperti di  $\mathbb{R}^3$   $\phi : O_1 \rightarrow O_2$  e  $\psi : O_2 \rightarrow O_3$   $|jac(\psi \circ \phi)|(q) = |jac(\psi)|(\phi(q))|jac(\phi)|(q)$  e  $|jac(\phi)| > 0 \iff \phi$  è un diffeomorfismo.

---

<sup>1</sup>per le notazioni di jacobiana, jacobiano e modulo dello jacobiano vedi definizione 1 a pagina 3.

**Definizione 17** (integrali su  $S \times \mathbb{R}$ ). *Integreremo su superfici riconducendoci al caso di aperti  $O \subseteq \mathbb{R}^3$  dello spazio tridimensionale ossia per una regione  $\mathbb{A} \subseteq S$  aperta a chiusura compatta di  $S$  gli integrali su  $S$  si riconurrano agli integrali su  $O$  mediante diffeomofismi  $\phi : O \rightarrow \mathbb{A} \times (a, b)$  e cambiamento di variabili. Diremo, perciò, che  $h : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in  $\mathbb{A} \times (a, b)$  se  $(h \circ \phi)|jac(\phi)| : O \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile su  $O$  nel senso classico e*

$$\int_{\mathbb{A} \times (a, b)} h(p, t) dp dt := \int_O (h \circ \phi)(q) |jac(\phi)|(q) dq$$

Tale definizione è ben posta non dipendendo nè dal diffeomorfismo nè dall'aperto. La buona definizione oltre a dare senso alla costruzione serve per provare l'ultima asserzione della proposizione seguente usando la moltiplicatività del modulo dello jacobiano. Infatti, come voluto, valgono le medesime proprietà dell'integrale classico per ogni sottoinsieme  $\mathbb{A} \times (a, b)$  di  $S \times \mathbb{R}$  ossia con  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  regioni di  $S$  superficie orientabile e  $\emptyset \neq (a, b), (a', b') \subseteq \mathbb{R}$ :

**Proposizione 2.** (integrali su  $S \times \mathbb{R}$ ).

- 1) le funzioni continue su  $\overline{\mathbb{A}} \times (a, b)$  sono integrabili su  $\mathbb{A} \times (a, b)$ .
- 2) l'integrale è lineare e monotono.
- 3) (dipendenza continua da un parametro) sia  $f : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale

$$h(\tau) = \int_{\mathbb{A}} f(p, \tau) dp$$

dipendente dal parametro scalare  $\tau$  è continua se tale è  $f$ .

- 4) (convergenza dominata)  $f_n : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  successione di funzioni integrabili su  $\mathbb{A} \times (a, b)$  se  $f_n \leq g$  con  $g$  integrabile su  $\mathbb{A} \times (a, b)$  e  $f_n$  converge puntualmente a  $f$  allora anche  $f$  è integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f_n = \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f = \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

- 5) (convergenza monotona) sia  $f_n : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  successione monotona di funzioni integrabili su  $\mathbb{A} \times (a, b)$  e  $f_n$  converga puntualmente a  $f$  allora esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f_n$ ,  $f$  è integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f_n = \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f = \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

- 6)  $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A}$ ,  $h$  integrabile su  $\mathbb{A} \times (a, b)$  e  $h|_{(\mathbb{A} - \mathbb{A}') \times (a, b)} = 0$  allora

$$\int_{\mathbb{A} \times (a, b)} h(p, t) dp dt = \int_{\mathbb{A}' \times (a, b)} h(p, t) dp dt$$

- 7)  $\psi : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{A}' \times (a', b')$  diffeomorfismo allora per ogni  $h$  integrabile su  $\mathbb{A}' \times (a', b')$

$$\int_{\mathbb{A}' \times (a', b')} h(p', t') dp' dt' = \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} (h \circ \psi)(p, t) |jac(\psi)|(p, t) dp dt$$

Per ricondurci alle funzioni definite su regioni di una superficie orientabile consideriamo  $f : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : (p, t) \rightarrow f(p) \forall t \in (a, b)$  con valore costante indipendentemente dal parametro scalare. L'integrale  $\frac{1}{b-a} \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f(p) dp dt$  è indipendente dall'intervallo applicando il punto 7) visto sopra e considerando il diffeomorfismo  $\phi = id|_S \times h : S \times (a, b) \rightarrow S \times (c, d)$  con  $h$  diffeomorfismo affine. In analogia ai teoremi di riduzione abbiamo:

**Definizione 18** (integrali su  $S$ ).  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  diremo la funzione integrabile su  $\mathbb{A}$  se tale è  $f : \mathbb{A} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : (p, t) \rightarrow f(p)$  in  $\mathbb{A} \times (a, b)$  e

$$\int_{\mathbb{A}} f(p) dp := \frac{1}{b-a} \int_{\mathbb{A} \times (a, b)} f(p) dp dt = \int_{\mathbb{A} \times (0, 1)} f(p) dp dt$$

**Proposizione 3.** (integrali su  $S$ ).

1) le funzioni continue su  $\overline{\mathbb{A}}$  sono integrabili su  $\mathbb{A}$ .

2)(linearità)  $f, g$  integrabili su  $\mathbb{A}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  allora sono integrabili anche  $f + g$  e  $\lambda f$  e

$$\int_{\mathbb{A}} f + g = \int_{\mathbb{A}} f + \int_{\mathbb{A}} g \text{ e } \int_{\mathbb{A}} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{A}} f$$

3)(monotonia)  $f \leq g$  integrabili allora

$$\int_{\mathbb{A}} f \leq \int_{\mathbb{A}} g$$

per  $f, g$  continue l'uguale vale se e solo se  $f = g$ .

4)  $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A}$ ,  $f$  integrabile su  $\mathbb{A}$  e  $f|_{(\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}')} = 0$  allora

$$\int_{\mathbb{A}} f = \int_{\mathbb{A}'} f$$

5)  $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A}$  e  $\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}'$  unione finita di curve regolari e punti di  $S$  allora per  $f$  integrabile

$$\int_{\mathbb{A}} f = \int_{\mathbb{A}'} f$$

*Dimostrazione.* I punti fino al 4) sono applicazioni della proposizione 2 visti sopra nel caso di prodotto topologico fra regioni di  $S$  ed intervalli. Nel punto 5)

$\mathbb{A}' \times (a, b) \subseteq \mathbb{A} \times (a, b)$  e

$$\mathbb{A} \times (a, b) = \mathbb{A}' \times (a, b) \cup \bigcup_{p \in S \text{ punti}} (\{p\} \times (a, b)) \cup \bigcup_{\gamma \subseteq S \text{ curve}} (\{\gamma\} \times (a, b))$$

$\phi : O \rightarrow \mathbb{A} \times (a, b)$  diffeomorfismo allora, non modificando le dimensioni,  $\phi^{-1}(\{p\} \times (a, b))$  è una curva in  $O$   $\phi^{-1}(\{\gamma\} \times (a, b))$  è una superficie in  $O$  e nella misura tridimensionale indotta su  $O$  tali insiemi hanno misura nulla.  $\square$

**Proposizione 4** (integrali e parametrizzazioni). *Una regione di  $S$  superficie orientabile  $\phi : U \rightarrow S$  parametrizzazione e  $\phi(U) \subseteq \mathbb{A}$  e la differenza  $\mathbb{A} \setminus \phi(U)$  è unione finita di punti e curve regolari di  $S$  allora con  $f$  integrabile su  $\mathbb{A}$  si ha*

$$\int_{\mathbb{A}} f = \int_U (f \circ \phi)(u, v) |\phi_u \wedge \phi_v|(u, v) du dv$$

*Dimostrazione.* per il punto 7) della proposizione 2 sopra e la definizione 18 di integrale su una regione della superficie  $\int_{\mathbb{A}} f = \int_{\phi(U)} f = \int_{\phi(U) \times (0,1)} f(p) dp dt$  la mappa

$\psi : U \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \phi(U) \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\psi : ((u, v), t) \rightarrow \psi(u, v, t) = (\phi(u, v), t)$  è un diffeomorfismo essendo tale  $\phi$  e l'identità e  $\psi_u = (\phi_u, 0)$   $\psi_v = (\phi_v, 0)$   $\psi_t = ((0, 0), 1)$

e  $|jac(\psi)|(u, v, t) = |\det \begin{pmatrix} \phi_u \wedge \phi_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}| = |\phi_u \wedge \phi_v|(u, v)$  quindi per definizione 17 di integrale su un prodotto di una regione della superficie ed un intervallo

$$\begin{aligned} \int_{\phi(U) \times (0,1)} f(p) dp dt &= \int_{U \times (0,1)} (f \circ \psi)(q) |jac(\psi)|(q, t) dq dt = \\ &= \int_{U \times (0,1)} (f \circ \psi)(q) |\psi_u \wedge \psi_v|(u, v, t) dq dt \end{aligned}$$

□

**Teorema 5** (cambio di variabili). *Siano  $S_1, S_2$  due superfici orientate,  $\psi : \mathbb{A}_1 \subseteq S_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \subseteq S_2$  diffeomorfismo e  $f : \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  funzione integrabile allora anche  $(f \circ \psi) |jac(\psi)| : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile e  $\int_{\mathbb{A}_2} f = \int_{\mathbb{A}_1} (f \circ \psi) |det(jac(\psi))|$ .*

