Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ SPERIMENTAZIONE DI UN APPROCCIO ASSIOMATICO NEI LICEI SCIENTIFICI

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
Simone Stuppazzini

IV Sessione
Anno Accademico 2018/2019

Al mio grande amico Gigi
e alla migliore classe della mia vita,
la magistrale.

Grazie

Abstract

Questa tesi nasce dallo sviluppo di un seminario sull'insegnamento del Calcolo delle Probabilità nelle scuole secondarie, di primo e secondo grado, proposto dal Piano Lauree Scientifiche dell'Università di Bologna nel settembre 2018, nella sede di Rimini, e da una tesi magistrale del Dipartimento di Matematica della stessa università.

Obbiettivi della tesi: scrivere il materiale didattico relativo a un'intera unità didattica, che sia utilizzabile dai docenti come parte del testo scolastico; mettere in pratica i modelli e le tesi prodotti da una buona ricerca in didattica della matematica; infine confrontare questi ultimi con un modello attualmente utilizzato da molti libri di testo.

Da questi obbiettivi nasce la sperimentazione in classe di un'unità didattica dedicata al Calcolo delle Probabilità, all'interno di un'esperienza di tirocinio presso il Liceo Scientifico Morando Morandi di Finale Emilia (MO). Precisamente in tre classi quarte di indirizzo scientifico sperimentale.

Il materiale didattico originale proposto in questa sede, e il modo in cui è presentato il contenuto, rappresentano il risultato principale di questa tesi. In esso si espongono le più importanti proprietà del Calcolo delle Probabilità su spazi finiti, attraverso l'esposizione assiomatica di Kolmogorov, semplificata e adattata per rientrare nel contesto scolastico a cui si fa riferimento. Seguono i risultati sulla sperimentazione in classe, attraverso le impressioni degli studenti, degli insegnanti e le valutazioni delle verifiche. Infine, attraverso quest'ultime, si cerca di valutare il modello sperimentale proposto, confrontandolo con uno degli attuali modelli utilizzati da molti libri di testo.

L'esperienza di docenza all'interno di una classe è parte integrante dell'attività di tesi, contribuisce alla crescita professionale, culturale e personale del laureando, e attraverso di essa si ha modo di affrontare direttamente la ricerca in didattica della matematica e i problemi relativi all'insegnamento, in tutte le loro forme.

Indice

Capitolo 1

Presentazione del Progetto

"È notevole il fatto che una scienza iniziata
con l'analisi del gioco d'azzardo dovesse essere elevata
al rango dei più importanti oggetti della conoscenza umana."
Pierre-Simon Laplace

1.1 Perché la Probabilità

La Probabilità, in particolare il Calcolo delle Probabilità, è un argomento spesso frainteso anche dai più abili studiosi, per via del suo carattere spesso contro-intuitivo.

Nei licei scientifici fa parte di quel gruppo di unità didattiche viste come "sacrificabili", in favore di altre ritenute più importanti, secondo una logica basata sui contenuti preminenti della seconda prova di matematica. Tuttavia occorre ricordare che ci sono numerosi quesiti d'esame che trattano di probabilità, solitamente uno per prova, e anche alcuni problemi, ma meno frequentemente.

Al di là di questo, le numerose applicazioni della probabilità nella vita quotidiana ne fanno un argomento di discussione molto interessante, utile a sanare dubbi e a sfatare credenze popolari, in generale molto radicate nella popolazione. Ad esempio è un mezzo per capire le dinamiche dei giochi d'azzardo, fornendo un meccanismo di difesa verso la ludopatia.

Significativo il passaggio di Laplace nella Prima lezione di Matematica a l'École Normale Supérieure, scuola di formazione per insegnanti di scuola secondaria, il 20 Gennaio 1795:

> "Infine, si esporranno i principi del Calcolo delle Probabilità. In tempi in cui tutti i cittadini sono chiamati a decidere delle sorti dei loro simili, a loro importa conoscere i principi di una scienza che fa apprezzare, nel modo più esatto possibile, la probabilità delle testimonianze, e quella che risulta dalle circostanze che accompagnano i fatti; a loro importa soprattutto imparare a non fidarsi delle intuizioni, anche delle più verosimili; e niente più adatto a questo scopo che la teoria delle probabilità, dove spesso i risultati rigorosi

contraddicono queste intuizioni. D'altra parte, le numerose applicazioni di questa teoria, alla natalità, alla mortalità, alle elezioni e alle assicurazioni, applicazioni che fa comodo conoscere, e che occorre perfezionare ed estendere ad altri aspetti della società, la rendono una delle parti più utili delle conoscenze umane."

1.2 Le Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali [4] costituiscono il riferimento normativo e istituzionale attualmente in vigore. All'interno di esse, nella parte dedicata ai licei scientifici, e in particolare alla matematica, si trovano i punti di riferimento entro i quali si articolano in questo momento i percorsi dedicati alla probabilità.

> **Profilo Generale e Competenze.** [...] Di qui i gruppi di concetti e metodi che lo studente dovrà padroneggiare: [...] la conoscenza elementare di alcuni sviluppi caratteristici della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica.
>
> **Primo Biennio.** [...] Sarà introdotta la nozione di probabilità, con esempi entro un contesto classico e con l'introduzione di nozioni di statistica.
>
> **Secondo Biennio.** [...] Saranno studiate la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni. Saranno introdotti gli elementi di base del calcolo combinatorio.
>
> **Quinto Anno.** [...] È consigliabile sviluppare esempi nel contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciato alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo. [...] Saranno studiate le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson).

Sotto un certo punto di vista, l'attuale sperimentazione, attraverso il materiale didattico proposto nel capitolo 2, è in contrasto con alcune parti delle Indicazioni Nazionali, soprattutto sulla possibilità di presentare il modello classico. Ma in essa sono comunque contenuti tutti i più importanti risultati del Calcolo delle Probabilità citati dalle Indicazioni.

1.3 Dall'Idea alla Sperimentazione

Durante il "Primo Corso Intensivo PLS di Formazione Insegnanti", organizzato dal Piano Lauree Scientifiche dell'Università di Bologna, dal 28 al 30 settembre 2018 a Rimini, si è svolto il convegno dal titolo "Dai dati alla conoscenza: l'importanza della probabilità e della statistica", tenuto dai docenti Andrea Cosso, Alberto Lanconelli e Andrea Pascucci [1]. In quella sede veniva presentato, agli insegnanti di scuole medie e superiori, un metodo alternativo di affrontare il Calcolo delle Probabilità, attraverso la trattazione assiomatica di Kolmogorov, semplificata e adattata per rientrare nel contesto scolastico a cui si faceva riferimento.

Contemporaneamente il Professor Andrea Pascucci aveva relazionato la tesi magistrale di Valeria Tonti [2], Dott.ssa Magistrale in Matematica presso lo stesso dipartimento dell'Università di Bologna, in cui veniva presentato, fra le altre ricerche, un primo materiale didattico per il docente di scuole secondarie di secondo grado, su questo nuovo metodo. Tale materiale voleva rappresentare più una guida per il docente stesso, che un testo definitivo da presentare in classe.

La chiarezza con cui, in entrambe le presentazioni, venivano proposti i più importanti risultati del Calcolo delle Probabilità su spazi finiti, ha suscitato il bisogno di testarlo sul campo, in una sperimentazione scolastica.

Il campione della sperimentazione è rappresentato da 66 studenti frequentanti il quarto anno, indirizzo scientifico sperimentale[1] del Liceo Scientifico Morando Morandi di Finale Emilia (MO), divisi rispettivamente in tre classi, IV M, IV T, IV Y, da 22 studenti ciascuna.

Per verificare l'effettiva validità del nuovo approccio, le tre classi sono state divise in due classi test, IV T e IV Y, e in una classe di controllo, IV M. Le prime sono state sottoposte alla sperimentazione, seppur con un numero di ore diverso, mentre la terza è stata sottoposta al metodo espositivo del libro di testo in dotazione al liceo [3]. Questo per confrontare, in ultima analisi, il nuovo modello con uno dei modelli attualmente più usati. Proprio per questo, le tre classi sono state valutate attraverso gli stessi esercizi, e quando non possibile, attraverso esercizi della stessa tipologia, perfettamente equivalenti.

La sperimentazione è iniziata il 26 aprile 2019 ed è terminata il 31 maggio 2019, per un totale di 43 ore, così suddivise:

IV M) 12 ore di lezione, 2 di verifica e una conclusiva;

IV T) 9 ore di lezione, 2 di verifica e una conclusiva;

IV Y) 13 ore di lezione, 2 di verifica e una conclusiva.

Nell'ora conclusiva sono state consegnate le verifiche e si sono esposte alcune considerazioni finali, durante una discussione partecipata fra studenti e docente. La differenza fra il numero di ore di lezione delle due classi test è stata pensata per verificare se il minor numero di ore, e il conseguente maggior carico pomeridiano, potessero influire sui risultati finali. Inoltre, dalle testimonianze raccolte dagli insegnanti di matematica delle due classi, esse erano molto diverse fra loro, la IV Y era portata a mettere in discussione, in maniera critica e spesso costruttiva, i temi che di volta in volta si affrontavano, mentre la IV T era più propensa allo studio individuale.

Docente della sperimentazione il laureando magistrale Simone Stuppazzini, ideatore del progetto di tirocinio e autore del materiale didattico somministrato. L'unità didattica è stata pensata per una classe di indirizzo scientifico, sperimentale e non, al secondo biennio, ma visti i contenuti, resta fruibile anche alle classi del primo biennio.

[1] Scienze Applicate e Chimico-Biologico.

Sulla base delle Indicazioni Nazionali si è pensato di suddividere gli argomenti che trattano di probabilità in tre capitoli:

1 **Calcolo delle Probabilità.** In cui si definisce il sistema assiomatico di regole di calcolo per gli spazi di probabilità finiti.

2 **Calcolo Combinatorio.** In cui si passano in rassegna tutte le principali formule combinatorie e si analizza la probabilità delle prove ripetute.

3 **Variabili Aleatorie** In cui si sviluppano gli obbiettivi propri del quinto anno, presenti nelle Indicazioni.

Di questi tre argomenti, la sperimentazione e il materiale didattico proposti nei seguenti capitoli si occupano soltanto del primo. Si è scelto di introdurre il calcolo combinatorio come capitolo successivo, e non come capitolo precedente al Calcolo delle Probabilità, perché non si vuole far passare l'idea, oggi molto diffusa fra gli studenti, che la probabilità abbia a che fare solo con problemi di tipo combinatorio, considerando il fatto che anche alcuni di essi si possono risolvere con altri metodi.

Per gli studenti del curriculum didattico dovrebbe essere di vitale importanza la sperimentazione sul campo, una prova tangibile e concreta di quello che si è appreso durante gli anni di specializzazione. Ecco dunque spiegato il perché di una tesi di questo genere, il cui obbiettivo principale sembrava proprio mettere in pratica i modelli e le tesi prodotti da una buona ricerca in didattica della matematica. Ma tale obbiettivo, pur restando uno degli aspetti finali della tesi, è stato notevolmente ridimensionato. Questo perché è nata l'esigenza di scrivere un materiale didattico, sulla base di quanto era stato fatto fino ad allora, che potesse essere utilizzato direttamente in classe, dagli studenti, come testo unico di riferimento dell'unità didattica sperimentale. E che tale testo fosse indirizzato proprio ai liceo scientifici.

È nata allora la possibilità, non solo di porsi come docente somministratore, ma anche come autore del "libro di testo". Un testo che fosse utilizzabile anche da altri docenti. I problemi legati alla scelta di come introdurre la materia, nel passaggio dal linguaggio naturale alla modellizzazione matematica, nella coerenza logica e temporale della presentazione dei risultati, nella scelta degli esempi e degli esercizi, rendono la stesura del materiale didattico un obbiettivo indipendente rispetto a quello iniziale.

Un docente oltre a conoscere a fondo la propria materia, deve anche saperne scrivere e saperne fare ricerca, deve saper utilizzare le tecniche imparate durante i due anni di specializzazione per costruire esercizi originali e mirati, la sua esposizione orale deve essere chiara e puntuale, deve saper cogliere i dubbi degli studenti interpretando correttamente le loro domande e i loro interventi, deve saper verificare correttamente la loro preparazione attraverso la costruzione di verifiche mirate, deve cercare di coinvolgere la classe attivamente, attraverso un dialogo costruttivo, sia sulla materia che sulle problematiche interne alla classe stessa.

Tutto questo è stato ampiamente sperimentato in questa tesi, mettendo alla prova quello che si è imparato durante il lungo percorso scolastico e iniziando finalmente a costruire un'effettiva esperienza di cattedra, così da non affacciarsi nel mondo del lavoro, in particolare nel mondo dell'insegnamento, senza aver mai praticato ciò per cui si è studiato.

È in questo modo che è nata l'idea di questa tesi, e si è evoluta generando questo tipo di sperimentazione, i cui obbiettivi principali, attraverso l'insegnamento in classe, sono:

- scrivere il materiale didattico relativo a un'intera unità, che sia utilizzabile dai docenti come parte del testo scolastico;
- mettere in pratica i modelli e le tesi prodotti da una buona ricerca in didattica della matematica;
- confrontare questi ultimi con un modello attualmente utilizzato da molti libri di testo.

1.4 Struttura e Somministrazione del Materiale Didattico

Come già anticipato, il capitolo 2 rappresenta interamente il testo del materiale didattico utilizzato in classe. Esso si basa su un'impostazione assiomatica del Calcolo delle Probabilità su spazi finiti, cioè il cui spazio campionario è un insieme finito. A questo proposito si è deciso di adattare l'approccio usato da Kolmogorov proprio per trattare questo tipo di spazi.

Attraverso 3 assiomi e 13 definizioni sono derivate, con una dimostrazione di tipo formale, 9 proprietà, che rappresentano le più importanti regole del Calcolo delle Probabilità, fra cui il Teorema della Probabilità Totale e il Teorema di Bayes. Assieme a tutto ciò sono forniti due strumenti di lavoro: 7 proprietà degli insiemi, applicate alla probabilità, e il principio di ragione non sufficiente, molto utile per interpretare alcune ambiguità che possono trovarsi nei testi degli esempi e degli esercizi.

Soffermandosi proprio su questi ultimi: gli esempi si trovano sparsi lungo tutta la trattazione e cercano di aiutare il passaggio dal linguaggio naturale al modello matematico appena introdotto, mentre gli esercizi si trovano alla fine di ogni paragrafo.

Il capitolo e diviso nei seguenti paragrafi:

1 **Introduzione al Calcolo delle Probabilità.** Dove si inizia a prendere confidenza con i problemi che hanno a che fare con la probabilità, si generalizza il problema e si forniscono le prima definizioni e proprietà alla base del modello risolutivo.

2 **Probabilità Condizionata.** Dove si mette in pratica quanto appreso nel paragrafo precedente per risolvere situazioni più complesse, in cui si è a conoscenza di informazioni che condizionano le probabilità da trovare.

3 **Verso l'Esame di Stato.** Dove si espongono e si risolvono due quesiti liberamente tratti dalla seconda prova di matematica.

4 **Riflessioni e Conclusioni sulla Probabilità.** Dove si cerca di risolvere e analizzare le principali misconcezioni legate alla probabilità. Fino ad arrivare all'introduzione della Legge dei Grandi Numeri.

5 **Risoluzione Esercizi.** Dove sono risolti tutti gli esercizi presentati, attraverso l'uso puntuale di tutte le proprietà apprese.

6,7 **Verifica Teorica e Verifica Pratica[2].** Dove sono riportati i testi delle verifiche somministrate agli studenti delle due classi test.

Su alcuni aspetti del materiale didattico occorre fare alcune precisazioni. Il paragrafo iniziale mostra come le prime definizioni servano a descrivere un problema particolare, facente parte di una classe più generale, e come gli assiomi rappresentino le regole fondamentali per risolvere questa classe di problemi, la cui definizione generale è data solo alla fine, una volta chiariti i primi due aspetti. Il problema generale è quindi identificato da tre fasi: definizione, descrizione e risoluzione. I primi tre paragrafi sono stati condivisi

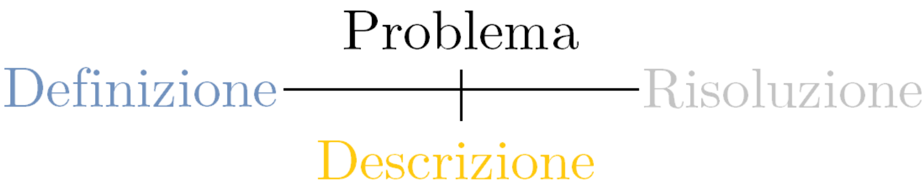


Figura 1.1

con gli studenti il primo giorno in cui sono stati affrontati in classe. Mentre il paragrafo sulle riflessioni e conclusioni è stato consegnato il giorno dell'ultima ora di lezione, quella di consegna delle verifiche e discussione in aula.