*Dimostrazione.*  $\Psi : \mathbb{A}_1 \times (a, b) \rightarrow \mathbb{A}_2 \times (a, b)$ ,  $\Psi : ((u, v), t) \rightarrow (\psi(u, v), t)$  diffeomorfismo allora  $\Psi = \psi \times id_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & 0 & id_{(a,b)} \end{pmatrix}$  e  $|jac(\Psi)|(q, t) = |det(J(\Psi))|(q, t) =$

$|det(J(\psi))|(q) = |jac(\psi)|(q) \forall (q, t) \in \mathbb{A}_1 \times (a, b)$  per il punto 7) della proposizione 2 vista sopra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_2 \times (a,b)} f(p, t) dp dt &= \int_{\mathbb{A}_1 \times (a,b)} (f \circ \Psi)(q, t) |jac(\Psi)|(q, t) dq dt = \\ &= \int_{\mathbb{A}_1 \times (a,b)} (f \circ (\psi \times id_{(a,b)}))(q, t) |jac(\psi)|(q, t) dq dt \end{aligned}$$

e ponendo  $f$  costante rispetto al parametro scalare per la definizione 18 si ottiene il risultato con  $q = (u, v)$ . □

Come estensione a superfici del teorema 3 di pagina 3 abbiamo il seguente:

**Teorema 6** (teorema della funzione inversa per varietà).  $F : S \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mappa differenziabile, con  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $(p_0, t_0) \in S \times I$  tale che  $(dF)_{(p_0, t_0)} : T_{p_0} S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia un isomorfismo lineare allora esistono  $V$  intorno aperto di  $p_0$  in  $S$ ,  $\delta > 0$ ,  $W$  intorno di  $F(p_0, t_0)$  in  $\mathbb{R}^3$  tali che  $F|_{(V \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta))} : (V \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \rightarrow W$  sia un diffeomorfismo.

*Dimostrazione.* Sia  $\phi : U \rightarrow S$  parametrizzazione della superficie con  $\phi(q_0) = p_0$  e  $q_0 \in U$ .  $H = F \circ (\phi \times id|_I) : U \times I \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è differenziabile perché composizione di applicazioni differenziabili e  $(dH)_{(q_0, t_0)} = (dF)_{(\phi(q_0)=p_0, t_0)} \circ d(\phi \times id|_I)_{(q_0, t_0)}$  è un isomorfismo lineare essendo tali le applicazioni  $dF$  per ipotesi e  $\phi$  e  $id$  essendo per costruzione diffeomorfismi, usando il teorema della funzione inversa di pagina 3 nel caso euclideo su  $dH$  nell'intorno di  $(q_0, t_0)$  esistono  $U \supseteq V'$  intorno aperto di  $q_0$ ,  $\delta > 0$  e  $\mathbb{R}^3 \supseteq W$  intorno aperto di  $(q_0, t_0)$  tali che  $H(V' \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = W$  e  $H : V' \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow W$  sia un diffeomorfismo. Ponendo  $V = \phi(V')$  si ottiene il risultato sulla  $F$ :

$F(V \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = F \circ (\phi \times id|_I)(V' \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = H(V' \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = W$   
e  $F : V \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow W$  diffeomorfismo essendo tali  $(\phi \times id|_I)$  e  $H$ .  $\square$

### 3.1 Divergenza

Preso  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  e definito un campo vettoriale differenziabile sull'insieme ossia una mappa regolare  $V : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiamo:

**Definizione 19** (divergenza). *La divergenza di una mappa  $V$  definita su  $A$  a valori vettoriali sarà l'operatore differenziale a valori scalari*

$$div V : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad div V : p \rightarrow traccia((dV)_p)$$

Nel caso  $A$  non sia aperto diremo che  $V$  con dominio  $A$  è differenziabile se ciò vale in un aperto che contiene la chiusura di  $A$ .

Nel caso tridimensionale, fissata una base ortonormale  $(e_1, e_2, e_3)$  di  $\mathbb{R}^3$ ,  $V = (V_1, V_2, V_3)$ , vale che, ragionando sulla matrice trasposta,

$$\begin{aligned} div V(p) &= tr((dV)_p(e_1), (dV)_p(e_2), (dV)_p(e_3)) = tr \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \\ &= tr \begin{pmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \nabla V_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{aligned}$$

da ciò la divergenza è una funzione differenziabile.

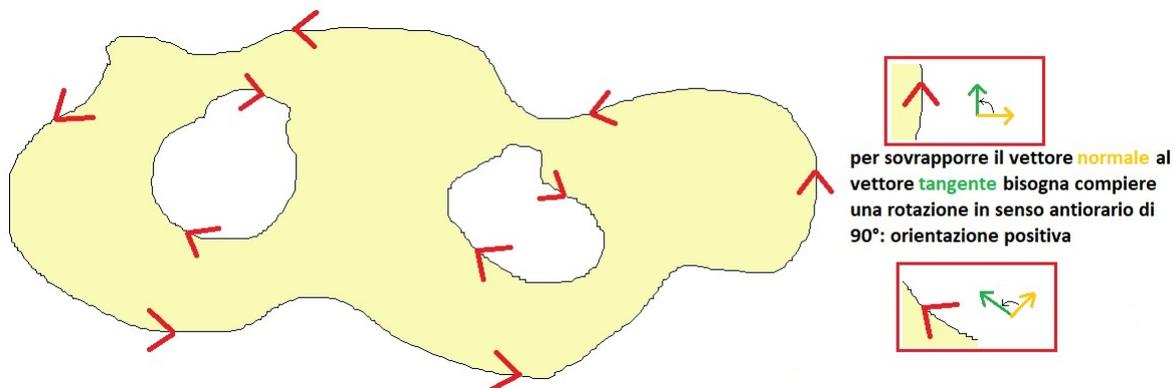


Figura 3.1: orientazioni positive

**Definizione 20** (bordo di una superficie). Sia  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\phi : q = (u, v) \rightarrow p = \phi(u, v)$  con  $U$  parte di piano delimitata da un numero finito di curve regolari, semplici (senza autointersezioni) e chiuse; diremo **bordo della superficie** l'immagine attraverso la parametrizzazione del bordo dell'insieme  $U$ :  $\partial S = \phi(\partial U)$ . Nel piano fisseremo l'orientazione antioraria come positiva ovvero se muovendoci lungo il bordo (nel senso crescente del parametro scalare che parametrizza le curve) l'insieme resterà sulla sinistra diremo che l'orientazione è positiva e tale verso di percorrenza sarà quella del nostro bordo se lo indicheremo con  $\partial U^+$ , analogamente l'immagine tramite una parametrizzazione, con differenziale positivo, di un bordo positivamente orientato sarà positivamente orientata  $\partial S^+ = \phi(\partial U^+)$ . In modo analitico consideriamo il bordo di  $U$  dato dalla curva/parametrizzazione (regolare)  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial U$ ,  $\gamma : t \rightarrow (u(t), v(t))$  e prendiamo il versore tangente in  $\gamma(t) = q$   $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$  e la normale esterna ad  $U$   $N(\gamma(t))$ ; diremo che la curva  $\gamma$  orienta in modo positivo la frontiera di  $U$  se  $\forall q \in U$  l'angolo fra la normale e la tangente misurato in senso antiorario è  $\pi/2$ . Nel caso la curva non orienti in modo positivo orienterà in modo negativo.

**Esercizio 1.** Facendo qualche conto abbiamo che nel caso del piano  $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{(u'(t), v'(t))}{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}}$ , essendo la matrice di una rotazione di angolo  $\theta$   $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , la rotazione in senso antiorario di  $\pi/2$  corrisponde ad applicare  $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  al vettore normale per ottenere  $\frac{(u'(t), v'(t))}{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}}$  ovvero per trovare il vettore normale si applica al vettore tangente una rotazione antioraria di  $3\pi/2$  con matrice  $R_{3\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ottenendo  $\frac{(v'(t), -u'(t))}{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}}$  che sarà il vettore normale esterno nel caso la parametrizzazione data dalla curva orienti in senso positivo la frontiera.

**Esempio 14.** Dall'esempio 10 abbiamo che la normale ad una superficie descritta come grafico di una funzione  $f$  attraverso la mappa  $\phi : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\phi : (u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$  è  $N^\phi = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$ . Una definizione locale, sullo spazio tangente, per avere una normale positiva è quella di scegliere fra le due normali quella che con la base dello spazio tangente formi, nell'ordine, una terna destrorsa ovvero se  $(v_1, v_2)$  sono la base ordinata dello spazio tangente la normale  $N$  esterna sarà quella tale che, ponendo i vettori per colonne,  $\det(v_1, v_2, N) > 0$  in termini intuitivi per portare  $v_1$  su  $v_2$ , l'osservatore orientato secondo  $N$ , per coprire l'angolo minore, ruoterà in senso antiorario. Verifichiamo, in un caso particolare, se il vettore normale ottenuto in modo analitico punta verso l'interno o l'esterno delle due superfici  $A_1$  e  $A_2$  viste come bordo del dominio

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

ossia

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \alpha(x, y) = z\}$$

$$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \beta(x, y) = z\}$$

Per  $A_1$  abbiamo che i vettori della base dello spazio tangente sono  $((1, 0, \alpha_x), (0, 1, \alpha_y))$

il vettore normale a meno di multipli positivi è  $(-\alpha_x, -\alpha_y, 1)$  e  $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_x \\ 0 & 1 & -\alpha_y \\ \alpha_x & \alpha_y & 1 \end{pmatrix} =$

$= 1 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 > 0$  quindi la normale alla superficie  $A_1$  costituisce, insieme alla base dello spazio tangente, una base destrorsa di  $\mathbb{R}^3$  e punta internamente al dominio,

in modo analogo per  $A_2$  abbiamo che i vettori della base dello spazio tangente sono  $((1, 0, \beta_x), (0, 1, \beta_y))$  il vettore normale a meno di multipli positivi è  $(-\beta_x, -\beta_y, 1)$  e

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_x \\ 0 & 1 & -\beta_y \\ \beta_x & \beta_y & 1 \end{pmatrix} = 1 + \beta_x^2 + \beta_y^2 > 0$  quindi la normale alla superficie  $A_2$  costituisce,

insieme alla base dello spazio tangente, una base destrorsa di  $\mathbb{R}^3$  e punta esternamente al dominio.

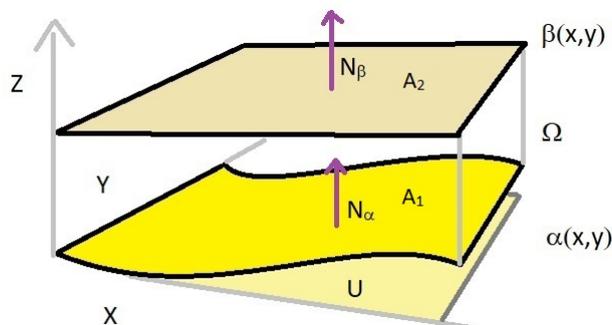


Figura 3.2: normali agli insiemi di livello

**Teorema 7** (teorema della divergenza). Sia  $S = \partial\Omega$  superficie compatta connessa (regolare) e orientabile (che ammetta mappa di Gauss) e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  la regione limitata dello spazio delimitata dalla superficie  $S$  ed il campo di vettori  $V : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito su  $\Omega' \supseteq \overline{\Omega}$  allora, detta  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  la normale unitaria esterna alla superficie, vale che

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V d\Omega = \int_{\partial\Omega=S} \langle V, N \rangle dS$$

Sia  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\phi : q = (u, v) \rightarrow p = \phi(u, v)$  usando le variabili  $(x, y, z)$  in  $\mathbb{R}^3$  e  $(u, v)$  in  $\mathbb{R}^2$ : l'integrale a sinistra è un integrale di volume  $\int_{\Omega} \operatorname{div} V(x, y, z) dx dy dz$ ; l'integrale a destra è un integrale di superficie che, rispetto alla parametrizzazione, si esprime come

$$\begin{aligned} & \int_U \langle V(\phi(u, v)), N_{\phi(u, v)} \rangle \|\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)\| dudv = \\ & = \int_U \left\langle V(\phi(u, v)), \frac{\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)}{\|\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)\|} \right\rangle \|\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)\| dudv = \\ & = \int_U \langle V(\phi(u, v)), \phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v) \rangle dudv \end{aligned}$$

avendo usato l'espressione della normale rispetto ad una parametrizzazione ricavata nel lemma 3 di pagina 9, tale integrale è detto flusso del campo attraverso la superficie orientata. Per dare una dimostrazione di tale teorema è utile servirsi di concetti più fini e specifici di superficie che "approssimano" la definizione generale data e che possono semplificare la prova:

**Definizione 21** (dominio semplice rispetto ad una variabile). Diremo dominio semplice rispetto all'asse  $z$  l'insieme dei punti

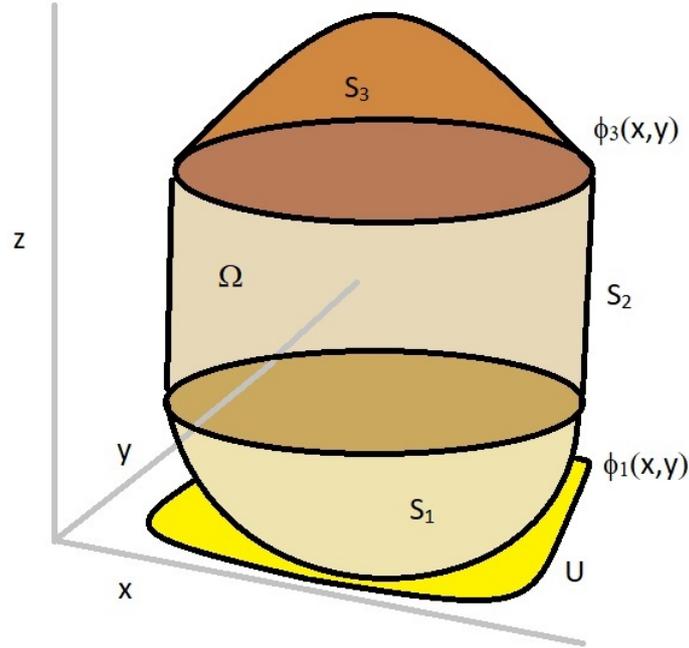
$$D \cup \partial D = \overline{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^2, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

con  $U$  aperto limitato e  $\alpha, \beta \in C^1(\overline{U})$  e  $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y) \forall (x, y) \in \overline{U}$ .

In modo informale un dominio tridimensionale è semplice rispetto ad un asse se rispetto a tale asse l'insieme si esprime come insieme dei punti compresi fra i valori di due funzioni nelle restanti variabili.

*Dimostrazione.* (teorema della divergenza)

Proviamo il risultato per domini regolari ovvero unioni finite di domini limitati  $\Omega$  con frontiera costituita dall'unione di un numero finito di superfici chiuse, regolari, orientabili e disgiunte, e con tali domini  $\Omega$  decomponibili in un numero finito di sottodomini  $D$  semplici rispetto ai tre assi:  $\Omega = \cup_{j=1, \dots, m} D_j$ ,  $\operatorname{int}(D_j) \cap \operatorname{int}(D_i) = \emptyset$  per  $i \neq j$  e  $D_j$  domini regolari limitati e semplici rispetto ai tre assi e  $\partial\Omega = \cup_{j=1, \dots, n} S_j$  con  $S_j$  superfici (regolari) limitate e chiuse (ovvero compatte), orientate.



Lavoriamo ora con domini semplici e supponiamo, a limite considerando la chiusura dell'insieme,  $\Omega = \bar{\Omega}$  dominio semplice rispetto ai tre assi dello spazio tridimensionale in particolare rispetto all'asse  $z$  sar 

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_3(x, y)\}$$

e dividiamo  $S = \partial\Omega$  in

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \phi_1(x, y) = z\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \partial\bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_3(x, y)\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \phi_3(x, y) = z\}$$

Poich   $V = (V_1, V_2, V_3) = (V_1, 0, 0) + (0, V_2, 0) + (0, 0, V_3)$  come somma di funzioni proveremo che

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V_1}{\partial x} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle (V_1, 0, 0), N \rangle dS = \int_{\partial\Omega} V_1 N_1 dS \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V_2}{\partial y} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle (0, V_2, 0), N \rangle dS = \int_{\partial\Omega} V_2 N_2 dS \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V_3}{\partial z} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle (0, 0, V_3), N \rangle dS = \int_{\partial\Omega} V_3 N_3 dS \quad (3.3)$$

sommando, membro a membro, le tre equazioni, per linearità del prodotto scalare e dell'integrale, si otterrà il risultato voluto.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} V_1 N_1 dS &= \int_{S_1} V_1 N_1 dS_1 + \int_{S_2} V_1 N_1 dS_2 + \int_{S_3} V_1 N_1 dS_3 \\ \int_{\partial\Omega} V_2 N_2 dS &= \int_{S_1} V_2 N_2 dS_1 + \int_{S_2} V_2 N_2 dS_2 + \int_{S_3} V_2 N_2 dS_3 \\ \int_{\partial\Omega} V_3 N_3 dS &= \int_{S_1} V_3 N_3 dS_1 + \int_{S_2} V_3 N_3 dS_2 + \int_{S_3} V_3 N_3 dS_3\end{aligned}$$

$S_1$  per definizione è il grafico della funzione  $\phi_1 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S_3$  di  $\phi_3 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ossia  $S_1 = \Phi_1(\bar{U})$  e  $S_3 = \Phi_3(\bar{U})$  con  $\Phi_j(x, y) = (x, y, \phi_j(x, y))$  per  $j = 1, 3$  quindi

$$\int_{S_1} V_i N_i dS_1 = \int_{\bar{U}} V_i(\Phi_1(x, y)) N_i^1(\Phi_1(x, y)) dx dy$$

con  $N^1$  normale al piano tangente in  $\Phi_1(x, y)$  alla superficie  $S_1$  uscente da  $\Omega$

$$\int_{S_3} V_i N_i dS_3 = \int_{\bar{U}} V_i(\Phi_3(x, y)) N_i^3(\Phi_3(x, y)) dx dy$$

con  $N^3$  normale al piano tangente in  $\Phi_3(x, y)$  alla superficie  $S_3$  uscente da  $\Omega$  e per  $i = 1, 2, 3$ ; per quanto visto nell'esempio 10 e nell'esempio 14 dovendo essere una normale esterna

$$\begin{aligned}N^1 &= -\left(-\frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial y}, 1\right) = \left(\frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial y}, -1\right) \text{ e} \\ N^3 &= \left(-\frac{\partial\phi_3(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial\phi_3(x, y)}{\partial y}, 1\right)\end{aligned}$$

quindi per  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\int_{S_1} V_i N_i dS_1 &= \int_{\bar{U}} V_i(\Phi_1(x, y)) N_i^1(\Phi_1(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{\bar{U}} V_i(\Phi_1(x, y)) \left(\frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial y}, -1\right)_i dx dy \\ \int_{S_3} V_i N_i dS_3 &= \int_{\bar{U}} V_i(\Phi_3(x, y)) N_i^3(\Phi_3(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{\bar{U}} V_i(\Phi_3(x, y)) \left(-\frac{\partial\phi_3(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial\phi_3(x, y)}{\partial y}, 1\right)_i dx dy\end{aligned}$$