Il paragrafo sulla risoluzione degli esercizi è stato pensato per accorciare i tempi della correzione in classe, limitandola agli esercizi più problematici e lasciando agli studenti il compito di guardare gli altri svolgimenti individualmente. Inoltre il paragrafo costituisce un valido ripasso in preparazione delle verifiche. Infatti gli studenti non sono stati avvertiti dell'esistenza di questo paragrafo fino a quando non gli è stato consegnato una settimana prima delle verifiche, alla fine delle lezioni teoriche. Questo per spronarli ad affrontare gli esercizi ragionando con la propria testa o discutendo con i compagni, scontrandosi con i propri dubbi e le proprie insicurezze, anche commettendo errori, che il docente ha quindi occasione di sanare, spiegando le incomprensioni che li hanno generati.

Il materiale didattico è stato scritto interamente dall'autore e, a meno dei contenuti che si rifanno alle opere citate in questo capitolo, il metodo di presentazione è da considerarsi originale e base fondante di questa tesi. Così come sono originali quasi la totalità degli esempi e degli esercizi. Per questi ultimi, alcuni godono della collaborazione del Professor Paolo Negrini.

[2] Ad uso esclusivo del docente.

1.5 Il Punto di Partenza

Viene ora presentato un questionario preliminare, sottoposto in forma anonima a tutto il campione degli studenti, prima dell'inizio delle lezioni.

Tale questionario è stato pensato per testare la reale preparazione degli studenti sull'argomento proposto, così da cercare, durante la spiegazione dell'unità didattica, di concentrarsi maggiormente sui punti in cui si sono riscontrati maggiori dubbi e insicurezze. A questo proposito, il docente è tenuto a prendere visione dei risultati, prima di iniziare l'unità.

Le risposte al questionario sono contenute nel paragrafo 2.4. Tale paragrafo resta valido, come degna conclusione dell'unità didattica, anche in mancanza della somministrazione del questionario. Infatti, per come è strutturato il materiale didattico, il questionario resta una parte accessoria e integrativa, mirata a costruire un percorso che va dal porsi domande complesse al cercare di rispondervi attraverso una teoria nuova, il Calcolo delle Probabilità appunto.

Questionario Preliminare

1. Che cos'è la probabilità? (secondo te)
2. C'è differenza fra attribuire e calcolare una probabilità? (secondo te)
3. È più probabile vincere alla Lotteria Italia comprando un biglietto a Finale Emilia o comprando un biglietto a Roma?

   ☐ Finale Emilia
   ☐ Roma
   ☐ Ugualmente probabile

4. La seria A è composta da 20 squadre. Qual è la probabilità che nel prossimo campionato (2019/2020) il Napoli vinca lo scudetto?

   ☐ $> 1/20$
   ☐ $1/20$
   ☐ $> 1/20$

5. Al gioco del lotto è più probabile che sia estratta la cinquina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o la cinquina $\{18, 33, 45, 62, 81\}$?

   ☐ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
   ☐ $\{18, 33, 45, 62, 81\}$
   ☐ Ugualmente probabile

6. Si lancia un dado a sei facce. Se esce sei, si vince, oppure si ha diritto a lanciarlo una seconda volta e se esce sei, si vince. Altrimenti si perde. Quale probabilità si ha di vincere? Risposta: se si ha un sei al primo lancio si vince, oppure se non si ha un sei al primo lancio e si ha sei al secondo si ha ugualmente vinto. Altrimenti si perde. Ci sono due casi su tre in cui si vince, dunque si hanno due possibilità su tre di vincere. Secondo te la risposta è corretta?

   ☐ Sì
   ☐ No

7. Sapendo che, al gioco del lotto, il numero trentasette non è mai stato estratto negli ultimi sei mesi, saresti più portato a giocarlo rispetto ad un altro numero?

   ☐ Sì
   ☐ No

8. È corretto affermare che al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste tende al numero di croci?

   ☐ Sì
   ☐ No

Capitolo 2

Materiale Didattico

2.1 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

2.1.1 Vero, Falso oppure Probabile?

"...il caso della certezza, intesa come certezza assoluta, è,
se non un'astrazione illusoria, per lo meno un caso-limite,
mentre sarebbe da considerarsi normale il caso dell'incertezza."
Bruno de Finetti

Tutto ciò che succederà è certo? È impossibile? Se dovessimo rispondere alla domanda: "domani pioverà?", possiamo rispondere con questo grado di sicurezza? "Sì" se siamo certi che succederà, "no" se siamo certi che non succederà? In realtà la risposta più ragionevole a questo tipo di domande è "forse", perché non abbiamo abbastanza elementi per rispondere esattamente. In effetti parole come "certo" e "impossibile" descrivono risultati assoluti, mentre la parola "forse" descrive un risultato incerto, probabile, se vogliamo relativo. Ma relativo a cosa? Quanto è probabile che domani piova? Sulla base delle informazioni in nostro possesso (stagione, temperatura, umidità, vento...), cioè relativamente ad esse, potremmo associare arbitrariamente dei valori alle diverse possibilità: al fatto che domani certamente pioverà potremmo associare il valore 1, mentre al fatto che domani sarà impossibile che pioverà potremmo associare il valore 0, infine potremmo associare 1/2 al fatto che domani sarà probabile che piova o meno in ugual misura.

Questo modo di procedere sembra ragionevole. Stabilite queste associazioni, allora è naturale associare numeri maggiori di 1/2 al fatto che domani pioverà se siamo più sicuri che ciò accada rispetto a che ciò non accada, con valori sempre più vicini a 1 tanto più siamo sicuri che pioverà. Viceversa, è naturale associare numeri minori di 1/2 al fatto che domani pioverà se siamo meno sicuri che ciò accada rispetto a che ciò non accada, con valori sempre più vicini a 0 tanto meno siamo sicuri che pioverà.

La maggior parte degli avvenimenti non è certa, non è impossibile, ma probabile; così come la maggior parte delle proposizioni non sono sempre vere e nemmeno sempre false, ma sono vere o false a seconda dei casi.

2.1.2 Modello e Problema Generale

Un problema è formato: dalla **definizione** di un caso generale, cioè che generalizzi uno o più scopi comuni, dalla **descrizione** di un caso particolari e infine dalla **risoluzione** attraverso uno modello, matematico o meno, che può essere lo stesso usato per descriverlo. Per prima cosa, introduciamo delle definizioni per provare a descrivere i problemi che hanno a che fare con la probabilità.

D 1. [1]**Esperimento Aleatorio:**[2] è un esperimento di cui non siamo in grado di prevedere con certezza il risultato.

D 2. Esito ($\boldsymbol{\omega}$): è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio.

D 3. Evento ($\boldsymbol{E}$): è un'affermazione riguardante uno o più esiti, della quale è possibile dire con certezza se è vera oppure falsa, una volta noto quale fra gli esiti si è verificato.

Esempio 1. Qual è la probabilità che domani piova?

> L'esperimento aleatorio è costituito dall'osservare cosa succede domani, cioè dall'osservare se pioverà oppure no.
>
> L'esito può essere: "piove", "non piove", "piove dalle dodici alle tredici" ecc. Anche in questo caso c'è una reale difficoltà nell'enunciare tutti i possibili esiti; a seconda dei vari criteri scelti potrebbero pure essere infiniti! Ma non sembra essere il vero scopo capire in che modo scegliere un insieme di esiti a dispetto di un altro.
>
> L'evento è l'affermazione "domani pioverà". Siamo sicuri che, una volta arrivati a domani, sapremo rispondere certamente a questa domanda.

Capito quali sono i limiti dell'esempio precedente, proviamo con un esempio che abbia meno ambiguità, cioè che sia più preciso e particolare.

Esempio 2. Si lancia un dado a quattro facce. Qual è la probabilità che esca un numero maggiore di uno?

> L'esperimento aleatorio consiste nel lancio di un dado a quattro facce.
>
> L'esito dell'esperimento è l'uscita di uno solo dei quattro numeri (quattro esisti).
>
> L'evento è l'affermazione "esce un numero maggiore di uno".

D 4. Spazio Campionario ($\boldsymbol{\Omega}$): è un insieme non vuoto i cui elementi sono finiti e rappresentano tutti i possibili esiti dell'esperimento aleatorio.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$
$$\text{con } \omega_i \text{ esito e } i = 1, ..., n$$

[1] Con D indicheremo tutte le definizioni.

[2] Dal latino *aleatorius*, derivato di alea "gioco di dadi". In quest'unità sarà sinonimo di *casuale*.

D 5. Evento Elementare ($\{\omega\}$): è l'insieme costituito da un singolo esito.

Attenzione. Esito ω ed evento elementare $\{\omega\}$ NON sono la stessa cosa: a livello insiemistico il primo è un elemento di un insieme, il secondo è un insieme costituito da un solo elemento.
Tornando all'esempio del dado a quattro facce:

> lo spazio campionario è $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\omega_1 = 1$ è un esito, $\{1\}$ è un evento elementare;
>
> l'evento "esce un numero maggiore di uno" si può riscrivere come $E = \{2, 3, 4\}$.

Attenzione. Aver posto $\omega_1 = 1$ significa che 1 rappresenta solo un simbolo grafico e non un numero, avremmo anche potuto scrivere $\omega_1 =$"esce il numero uno".

In base a questo modello: **l'evento è un sottoinsieme dello spazio campionario, cioè $E \subseteq \Omega$, e risulta verificato se l'esito dell'esperimento aleatorio appartiene ad esso.**

A questo punto siamo in grado di descrivere il problema. Ma non di risolverlo. Per fare ciò bisogna elencare le "regole fondamentali" di calcolo delle probabilità, anche dette assiomi[3].

A 1. La probabilità $P(\{\omega_i\})$ è una legge che ad ogni evento elementare dello spazio campionario associa uno e un solo valore reale compreso tra 0 e 1.

$$0 \leq P(\{\omega_i\}) \leq 1 \qquad \forall i = 1, ..., n$$

Per alleggerire la notazione scriveremo d'ora in poi $P(\{\omega_i\}) := P(\omega_i)$, dove il simbolo $:=$ significa "per definizione".

A 2. La somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari è 1.

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$$

A 3. La probabilità di un qualunque evento E, indicata con $P(E)$, è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono. La probabilità dell'insieme vuoto è zero, cioè $P(\emptyset) = 0$.

Esempio 3. Se l'evento è dato da $E = \{\omega_5, \omega_8, \omega_{11}\}$ allora

$$P(E) = P(\omega_5) + P(\omega_8) + P(\omega_{11}).$$

D 6. La coppia $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{P})$ viene detta **Spazio di Probabilità**. $\boldsymbol{\Omega}$ può avere un numero finito o infinito di eventi elementari, mentre $\boldsymbol{P}$ è una legge che soddisfa i tre assiomi.

Da quanto detto finora si può dire che: **la probabilità di un evento è un valore che misura la sicurezza che tale evento si verifichi**; più è sicuro che si verifichi, maggiore è il valore.

[3] Un assioma è una proposizione o un principio che è assunto come vero perché ritenuto evidente o perché fornisce il punto di partenza di una teoria.

Esempio 4. Si lanci un dado perfettamente bilanciato a sei facce. Qual è la probabilità che esca un numero pari?

L'esperimento aleatorio consiste nel lancio del dado.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è lo spazio campionario.

$\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$, $\omega_6 = 6$, sono i possibili esiti o, visti come insiemi di un elemento, cioè racchiudendoli nelle parentesi graffe, i possibili eventi elementari.

$E = \{2, 4, 6\}$ è l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità.

Analizziamo le ulteriori informazioni presenti nel testo: "perfettamente bilanciato" significa che una faccia ha la stessa probabilità di uscire di un'altra. Anche in questo caso non sembra essere il vero scopo capire come attribuire le probabilità degli eventi elementari, perché il testo ci fornisce informazioni sufficienti a calcolarli mediante gli assiomi. Infatti dall'informazione "perfettamente bilanciato" si ricava

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6),$$

che in realtà sono cinque equazioni indipendenti; inoltre da A2 si ha

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1,$$

allora si può impostare il sistema di sei equazioni in sei incognite

$$\begin{cases} P(1) = P(2) \\ P(2) = P(3) \\ P(3) = P(4) \\ P(4) = P(5) \\ P(5) = P(6) \\ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1. \end{cases}$$

Sicuramente questa notazione è troppo formale per la trattazione di questo semplice esempio, ma serve a farci capire che le informazioni in nostro possesso ci permettono di creare un sistema che può avere un'unica soluzione. Ora poniamo per semplicità le probabilità degli eventi elementari uguali a p, essendo tutte uguali, dall'ultima equazione otteniamo $6p = 1$, cioè $p = 1/6$.

$$p = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Tutti questi valori verificano A1, cioè stanno fra 0 e 1. Possiamo ora risolvere l'esercizio e calcolare $P(E)$ attraverso A3.

$$P(E) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

D 7. Si parla di **Spazio di Probabilità Uniforme** quando tutti gli eventi elementari sono equiprobabili.

$$P(\omega_i) = p \qquad \forall i = 1, ..., n$$

Informazioni come: "perfettamente bilanciato", "non truccato", "equilibrato", "regolare", stanno tutte a significare che vale D7. Qualora non fosse data alcuna informazione sulla natura degli eventi elementari, cioè in mancanza di informazioni sufficienti a far prediligere una probabilità rispetto ad un'altra, vale D7[4].

Esempio 5. Un dado ha venti facce numerate da uno a venti. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata col numero 1 si presenti con probabilità doppia rispetto a ognuna delle altre facce. Qual è la probabilità che esca un numero dispari?

L'esperimento aleatorio consiste nel lancio del dado.

$\Omega = \{1, 2, ..., 20\}$ è lo spazio campionario, in cui ogni elemento rappresenta un esito.

$E = \{1, 3, 5, 7, ..., 19\}$ è l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità.

Dalle informazioni del testo sappiamo che

$$P(2) = P(3) = ... = P(20) = p,$$

$$P(1) = 2p.$$

Da A2 otteniamo

$$P(1) + P(2) + ... + P(20) = 21p = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{21},$$

che è un valore compreso tra 0 e 1, in accordo con A1. Infine per A3

$$\begin{aligned} P(E) &= P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(11) + P(13) + P(15) + P(17) + P(19) \\ &= 2p + p + p + p + p + p + p + p + p + p \\ &= 11p = 11 \cdot \frac{1}{21} = \frac{11}{21}. \end{aligned}$$

Una volta fornito un modello per la descrizione e la risoluzione dei problemi che hanno a che fare con la probabilità, manca solo da definire il caso generale. Ricapitolando, abbiamo visto che lo scopo principale di questo tipo di problemi NON è attribuire:

- lo spazio campionario e i suoi esiti;
- i valori di probabilità degli eventi elementari.

Piuttosto si occupa di calcolare una probabilità non nota, sulla base di altre informazioni iniziali, fra cui i valori di probabilità di determinati eventi. Allora potremmo dire che, attraverso le prime definizioni e i tre assiomi, la **definizione** del caso generale è:

[4] Principio di "indifferenza" o "della ragione non sufficiente" a seconda che si citi Bernoulli o Laplace.

> “Date le probabilità di eventi qualsiasi,[...] si richiede la probabilità di un altro evento qualsiasi ugualmente arbitrario.”

Come scriveva George Boole in *The Laws of Thought* nel 1854. Ed è per questo che la parte della matematica che si occupa di descrivere e risolvere questo tipo di problemi è chiamata **Calcolo delle Probabilità**. D'ora in avanti sarà più corretto dire che fra tutti i problemi che hanno a che fare con la probabilità, quelli proposti in questa unità didattica hanno a che fare esclusivamente con il Calcolo delle Probabilità.