Definiamo l'insieme  $\Phi(z) = \bigcup_{\{(x,y) \in \partial\bar{U}\}} \{(x,y,z) \text{ con } z \text{ tale che } (x,y,z) \in S_2\}$  allora  $S_2 = \bigcup_{\{\phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_3(x,y) | (x,y) \in \partial\bar{U}\}} \Phi(z)$ .  $S_2$  è la superficie laterale del cilindro retto di base  $\bar{U}$  e con generatrici le rette parallele all'asse  $z$  passanti per  $\partial\bar{U}$ , la normale (esterna)  $N^2$  al piano tangente in ogni punto di  $S_2$  è una retta perpendicolare all'asse delle  $z$  quindi

$$\int_{S_2} V_3 N_3^2 dS_2 = 0$$

Mostriamo ora per  $i = 3$  l'equazione 3.3:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega=S} V_3 N_3 dS &= \int_{S_1} V_3 N_3^1 dS_1 + \int_{S_2} V_3 N_3^2 dS_2 + \int_{S_3} V_3 N_3^3 dS_3 = \\ &= \int_{\bar{U}} -V_3(\Phi_1(x,y)) dx dy + 0 + \int_{\bar{U}} V_3(\Phi_3(x,y)) dx dy \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{\partial\Omega=S} V_3 N_3 dS = \int_{\bar{U}} -V_3(\Phi_1(x,y)) dx dy + \int_{\bar{U}} V_3(\Phi_3(x,y)) dx dy \quad (3.4)$$

preso  $\int_{\Omega} \frac{\partial V_3(x,y,z)}{\partial z} dx dy dz$  integrando lungo le rette parallele all'asse  $z$  usando il teorema di riduzione essendo il campo  $V$  continuo ed integrato su un insieme limitato, il teorema del calcolo e l'equazione 3.4

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial V_3(x,y,z)}{\partial z} dx dy dz &= \int_{\bar{U}} \left( \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_3(x,y)} \frac{\partial V_3(x,y,z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \int_{\bar{U}} V_3(x,y,\phi_3(x,y)) - V_3(x,y,\phi_1(x,y)) dx dy = \int_{\partial\Omega=S} V_3 N_3 dS \end{aligned}$$

Così abbiamo provato l'asserto 3.3 sfruttando la sola ipotesi di dominio semplice rispetto all'asse  $z$  allo stesso modo, cambiando solamente la definizione degli insiemi  $S_i$ , si possono provare 3.1 e 3.2 sfruttando che il dominio è semplice rispetto all'asse  $x$  e  $y$ . □

# Capitolo 4

## Formule di Minkowski

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie, l'intorno (aperto) metrico  $B_\delta(S) = \{p \in \mathbb{R}^3 | d(p, S) < \delta\}$  con  $\delta > 0$  e la distanza  $d(p, S) = \inf_{q \in S} |p - q|$ , intuitivamente, può esser visto come l'insieme (dei punti) dei segmenti rettilinei  $\mathbb{N}_\delta(p)$  di lunghezza  $2\delta$  (raggio  $\delta$ ) centrati in un punto  $p$  della superficie  $S$  normali ad essa e, nel caso  $S$  sia chiusa, come un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^3$ .

**Lemma 6.** *Sia  $S$  una superficie chiusa  $B_\delta(S)$  come insieme di punti con distanza minore di  $\delta$  da  $S$  coincide con  $\mathbb{N}_\delta(S) = \bigcup_{p \in S} \mathbb{N}_\delta(p)$  unione dei segmenti rettilinei (aperti) normali ad  $S$  con raggio  $\delta$  e centrati in un punto  $p \in S$ .*

*Dimostrazione.* preso  $p \in S$

$\mathbb{N}_\delta(p) \subseteq B_\delta(S)$   $q \in \mathbb{N}_\delta(p)$  allora  $d(q, S) \leq |p - q| < \delta$  così  $q \in B_\delta(S)$

$\mathbb{N}_\delta(p) \supseteq B_\delta(S)$   $q \in B_\delta(S)$ , supponiamo  $S$  superficie chiusa, la funzione  $d_q(S) : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_q(S) : p \rightarrow |p - q|$  assume un minimo<sup>1</sup> su  $S$  in un punto detto  $p$  e  $q$  è sulla linea normale<sup>2</sup> ad  $S$  in  $p$  quindi  $|p - q| = d(q, S) < \delta$  quindi  $q \in \mathbb{N}_\delta(p)$ .  $\square$

Preso una superficie orientabile  $S$  (per cui abbia senso considerare la mappa di Gauss) per descrivere l'insieme dei segmenti visto sopra bisogna scegliere un punto ed un raggio

---

<sup>1</sup>Essendo  $d_q(S)$  una funzione non negativa esiste  $r = \inf_{p \in S} |p - q| \geq 0$  ed esiste una successione  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - q| = r$  poiché  $(|p_n - q|)_n$  è una successione convergente è limitata ossia esiste  $M > 0$  tale che  $|p_n - q| < M \forall n \in \mathbb{N}$  quindi  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è dentro una sfera di centro  $q$  e raggio  $M$  che è un compatto allora esiste una sottosuccessione convergente  $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  che converge ad un punto  $p$  ma  $S$  è chiusa quindi i limiti di successioni di punti in  $S$  sono ancora in  $S$  ovvero  $p \in S$  ed essendo  $d_q(S)$  continua  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - q| = \lim_{k \rightarrow \infty} |p_{n_k} - q| = |p - q|$ .

<sup>2</sup>Siano  $p \in S$ ,  $v \in T_p S$ ,  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ ,  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ , siano fissati  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  e  $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  il differenziale della funzione  $h(p) = \langle p - p_0, a \rangle$  è  $(dh)_p(v) = \frac{d\langle \gamma(t) - p_0, a \rangle}{dt} |_{t=0} = \langle \gamma'(0), a \rangle = \langle v, a \rangle$  che ha come punto critico (di minimo) l'insieme dei vettori  $v$  del piano tangente in  $p$  perpendicolari ad  $a$  (tali che  $\langle v, a \rangle = 0$ ) ossia  $p$  è un punto critico per  $h$  se e solo se la linea di direzione  $a$  passante per  $p_0$  è normale ad  $S$  in  $p$  ovvero la retta condotta per  $p_0$  secondo la direzione  $a$  è perpendicolare ad  $S$  e tocca  $S$  in  $p$  ovvero è normale allo spazio tangente ad  $S$  in  $p$ .

ossia il prodotto topologico della superficie per un intervallo; definiamo

$$G : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, G : (p, t) \rightarrow p + tN(p)$$

con  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  mappa di Gauss; tale mappa è differenziabile e porta un punto ed uno scalare in un punto a distanza definita dallo scalare nella direzione data dalla normale nel punto. Per definizione quindi,  $\forall \delta > 0$

$$G(S \times (-\delta, \delta)) = \mathbb{N}_\delta(S) = \bigcup_{p \in S} \mathbb{N}_\delta(p)$$

La struttura introdotta sopra ha un nome evocativo:

**Definizione 22** (intorno tubolare). *Per  $S$  orientabile l'unione delle normali di lunghezza/raggio di un opportuno  $\delta$  applicate ad un punto della superficie  $\mathbb{N}_\delta(S)$ , sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  aperto, si dirà intorno tubolare di raggio  $\delta$  nel caso in cui la mappa  $G : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{N}_\delta(S)$  sia un diffeomorfismo.*

Gli intorni tubolari hanno, dunque, una struttura rigida del tutto simile al prodotto della superficie per un intervallo<sup>3</sup>.

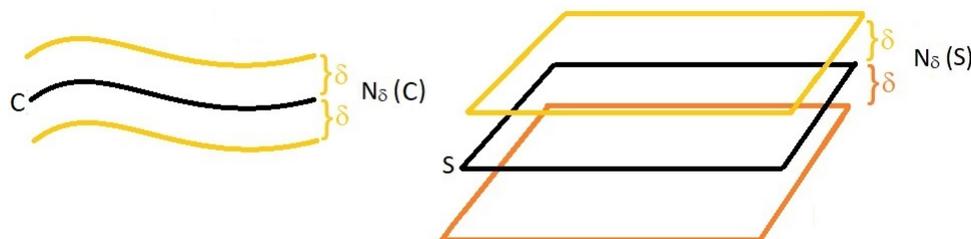


Figura 4.1: esempi di intorni tubolari nel piano e nello spazio

**Esempio 15** (preliminari alla costruzione).  *$S$  superficie compatta orientabile,  $D$  dominio interno,  $\mathbb{N}_\delta(S)$  intorno tubolare di  $S$  con opportuno  $\delta > 0$  allora  $P_\delta(S) = G(S \times (-\delta, 0)) \subseteq \mathbb{N}_\delta(S)$  è la metà dell'intorno tubolare con orientazione opposta a quella data dalla mappa di Gauss che indica la direzione esterna quindi come insieme di punti  $P_\delta(S) \subseteq D$ . Poiché la mappa  $G : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3, G : (p, t) \rightarrow p + tN(p)$  è un diffeomorfismo  $\forall t \in (-\delta, \delta)$   $G_t : S \rightarrow \mathbb{N}_\delta(S), G_t : p \rightarrow G(p, t) = p + tN(p)$  è un omomorfismo nella sua immagine detta  $S_t$  che sarà una superficie essendo il differenziale di  $G$  iniettivo per ogni punto dello spazio tangente a  $S$ . La superficie  $S_t$  si dirà parallela alla superficie  $S$  ed a distanza  $t$ . Dette  $e_1, e_2 \in T_p S$  le direzioni principali di  $S$  in  $p$*

$$(dG_t)_p(e_i) = e_i + t(dN)_p(e_i) = (1 - t\lambda_i(p))(e_i) \text{ per } i = 1, 2$$

<sup>3</sup>Per una prova dell'esistenza di intorni tubolari vedi l'appendice.

Vale che

$$\begin{aligned} |jac(G_t)(p)| &= \|d(G_t)_p(e_1) \wedge d(G_t)_p(e_2)\| = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 - t\lambda_1(p) & 0 \\ 0 & 1 - t\lambda_2(p) \end{pmatrix} \right| = 1 - 2tH(p) + t^2K(p) \end{aligned}$$

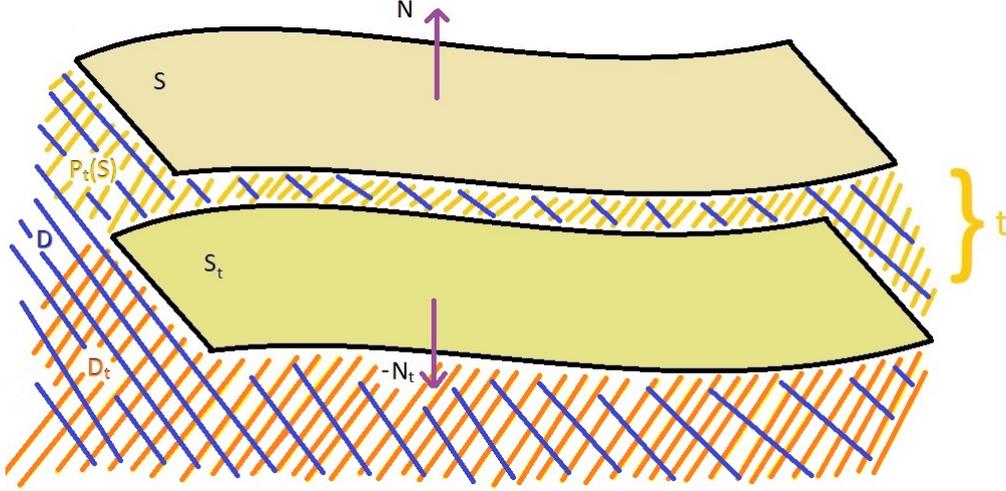


Figura 4.2: le superfici e gli interni tubolari della costruzione

Sia  $S$  una superficie compatta,  $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo differenziabile,  $\mathbb{N}_\delta(S)$  intorno tubolare di  $S$  definiamo il campo  $W : \mathbb{N}_\delta(S) \rightarrow \mathbb{R}^3$  estendendo  $V$  lungo i segmenti normali con valore costante uguale al valore del campo nel punto, della superficie, base della normale

$$(W \circ G) : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3, (W \circ G) : (p, t) \rightarrow W(p + tN(p)) := V(p)$$

$W$  è differenziabile essendo tali  $G$  e  $V$  ed essendo  $G$  invertibile (in modo alternativo con  $G_t$ ,  $(W \circ G_t) : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(W \circ G_t) : p \rightarrow W(p + tN(p)) := V(p)$ ).

Fissato  $t \in (0, \delta)$  sia  $S_t$  la superficie parallela ad  $S$  superficie (connessa), bordo del dominio  $D$ , ed a distanza  $t > 0$  da  $S$  e  $D_t$  il dominio limitato interno alla superficie  $S_t$  allora  $P_t(S) = D - \bar{D}_t$  sarà il volume (aperto) compreso fra le due superfici e  $\partial P_t(S) = S \cup S_t$  applicando in tal caso il teorema della divergenza al dominio  $P_t(S) \subseteq \mathbb{N}_\delta(S)$  per  $0 < t < \delta$  ed al campo  $W$  che su  $S_0 = S$  è  $V$  abbiamo che

$$\int_{P_t(S)=D-\bar{D}_t} \text{div } W = \int_{S=\partial D} \langle V, N \rangle - \int_{S_t=\partial \bar{D}_t} \langle W, N_t \rangle \quad (4.1)$$

con  $N$  e  $N_t$  normali su  $S$  e  $S_t$  ed esterne a  $D$  e  $D_t$  rispettivamente, usando il teorema di cambiamento di variabili per il diffeomorfismo  $G_t : S \rightarrow S_t$ ,  $G_t : p \rightarrow G(p, t) = p + tN(p)$

visto sopra e sfruttando che  $N_t \circ G_t = N$  ossia la normale esterna alla superficie  $S_t$  è l'immagine, attraverso  $G$ , della normale esterna ad  $S$  con medesimo segno per uscire da  $D_t$ , sfruttando l'espressione dello jacobiano di  $G$  ricavata sopra, abbiamo che:

$$\int_{S_t} \langle W, N_t \rangle = \int_S \langle W \circ G_t, N_t \circ G_t \rangle |jac(G_t)| = \int_S \langle V(p), N(p) \rangle (1 - 2tH(p) + t^2K(p)) dp$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{P_t(S)} \operatorname{div} W &= \int_S \langle V, N \rangle - \int_S \langle V, N \rangle > + 2t \int_S \langle V, N \rangle H - t^2 \int_S \langle V, N \rangle K = \\ &= 2t \int_S \langle V, N \rangle H - t^2 \int_S \langle V, N \rangle K \end{aligned}$$

$\forall t \in (0, \delta)$  ovvero

$$\int_{P_t(S)} \operatorname{div} W = 2t \int_S \langle V, N \rangle H - t^2 \int_S \langle V, N \rangle K \quad (4.2)$$

Ragioniamo ora sul primo membro dell'equazione 4.1 nell'intorno tubolare  $\mathbb{N}_s(S)$  per  $s \in (-\delta, \delta)$ : per la regola della catena e la definizione di  $W$

$$0 = \frac{\partial V(p)}{\partial s} = \frac{\partial W(p + sN(p))}{\partial s} = (dW)_{p+sN(p)}(N(p))$$

e

$$(dV)_p(e_i) = ((dW)_{G_s=p+sN(p)}(dG_s)_p)(e_i) = (dW)_{p+sN(p)}(1 - s\lambda_i(p))(e_i)$$

quindi  $(dW)_{p+sN(p)}(e_i) = \frac{(dV)_p(e_i)}{1-s\lambda_i(p)}$  con  $i = 1, 2$  con  $(e_1, e_2, N)$  base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  costituita dalle direzioni principali sulla superficie e dalla normale ad  $S$  in  $p$ .

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} W)(p + sN(p)) &= \operatorname{traccia}((dW)_{p+sN(p)}) = \\ &= \operatorname{tr}((dW)_{p+sN(p)}(e_1), (dW)_{p+sN(p)}(e_2), (dW)_{p+sN(p)}(N)) = \left( \frac{(dV)_p(e_1)}{1-s\lambda_1(p)} \right)_1 + \left( \frac{(dV)_p(e_2)}{1-s\lambda_2(p)} \right)_2 \end{aligned}$$

che, essendo  $(e_1, e_2, N)$  una base ortonormale, è

$$(\operatorname{div} W)(p + sN(p)) = \left\langle \frac{(dV)_p(e_1)}{1-s\lambda_1(p)}, e_1 \right\rangle + \left\langle \frac{(dV)_p(e_2)}{1-s\lambda_2(p)}, e_2 \right\rangle \quad (4.3)$$

con  $p \in S$  e  $s \in (-\delta, \delta)$ . Per la definizione 17 di pagina 19 di integrale sul prodotto di una regione di  $S$  ed un intervallo e per il teorema di Fubini

$$\int_{P_t(S)} \operatorname{div} W = \int_{S \times (-t, 0)} ((\operatorname{div} W) \circ G)(p, t) |jac(G)|(p, t) dp dt =$$

$$= \int_{-t}^0 \int_S ((div W) \circ G)(p, t) |jac(G)|(p, t) dp dt \quad (4.4)$$

sostituendo il valore della divergenza di  $W$  in  $G(p, t)$  ricavato dall'equazione 4.3 e il valore dello jacobiano di  $G$  ricavato nell'osservazione sopra otteniamo

$$\begin{aligned} & ((div W) \circ G)(p, t) |jac(G)|(p, t) = \\ &= \frac{(1 - s\lambda_1(p))(1 - s\lambda_2(p))}{1 - s\lambda_1(p)} \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \frac{(1 - s\lambda_1(p))(1 - s\lambda_2(p))}{1 - s\lambda_2(p)} \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle = \\ &= \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle - s(\lambda_2 \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \lambda_1 \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle) \end{aligned}$$