Esercizio 1. Si consideri una moneta equilibrata. Dopo due lanci, qual è la probabilità di ottenere almeno una testa? Descrivere il problema attraverso l'esperimento aleatorio, lo spazio campionario Ω e l'evento E dato.

$$\left[\frac{3}{4}\right]$$

Esercizio 2. Si dispone di un dado non bilanciato a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando il dado, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lancia il dado, qual è la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 3? Descrivere il problema attraverso l'esperimento aleatorio, lo spazio campionario Ω e l'evento E dato.

$$\left[\frac{1}{5}\right]$$

2.1.3 Proprietà degli Eventi e degli Assiomi

Visto che gli eventi sono insiemi, è opportuno interpretare dal punto di vista probabilistico le loro proprietà. Aiutandoci con la figura 2.1, dati due eventi A e B, si ha che l'evento:

I 1. $A \cup B$ è formato dagli esiti che appartengono almeno ad uno fra A e B;
$P(A \cup B)$ è la probabilità che si verifichi almeno uno fra A e B;

I 2. $A \cap B$ è formato dagli esiti che appartengono sia ad A che a B;
$P(A \cap B)$ è la probabilità che si verifichino contemporaneamente A e B;

I 3. $A \setminus B$ è formato dagli esiti che appartengono ad A ma non a B;
$P(A \setminus B)$ è la probabilità che si verifichi A ma non B;

I 4. [5] $A^c = \Omega \setminus A$ è formato dagli esiti che non appartengono ad A;
$P(A^c)$ è la probabilità che si non verifichi A;

I 5. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è formato dagli esiti che appartengono o solo ad A o solo a B;
$P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ è la probabilità che si verifichi o solo A o solo B.
Inoltre:

I 6. Se A è un evento sottoinsieme di B, cioè $A \subseteq B$, allora se si verifica A anche B si verifica, ma non viceversa. E si può scrivere $B = A \cup (B \setminus A)$;

I 7. Leggi di De Morgan (valgono anche per 3 o più eventi)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

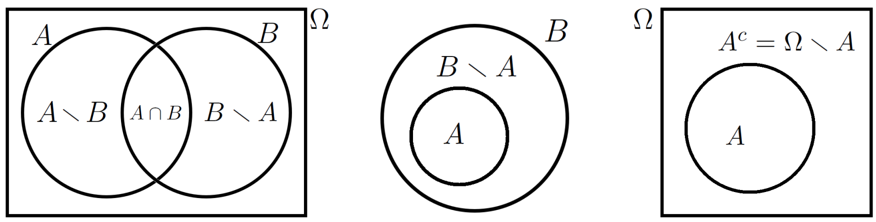


Figura 2.1

D 8. Evento Contrario: $\boldsymbol{E^c}$ è detto insieme complementare e in probabilità rappresenta l'evento contrario. Per come sono definiti, E ed E^c sono disgiunti ($E \cap E^c = \emptyset$) e la loro unione rappresenta l'intero spazio campionario ($E \cup E^c = \Omega$). Risulta chiaro che almeno uno dei due eventi complementari si deve verificare. Infine $(E^c)^c$ rappresenta di nuovo E.
Dai tre assiomi è possibile ricavare altre proprietà.

[5] A volte indicato con $\overline{A}$.

P 1. $P(\Omega) = 1$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\omega_1) + ... + P(\omega_n) && \text{da A3} \\ &= 1 && \text{da A2} \end{aligned}$$

□

In altre parole: essendo Ω formato da tutti gli esiti possibili, è certo che almeno uno si verificherà. Allo stesso modo essendo $\emptyset$ privo di esiti, è certo che non si verificherà.

P 2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dimostrazione. Siano $A = \{a_1, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, ..., b_m\}$ due eventi formati rispettivamente da n esiti e da m esiti; non siamo sicuri che tutti gli esiti siano distinti. Supponiamo che A e B abbiano in comune i primi i esiti.

$$A = \{\overbrace{a_1, a_2, ..., a_i}^{\text{esiti in comune}}, a_{i+1}, ..., a_n\} \qquad B = \{\overbrace{a_1, a_2, ..., a_i}^{\text{esiti in comune}}, b_{i+1}, ..., b_m\}$$

$$(A \cap B) = \{a_1, a_2, ..., a_i\}$$

$$(A \cup B) = \{\underbrace{a_1, a_2, ..., a_i}_{\text{esiti in comune}}, \underbrace{a_{i+1}, ..., a_n, b_{i+1,...,b_m}}_{\text{esiti non in comune}}\}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(a_1) + ... + P(a_i) + P(a_{i+1}) + ... + P(a_n) + P(b_{i+1}) + ... + P(b_n) \\ &= P(A) + P(b_{i+1}) + ... + P(b_m) \qquad \text{poi aggiungendo e togliendo } P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(A \cap B) + P(b_{i+1}) + ... + P(b_m) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(a_1) + ... + P(a_i) + P(b_{i+1}) + ... + P(b_m) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Dimostrare qualcosa di estremamente intuitivo può risultare lungo, seppur semplice. Dalla dimostrazione si vede che se i due eventi sono disgiunti, cioè $(A \cap B) = \emptyset$ e ricordando che $P(\emptyset) = 0$, da A3, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Due eventi disgiunti non hanno esiti in comune, quindi il verificarsi di uno implica necessariamente il non verificarsi dell'altro, anche nel caso in cui non siano complementari.

D 9. Due eventi disgiunti, cioè tali che $(A \cap B) = \emptyset$, per cui valga che la probabilità dell'evento unione sia la somma diretta delle probabilità dei due eventi che lo formano, cioè $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si dicono **Eventi Incompatibili**. Viceversa, due eventi non disgiunti, cioè tali che $(A \cap B) \neq \emptyset$, si dicono **Eventi Compatibili**[6].

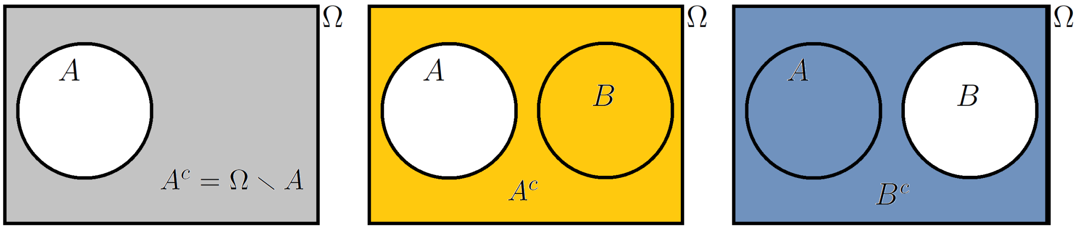


Figura 2.2

Attenzione. Due eventi complementari sono di certo incompatibili, ma due eventi incompatibili (come in figura 2.2) non è detto che siano complementari.

P 3. $P(E) = 1 - P(E^c)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) && \text{da P1} \\ &= P(E \cup E^c) && \text{da D8} \\ &= P(E) + P(E^c) && \text{da P2} \end{aligned}$$

$$P(E) + P(E^c) = 1$$
$$P(E) = 1 - P(E^c)$$

□

Sia nella D9 che nella dimostrazione di P3 si utilizza il fatto che $P(\emptyset) = 0$, contenuto in A3. Ecco spiegato perché negli assiomi è stato necessario inserire almeno uno fra gli assunti $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$, dimostrando l'altro come proprietà.

P 4. Se $A \subseteq B$ allora $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B \setminus A)) && \text{da I6} \\ &= P(A) + P(B \setminus A) && \text{da P2} \end{aligned}$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

□

P 5. Se lo spazio di probabilità è uniforme, la probabilità di ogni evento elementare è data da $P(\omega_i) = 1/|\Omega|$, dove $|\Omega|$ è la cardinalità dello spazio campionario, cioè il numero di esiti che contiene. La probabilità di ogni evento è data da $P(E) = |E|/|\Omega|$, dove $|E|$ è la cardinalità di E.

[6] Dire incompatibili o disgiunti è la stessa cosa, così come dire compatibili o non disgiunti.

Dimostrazione. Sia lo spazio campionario formato da n esiti, cioè $|\Omega| = n$, e le probabilità degli eventi elementari siano tutte uguali a p, cioè $p = P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n)$.

$$\begin{aligned} P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) &= n \cdot p \\ &= 1 \qquad \text{da A2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \cdot p &= 1 \\ p &= \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|} \end{aligned}$$

Se un evento è formato da $m = |E|$ eventi elementari, da A3

$$P(E) = \underbrace{p + ... + p}_{m} = m \cdot p = |E| \cdot \frac{1}{|\Omega|}.$$

□

Esempio 6. Calcolare la probabilità di ottenere almeno una testa in tre lanci di una moneta equilibrata.

Siccome ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, vale P5, e la probabilità di ogni evento elementare è data da $p = 1/|\Omega|$. Se definiamo $C =$"esce croce" e $T =$"esce testa", allora gli esiti saranno formati da tutte le triplette ordinate di teste e croci. A ciascuno dei primi due possibili risultati del primo lancio, si può associare uno degli altri due possibili risultati del secondo, cioè $2 \cdot 2 = 4$ coppie totali. Ad ogni coppia si può associare uno degli gli altri due possibili risultati del terzo lancio, così da ottenere $4 \cdot 2 = 8$ triplette, che costituiscono tutti i possibili esiti[7]. Quindi $|\Omega| = 8$ e la probabilità di ogni evento elementare è $p = 1/8$. Dato $E =$"esce almeno una testa" allora $E^c =$"non esce mai una testa"$= \{CCC\}$ che è un evento elementare. Utilizzando P3

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - p = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

P3 è molto importante perché permette di semplificare notevolmente i calcoli quando lo spazio campionario ha un numero di elementi molto alto. L'esercizio si poteva risolvere per via diretta pensando che l'unico caso in cui non compaiono teste è l'esito CCC per cui la cardinalità di E era $|E| = |\Omega| - 1 = 7$ eventi elementari di probabilità p e che quindi $P(E) = 7/8$. Oppure si sarebbero potuti elencare tutti i possibili risultati e contarli, ma in altri esercizi non sarebbe stato così veloce.

Esempio 7. I possibili esiti dell'esperimento aleatorio "lancio di un dado a sei facce per sei volte" sono, attraverso il ragionamento precedente, $6^6 = 46656$ sestine, in cui ogni posizione può essere occupata da numeri da 1 a 6.

[7] Si parla di *disposizioni* quando conta la posizione degli oggetti da raggruppare; si parla di *disposizioni con ripetizione* se lo stesso oggetto può apparire in posizioni diverse, quindi si ripete. Il numero di disposizioni con ripetizione di n oggetti presi a gruppi di k è proprio n^k. Nel nostro caso gli oggetti erano rappresentati da C e T, cioè 2 oggetti, ed erano presi a gruppi di 3, quindi $2^3 = 8$ triplette ordinate.

Esempio 8. Si lanci un dado equilibrato a sei facce due volte. Qual è la probabilità di ottenere 1 al primo lancio oppure 2 al secondo?

Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. Lo spazio campionario è formato da tutte le coppie ordinate di numeri compresi fra 1 e 6, quindi $|\Omega| = 6^2 = 36$ e la probabilità di ogni evento elementare è $p = 1/36$. Dati gli eventi $A =$"esce 1 al primo lancio"$= \{(1;i)\}$ con $i = 1, ..., 6$ e $B =$"esce 2 al secondo lancio"$= \{(i;2)\}$, si ha che $A \cap B =$"esce 1 al primo lancio e 2 al secondo"$= \{(1,2)\}$, cioè un evento elementare.

$$P(A \cap B) = P\{(1,2)\} = \frac{1}{36}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{dato che } |A| = |B| = 6$$

$$\begin{aligned} \text{utilizzando P2} \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

La proprietà P2 può essere estesa a più eventi. Vediamola con 3. Dati tre eventi A, B, C

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = &P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Possiamo aiutarci con la figura 2.3. Togliendo le tre probabilità dell'intersezione fra le coppie di eventi, si elimina del tutto la probabilità dell'intersezione di tutti e tre, che deve essere aggiunta di nuovamente. Negli esercizi in cui compare l'unione di tre o più eventi, lo svolgimento attraverso P2 può diventare lungo e pieno di calcoli, bisogna infatti calcolare tutte le probabilità presenti nella formula. Allora possono venire in nostro aiuto le proprietà P3 e I7 (Leggi di De Morgan).

P 6. Proprietà valida anche per l'unione di 4 o più insiemi.

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P((A \cup B \cup C)^c) && \text{da P3} \\ &= 1 - P((A^c \cap B^c \cap C^c) && \text{da I7.} \end{aligned}$$

Esempio 9. Si lanci un dado equilibrato a sei facce tre volte. Calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno dei seguenti eventi: $A =$"esce 1 al primo lancio", $B =$"esce 2 al secondo lancio", $C =$"esce 3 al terzo lancio".

Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. Vediamo ora i due modi di procedere a confronto (P2 e P6), partendo dal secondo. Lo spazio campionario è formato da tutte le possibili triplette di numeri da 1 a 6, con ripetizione, cioè $|\Omega| = 6^3 = 216$. $E = (A^c \cap B^c \cap C^c) =$"non esce 1 al primo lancio, non esce 2 al secondo e non

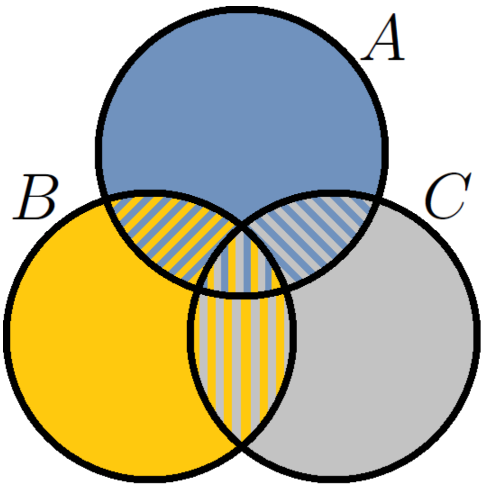


Figura 2.3

esce 3 al terzo" è dato da tutte le triplette formate da cinque dei sei numeri possibili, con ripetizione[8], cioè $|E| = 5^3 = 125$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P(A \cup B \cup C)^c) \\ &= 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) \\ &= 1 - P(E) \\ &= 1 - \frac{|E|}{|\Omega|} \\ &= 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \end{aligned}$$

Procedendo con il primo metodo avremmo dovuto trovare tutte le probabilità degli eventi: A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$.

$$\begin{aligned} A &= \{(1, i, j) \mid i, j = 1, ..., 6\} \qquad & |A| &= 6^2 = 36 \\ B &= \{(i, 2, j) \mid i, j = 1, ..., 6\} \qquad & |A| &= 6^2 = 36 \\ C &= \{(i, j, 3) \mid i, j = 1, ..., 6\} \qquad & |A| &= 6^2 = 36 \end{aligned}$$

[8]Per capire il perché possiamo aiutarci pensando a tre gruppi diversi formati da 5 oggetti, dove il primo gruppo è usato per la prima posizione, il secondo per la seconda e il terzo per la terza. Infatti il numero di disposizioni non dipende dal fatto che in una posizione si possano usare o meno gli stessi oggetti, né lo stesso numero di oggetti. Ad esempio le triplette ordinate in cui al primo posto compare una lettera dell'alfabeto italiano, al secondo un numero da 0 a 9, al terzo una lettera straniera fra J, K, W, X e Y, sono $21 \cdot 10 \cdot 5 = 1050$.

$$
\begin{array}{ll}
A \cap B = \{(1,2,i) \mid i = 1, ..., 6\} & |A \cap B| = 6 \\
B \cap C = \{(i,2,3) \mid i = 1, ..., 6\} & |B \cap C| = 6 \\
A \cap C = \{(1,i,3) \mid i = 1, ..., 6\} & |A \cap C| = 6 \\
A \cap B \cap C = \{(1,2,3)\} & |A \cap B \cap C| = 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) + \\
& - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + \\
& + P(A \cap B \cap C) \\
=& \frac{36}{216} + \frac{36}{216} + \frac{36}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} - \frac{6}{216} + \frac{1}{216} \\
=& \frac{91}{216}
\end{aligned}
$$

Esempio 10. Si lanci un dado truccato con sei facce numerate da uno a sei. La probabilità che esca un numero maggiore di 3 è $3/5$, mentre la probabilità che esca il numero 6 è $3/10$. Qual è la probabilità che esca 4 o 5?

Si può sfruttare P4 perché detto $B = \{4,5,6\}$ e $A = \{6\}$ si ha che $A \subseteq B$ e $(B \setminus A) = \{4,5\}$. Allora $P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = 3/5 - 3/10 = 3/10$, cioè la probabilità che esca uno dei due numeri fra 4 e 5 è uguale alla probabilità che esca 6.