Le funzioni da  $S$  ad  $\mathbb{R}$

$$p \rightarrow \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle \quad \text{e} \quad p \rightarrow \lambda_2 \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \lambda_1 \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle$$

sono differenziabili, essendo tale  $V$  e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , la prima si dice  $div V$  divergenza di  $V$  essendo la divergenza del campo definito sullo spazio  $T_p S$  rispetto alla base ortonormale delle direzioni principali  $(e_1, e_2)$ . Confrontando tale espressione della divergenza sostituita nell'equazione 4.4 con le equazioni 4.2 e 4.1 otteniamo

$$\begin{aligned} & t \int_S div V dp - \frac{t^2}{2} \int_S (\lambda_2 \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \lambda_1 \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle) dp = \\ &= 2t \int_S \langle V, N \rangle H dp - t^2 \int_S \langle V, N \rangle K dp \end{aligned}$$

$\forall t \in (0, \delta)$ ; per il principio di indentità dei polinomi vale allora che:

**Teorema 8.** *Sia  $S$  superficie compatta orientata  $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo di vettori differenziabile allora rispetto alla base ortonormale delle direzioni principali  $(e_1, e_2)$ , con  $\lambda_i$  per  $i = 1, 2$  curvatures principali,  $N$  mappa di Gauss e  $H, K$  curvatura media e gaussiana:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_S div V dp = 2 \int_S \langle V, N \rangle H dp \\ 2) \quad & \int_S (\lambda_2 \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \lambda_1 \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle) dp = 2 \int_S \langle V, N \rangle K dp \end{aligned}$$

Come corollario si ha

**Teorema 9** (formule di Minkowski). *Sia  $S$  superficie compatta orientata,  $N$  mappa di Gauss,  $H, K$  curvatura media e gaussiana allora:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_S (1 - \langle p, N(p) \rangle H(p)) dp = 0 \\ 2) \quad & \int_S (H(p) - \langle p, N(p) \rangle K(p)) dp = 0 \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* dal teorema precedente scegliendo

$$V : S \rightarrow \mathbb{R}^3, V : p \rightarrow V(p) = id|_S(p) = p$$

$$\text{con } (dV)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ div } id|_{T_p S} = \text{traccia} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ e } (dV)_p(e_i) = e_i \text{ } i = 1, 2 \text{ e}$$
$$H(p) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \square$$

# Capitolo 5

## Applicazioni

Dalle formule di Minkowski si possono dedurre due caratterizzazioni della sfera: il teorema di Hilbert-Liebmann ed il teorema di Jellett. Per provare tali corollari dobbiamo indagare alcune proprietà delle superfici e della curvatura.

### 5.1 Utili caratterizzazioni per superfici in $\mathbb{R}^3$

**Esempio 16** (quadrato della funzione distanza). *Per la nota 2 di pagina 29 un punto è punto critico della funzione  $dist_{p_0}^2 = \|p - p_0\|^2$ , quadrato della distanza dal punto  $p_0$ , se e solo se appartiene alla linea normale ad  $S$  per  $p_0$ . Quindi esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $p_0 = p + \lambda N(p)$  con  $N$  mappa gaussiana ad  $S$ . Sia  $v \in T_p S$ ,  $\gamma$  curva con supporto in  $S$  e velocità  $v = \gamma'(0)$  in  $p = \gamma(0)$*

$$\begin{aligned} dist^2(d_{p_0}^2)_p(v) &= \frac{d^2}{dt^2}(\|\gamma(t) - p_0\|^2)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}(\langle \gamma(t) - p_0, \gamma(t) - p_0 \rangle)|_{t=0} = \\ &= 2 \frac{d}{dt} \left( \left\langle \frac{d}{dt}(\gamma(t) - p_0), \gamma(t) - p_0 \right\rangle \right) |_{t=0} = \\ &= 2 \left( \left\langle \frac{d^2}{dt^2}(\gamma(t) - p_0), \gamma(t) - p_0 \right\rangle \right) |_{t=0} + 2 \left( \left\langle \frac{d}{dt}(\gamma(t) - p_0), \frac{d}{dt}(\gamma(t) - p_0) \right\rangle \right) |_{t=0} = \\ &= 2 \langle \gamma''(0), p - p_0 \rangle + 2\|v\|^2 \end{aligned}$$

quindi per quanto detto sopra su  $p_0$   $dist^2(d_{p_0}^2)_p(v) = -2\lambda \langle \gamma''(0), N(p) \rangle + 2\|v\|^2$  e dato che<sup>1</sup>  $\langle \gamma''(0), N(p) \rangle = -\langle v, (dN)_p(v) \rangle$  si ha

$$dist^2(d_{p_0}^2)_p(v) = +2 \left[ \|v\|^2 - 2\lambda \langle \langle v, v \rangle \rangle_p \right]$$

con  $p_0 = p + \lambda N(p)$ .

---

<sup>1</sup>vedi proposizione 3.26 p. 81 di [I]

**Teorema 10.** *S superficie,  $p \in S$ ,  $p$  è un punto ellittico se e solo se esiste  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  in modo che  $p$  sia un massimo locale della funzione  $d_{p_0}^2$  quadrato della distanza dal punto  $p_0$ .*

*Dimostrazione.* Un punto  $p$  è ellittico se  $K(p) > 0$  ovvero nel punto la seconda forma fondamentale  $\langle \langle \cdot \rangle \rangle_p$  è definita avendo autovalori concordi, poiché il determinante è positivo, ed applicando la regola di Cartesio. Presa un'orientazione locale, il punto  $p$  è ellittico se e solo è possibile scegliere un'orientazione locale per cui la mappa di Gauss locale  $N$  renda la seconda forma fondamentale nel punto  $p$  definita positiva (ovvero esista  $c > 0$  tale che  $\langle \langle v, v \rangle \rangle_p \geq c\|v\|^2 \forall v \in T_p S$ ). Per l'esempio sopra e per l'ipotesi sulla seconda forma fondamentale  $dist^2(d_{p_0}^2)_p = 2(\|v\|^2 - \lambda \langle \langle v, v \rangle \rangle_p) \leq 2(\|v\|^2 - \lambda c\|v\|^2) = 0$  per  $\lambda = \frac{1}{c}$ , infine per i punti 2) e 3) della proposizione 1 di pagina 17 avere la matrice hessiana  $dist^2(d_{p_0}^2)_p$  definita negativa nel punto  $p$  corrisponde ad avere un punto di massimo locale per  $d_{p_0}^2$  in  $p$  con  $p_0 = p + \frac{1}{c}N(p)$ .  $\square$

**Teorema 11.** *Non esistono superfici compatte con curvatura gaussiana non positiva in alcun punto.*

*Dimostrazione.* Preso  $p_0 \in \mathbb{R}^3$ , per compattezza di  $S$  esiste  $p$  massimo globale su  $S$  della funzione  $d_{p_0}^2$ , per il teorema sopra tale punto  $p$  sarà ellittico e quindi la curvatura di Gauss sarà positiva  $K(p) \geq 0$ .  $\square$

Nel seguito si userà la seguente

**Definizione 23** (ovaloide). *Una superficie compatta connessa con curvatura di Gauss positiva in ogni punto si dice ovaloide.*

Per questa classe di superfici vale il seguente

**Teorema 12** (Hadamard-Stoker). *S superficie connessa chiusa con curvatura positiva in ogni punto: se  $S$  è anche compatta (ossia  $S$  è un ovaloide) la mappa di Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  è un diffeomorfismo ovvero  $S$  è diffeomorfo alla sfera.*

Per la dimostrazione vedi teorema 6.5 pagina 178 di [I].

Infine citiamo questa utile caratterizzazione:

**Teorema 13** (Darboux). *Le sole superfici connesse come sottoinsiemi dello spazio tridimensionale con soli punti ombelicali sono gli aperti del piano e della sfera.*

Per la dimostrazione vedi teorema 3.30 pagina 84 e 85 di [I].

Poiché la superficie è connessa i soli insiemi aperti del piano e della sfera anche chiusi sono il piano e la sfera quindi:

**Corollario 14.** *Le sole superfici connesse con soli punti ombelicali chiuse come sottoinsiemi dello spazio tridimensionale sono il piano e la sfera.*

**Definizione 24** (superficie stellata). *S* superficie compatta si dice stellata rispetto all'origine se  $(0, 0, 0) \notin S$  e non si può tracciare dall'origine una linea retta tangente ad *S*.

**Lemma 7.** *S* è stellata rispetto all'origine se e solo se  $S = S(f)$  con  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mappa differenziabile positiva sulla sfera unitaria ed  $S(f) = \{f(p)p \in \mathbb{R}^3 | p \in \mathbb{S}^2\}$  superficie compatta.

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa  $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow S(f)$ ,  $\phi : p \rightarrow \phi(p) = f(p)p$ , essa è un diffeomorfismo<sup>2</sup>; poiché l'origine non appartiene ad *S*, essendo *f* positiva, non appartiene neppure ad  $S(f)$ : se  $(0, 0, 0) \in S(f)$ , esiste  $p \in \mathbb{S}^2$  tale che  $0 = \phi(p) = f(p)p$  ma essendo  $f(p) > 0 \forall p \in \mathbb{S}^2$  si ha  $p = (0, 0, 0)$  mentre  $\|p\|^2 = 1$  (essendo un punto sulla sfera unitaria) dunque abbiamo una contraddizione ed in modo simmetrico partendo da  $S(f)$ , dunque essendo *f* positiva,  $(0, 0, 0) \in S$  se e solo se  $(0, 0, 0) \in S(f)$ .