Esercizio 3. Una scatola contiene quattro palline bianche, due palline rosse e una nera. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

$$\left[\frac{4}{7}\right]$$

Esercizio 4. Dato un mazzo di 52 carte[9], viene estratta una carta. Calcolare la probabilità che esca:

- una carta di picche;
- una figura;
- una carta rossa.

$$\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{13}; \frac{1}{2}\right]$$

Esercizio 5. Il baro sbadato. Un baro ha truccato il suo mazzo da poker di 52 carte in modo che la probabilità di estrarre una figura sia doppia rispetto alla probabilità

[9] Un mazzo da 52 carte è un mazzo da poker, formato da quattro semi (cuori rossi, quadri rossi, fiori neri, picche nere), ciascuno composto da 13 carte numerate da 1 a 10, più jack, donna e re. Un mazzo da 40 carte è un mazzo da briscola, formato da quattro semi (coppe, denari, bastoni, spade), ciascuno composto da 10 carte numerate da 1 a 7, più fante, cavallo e re.

di estrarre qualsiasi altra carta che non sia una figura. Calcolare le probabilità degli eventi dell'esercizio precedente. Il baro fa estrarre una carta a un giocatore, se è una figura vince il baro, altrimenti vince il giocatore. La probabilità di vincere del baro è migliorata rispetto al mazzo non truccato? Il baro voleva truccare il mazzo affinché la sua probabilità di vincere fosse maggiore di quella del giocatore; risulta effettivamente così? Cambiando la regola del gioco, il baro vince se esce una carta di picche. Usare il mazzo non truccato e quello truccato è equivalente?

$$\left[\frac{1}{4};\ \frac{3}{8};\ \frac{1}{2};\ \text{sì; no; sì}\right]$$

Esercizio 6. Determinare la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo da briscola di 40 carte, essa sia un 3 oppure una carta di spade.

$$\left[\frac{13}{40}\right]$$

Esercizio 7. Si estrae una pallina da un'urna che contiene otto palline bianche, dieci verdi e dodici rosse. Qual è la probabilità che esca una pallina verde o una pallina rossa? E che non esca rossa?

$$\left[\frac{11}{15};\ \frac{3}{5}\right]$$

Esercizio 8. In una scatola ci sono venti palline di colore o bianco o verde. Se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $0,6$, quante sono le palline bianche? Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Per calcolare questa probabilità era necessario sapere il numero di palline bianche? O il numero di palline verdi?

$$[12;\ 0,4;\ \text{no}]$$

Esercizio 9. Qual è la probabilità che lanciando un dado a otto facce per tre volte esca almeno un 8? E che nei primi due tiri esca almeno un 8? Il risultato del terzo lancio influisce sulla seconda probabilità richiesta?

$$\left[\frac{169}{512};\ \frac{15}{64};\ \text{no}\right]$$

Esercizio 10. Una roulette contiene i numeri da 1 a 18 di colore rosso, da 19 a 36 di colore nero e lo zero di colore verde. Viene fatta girare la ruota e lanciata la pallina. Calcolare la probabilità che la pallina si fermi su:

- un numero rosso oppure un numero pari;
- un numero rosso oppure pari oppure multiplo di 3;
- un numero rosso che non sia 3 o 7.

$$\left[\frac{28}{37}; \frac{31}{37}; \frac{16}{37}\right]$$

Esercizio 11. La probabilità di un evento A è $P(A) = 5/13$ mentre quella di un evento B è $P(B) = 7/11$, posto che appartengano allo stesso spazio campionario Ω, i due eventi sono disgiunti? Qual è la probabilità di $A \cap B$, se $P(A \cup B) = 1$? Senza l'informazione $P(A \cup B) = 1$ era possibile rispondere alla seconda domanda?

$$\left[\text{no}; \frac{3}{143}; \text{no}\right]$$

Esercizio 12. Tutti vicini al convegno. Simone, Eleonora, Virginia e Federico vanno ad un convegno e devono sedersi in quattro posti affiancati. Se si dispongono casualmente, calcolare la probabilità che:

- Eleonora sia seduta tra Virginia e Federico;
- Eleonora e Simone siano seduti vicini;
- i due ragazzi non siano vicini.

$$\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

2.2 Probabilità Condizionata

2.2.1 Dipendenza e Indipendenza di Eventi

La proprietà P2 mette in relazione l'evento unione con l'evento intersezione. Negli esercizi proposti precedentemente, tali eventi erano di facile riconoscimento. Tuttavia calcolare la probabilità dell'intersezione di due eventi risulta spesso difficile, soprattutto se non è data la probabilità dell'unione di quei due eventi o non si hanno abbastanza informazioni per calcolarla. Esistono altre due formule matematiche in cui compare la probabilità dell'intersezione e, a differenza della P2, sono due definizioni.

Ci sono informazioni che, tradotte in eventi, cambiano la probabilità di altri eventi. Si può dire che fra i secondi e i primi ci sia un rapporto di dipendenza, in quanto il verificarsi o meno dei primi influenza la probabilità dei secondi.

Esempio 11. Tutti vicini al convegno, parte seconda. Simone, Eleonora, Virginia e Federico vanno ad un convegno e devono sedersi in quattro posti affiancati. Sapendo che Simone ed Eleonora siedono sempre vicini e che, a parte questo dettaglio, i quattro si dispongono casualmente, calcola la probabilità che:

- Eleonora sia seduta tra Virginia e Federico;
- Eleonora e Simone siano seduti vicini;
- i due ragazzi non siano vicini.

Senza bisogno di impostare il modello risolutivo proposto nel paragrafo precedente, si vede chiaramente che:

- la probabilità del primo evento è 0, in quanto una delle due persone vicine ad Eleonora è sempre Simone;
- la probabilità del secondo evento è 1, perchè Simone e Eleonora sono sempre vicini, come dall'informazione presente nel testo.

Sulla base di questa nuova informazione è cambiato lo spazio campionario, e con lui anche i possibili esiti.

Il vecchio Ω era formato da tutte le file ordinate di 4 persone. A ciascuna delle quattro possibili persone sedute al primo posto, si poteva sedere accanto ognuna delle altre tre rimaste, cioè $4 \cdot 3 = 12$ coppie totali. Ad ogni coppia si poteva sedere accanto ognuna delle altre due persone rimaste, così da ottenere $12 \cdot 2 = 24$ triplette totali. Ad ogni tripletta si poteva sedere accanto l'ultima persona rimasta, così da ottenere $24 \cdot 1 = 24$ quaterne totali, che costituiscono tutti i possibili esiti[10]. Il nuovo Ω è formato da tutte le file ordinate di 3 persone, vedendo Simone ed Eleonora come un'unica persona, e ricordando che, per ognuna delle file possibili, i due possono scambiarsi di posto e

[10]Generalizzando: il numero di disposizioni senza ripetizione di n oggetti presi a gruppi di k è proprio $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$. Nel nostro caso gli oggetti erano rappresentati dalle 4 persone diverse, ed erano presi a gruppi di 4, quindi $4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ modi di disporsi.

rimanere ugualmente vicini. Quindi $(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2 = 12$. In tutti questi esiti Simone ed Eleonora sono certamente vicini ed è impossibile che non lo siano. Inoltre tutti gli esiti del nuovo spazio campionario fanno parte del vecchio (restano comunque file ordinate di 4 persone).

Per calcolare la terza possibilità si possono visionare tutti i possibili esiti. Possiamo aiutarci suddividendo casi in cui Simone e Eleonora sono rispettivamente a sinistra, al centro e a destra.

$\underline{SE}VF$	$V\underline{SE}F$	$VF\underline{SE}$
$\underline{SE}FV$	$F\underline{SE}V$	$FV\underline{SE}$
$\underline{ES}VF$	$V\underline{ES}F$	$VF\underline{ES}$
$\underline{ES}FV$	$F\underline{ES}V$	$FV\underline{ES}$

Considerando che ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, vale P5, allora la probabilità che i due ragazzi non siano vicini è di $8/12 = 2/3$.

Le probabilità degli eventi di questo esempio sono profondamente cambiate rispetto alle probabilità degli stessi eventi dell'esercizio 12. Questo perché l'informazione aggiuntiva cambia la conformazione dello spazio campionario, solitamente eliminando degli esiti; infatti il nuovo Ω è formato dall'evento $B =$"Simone ed Eleonora sono vicini" che è un sottoinsieme del vecchio spazio campionario. L'evento $A =$"i due ragazzi non sono vicini" cambia la sua probabilità a seconda che B si verifichi o meno, quindi dipende da esso, è condizionato da esso, poiché alcuni esiti di A fanno parte di B (es. $ESFV$) ed altri no (es. $EVSF$), ma ora siamo sicuri che B si verifica. È ragionevole, allora, dare una definizione di questa probabilità condizionata come segue.

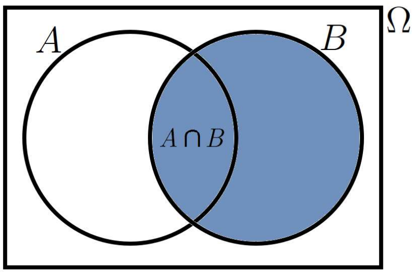


Figura 2.4

D 10. Probabilità condizionata ($P(A|B)$). Dato lo spazio di probabilità (P, Ω) e dati due eventi A e B, con $B \neq \emptyset$, la probabilità condizionata di A dato B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

In altre parole è il rapporto fra la probabilità che l'evento A si verifichi contemporaneamente a B e la probabilità che si verifichi l'evento B. Nello spazio uniforme di probabilità si passa da $|E|/|\Omega|$ a $|A \cap B|/|B|$, vedendo B come nuovo spazio campionario. Tornando all'esempio 11, si riesce a scrivere esplicitamente

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B) = E = \\
&= \{(SEVF), (SEFV), (ESVF), (VSEF), (FESV), (FVSE), (VFES), (FVES)\}.
\end{aligned}
$$

E considerato che ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, si ha

$$
\begin{aligned}
&P(A \cap B) = P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{8}{24}, \\
&P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{12}{24}, \\
&P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{24}}{\frac{12}{24}} = \frac{8}{24} \cdot \frac{24}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Ovviamente la D10 funziona anche per la prima e la seconda richiesta dell'esempio, infatti chiamando $C =$"Eleonora è seduta tra Virginia e Federico", si ha

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0,$$

$$P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Attenzione. Due eventi incompatibili si condizionano nel modo più estremo possibile. Infatti il verificarsi di uno implica necessariamente il non verificarsi dell'altro, come si vede in $P(C|B)$.

Esempio 12. Si lanci un dado equilibrato a otto facce, qual è la probabilità che esca un numero maggiore di tre, sapendo che si è ottenuto numero pari?
Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. Allora:

$$
\begin{aligned}
&A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \qquad && B = \{2, 4, 6, 8\}, \qquad && (A \cap B) = \{4, 6, 8\}, \\
&P(A) = \frac{5}{8}, && P(B) = \frac{1}{2}, && P(A \cap B) = \frac{3}{8},
\end{aligned}
$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}.$$

Esempio 13. Calcolare la probabilità che la somma degli esiti di due lanci di un dado equilibrato a sei facce sia 7, sapendo che nel primo lancio si è ottenuto un numero pari.
Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

Ω è formato da tutte le coppie ordinate di numeri compresi fra 1 e 6, con ripetizione, cioè $|\Omega| = 6^2 = 36$.

$B = \{(2, i)(4, i), (6, i) \mid i = 1, ..., 6\} = \{(j, i) \mid j = 2, 4, 6, \quad i = 1, ..., 6\}$,
cioè $|B| = 3 \cdot 6 = 18$.

$A = \{(j,i) \mid i+j=7, \quad i,j=1,...,6\}$ e
$(A\cap B) = \{(j,i) \mid i+j=7, \quad j=2,4,6, \quad i=1,...,6\}$.

E considerato che $i = 7-j$ e $j = 2,4,6$ abbiamo $(A\cap B) = \{(2,5),(4,3),(6,1)\}$. In realtà bastava sapere che gli esiti erano 3, visti i valori ammissibili di j e la dipendenza di i da j, senza doverli per forza enunciare. Quindi dalla D10

$$P(A\cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$
$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}.$$

Esistono eventi, all'interno dello spazio campionario, che non si condizionano. Quindi tali che $P(A|B) = P(A)$. Dalla formula inversa della D10: $P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$, qualora si conosca $P(A|B)$. E se due eventi non si condizionano $P(A|B) = P(A)$ e

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

D 11. Eventi Indipendenti: Due eventi si dicono indipendenti se la probabilità della loro intersezione è il prodotto delle probabilità dei due eventi. Questa definizione ha senso solo se i due eventi sono compatibili.

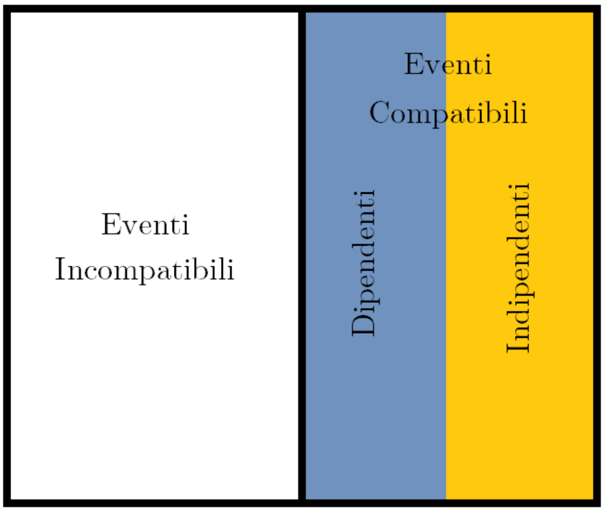


Figura 2.5

Esempio 14. Vengono lanciati due dadi equilibrati a sei facce. Stabilire se gli eventi dati sono indipendenti:

- $A =$"La somma degli esiti è 7";
- $B =$"Il massimo dei due esiti è 6".

Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme dell'esempio 13, quindi vale P5. $|\Omega| = 36$.

$$\begin{aligned} A &= \{(j,i) \ \mid \ i+j=7, \quad i,j=1,...,6\} \\ B &= \{(i,6),(6,i),(6,6) \ \mid \ i=1,...,5\} \\ (A\cap B) &= \{(1,6)(6,1)\} \end{aligned}$$

Non è necessario l'utilizzo di P2, o della Probabilità Condizionata D10, per calcolare la probabilità di $(A \cap B)$, perché siamo riusciti a enunciare tale insieme. Per trovare $|A|$ basta ricordarsi la dipendenza di i da j, cioè $i = 7 - j$, e che $0 < i \leq 6$. Quindi tutti i valori di j sono ammissibili, poiché se $0 < j \leq 6$ e $0 < i = 7 - j \leq 6$, allora $|A| = 6$. Questo modo di ragionare è utile e sbrigativo quando la cardinalità degli eventi è molto alta; ma si può sempre enunciare A trovando tutti i casi in cui l'equazione in i e j appena fornita risulta vera ($A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$).

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ P(B) &= \frac{11}{36} \\ P(A\cap B) &= \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Siccome $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{216} \neq \frac{1}{18} = P(A \cap B)$, allora i due eventi non sono indipendenti, cioè sono dipendenti.

Esempio 15. I compiti di Mattia. Mattia svolge i compiti di matematica e di fisica. Solitamente commette errori con probabilità $0,4$ negli esercizi di matematica, e con probabilità $0,3$ negli esercizi di fisica. Qual è la probabilità che, durante lo svolgimento dei compiti, Mattia commetta errori in entrambe le materie?

I due eventi $A =$"errori in matematica" e $B =$"errori in fisica", per il principio di ragione non sufficiente, in mancanza di altri dati, sono presi indipendenti. Il verificarsi del primo non condiziona il verificarsi del secondo. Allora:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0,4\cdot 0,3 = 0,12.$$

Esempio 16. Una scatola contiene due palline bianche e due palline nere. Si eseguono due estrazioni senza reinserimento, la prima senza guardare. Qual è la probabilità che la prima estratta sia bianca sapendo che la seconda è nera?

In questo caso la probabilità condizionata è abbastanza intuitiva. Siamo in uno spazio di probabilità uniforme e la seconda pallina è nera, quindi la probabilità che la prima sia bianca è di $2/3$. Senza avere l'informazione sulla seconda sarebbe stata

1/2. Abbiamo appena visto un caso in cui per calcolare la probabilità condizionata non occorre passare per la sua definizione, e questo ci è utile quando risulta complicato calcolare la probabilità dell'intersezione di due o più eventi compatibili e dipendenti.

P 7. Formula di Moltiplicazione: dati $E_1,...,E_n$ eventi tali che l'intersezione dei primi $n-1$ eventi non sia vuota, cioè $(E_1 \cap ... \cap E_{n-1}) \neq \emptyset$, allora

$$P(E_1 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|(E_2 \cap E_1) \cdot ... \cdot P(E_n|(E_{n-1} \cap ... \cap E_1).$$

Dimostrazione. Usando la formula inversa della D10: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, applicata ricorsivamente si vede che

1. $P(E_2 \cap E_1) = P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)$
2. $P(E_3 \cap (E_2 \cap E_1)) = P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot P(E_2 \cap E_1)$ ma dalla 1

   $P(E_3 \cap E_2 \cap E_1) = P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)$
4. $P(E_4 \cap (E_3 \cap E_2 \cap E_1)) = P(E_4|E_3 \cap E_2 \cap E_1) \cdot P(E_3 \cap E_2 \cap E_1)$ ma dalla 2

   $P(E_4 \cap E_3 \cap E_2 \cap E_1) = P(E_4|E_3 \cap E_2 \cap E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)$

n. e così via...

Ovviamente, per la proprietà commutativa del prodotto, basta riordinare i vari fattori per ottenere la formula scritta nella forma della tesi. □

Attenzione. Se gli eventi sono tutti indipendenti P7 generalizza D11 e diventa

$$P(E_1 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \cdot ... \cdot P(E_n).$$

Esempio 17. All'interno di una scatola ci sono tre palline bianche, due palline nere e una pallina rossa e si eseguono tre estrazioni senza reinserimento. Qual è la probabilità di ottenere nell'ordine una pallina bianca, una rossa e una nera?
Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$E_1 =$"Alla prima estrazione si ottiene una pallina bianca"

$E_2 =$"Alla seconda estrazione si ottiene una pallina rossa"

$E_3 =$"Alla terza estrazione si ottiene una pallina nera"

Per lo stesso concetto espresso nella seconda parte dell'esercizio 9, $P(E_1) = 3/6 = 1/2$, con P5, ragionando solo sulla prima estrazione, poiché qualsiasi sia il risultato della seconda e della terza estrazione non ci interessa. Andando ad elencare tutti i possibili esiti dell'esperimento aleatorio, cioè tutte le possibili triplette, utilizzando le disposizioni senza ripetizione, e guardando quante di esse fanno parte dell'evento E_1, si troverebbe lo stesso risultato, ma con un notevole spreco di risorse.

Una volta uscita una pallina bianca in prima posizione, dobbiamo tenere conto di questa informazione. $P(E_2|E_1) = 1/5$, poiché qualsiasi sia la prima pallina bianca estratta, restano 5 palline di cui solo una rossa, qualsiasi sia la pallina che esce per terza, non rossa. Con lo stesso ragionamento, una volta uscita una pallina bianca e una rossa, $P(E_3|E_2 \cap E_1) = 2/4 = 1/2$, poiché restano 4 palline di cui due nere. Quindi si ha

$$P(E_3 \cap E_2 \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$$

Esempio 18. Calcolare la probabilità che esca l'asso di coppe alla terza estrazione dal mazzo, senza reinserimento.

A differenza dell'esempio 16, non sappiamo quale carta è stata estratta per prima o per seconda. C'è una sostanziale differenza fra guardare le prime due carte estratte e non guardarle, sappiamo solo con certezza che non sono l'asso di coppe, altrimenti sarebbe già uscito. Il problema equivale a dire: qual è la probabilità che in un mazzo di 40 carte appoggiato sul tavolo, la terza carta sia l'asso di coppe? La probabilità è 1/40. Cambia tutto se si guardano le prime due carte, notando che nessuna di esse è l'asso di coppe; in questo caso la probabilità diventa 1/38, perché conosciamo quali sono uscite, ma senza guardarle, la terza carta del mazzo è una qualunque estratta tra 40, dove non si ha conoscenza di nessuna di esse, nemmeno di quelle già distribuite.

Per convincerci di questo fatto vediamo il calcolo esatto, che è perfettamente inutile, una volta capito il ragionamento precedente.

$E_1 =$"non esce l'asso di coppe alla prima estrazione"

$E_2 =$"non esce l'asso di coppe alla seconda estrazione"

$E_3 =$"esce l'asso di coppe alla terza estrazione"

Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. Inoltre, seguendo il ragionamento fatto nell'esempio 17, è intuitivo calcolare:

$P(E_1) = \frac{39}{40}$;

$P(E_2|E_1) = \frac{38}{39}$;

$P(E_3|E_2 \cap E_1) = \frac{1}{38}$.

Quindi si ha

$$P(E_3 \cap E_2 \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) = \frac{39}{40} \cdot \frac{38}{39} \cdot \frac{1}{38} = \frac{1}{40}.$$

Come conseguenza della P7, si può riscrivere la D11, dati n eventi indipendenti $E_1, ..., E_n$, come

$$P(E_1 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot ... \cdot P(E_n).$$

Esercizio 13. Una macchina produce pezzi meccanici e, su una produzione di 400 pezzi, 20 sono difettosi per peso, 30 per lunghezza e 360 sono perfetti. Calcola la probabilità che, prendendo a caso un pezzo:

- sia difettoso;
- abbia entrambi i difetti;
- sia difettoso per peso, sapendo che anche la lunghezza non è corretta.

$$\left[\frac{1}{10};\,\frac{1}{40};\,\frac{1}{3}\right]$$

Esercizio 14. Calcola la probabilità che, lanciando quattro monete, la faccia testa esca esattamente due volte, sapendo che è uscita almeno una volta.

$$\left[\frac{2}{5}\right]$$

Esercizio 15. Dato un mazzo da briscola, qual è la probabilità, con e senza reinserimento, di estrarre esattamente nell'ordine una figura, un asso e il tre di coppe? Sapresti spiegare perché la probabilità aumenta senza reinserimento?

$$\left[\frac{3}{4000};\,\frac{1}{1235}\right]$$

Esercizio 16. La professoressa implacabile. L'ultima settimana di lezione una professoressa decide di interrogare ogni giorno, dal lunedì al sabato, tre persone diverse, estratte a caso fra tutti i ventuno studenti. Calcolare la probabilità che uno studente fissato:

- sia interrogato lunedì, martedì e mercoledì;
- sia interrogato esattamente lunedì, martedì e mercoledì;
- sia interrogato esattamente tre volte.

Qual è il numero massimo di studenti che la professoressa può interrogare? E la probabilità che ciò avvenga?

$$\left[\frac{1}{343} \approx 0,0029;\ \frac{216}{117649} \approx 0,0018;\ \frac{4320}{117649} \approx 0,0367;\ 18;\ \approx 0,000033\right]$$

2.2.2 Probabilità Totale e Teorema di Bayes

D 12. Partizione di Ω: gli insiemi $E_1, ..., E_n$ sono una partizione di Ω se sono a due a due disgiunti e la loro unione è proprio Ω, cioè se

$$(E_i \cap E_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j \qquad \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega.$$

Attenzione. Tutti gli eventi a due a due disgiunti sono anche disgiunti, ma non è detto che eventi disgiunti lo siano anche a due a due, infatti eventi disgiunti significa che $E_1 \cap ... \cap E_n = \emptyset$ ma non è detto che $E_i \cap E_j = \emptyset$, come si vede nella figura 2.6.

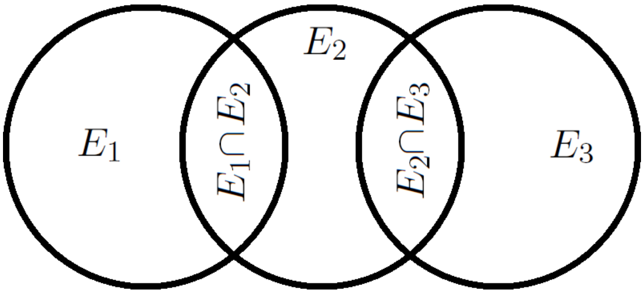


Figura 2.6: $(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \emptyset$, ma $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ e $E_2 \cap E_3 \neq \emptyset$.

P 8. Teorema della Probabilità Totale: dato un evento E e la partizione $E_1, ..., E_n$, allora

$$P(E) = P(E|E_1) \cdot P(E_1) + ... + P(E|E_n) \cdot P(E_n)$$

Dimostrazione. Aiutandoci con la figura 2.7, possiamo riscrivere l'evento E come

$$E = ((E \cap E_1) \cup ... \cup (E \cap E_n)),$$

e siccome sono tutti insiemi a due a due disgiunti, otteniamo

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap E_1) + ... + P(E \cap E_n) && \text{da P2} \\ &= P(E|E_1) \cdot P(E_1) + ... + P(E|E_n) \cdot P(E_n) && \text{da } P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \end{aligned}$$

□

Attenzione. Due eventi complementari D e D^c costituiscono sempre una partizione. In quel caso possiamo riscrivere la formula come

$$P(E) = P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c).$$

Nella figura 2.8 è schematizzato il diagramma ad albero della probabilità totale di E data la partizione D e D^C. Nello spazio campionario condizionato a D, la somma delle probabilità $P(E|D) + P(E^c|D) = q + 1 - q = 1$, perché in quel momento D si è verificato

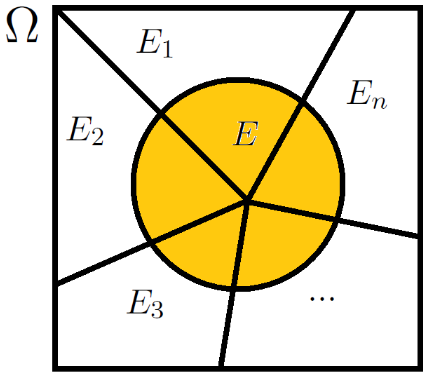


Figura 2.7

e funge da nuovo spazio campionario. Questo accade anche nello spazio campionario condizionato a D^c. I quattro eventi intersezione sono disgiunti a due a due nello spazio campionario Ω, è costituiscono a loro volta una partizione di Ω, perciò la somma delle loro probabilità è 1.

Esempio 19. Daltonismo. La discromatopsia o daltonismo colpisce diversamente la popolazione maschile e femminile, rispettivamente con una probabilità di[11] $1/12$ e $1/200$. Il rapporto fra individui di sesso maschile e di sesso femminile, nel mondo, è di[12] 102 a 100. Qual è la probabilità di essere malato di un essere umano qualunque?

$D =$"l'individuo è maschio", con $P(D) = 102/202 \approx 0,505$

$D^c =$"l'individuo è femmina" $P(D^c) = 1 - P(E_1) \approx 0,495$

$E =$"l'individuo è affetto da daltonismo"

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|M) \cdot P(M) + P(E|M^c) \cdot P(M^c) \\ &= \frac{1}{12} \cdot 0,505 + \frac{1}{200} \cdot 0,495 \approx 0,045 \end{aligned}$$

Circa il $4,5\%$ della popolazione mondiale è daltonica.

D 13. Percentuale (n): è il rapporto fra due grandezze moltiplicato per 100, cioè

$$n = \frac{a}{b} \cdot 100 \qquad \Rightarrow \qquad n\% = \frac{n}{100} = \frac{a}{b}$$

La probabilità è proprio un rapporto fra due grandezze e può essere data in valore percentuale; per ricavare il suo valore, basterà dividere n per 100, infatti il simbolo %, che viene letto come "per 100", in realtà significa " diviso 100".

[11]Dati Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Discromatopsia
[12]Dati Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Human_sex_ratio

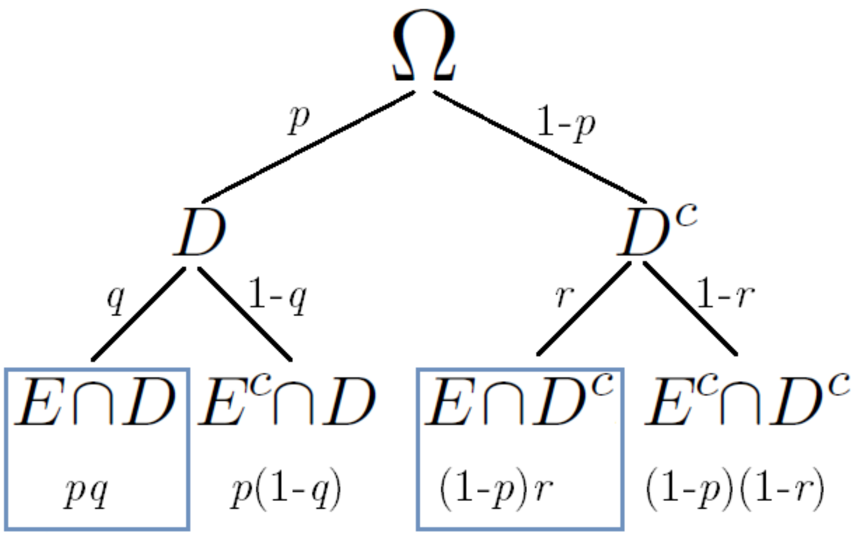


Figura 2.8: la somma delle probabilità nei riquadri è la probabilità totale di E.

P 9. Teorema di Bayes: dati due eventi A e B non vuoti, allora

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di probabilità condizionata D10:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \Rightarrow \qquad P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B),$$
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad \Rightarrow \qquad P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A).$$

E sapendo che l'intersezione è commutativa, cioè $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, si ha

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B),$$
$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

□

Esempio 20. Si supponga di estrarre una carta da un mazzo di 40 carte. Si considerino gli eventi A ="Si ottiene una carta di denari" e B ="Si ottiene una figura". Le due rispettive probabilità condizionate sono uguali?
Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{40} \cdot \frac{40}{12} = \frac{1}{4}$$
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{40} \cdot \frac{40}{10} = \frac{3}{10}$$

Attenzione. In generale $P(A|B) \neq P(B|A)$.

Esempio 21. Daltonismo, parte seconda. Uno studente di medicina sta leggendo un referto relativo a un paziente affetto da daltonismo, di cui non conosce il genere. Qual è la probabilità che sia un maschio?
Riferendoci ai dati della prima parte:

$$P(D|E) = \frac{P(E|D) \cdot P(D)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot 0,505}{0.045} \approx 0,94$$

La probabilità che sia un maschio è circa del 94%; ciò è dovuto alla maggiore incidenza della malattia sui maschi rispetto alle femmine.

In questo esempio il Teorema di Bayes è applicato conoscendo la probabilità dell'evento al denominatore calcolata nella prima parte dello stesso dell'esempio, utilizzando il Teorema della Probabilità Totale. In alternativa si possono unire i due teoremi in un'unica formula. Se E_i appartiene a una partizione di Ω, $E_1, ..., E_n$, allora

$$P(E_i|E) = \frac{P(E|E_i) \cdot P(E_i)}{P(E)} = \frac{P(E|E_i) \cdot P(E_i)}{P(E|E_1) \cdot P(E_1) + ... + P(E|E_n) \cdot P(E_n)}.$$

$P(E)$ è stata esplicitata attraverso il Teorema della Probabilità Totale. In particolare se la partizione ha solo due eventi, cioè eventi complementari D e D^c, si ottiene

$$P(D|E) = \frac{P(E|D) \cdot P(D)}{P(E)} = \frac{P(E|D) \cdot P(D)}{P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c)},$$

come abbiamo visto nella prima e nella seconda parte di questo esempio sul daltonismo.

Esempio 22. Il parcheggio di Riccardo. Ogni sera Riccardo cerca vicino a casa un parcheggio per la sua auto. La probabilità che lo trovi è 0,7, altrimenti parcheggia in una zona vietata; in questo caso rischia la multa, la cui probabilità è valutata in 0,2.

- Qual è la probabilità che per 20 giorni consecutivi Riccardo non prenda nessuna multa?

- Sapendo che oggi Riccardo non ha preso la multa. Qual è la probabilità che l'auto di Riccardo, questa mattina, fosse in zona vietata?

L'evento D ="Riccardo parcheggia in una zona consentita" e D^c ="Riccardo parcheggia in una zona vietata" costituiscono una partizione di Ω. Definito E ="Riccardo non prende la multa", aiutandosi con la figura 2.8, dal Teorema della Probabilità Totale P8 si ottiene

$$P(E) = P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c) = 1 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,94.$$

Se vogliamo parlare di più giorni, lo spazio campionario cambia. Definiamo E_i = "Riccardo non prende la multa il giorno i", ma $P(E) = P(E_1) = ... = P(E_{20})$, poiché ogni giorno è indipendente dall'altro. Dalla D11, applicata a 20 eventi indipendenti, si ottiene

$$P(E_1 \cap ... \cap E_{20}) = P(E_1) \cdot ... \cdot P(E_{20}) = (0.94)^{20} \approx 0,29.$$

Infine per rispondere alla seconda domanda:

$$P(D^c|E) = \frac{P(E|D^c) \cdot P(D^c)}{P(E)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,94} \approx 0.26.$$

Esercizio 17. Una scatola contiene dieci palline: sei bianche e quattro nere. Si eseguono due estrazioni senza reinserimento. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?

$$\left[\frac{3}{5}\right]$$

Esercizio 18. L'allenamento di Gigi. La probabilità di fare allenamento di Gigi è di 0,5. L'80% delle volte che si allena, lo fa al parco, lungo il tracciato cittadino, altrimenti va in palestra. La probabilità che vada a mangiare fuori per cena, se si è allenato in palestra, è doppia rispetto a quella di quando non si è allenato, mentre quella se si è allenato al parco è il 5% in più di quella se si è allenato in palestra. Calcolare queste probabilità, sapendo che Gigi va a mangiare fuori con probabilità 0,35.

$$\left[\frac{5}{11}; \frac{5}{22}; \frac{21}{44}\right]$$

Esercizio 19. Si supponga di avere due scatole: la scatola A contiene una pallina bianca e due nere, la scatola B due palline bianche. Viene lanciata una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla scatola A, se esce croce l'estrazione avviene dalla scatola B. Sapendo di aver estratto una pallina bianca, qual è la probabilità che il lancio della moneta abbia dato come risultato testa?

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

Esercizio 20. Federica e l'esame di l'algebra. Federica deve sostenere l'esame di algebra e, il giorno precedente l'esame, valuta 0,7 la probabilità di superare l'esame con la preparazione acquisita fino a quel momento. Inoltre ritiene che questa probabilità diventerà 0,9 se la professoressa non le farà domande sui prerequisiti del corso. Da numerose testimonianze, valuta 0,6 la probabilità che la professoressa chieda i prerequisiti.