$S = S(f) \Rightarrow S$  è stellata) Se per assurdo  $S(f)$  non fosse stellata ovvero si potesse condurre una retta tangente alla superficie  $S(f)$  in  $\phi(p) = f(p)p$  e passante per l'origine si avrebbe, usando  $\phi$  come parametrizzazione di  $S(f)$  ed il lemma 1 di pagina 8,

$p \in T_{\phi(p)}S(f) = (d\phi)_{(\phi^{-1} \circ \phi)(p)=p}T_p\mathbb{S}^2$  ovvero esisterebbe  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  tale che

$$p = (d\phi)_p(v) = (df)_p(v)p + f(p)v$$

poiché  $\langle p, v \rangle = \langle N(p), v \rangle = 0 \forall p \in \mathbb{S}^2, v \in T_p\mathbb{S}^2$  tramite il prodotto scalare per *v* l'uguaglianza diventa  $0 = \langle p, v \rangle = (df)_p(v) \langle p, v \rangle + f(p) \langle v, v \rangle = 0 + f(p)\|v\|^2$  ma essendo *f* positiva per la legge di annullamento del prodotto si deve avere  $\|v\|^2 = 0$  ovvero  $v$  è  $(0, 0, 0)$  ed, essendo  $(d\phi)_p$  una mappa lineare, anche  $p = (0, 0, 0)$  ma come sopra  $\|p\|^2 = 1$  dunque abbiamo una contraddizione avendo che  $S \neq S(f)$ .

$S$  è stellata  $\Rightarrow S = S(f)$ ) poiché  $S$  è stellata  $(0, 0, 0) \notin S$  quindi per sopra  $(0, 0, 0) \notin S(f)$  inoltre non esiste alcun punto  $q \in S$  tale che la retta passante per l'origine e  $q$  sia tangente ad *S* in  $q$  dunque  $\forall q \in S \langle N_q, q - (0, 0, 0) \rangle \neq 0$  e tale proprietà vale anche per la sfera  $\mathbb{S}^2$  centrata rispetto all'origine per cui la retta per l'origine nel punto è normale al piano tangente nel punto alla sfera e quindi ha componente normale non nulla. Se l'origine fosse esterna alla superficie, in modo analogo a quanto accade nel piano, si potrebbe condurre almeno una tangente alla superficie e passante per l'origine dunque per esser stellata la superficie *S* deve contenere all'interno l'origine; vediamo che effettivamente è una deformazione radiale mediante la funzione *f* della sfera unitaria. Cerchiamo la funzione *f*: si vuole risolvere per ogni  $q \in S$  e  $p \in \mathbb{S}^2$   $q = f(p)p$  (in modo che per ogni  $p$  esista un solo  $q$  ovvero in modo che *f* sia una funzione) così da trovare i valori della funzione *f* sul dominio  $\mathbb{S}^2$  ma poiché *f* sarà una funzione a valori scalari  $q$  e  $p$  sono proporzionali dunque

---

<sup>2</sup>è invertibile infatti  $f(p) \neq 0 \forall p \in \mathbb{S}^2$  dunque esiste la funzione reciproca di *f* e si ha  $\frac{1}{f(p)} \forall p \in \mathbb{S}^2$   
 $p \rightarrow f(p)p \rightarrow \frac{1}{f(p)}f(p)p = p$ , con  $f(p)p \in S(f)$ , è differenziabile perché prodotto delle funzioni differenziabili *f* ed  $id|_{\mathbb{S}^2}$  e tale è l'inversa essendo differenziabile anche la funzione  $\frac{1}{f}$ .

giacciono sulla stessa retta (e dalla stessa parte dell'origine dovendo esser  $f$  positiva)  $f(p) \langle N_q, p - (0, 0, 0) \rangle = \langle N_q, f(p)p - (0, 0, 0) \rangle = \langle N_q, q - (0, 0, 0) \rangle \neq 0$  quindi dovendo cercare  $f$  positiva  $\langle N_q, p - (0, 0, 0) \rangle \neq 0$  per ogni punto  $p$  della sfera dunque anche la sfera è stellata rispetto all'origine, come detto sopra ragionando unicamente con la definizione di normale. Resta infine da provare effettivamente che la  $f$  è una funzione ed è suriettiva così avremo effettivamente che  $S = S(f)$ : ciò si basa sull'idea che  $S$ , contendo l'origine, sia una deformazione radiale della sfera unitaria centrata nell'origine per cui si possa mandare in modo unico ogni punto della sfera in un solo punto della superficie ed ogni punto della superficie sia così rappresentabile come immagine di tale mappa.  $\square$

**Definizione 25** (funzione supporto). *Sia  $S$  superficie orientabile,  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  mappa di Gauss, la funzione supporto di  $S$  con punto base  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  si definisce come*

$$\text{supp}|_S^{p_0} : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{supp}|_S^{p_0} : p \rightarrow \langle p - p_0, N(p) \rangle \quad \forall p \in S$$

**Osservazione 7.** *Se  $S$  è una superficie connessa  $\text{supp}|_S^{p_0}$  è costante in segno se e solo se  $S$  è superficie stellata rispetto al punto  $p_0$ .  $S$  è stellata rispetto a  $p_0$  se e solo se  $p_0 \notin S$  e  $\forall p \in S$  il segmento  $p - p_0$  non è tangente ad  $S$  in  $p$  ovvero  $\forall p \in S \langle p - p_0, N(p) \rangle \neq 0$  ma poiché la funzione supporto  $\text{supp}|_S^{p_0} : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{supp}|_S^{p_0} : p \rightarrow \langle p - p_0, N(p) \rangle$  è continua ed  $S$  è connesso  $f(S) \subseteq \mathbb{R}$  è connesso dunque sta in uno solo dei due semiassi, positivo o negativo, e dunque la funzione supporto non cambia segno.*

## 5.2 Corollari delle formule di Minkowski: teoremi di Hilbert-Liebmann e di Jellett

**Corollario 15** (teorema di Hilbert-Liebmann). *Una superficie compatta, connessa e con curvatura gaussiana costante è necessariamente una sfera.*

*Dimostrazione.* Per il teorema 11 la superficie compatta  $S$  ammette almeno un punto con curvatura positiva ma essendo costante  $K(p) = K > 0 \quad \forall p \in S$  ovvero  $S$  è un ovaloide. Per il teorema 12 la mappa di Gauss  $N$  è un diffeomorfismo da  $S$  ad  $\mathbb{S}^2$ ; la funzione supporto di  $S$  con base il punto  $p_0$   $\text{supp}|_S^{p_0} : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{supp}|_S^{p_0} : p \rightarrow \langle p - p_0, N(p) \rangle$  sui punti interni di  $S$  ha valori positivi essendo tale per la sfera ( $\text{supp}|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{supp}|_{\mathbb{S}^2} : p \rightarrow \langle p, N(p) \rangle = \langle p, p \rangle = 1$  ed avendo per l'osservazione 7 che una superficie connessa è stellata rispetto ad un punto, come è la sfera rispetto al centro, se e solo se la funzione supporto della superficie con punto base il punto è costante in segno) ed assumendo che il diffeomorfismo non inverte l'orientazione; a meno di traslazioni possiamo supporre che  $p_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  sia nell'interno del dominio tridimensionale delimitato dalla superficie  $S$ . Per le formule di Minkowski (dividendo la seconda per

$\sqrt{K(p)} \neq 0$ ):

$$\int_S (1 - \langle p, N(p) \rangle H(p)) dp = 0 \quad \int_S \left( \frac{H(p)}{\sqrt{K(p)}} - \langle p, N(p) \rangle \sqrt{K(p)} \right) dp = 0$$

sottraendo alla prima la seconda

$$\int_S \left( \left( 1 - \frac{H(p)}{\sqrt{K(p)}} \right) - \langle p, N(p) \rangle (H(p) - \sqrt{K(p)}) \right) dp = 0 \quad (5.1)$$

per l'osservazione in coda alla definizione di curvatura media e gaussiana di pagina 12  $H(p)^2 \geq K(p)$  quindi  $H(p) \geq \sqrt{K(p)}$  oppure  $H(p) \leq -\sqrt{K(p)} \forall p \in S$  ma solo la prima<sup>3</sup> vale quindi

$$\left( 1 - \frac{H(p)}{\sqrt{K(p)}} \right) \leq 0 \quad \langle p, N(p) \rangle (H(p) - \sqrt{K(p)}) \geq 0 \quad \forall p \in S$$

quindi in 5.1, poiché  $H(p)^2 \geq K(p)$  e  $\langle p, N(p) \rangle > 0$ , abbiamo un'integranda non positiva il cui integrale è nullo quindi per la monotonia del punto 3) della proposizione 3 di pagina 20 (con  $g$  funzione nulla ed  $f$  integranda) l'integranda deve essere nulla ed essendo i due addendi entrambi non positivi, entrambi devono essere nulli perciò vale  $H(p)^2 = K(p) \forall p \in S$  ossia tutti i punti di  $S$  sono ombelicali quindi per il corollario 14 (avendo il piano curvatura costante nulla)  $S$  è necessariamente una sfera (che ha curvatura costante positiva).  $\square$

**Corollario 16** (teorema di Jellett). *L'unica superficie compatta, connessa, stellata rispetto ad un punto e con curvatura media costante è la sfera.*