- Calcolare la probabilità che Federica superi l'esame.
- Il giorno dopo Simone apprende che Federica non ha superato l'esame. Qual è la probabilità che la professoressa le abbia chiesto i prerequisiti?

$$[0,78; \ \approx 0,818]$$

Esercizio 21. Falsi Positivi e Falsi Negativi. Un paziente si sottopone al test diagnostico che può risultare o positivo alla malattia o negativo. Tuttavia nel 5% in cui il paziente risulta sano, cioè sapendo che un paziente sano, il test è positivo, in questo caso si ha un falso positivo. Invece nel 10% dei casi in cui paziente è malato, cioè sapendo che un paziente malato, il test è negativo, in questo caso si ha un falso negativo. La probabilità di contrarre la malattia per cui si sta eseguendo il test diagnostico è $1/650$.

- Calcolare la probabilità che il paziente sia sano dato che il test è risultato positivo.
- Calcolare la probabilità che il paziente sia malato dato che il test è risultato negativo.
- Sulla base di questi due risultati si può dire che il test risulta affidabile?

$[\approx 98\%;\ \approx 0,02\%;$ sì$]$

Esercizio 22. Tutti all'aperitivo da Ken. Ogni settimana Simone organizza un aperitivo da Ken assieme ai suoi colleghi universitari. La probabilità che si sieda fra Chiara ed Eleonora è il doppio più un terzo di quella che si sieda fra Marta e Lucia, mentre quella di sedersi fra Cecilia e Clara è il triplo più un terzo di quella di sedersi fra Marta e Lucia. Simone offre un giro a tutti, se si trova fra Marta e Lucia, con probabilità 0,16; mentre la probabilità diventa o il doppio o il quadruplo della precedente se si trova rispettivamente o fra Cecilia e Clara o fra Chiara ed Eleonora.

- Calcolare le probabilità descritte nel testo, sapendo che la probabilità totale che Simone offra un giro per tutti è di 0,408.
- Sapendo che Simone ha offerto un giro a tutti, calcolare la probabilità che si trovi fra Chiara ed Eleonora.

$[0,35;\ 0,15;\ 0,5;\ 0,32;\ 0,64]$

$[\approx 0,55]$

2.3 Verso l'Esame di Stato

Riportiamo ora due esempi, sebbene adattati al tipo di conoscenze acquisite in quest'unità didattica, di due quesiti d'esame[13].

Esercizio 23. Estrazioni di monete ballerine. In un'urna ci sono venti monete, ognuna delle quali è da un euro o da due euro. Stabilire quante sono quelle da due euro (x), sapendo che estraendo due monete senza reinserimento, la probabilità di estrarne almeno una da due euro è 27/38.

Estratta una moneta da due euro, di diametro 25,75 mm, viene lanciata sul pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta non tagli i lati dei quadrati? Perché è possibile risolvere l'esercizio considerando una sola mattonella?

Risoluzione. La difficoltà della prima parte dell'esercizio sta proprio nel considerare gli eventi opportuni.

$E =$"almeno una delle due estratte è da due euro"

$E_1 =$"la prima moneta estratta è da due euro"

$E_2 =$"la seconda moneta estratta è da due euro"

La probabilità di estrarre almeno una moneta da due euro è data dalla probabilità che la prima lo sia (è indifferente, a questo punto, cosa sia la seconda) più la probabilità che la prima moneta sia da un euro e la seconda da due. Questo perché i due eventi E_1 ed $E_1^c \cap E_2$ sono incompatibili, quindi la probabilità della loro intersezione è nulla. Valendo P5 e applicando l'inversa di D10 a $E_1^c \cap E_2$, si ha

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)) = P(E_1) + P(E_1^c \cap E_2), \\ \frac{27}{38} &= \frac{x}{20} + \frac{20-x}{20} \cdot \frac{x}{19}. \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione si ottiene $x_1 = 9$ e $x_2 = 30$, dove solo la prima è accettabile perché le monete da due euro non possono essere più del numero totale di monete. Nell'urna ci sono quindi 9 monete da due euro e 11 da uno.

Passando alla seconda parte dell'esercizio, affinché la moneta non tagli i lati della mattonella, di lato L, è necessario che il suo centro disti dal bordo almeno una distanza maggiore o uguale al suo raggio r. Le misura di un'area è un buon modo di descrivere la probabilità dell'evento considerato e lo spazio campionario a cui appartiene. Analizziamo una mattonella, supponendo valga P5[14], la probabilità che la moneta non tagli i lati è

$$\frac{(L-d)^2}{L^2}.$$

[13] Dalla seconda prova di matematica, sessione ordinaria 2016, scuole italiane all'estero, americhe; e dalla sessione ordinaria 2009, corso sperimentale P.N.I.

[14] Non è stato specificato come viene lanciata la moneta, ergo bisogna supporre che possa raggiungere ogni punto della superficie del pavimento in egual probabilità.

Dove al numeratore abbiamo la superficie del quadrato di lato $L - 2r = L - d$, con d e r rispettivamente diametro e raggio della moneta, e al denominatore la superficie totale della mattonella. Se la moneta cade col suo centro all'interno del quadrato di lato $L - d$, non tocca i bordi esterni della mattonella.

Con i dati in nostro possesso si ottiene una probabilità che la moneta non tagli i bordi delle mattonelle di circa il 55%.

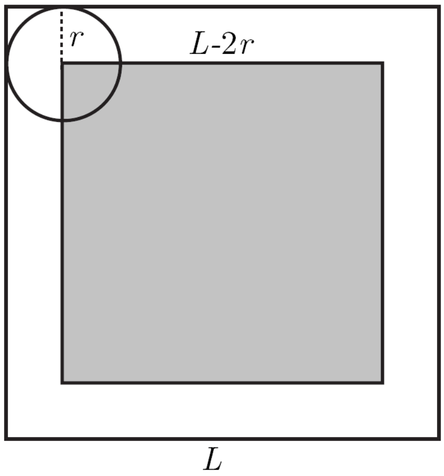


Figura 2.9

2.4 Riflessioni e Conclusioni sulla Probabilità

"Il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato. "
Bertrand Russel

Che cos'è la probabilità?

Quando si parla della probabilità possiamo distinguere tre problemi differenti, ognuno accoppiato alla rispettiva domanda:

- Che cos'è la probabilità?
- Come si attribuisce/assegna/valuta/stima la probabilità?
- Quali regole deve soddisfare la probabilità?

Nella prima parte del paragrafo 2.1 si è capito che il problema generale che stiamo studiando, attraverso il modello assiomatico proposto, riguarda il Calcolo delle Probabilità; stiamo rispondendo alla terza domanda, ed abbiamo definito lo stesso problema in modo che fosse necessario rispondere solo ed esclusivamente a quella. I metodi proposti all'interno dell'intera unità didattica non hanno bisogno di una definizione di probabilità, né di sapere come si sono attribuiti i dati iniziali dei problemi, hanno solo bisogno di regole di calcolo, sulla base di argomentazioni assiomatico-deduttive, e sono quindi di pertinenza della matematica.

Della seconda domanda si occupa una parte della statistica, la statistica inferenziale, detta anche frequentista o bayesiana, nata fra la fine dell'800 e gli inizi del '900. Questa materia si è sviluppata autonomamente dal Calcolo delle Probabilità ed è riuscita, fra gli altri risultati, a elaborare metodi sempre più efficaci per l'attribuzione della probabilità.

Infine, della prima domanda si occupa la filosofia. La difficoltà di una definizione esplicita e oggettiva della probabilità ha portato a delegare questo compito ad una materia più consona, ma per quanto legata anticamente alla matematica, ormai quasi del tutto differente.

È proprio grazie a questa separazione che dobbiamo il rigoglioso sviluppo del Calcolo delle Probabilità, separazione che è avvenuta a partire dagli anni trenta del '900, periodo in cui il matematico sovietico Kolmogorov ne affermò la necessità e per la prima volta la realizzò compiutamente. Ed è sempre dal modello di Kolmogorov che questa unità didattica prende spunto, cercando di offrire una visione moderna e più esplicativa rispetto alle precedenti.

C'è differenza fra attribuire e calcolare una probabilità?

Sulla base delle precedenti considerazioni, si può dire che ci sia una sostanziale differenza fra attribuire e calcolare la probabilità, nel primo caso si tratta di decidere un valore sulla base di determinate informazioni, mentre nel secondo si tratta appunto di calcolare l'unico valore possibile attraverso le regole di calcolo fornite del modello.

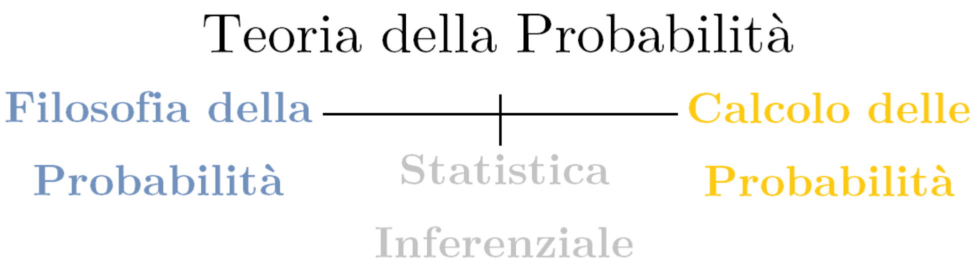


Figura 2.10

Il paradosso di Bertrand

Si sceglie a caso una corda di una circonferenza assegnata; si vuole calcolare la probabilità dell'evento E= "La lunghezza della corda è maggiore del lato del triangolo equilatero inscritto".

Il matematico francese J.L.F. Bertrand propose questo problema nel suo trattato sul calcolo delle probabilità, pubblicato nel 1889. Il problema non è risolubile in modo soddisfacente, perché ci si rende conto che non è ben posto, nel senso che non è specificato come vada intesa la scelta "a caso" di una corda della circonferenza. Infatti attraverso tre diverse interpretazioni, tutte ragionevoli, otteniamo tre risultati differenti. Da questo il paradosso.

1. Il lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r misura, attraverso il teorema della corda, $r\sqrt{3}$. Presa una corda con un estremo sul vertice opposto al lato considerato, essa è maggiore di $r\sqrt{3}$ quando l'altro suo estremo cade all'interno dell'arco individuato dal lato. Tale arco è rappresenta la terza parte della lunghezza della circonferenza. $P(E) = 1/3$.

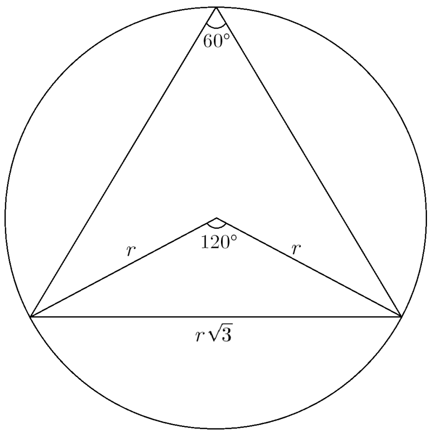


Figura 2.11

2. Il lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r dista dal centro $r/2$, considerato che l'altezza è divisa dal centro, che è anche ortocentro, in due parti, una il doppio dell'altra. Se una corda dista dal centro meno di $r/2$ è maggiore del lato del triangolo. $P(E) = 1/2$.

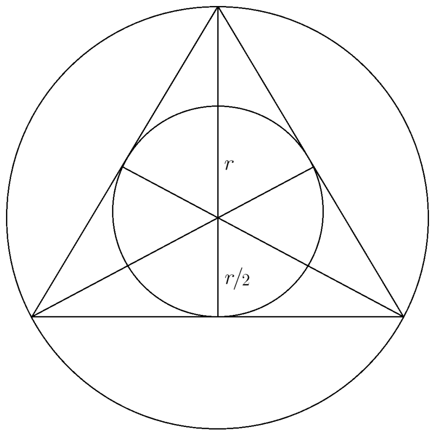


Figura 2.12

3. Il raggio della conferenza inscritta ad un triangolo equilatero è la metà del raggio della circonferenza circoscritta, quindi $r/2$. Ciò si può facilmente ricavare dalle considerazioni del punto precedente. Una corda è univocamente determinata dal suo punto medio, che cade all'interno del cerchio inscritto al triangolo se e solo se la corda è maggiore del lato del triangolo. L'area del cerchio circoscritto è πr^2, mentre l'area di quello inscritto è $\pi r^2/4$. $P(E) = 1/4$.

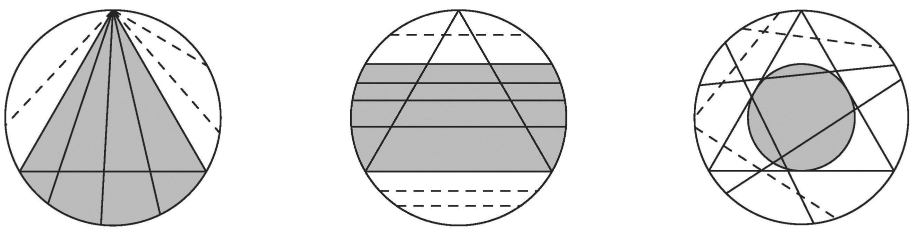


Figura 2.13

Queste tre interpretazioni sono del tutto generali, perché valgono per un qualsiasi triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Le probabilità calcolate sono proporzioni fra le grandezze omogenee utilizzate (lunghezze, distanze, aree) poiché su di esse vale P5; infatti, per il principio di ragione non sufficiente, non c'è nessun motivo di pensare che valga il contrario.

Definizione dell'Evento

È più probabile vincere alla Lotteria Italia comprando un biglietto a Finale Emilia o comprando un biglietto a Roma?

$A =$"vincere"

$A_1 =$"vincere comprando un biglietto a Finale Emilia"

$A_2 =$"vincere comprando un biglietto a Roma"

$B =$"a vincere è un Finalino"

$C =$"a vincere è un Romano"

Bisogna stare attenti a non confondere A_1 con B e A_2 con C, poiché sono eventi estremamente diversi. Supponendo, per il principio di ragione non sufficiente, che i giocatori siano equamente distribuiti sul territorio, così come i biglietti vincenti, il fatto di comprare un biglietto in una determinata posizione geografica è indifferente. Quindi l'evento A è equivalente sia ad A_1 che ad A_2. Invece $P(C)$ è sicuramente maggiore di $P(B)$ visto che il numero di abitanti di Roma è sensibilmente superiore rispetto al numero di abitanti di Finale Emilia.

Equiprobabilità

La seria A è composta da 20 squadre. Qual è la probabilità che nel prossimo campionato (2019/2020) il Napoli vinca lo scudetto?

Secondo il principio di ragione non sufficiente, valendo P5, si potrebbe rispondere 1/20, tuttavia anche i meno esperti di calcio possono convenire che la probabilità di vincere di una squadra si basi su una serie complessa di informazioni di cui non disponiamo: qualità dei giocatori, qualità dell'allenatore, fondi del club... Sulla base di queste, siamo portati ad aumentare la probabilità di vincere di alcune squadre e ad abbassare quella di altre. Ci troviamo davanti a un problema di attribuzione più che a un problema di calcolo.

La conoscenza di particolari informazioni può influire soggettivamente sul valore di probabilità che decidiamo di attribuire ad un determinato evento. Ad esempio se ci troviamo davanti la squadra blu e la squadra rossa, sembra ragionevole attribuire alla probabilità di vincere della squadra rossa il valore 1/2, così come alla probabilità di vincere della blu. Se sappiamo che una delle due squadre è il Barcellona e l'altra è formata da giocatori amatoriali, ma non sappiamo con quale colore giocano, l'attribuzione delle probabilità di vincere delle squadre rimarrà invariata. Se invece sappiamo che il Barcellona gioca con la maglia rossa, allora questa informazione ci fa supporre, con certezza quasi assoluta, che a vincere sarà la squadra rossa.

In generale l'equiprobabilità non è scontata, anche se abbiamo deciso che, "per convenzione", quando non si hanno informazioni sufficienti, si applica.

Rappresentatività

Al gioco del lotto è più probabile che sia estratta la cinquina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *o la cinquina* $\{18, 33, 45, 62, 81\}$*?*

Siamo portati erroneamente a pensare che la seconda cinquina sia più rappresentativa della casualità rispetto alla prima, allo stesso modo in cui siamo portati a cercare di coprire uniformemente un foglio con dei puntini disposti casualmente. In realtà non c'è nessun motivo per dire che la seconda cinquina sia "più casuale" della prima, sicuramente è meglio distribuita, ma la probabilità che sia estratta la prima è la stessa che sia estratta la seconda.

$D =$"escono sei numeri consecutivi"

$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E_2 = \{18, 33, 45, 62, 81\}$

Anche in questo caso gli eventi sono importanti. E_1 ed E_2 sono due eventi elementari dell'esperimento aleatorio "estrazioni del lotto" e all'interno di esso, come tutti gli altri eventi elementari, sono equiprobabili. Invece la probabilità di D è minore della probabilità di D^c, perché le sestine di numeri consecutivi sono un numero sensibilmente inferiore rispetto a quelle di numeri non consecutivi.

Condizionare o Non Condizionare

Si lancia un dado a sei facce. Se esce sei, si vince, oppure si ha diritto a lanciarlo una seconda volta e se esce sei, si vince. Altrimenti si perde. Quale probabilità si ha di vincere?

Risposta: se io ho un sei al primo lancio vinco, oppure se non ho sei al primo lancio ed ho sei al secondo ho ugualmente vinto. Altrimenti ho perso. Ci sono due casi su tre in cui vinco, dunque ho due possibilità su tre di vincere.

La risposta è effettivamente sbagliata ed il motivo risiede nel fatto che l'esperimento "nasconde" in sé la probabilità condizionata.

$E =$"Vincere"

$D =$"Esce sei al primo tiro"

$$P(E) = P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36} \neq \frac{2}{3}$$

Usando il Teorema della Probabilità Totale P8 si vede chiaramente che il secondo lancio è condizionato dal primo, poiché avviene se e solo se non è uscito il sei nel primo. I tre eventi indicati nella risposta errata rappresentano una partizione dello spazio campionario, ma essi non eventi elementari e neppure equiprobabili.

Il Problema di Monty Hall

Una famosa formulazione del problema è contenuta in una lettera del settembre 1990 di Craig F. Whitaker, indirizzata alla rubrica di Marilyn vos Savant nel settimanale Parade.

Si partecipa a un gioco a premi, in cui si può scegliere fra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre. Si scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra. Quindi egli domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?" Conviene cambiare la scelta originale?

Intuitivamente siamo portati a rispondere che, avendo eliminato una porta, le nostre probabilità di vincere o di perdere siano uguali a 1/2 e che quindi sia indifferente cambiare o meno la porta scelta. In realtà la probabilità è stata condizionata da quanto successo.

$A_i =$"l'auto è nella porta i"

$P(A_i) = \frac{1}{3}$

$B =$"il conduttore apre la terza porta"

Dal Teorema della Probabilità Totale P8, considerando che il conduttore non può aprire la porta che ha scelto il concorrente, altrimenti il gioco finirebbe, si ha

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dal Teorema di Bayes P9

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Questo ragionamento resta giusto, qualunque sia la porta scelta dal concorrente e qualunque sia la porta aperta dal conduttore, seguendo le regole del gioco. Un altro modo di risolvere il problema consiste nell'elencare gli eventi elementari, che in questo caso sono sei e tutti equiprobabili.

1 Si sceglie la porta con una capra, non si cambia, si perde.

2 Si sceglie la porta con una capra, si cambia, si vince.

3 Si sceglie la porta con l'altra capra, non si cambia, si perde.

4 Si sceglie la porta con l'altra capra, si cambia, si vince.

5 Si sceglie la porta con l'auto, non si cambia, si vince.

6 Si sceglie la porta con l'auto, si cambia, si perde.

Se il concorrente sceglie una capra, il conduttore è obbligato a eliminare la porta con l'altra capra, lasciando quella vincente. Cambiando porta si vince due volte su tre.

Quella proposta sopra è una formulazione del problema data da Steve Selvin, in una lettera all'American Statistician del febbraio 1975. Così impostato, il problema è in realtà una variazione sul tema del gioco a premi originale; Monty Hall in effetti apriva una porta dietro cui si trovava una capra per aumentare la tensione, ma non consentiva ai giocatori di cambiare la propria scelta originale.

Un problema essenzialmente identico appare in ogni modo nella rubrica Mathematical Games di Martin Gardner nel 1959, col nome di "Problema dei tre prigionieri". Questo problema era stato ideato da Bertrand che lo aveva proposto nel suo libro Calcul des Probabilités nel 1889, ed era noto come il "Paradosso delle tre scatole di Bertrand".

Marilyn vos Savant[15] risolse il problema correttamente; l'episodio fece un certo scalpore, in quanto diversi accademici non riconobbero la correttezza della soluzione proposta dalla vos Savant finché questa non la spiegò nel dettaglio in un successivo articolo.

Mancanza di Memoria

Sapendo che, al gioco del lotto, il numero trentasette non è mai stato estratto negli ultimi sei mesi, è conveniente giocarlo alla prossima estrazione rispetto ad un altro numero?

La stessa pagina web di Lottomatica Italia dedica un'intera pagina ai numeri cosiddetti ritardatari e ne incentiva la credenza. Ma non c'è nulla di più falso. Le estrazioni non si influenzano fra loro, perché ognuna di esse è una prova indipendente rispetto alla precedente, si può dire che siano prove ripetute indipendenti dello stesso esperimento aleatorio. L'indipendenza di queste prove è detta mancanza di memoria. La probabilità di un numero di uscire a una determinata estrazione è sempre $6/90 = 1/15$.

La Legge dei Grandi Numeri

[16] Diamo una definizione semplificata di questa legge. Dato un esperimento aleatorio ripetibile e con prove indipendenti, si analizza un evento E riferito a una singola prova. All'aumentare del numero di prove la proporzione fra gli esiti che soddisfano E, casi favorevoli, e il numero di prove, casi possibili, si avvicina sempre di più a $P(E)$. L'errata interpretazione di questa legge può portare a gravi errori di comprensione.

È corretto affermare che al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste si avvicina al numero di croci?

Dire che il numero di teste si avvicina al numero di croci equivale a dire che la differenza fra il numero di teste e il numero di croci si avvicina a zero. O equivalentemente che il numero di teste si avvicina al numero di croci.

Nella tabella in figura 2.14, sono riportati i risultati di un numero sempre maggiore di lanci di una moneta. Come si vede la differenza fra il numero di teste e il numero

[15] È un'editorialista e saggista statunitense, la cui fama è legata al fatto di essere riconosciuta dal Guinness dei Primati come l'essere umano col quoziente d'intelligenza più alto del mondo.

[16] Anche Teorema di Bernoulli, in quanto la sua prima formulazione è dovuta a Jakob Bernoulli.

Numero di Lanci	Numero di Teste	Numero di Croci	Differenza Teste Croci	Proporzione Teste Croci	Proporzione Teste Lanci
10	3	7	-4	0,43	0,30
100	45	55	-10	0,82	0,45
500	241	259	-18	0,93	0,48
1.000	477	523	-46	0,91	0,48
5.000	2.460	2.540	-80	0,97	0,49
10.000	4.960	5.040	-80	0,98	0,50

Figura 2.14

di croci, all'aumentare del numero di lanci, in generale non si avvicina a zero, ma anzi aumenta. Infatti il teorema non parla di differenza ma di proporzione, cioè all'aumentare del numero di lanci, il rapporto fra il numero di teste e il numero di croci si avvicina a 1; mentre il rapporto fra il numero di teste e il numero di lanci si avvicina a $1/2 = P($"Esce testa"$)$.

Utilizzando la legge dei grandi numeri si può, in statistica inferenziale, attribuire valori di probabilità ad esperimenti aleatori ripetibili e indipendenti. Si può ad esempio controllare se un dado è truccato, oppure verificare la soluzione del problema di Monty Hall.

Interpretazione Linguistica

Presentiamo ora un esempio in cui la corretta interpretazione linguistica è fondamentale.

Il signor Brown ha due figli; uno di essi si chiama Charlie. Qual è la probabilità che entrambi i figli del signor Brown siano maschi?

Le nascite a casa del signor Brown, se non si hanno altre informazioni se non la presenza di due figli, possono verificare i seguenti esiti, da considerarsi equiprobabili:

$$(MM) \quad (MF) \quad (FM) \quad (FF)$$

Il fatto che uno dei figli si chiami Charlie (evento C), esclude l'esito $(F;F)$, e questa prima osservazione ci porta a pensare che la probabilità di avere due figli entrambi maschi sia $P(MM|C) = 1/3$. Ma questa probabilità non è corretta, lo sarebbe se l'informazione fosse "uno dei figli è un maschio". Aggiungendo un dettaglio, cioè che il figlio maschio sia il primogenito si otterrebbe $P(MM|C) = 1/2$.

$M_0 =$"nessuno dei figli è maschio"$= MM$

$M_1 =$"uno dei figli è maschio"$= (FM \cup MF)$ con FM e MF eventi disgiunti.

$M_2 =$"entrambi i figli sono maschi"$= FF$

$(C|M_1) =$"un figlio si chiama Charlie, dato che uno è maschio"

$(C|M_2) =$"almeno uno dei figli si chiama Charlie, dato che sono entrambi maschi"

$(C|M_2)^c =$"nessuno dei figli si chiama Charlie, dato che sono entrambi maschi"

Assumiamo che Charlie sia un nome prettamente maschile e indichiamo $p = P(C|M_1)$.

$$\begin{aligned} P(C|M_2) &= 1 - P((C|M_2)^c) \quad \text{da P3} \\ &= 1 - (1-p)(1-p) \quad \text{dall'indipendenza di eventi} \\ &= -p^2 + 2p \end{aligned}$$

Dal Teorema della Probabilità Totale P8

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|M_0) \cdot P(M_0) + P(C|M_1) \cdot P(M_1) + P(C|M_2) \cdot P(M_2) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} + p \cdot \frac{1}{2} + (-p^2 + 2p) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{p(4-p)}{4}. \end{aligned}$$

Dal Teorema di Bayes P9

$$P(M_2|C) = \frac{P(C|M_2) \cdot P(M_2)}{P(C)} = \frac{\frac{p(2-p)}{4}}{\frac{p(4-p)}{4}} = \frac{2-p}{4-p}.$$

E ricordando che p è compresa fra 0 e 1, $P(M_2|C)$ sta fra 1/3 e 1/2.

2.5 Risoluzione Esercizi

Attenzione. Gli esercizi possono avere più di un metodo risolutivo, soprattutto quelli più semplici. Sono stati scelti i procedimenti in modo che risulti maggiormente analizzata una specifica proprietà.

Esercizio 1. Si consideri una moneta equilibrata. Dopo due lanci, qual è la probabilità di ottenere almeno una testa? Descrivere il problema attraverso l'esperimento aleatorio, lo spazio campionario Ω e l'evento E dato.

$$\left[\frac{3}{4}\right]$$

Risoluzione.

Esperimento aleatorio="due lanci di un moneta equilibrata"="lancio di due monete equilibrata"

$\Omega = \{TT, CT, TC, CC\}$

$E = \{TT, CT, TC\}$

Modo 1) Utilizzando solo ed esclusivamente i risultati teorici dimostrati fino a quel momento.

$$\begin{aligned}
&P(TT) + P(CT) + P(TC) + P(CC) = 1 && \text{da A2} \\
&P(TT) = P(CT) = P(TC) = P(CC) = p && \text{poiché la moneta è equilibrata} \\
&4p = 1 && p = \frac{1}{4} \\
&P(E) = P(TT) + P(CT) + P(TC) = 3p && \text{da A3}
\end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{3}{4}.$$

Modo 2) Utilizzando tutti i risultati teorici in nostro possesso invece possiamo dire che: ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}.$$

□

Esercizio 2. Si dispone di un dado non bilanciato a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando il dado, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lancia il dado, qual è la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 3? Descrivere il problema attraverso l'esperimento aleatorio, lo spazio campionario Ω e l'evento E dato.

$$\left[\frac{1}{5}\right]$$

Risoluzione.

Esperimento aleatorio="lancio di un dado non bilanciato a quattro facce"

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{3, 4\}$

Posto $P(4) = p$, allora $P(3) = 2p$, $P(2) = 4p$ e $P(1) = 8p$.

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 15p = 1 \qquad \text{da A2}$$

$$p = \frac{1}{15}$$

$$P(E) = P(3) + P(4) = p + 2p = 3p = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \qquad \text{da A3}$$

□

Esercizio 3. Una scatola contiene 4 palline bianche, 2 palline rosse e 1 pallina nera. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

$$\left[\frac{4}{7}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. $E =$"esce una pallina bianca".

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4}{7}.$$

Attenzione. Le quattro palline bianche sono effettivamente distinte, seppur dello stesso colore.

□

Esercizio 4. Dato un mazzo di 52 carte, viene estratta una carta. Calcolare la probabilità che esca:

- una carta di picche;
- una figura;
- una carta rossa.

$$\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{13}; \frac{1}{2}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$$A = \text{“esce una carta di picche”}$$
$$B = \text{“esce una figura”}$$
$$C = \text{“esce una carta rossa”}$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$
$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 5. Il baro sbadato. Un baro ha truccato il suo mazzo da poker di 52 carte in modo che la probabilità di estrarre una figura sia doppia rispetto alla probabilità di estrarre qualsiasi altra carta che non sia una figura. Calcolare le probabilità degli eventi dell'esercizio precedente. Il baro fa estrarre una carta a un giocatore, se è una figura vince il baro, altrimenti vince il giocatore. La probabilità di vincere del baro è migliorata rispetto al mazzo non truccato? Il baro voleva truccare il mazzo affinché la sua probabilità di vincere fosse maggiore di quella del giocatore; risulta effettivamente così? Cambiando la regola del gioco, il baro vince se esce una carta di picche. Usare il mazzo non truccato e quello truccato è equivalente?

$$\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \text{sì; no; sì}\right]$$

Risoluzione. $P(\text{“Esce una figura data}$[17]$\text{”}) = 2p$ e $P(\text{ “Esce una carta data, che non sia una figura”}) = p$. La somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari è $64p$.

$$64p = 1 \qquad \text{da A2}$$
$$p = \frac{1}{64}$$
$$P(A) = 10 \cdot p + 3 \cdot 2p = 16p = \frac{1}{4} \qquad \text{da A3}$$
$$P(B) = 12 \cdot 2p = 24p = \frac{3}{8} \qquad \text{da A3}$$
$$P(C) = 20 \cdot p + 6 \cdot 2p = 32p = \frac{1}{2} \qquad \text{da A3}$$

[17] Attenzione: “esce una figura data” non è uguale a “esce una figura”. Nel primo caso la carta è fissata, quindi rappresenta la schematizzazione di 12 eventi elementari distinti; nel secondo la carta non è fissata, quindi qualsiasi figura estratta verifica l'evento, che non è elementare perché rappresentato da più esiti.

Tutto ciò a seconda di quali eventi elementari, rispettivamente con probabilità p e $2p$, sono presenti all'interno degli eventi.

Da quanto indicato nel testo, $P(B) = 3/8$ è la probabilità di vincere del baro, allora la sua probabilità di vincere è migliorata rispetto all'esercizio precedente (3/13), ma non abbastanza da superare la probabilità di perdere. Infatti perdere è l'evento complementare di vincere e, per P3, ha probabilità è $1 - P(B) = 5/8$, che rimane maggiore.

Cambiando le regole del gioco, $P(A) = 1/4$ è la probabilità di vincere del baro, allora la sua probabilità di vincere è rimasta invariata rispetto all'esercizio precedente, quindi barare è stato completamente inutile. Questo accade perché la carte truccate sono lo stesso numero per ogni seme.

□

Esercizio 6. Determinare la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo da briscola di 40 carte, essa sia un 3 oppure una carta di spade.

$$\left[\frac{13}{40}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$A =$"esce un tre"

$B =$"esce una carta di spade"

$(A \cap B) =$"esce il tre di spade"

Applichiamo P2 e P5:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|A|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

□

Esercizio 7. Si estrae una pallina da un'urna che contiene 8 palline bianche, 10 verdi e 12 rosse. Qual è la probabilità che esca una pallina verde o una pallina rossa? E che non esca rossa?

$$\left[\frac{11}{15}; \frac{3}{5}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$A =$"esce una pallina verde"

$B =$"esce una pallina rossa"

$(A \cap B) = \emptyset$

Da P2 e P5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|A|}{|\Omega|} - P(\emptyset) = \frac{10}{30} + \frac{12}{30} - 0 = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}.$$

Da P3

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

□

Esercizio 8. In una scatola ci sono 20 palline di colore o bianco o verde. Se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $0,6$, quante sono le palline bianche? Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Per calcolare questa probabilità era necessario sapere il numero di palline bianche? O il numero di palline verdi?

[12; $0,4$; no]

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$A =$"esce una pallina bianca"

$A^c =$"esce una pallina verde"

Intuitivamente, se vale P5, la probabilità di un evento è la proporzione fra il numero di casi favorevoli su il numero di casi possibili. Se

$$\begin{aligned}
&P(A) = 0,6 = \frac{0,6}{1}, \text{ ma anche}\\
&P(A) = \frac{|A|}{\Omega} = \frac{|A|}{20}, \text{ allora}\\
&|A| : 20 = 0,6 : 1\\
&|A| = 0,6 \cdot 20 = 12.
\end{aligned}$$

Da P3

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4;$$

senza bisogno di sapere quante erano le palline bianche.