*Dimostrazione.* Assumiamo, a meno di traslazioni, che la superficie sia stellata rispetto al punto  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  punto interno al dominio delimitato dalla superficie  $S$ . La curvatura media è costante  $H(p) = H$ , per le formule di Minkowski (moltiplicando la prima per  $H(p)$ ):

$$\int_S (H(p) - \langle p, N(p) \rangle H^2(p)) dp = 0, \quad \int_S (H(p) - \langle p, N(p) \rangle K(p)) dp = 0$$

sottraendo la seconda alla prima

$$\int_S (-H^2(p) + K(p)) \langle p, N(p) \rangle dp = 0$$

---

<sup>3</sup>Infatti per superfici compatte esistono punti per cui la seconda forma fondamentale è definita positiva il che implica che gli autovalori sono positivi e quindi la seconda possibilità diventerebbe una contraddizione richiedendo che un numero positivo somma di due numeri positivi sia minore dell'opposto di un numero positivo che è negativo. Per una dimostrazione del risultato citato vedi l'esercizio 4 di pagina 129 di [I].

in modo identico a sopra poiché  $H(p)^2 \geq K(p)$  e  $\langle p, N(p) \rangle > 0$ , essendo una superficie stellata rispetto all'origine, abbiamo un'integranda non positiva con integrale nullo quindi per la monotonia del punto 3) della proposizione 3 di pagina 20 (con  $f$  integranda e  $g$  funzione nulla) l'integranda deve esser nulla perciò, come sopra,  $H(p)^2 = K(p) \forall p \in S$  ossia tutti i punti di  $S$  sono ombelicali quindi per il corollario 14 (avendo il piano curvatura nulla)  $S$  è necessariamente una sfera con curvatura costante  $H^2 = K(p) \forall p \in S$ .  $\square$

# Capitolo 6

## Appendice

Assumiamo  $S$  superficie chiusa di  $\mathbb{R}^3$  come nella definizione 22 di pagina 30 del capitolo 4. Mostriamo che effettivamente gli intorni tubolari usati per la prova del teorema di Minkowski esistono:

**Lemma 8.**  $\forall p \in S$ , esistono  $V$  intorno aperto orientabile e  $\delta > 0$  tali che  $\mathbb{N}_\delta(V)$  sia un intorno tubolare di  $V$ .

*Dimostrazione.*  $G : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $G : (p, t) \rightarrow p + tN(p)$  ha differenziale

$$(dG)_{(p,t)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (dG)_{(p,t)} : (v, c) \rightarrow v + t(dN)_p + cN(p)$$

e  $\forall v \in T_p S$

$$(dG)_{(p,t)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (dG)_{(p,t)} : (v, 0) \rightarrow v + t(dN)_p$$

$$(dG)_{(p,t)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (dG)_{(p,t)} : ((0, 0, 0), 1) \rightarrow N(p)$$

per  $t = 0$

$$(dG)_{(p,0)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (dG)_{(p,0)} : (v, 0) \rightarrow v$$

$$(dG)_{(p,0)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (dG)_{(p,0)} : ((0, 0, 0), 1) \rightarrow N(p)$$

quindi  $(dG)_{(p,0)}$  è un isomorfismo lineare fra  $T_p S \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^3$  avendo che una base dello spazio tangente va in sè e l'elemento di base di  $\mathbb{R}$ , lo scalare 1, va nel vettore normale abbiamo che una base del dominio (prodotto cartesiano) va in una base ortonormale nel codominio, applicata nel punto  $p$ . Per il teorema 6 della funzione inversa di pagina 22 allora esiste un intorno  $V$  di  $p \in S$  e  $\delta > 0$  tali che  $G|_{V \times (-\delta, \delta)} : V \times (-\delta, \delta) \rightarrow G(V \times (-\delta, \delta)) = \mathbb{N}_\delta(V)$ , per definizione di intorno tubolare, sia un diffeomorfismo; infine poiché per il lemma 3 di pagina 9 ogni superficie è localmente orientabile tale è l'intorno  $V$ .  $\square$

**Teorema 17** (esistenza di intorni tubolari).  $S$  superficie orientabile,  $R \subseteq S$  aperto relativamente compatto ossia tale che  $\overline{R} \subseteq S$  è un compatto. Allora esiste  $\delta > 0$  tale che l'insieme  $\mathbb{N}_\delta(R) \subseteq \mathbb{R}^3$  costituito dai segmenti normali centrati in punti di  $R$  con

raggio  $\delta$  sia un intorno della superficie  $R$  ovvero è un aperto e  $G : R \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{N}_\delta(R)$ ,  $G : (p, t) \rightarrow p + tN(p)$  sia un diffeomorfismo. Nel caso  $S$  sia compatto esiste  $\delta > 0$  tale che l'intorno metrico  $B_\delta(S) = \mathbb{N}_\delta(S)$  sia un intorno tubolare di  $S$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $\overline{R}$  è compatto lo si può ricoprire con un numero finito  $m$  di aperti di  $S$  a ciascuno dei quali si può applicare il lemma sopra; fra tutti i raggi degli intorni tubolari così ottenuti definiamo  $0 < \delta = \min_{i=1, \dots, m} \delta_i$  con  $\overline{R} \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$  e  $\mathbb{N}_{\delta_i}(V_i)$  intorno tubolare corrispondente secondo il lemma all'aperto  $V_i$ . La mappa definita nella costruzione degli intorni tubolari  $G|_{R \times (-\delta, \delta)} : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $G|_{R \times (-\delta, \delta)} : (p, t) \rightarrow p + tN(p)$  è un diffeomorfismo infatti localmente, per ogni punto  $p \in R$  nell'intorno  $V_i$   $G|_{V_i \times (-\delta, \delta_i)} : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $G|_{V_i \times (-\delta, \delta_i)} : (p, t) \rightarrow p + tN(p)$  è un diffeomorfismo per il lemma sopra e quindi essendo  $\delta < \delta_i \forall i$  localmente  $G|_{V_i \times (-\delta, \delta)}$  è un diffeomorfismo. Proviamo ora che a costo di restringere  $\delta$  la mappa  $G$  è globalmente iniettiva ovvero i vettori normali nei punti di  $R$  non si intersecano. Supponiamo per assurdo che si intersechino per qualsiasi raggio, anche piccolo, allora  $\forall n \in \mathbb{N}$  esistono  $p_n \neq q_n$  tali che  $\mathbb{N}_{1/n}(p_n) \cap \mathbb{N}_{1/n}(q_n) \neq \emptyset$ . Valendo per ogni raggio costruiamo due successioni  $((p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) di punti in  $R \subseteq \overline{R}$  ciascuna con punti distinti da quelli dell'altra successione per l'indice corrente ( $p_n \neq q_n$ ) e con intorni tubolari corrispondenti decrescenti in raggio (come  $1/n$ ) e con intersezione degli intorni con medesimo indice non vuota ( $\mathbb{N}_{1/n}(p_n) \cap \mathbb{N}_{1/n}(q_n) \neq \emptyset$ ), per la compattezza di  $\overline{R}$  esistono sottosuccessioni di entrambe le successioni costruite convergenti in  $\overline{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$$

essendo l'intersezione  $\mathbb{N}_{1/n}(p_n) \cap \mathbb{N}_{1/n}(q_n)$  non nulla per ogni indice vi esiste sempre un punto per ogni scelta di  $n$  e così possiamo trovare una successione di punti nell'intersezione degli intorni tubolari di raggio decrescente:

$$\mathbb{N}_{1/n}(p_n) \cap \mathbb{N}_{1/n}(q_n) \ni r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$|p_n - q_n| \leq |p_n - r_n| + |r_n - q_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$  ovvero i due limiti  $p$  e  $q$  coincidono. Applicando il lemma sopra a  $p = q$  otteniamo un  $V$  intorno di  $p$  in  $S$   $\epsilon > 0$  tali che  $\mathbb{N}_\epsilon(V)$  sia un intorno tubolare e localmente in  $V$   $G$  sia un diffeomorfismo; per definizione di convergenza e densità dei numeri reali:

$$\text{esisterà } N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq N \quad p_n, q_n \in V \text{ e } 1/n < \epsilon$$

allora, per iniettività locale di  $G$  in  $V$  per almeno uno di tali  $n \geq N$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_{1/n}(p_n) \cap \mathbb{N}_{1/n}(q_n) &\subseteq \mathbb{N}_\epsilon(p_n) \cap \mathbb{N}_\epsilon(q_n) = G((p_n) \times (-\epsilon, \epsilon)) \cap G((q_n) \times (-\epsilon, \epsilon)) \subseteq \\ &\subseteq G((p_n) \times (-\epsilon, \epsilon) \cap (q_n) \times (-\epsilon, \epsilon)) \subseteq G(\emptyset) = \emptyset \end{aligned}$$

contro l'ipotesi che tale intersezione fosse sempre non nulla. Quindi abbiamo ottenuto una contraddizione e  $\mathbb{N}_\epsilon(V)$  è un intorno tubolare,  $G|_{V \times (-\epsilon, \epsilon)}$  è iniettiva ed esiste  $\epsilon$  tale che  $G : R \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{N}_\epsilon(R)$  sia una mappa globalmente iniettiva e diffeomorfismo locale e suriettiva per definizione di intorno tubolare: la mappa è quindi globalmente un diffeomorfismo.  $\square$

# Bibliografia

- [I] Curves and Surfaces, Sebatían Montiel e Antonio Ros, Graduate Studies in Mathematics volume 69, 2005
- [II] Differential Geometry of Curves and Surfaces, Manfredo Perdigao do Carmo, Prentice-Hall,Inc., 1976
- [III] Lezioni di Analisi Matematica II, Sergio Lancelotti, Celid, 2017
- [IV] Analisi Matematica volume 2, Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa, Masson, 1998
- [V] Some integral formulas for closed hypersurfaces, Chuan-Chih Hsiung, Mathematica Scandinavica 2, p.285-293, 1954