□

Esercizio 9. Qual è la probabilità che lanciando un dado a otto facce per tre volte esca almeno un 8? E che nei primi due tiri esca almeno un 8? Il risultato del terzo lancio influisce sulla seconda probabilità richiesta?

$$\left[\frac{169}{512}; \frac{15}{64}; \text{no}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$A =$"Esce almeno un 8"

$B =$"Esce almeno un 8 nei primi due tiri"

Da P3 abbiamo che $P(A) = 1 - P(A^c)$, cioè $A^c =$"non escono 8"; Quindi A^c è formato da tutte le triplette di numeri, anche ripetuti, fra 1 e 7: $|A^c| = 7^3$. Allo stesso modo Ω è formato da tutte le triplette di numeri, anche ripetuti, fra 1 e 8: $|A^c| = 8^3$.

$$P(A) = 1 - \frac{7^3}{8^3} = 1 - \frac{343}{512} = \frac{169}{512}$$

B è un sottoinsieme di A, ma non conviene usare P4 per calcolare $P(B)$, poiché non conosciamo la probabilità della differenza dei due eventi. Procedendo come prima, Da P3 abbiamo che $P(B) = 1 - P(B^c)$, cioè $B =$"non escono 8 nei primi due tiri"; Quindi B^c è formato da tutte le triplette di numeri, anche ripetuti, fra 1 e 7 nelle prime due posizioni e fra 1 e 8 nell'ultima: $|B^c| = 7 \cdot 7 \cdot 8$.

$$P(B) = 1 - \frac{7 \cdot 7 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}$$

Il terzo lancio aggiunge 8 risultati per ogni coppia di lanci iniziale, sia all'evento B che allo spazio campionario Ω, quindi è ininfluente. Infatti considerando uno spazio campionario formato da solo due lanci, si sarebbe ottenuto subito:

$$P(B) = 1 - \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{15}{64}$$

□

Esercizio 10. Una roulette contiene i numeri da 1 a 18 di colore rosso, da 19 a 36 di colore nero e lo zero di colore verde. Viene fatta girare la ruota e lanciata la pallina. Calcolare la probabilità che la pallina si fermi su:

- un numero rosso oppure un numero pari;
- un numero rosso oppure pari oppure multiplo di 3;
- un numero rosso che non sia 3 o 7.

$$\left[\frac{28}{37}; \frac{31}{37}; \frac{16}{37}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$A =$"esce un numero rosso"

$B =$"esce un numero pari"

$C =$"esce un multiplo di tre"

$D = \{3, 7\}$.

Da P2

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|A|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{18}{37} + \frac{19}{37} - \frac{9}{30} = \frac{28}{37}.$$

Da P6

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c),$$

con $(A^c \cap B^c \cap C^c)$="esce un nero, dispari non multiplo di 3"$=\{19, 23, 25, 29, 31, 35\}$; allora

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{6}{37} = \frac{31}{37}.$$

In questo caso si sarebbe potuto applicare P2 su tre eventi, ma si sarebbero dovute calcolare tutte le probabilità implicate. Infine, siccome "esce un numero rosso che non sia 3 o 7"$=(A \setminus D)$ e che $D \subset A$, si può utilizzare P4.

$$P(A \setminus D) = P(A) - P(D) = \frac{18}{37} - \frac{2}{37} = \frac{16}{37}$$

□

Esercizio 11. La probabilità di un evento A è $P(A) = 5/13$ mentre quella di un evento B è $P(B) = 7/11$, posto che appartengano allo stesso spazio campionario Ω, i due eventi sono disgiunti? Qual è la probabilità di $A \cap B$, se $P(A \cup B) = 1$? Senza l'informazione $P(A \cup B) = 1$ era possibile rispondere alla seconda domanda?

$$\left[\text{no; } \frac{3}{143}\text{; no}\right]$$

Risoluzione. Per P1: $P(\Omega) = 1$, ma $(A \cup B) \subseteq \Omega$, allora $P(A \cup B) \leq 1$, da A1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{13} + \frac{7}{11} - P(A \cap B) \leq 1$$
$$P(A \cap B) \geq \frac{3}{143} > 0 = P(\emptyset) \qquad \Rightarrow (A \cap B) \neq \emptyset$$

Per rispondere alla seconda domanda possiamo utilizzare P2 come un'equazione nell'incognita $P(A \cap B)$, tuttavia senza un'informazione su $P(A \cup B)$ è impossibile trovare una soluzione unica.

$$1 = \frac{5}{13} + \frac{7}{11} - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{143}$$

Attenzione. Il problema è equivalente anche con un valore dato di $P(A \cup B)$, ma ragionando su P1, P2 e sull'operazione di unione insiemistica, si può dire che $P(A \cup B)$ deve essere maggiore o uguale della più grande fra $P(A)$ e $P(B)$, e deve essere minore o uguale a 1.

□

Esercizio 12. Tutti vicini al convegno. Simone, Eleonora, Virginia e Federico vanno ad un convegno e devono sedersi in quattro posti affiancati. Se si dispongono casualmente, calcolare la probabilità che:

- Eleonora sia seduta tra Virginia e Federico;
- Eleonora e Simone siano seduti vicini;
- i due ragazzi non siano vicini.

$$\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. Tutti i modi possibili di sedersi allineati di quattro persone sono $|\Omega| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Descriviamo gli eventi enunciati nel testo, rispettivamente A, B e C:

- $A = \{S\underline{VEF}, \underline{VEF}S, S\underline{FEV}, \underline{FEV}S\}$
- $B = \{$

$$\begin{array}{ccc} \underline{SE}VF, & V\underline{SE}F, & VF\underline{SE} \\ \underline{SE}FV, & F\underline{SE}V, & FV\underline{SE} \\ \underline{ES}VF, & V\underline{ES}F, & VF\underline{ES} \\ \underline{ES}FV, & F\underline{ES}V, & FV\underline{ES} \end{array}$$

  $\}$
- C^c è equivalente a B^c perché il numero di uomini è uguale al numero di donne, quindi la probabilità che i due ragazzi non siano vicini è identica alla probabilità che Simone ed Eleonora non lo siano.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6},$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2},$$
$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ da P3.}$$

□

Esercizio 13. Una macchina produce pezzi meccanici e, su una produzione di 400 pezzi, 20 sono difettosi per peso, 30 per lunghezza e 360 sono perfetti. Calcola la probabilità che, prendendo a caso un pezzo:

- sia difettoso;
- abbia entrambi i difetti;
- sia difettoso per peso, sapendo che anche la lunghezza non è corretta.

$$\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{40}; \frac{1}{3}\right]$$

Risoluzione.

$E =$"esce un pezzo difettoso"

$A =$"esce un pezzo difettoso per peso"

$B =$"esce un pezzo difettoso per lunghezza"

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{360}{400} = \frac{40}{400} = \frac{1}{10} \qquad \text{da P3}$$
$$P(E) = P(A \cup B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \text{da P2}$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{20}{400} + \frac{30}{400} - \frac{40}{400} = \frac{10}{400} = \frac{1}{40}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{40} \cdot \frac{40}{3} = \frac{1}{3} \qquad \text{da D10}$$

□

Esercizio 14. Calcola la probabilità che, lanciando quattro monete, la faccia testa esca esattamente due volte, sapendo che è uscita almeno una volta.

$$\left[\frac{2}{5}\right]$$

Risoluzione. Per il principio di ragione non sufficiente, ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$A =$"Escono esattamente due teste"

$B =$"Esce almeno una testa"

Notiamo preliminarmente che $A \subseteq B$. Di conseguenza D10 diventa

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

Tutti le possibili quaterne di risultati sono $|\Omega| = 2^4 = 16$. Da P3

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}, \qquad B^c = \{CCCC\}.$$

Per $P(A)$ notiamo che c'è indipendenza fra gli eventi relativi ai singoli tiri. Un evento elementare che fa parte di A è per esempio $CCTT$. Pensando gli oggetti come diversi abbiamo $C_1C_2T_1T_2$ e tutti i modi di ordinare questi quattro oggetti sono $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Per ognuno di questi ordini ne esistono di identici, se si scambiano le due croci fra di loro o le due teste fra di loro. Quindi esistono 4 ordini equivalenti a quello dato. Allora i veri modi di ordinare quattro oggetti, uguali a due a due, sono $24/4 = 6$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{2}{5}$$

□

Esercizio 15. Dato un mazzo da briscola, qual è la probabilità, con e senza reinserimento, di estrarre esattamente nell'ordine una figura, un asso e il tre di coppe? Sapresti spiegare perché la probabilità aumenta senza reinserimento?

$$\left[\frac{3}{4000}; \frac{1}{1235}\right]$$

Risoluzione. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$E_1 =$"esce una figura alla prima estrazione"

$E_2 =$"esce un asso alla seconda estrazione"

$E_3 =$"esce il tre di coppe alla terza estrazione"

$A =$"escono in ordine: una figura, un asso e il tre di coppe"$= (E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

Con reinserimento i tre eventi sono indipendenti, allora da D11

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{1}{40} = \frac{3}{4000}.$$

Senza reinserimento i tre eventi sono dipendenti fra loro, allora da P7

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{1}{38} = \frac{1}{1235}.$$

Senza reinserimento cambia solo il denominatore della probabilità dell'intersezione di eventi, che rappresenta anche la cardinalità dello spazio campionario. Si passa da 40^3 con reinserimento, a $40 \cdot 39 \cdot 38$ senza reinserimento. Per questo la probabilità senza reinserimento aumenta. Il ragionamento non sarebbe così scontato se, data un'altra intersezione di eventi, fossero condizionati anche i casi favorevoli.

□

Esercizio 16. La professoressa implacabile. L'ultima settimana di lezione una professoressa decide di interrogare ogni giorno, dal lunedì al sabato, tre persone diverse, estratte a caso fra tutti i ventuno studenti. Calcolare la probabilità che uno studente fissato:

- sia interrogato lunedì, martedì e mercoledì;
- sia interrogato esattamente lunedì, martedì e mercoledì;
- sia interrogato esattamente tre volte.

Qual è il numero massimo di studenti che la professoressa può interrogare? E la probabilità che ciò avvenga?

$$\left[\frac{1}{343} \approx 0,0029;\ \frac{216}{117649} \approx 0,0018;\ \frac{4320}{117649} \approx 0,0367;\ 18;\ \approx 0,000033\right]$$

Risoluzione. Limitandoci agli eventi specifici di un singolo giorno, ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5, e tutti gli eventi elementari sono formati da triplette ordinate di studenti diversi. Se $E =$"Uno studente fissato è interrogato il primo giorno"

$$P(E) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

Per convincerci di ciò possiamo ripensare al mazzo di carte dell'esempio 18; gli studenti sono come un mazzo di carte in cui la professoressa guarda le prime tre, quindi uno studente viene estratto se si trova o nella prima posizione, o nella seconda o nella terza, senza poter occupare due posizioni contemporaneamente. Definiti gli eventi $E_i =$"Uno studente fissato è interrogato il giorno i", con $i = 1, ..., 6$, possiamo dire che $P(E_1) = ... = P(E_n) = 1/7$, perché essendoci reinserimento gli eventi relativi a giorni diversi sono indipendenti e, sempre per l'indipendenza,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}.$$

Questa è la probabilità che uno studente fissato sia interrogato lunedì, martedì e mercoledì, che lo sia o meno gli altri tre giorni è indifferente, mentre per la seconda domanda non è così. Infatti la probabilità che uno studente fissato sia interrogato esattamente lunedì, martedì e mercoledì, significa che i restanti giorni non sia interrogato. Per P3 abbiamo $P(E_i^c) = 1 - P(E_i) = 1 - 1/7 = 6/7$.

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4^c \cap E_5^c \cap E_6^c) &= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) \cdot P(E_4^c) \cdot P(E_5^c) \cdot P(E_6^c) \\ &= \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 \\ &= \frac{6^3}{7^6} \\ &= \frac{216}{117649} \end{aligned}$$

L'evento $(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4^c \cap E_5^c \cap E_6^c)$ è incluso in $D =$"Uno studente fissato è interrogato esattamente tre volte". Tutti gli eventi formati esattamente da tre giorni in cui lo studente fissato è interrogato, e tre giorni in cui non è interrogato, sono eventi appartenenti a D, e incompatibili fra loro, in quanto o si verifica un ordine o se ne verifica un altro. Per P2 si sommano tutte le probabilità degli eventi di D, che sono tutte uguali, perché in ogni evento cambia solo l'ordine dei giorni in cui lo studente è interrogato o meno. Se gli eventi sono n, allora $P(D) = nP(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4^c \cap E_5^c \cap E_6^c)$. Tutti i modi di ordinare sei oggetti diversi sono $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Per ognuno di questi ordini ne esistono di identici, se si scambiano fra loro i tre giorni in cui lo studente è interrogato o se si scambiano fra loro i tre in cui non lo è. Quindi esistono $(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 36$ ordini equivalenti a uno fissato. Allora i veri modi di ordinare sei oggetti, uguali a tre a tre, sono $720/36 = 20$.

$$P(D) = 20 \cdot \frac{216}{117649} = \frac{4320}{117649}$$

La professoressa riesce a interrogare il numero massimo di studenti se interroga tre studenti diversi ogni giorno, per sei giorni, quindi 18. Pensando agli eventi formati da avvenimenti successi in più giorni, l'evento $F =$"La professoressa interroga diciotto studenti diversi" è formato da tutte le possibili liste di diciotto studenti diversi, presi da un gruppo di ventuno, cioè $|F| = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Mentre Ω è formato da tutte le possibili liste di diciotto studenti interrogati, che secondo le regole della professoressa, non sono tutti diversi, ma di sicuro lo sono ogni giorno, quindi $|\Omega| = (21 \cdot 20 \cdot 19)^6$. A tutte le possibili triplette del primo giorno sono associate tutte le possibili triplette del secondo, e così via. Valendo P5 si ottiene

$$P(F) = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{(21 \cdot 20 \cdot 19)^6} \approx 0,000033.$$

□

Esercizio 17. Una scatola contiene dieci palline: sei bianche e quattro nere. Si eseguono due estrazioni senza reinserimento. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?

$$\left[\frac{3}{5}\right]$$

Risoluzione.

$D =$"Esce una pallina bianca alla prima estrazione"

$D^c =$"Esce una pallina nera alla prima estrazione"

$E =$"Esce una pallina bianca alla seconda estrazione"

i troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5. Applicando la P8 si ha

$$P(E) = P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}.$$

□

L'allenamento di Gigi. La probabilità di fare allenamento di Gigi è di 0,5. L'80% delle volte che si allena, lo fa al parco, lungo il tracciato cittadino, altrimenti va in palestra. La probabilità che vada a mangiare fuori per cena, se si è allenato in palestra, è doppia rispetto a quella di quando non si è allenato, mentre quella se si è allenato al parco è il 5% in più di quella se si è allenato in palestra. Calcolare queste probabilità, sapendo che Gigi va a mangiare fuori con probabilità 0,35.

$$\left[\frac{5}{11}; \frac{5}{22}; \frac{21}{44}\right]$$

Risoluzione.

$E_1 =$"Gigi non fa allenamento"

$E_2 =$"Gigi fa allenamento in palestra"

$E_3 =$"Gigi fa allenamento al parco"

$E =$"Gigi va a mangiare fuori per cena"

E_1, E_2, E_3 costituiscono una partizione dello spazio campionario. Si può trattare P8 come un'equazione.

$$\begin{aligned}
&P(E_2 \cup E_3) = 0,5\\
&P(E_1) = 1 - P(E_2 \cup E_3) = 1 - 0,5 = 0,5\\
&P(E_2) = 0,2 \cdot P(E_1) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1\\
&P(E_3) = 0,8 \cdot P(E_1) = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4\\
&P(E|E_1) = x\\
&P(E|E_2) = 2x\\
&P(E|E_3) = 2x + 0,05 \cdot 2x = 2,1x\\
&P(E) = 0,35
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(E|E_1)\cdot P(E_1) + P(E|E_2)\cdot P(E_2) + P(E|E_3)\cdot P(E_3)\\
0,35 &= 0,5x + 0,4\cdot 2,1x + 0,1\cdot 2x\\
0,35 &= 1,54x\\
x &= \frac{0,35}{1,54} = \frac{5}{22}\\
2x &= \frac{5}{11}\\
2,1x &= \frac{21}{10}\cdot\frac{5}{22} = \frac{21}{44}
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 19. Si supponga di avere due scatole: la scatola A contiene una pallina bianca e due nere, la scatola B due palline bianche. Viene lanciata una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla scatola A, se esce croce l'estrazione avviene dalla scatola B. Sapendo di aver estratto una pallina bianca, qual è la probabilità che il lancio della moneta abbia dato come risultato testa?

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

Risoluzione.

D =“Si estrae dalla scatola A”=“esce testa”

D^c =“Si estrae dalla scatola B”=“esce croce”

E =“è estratta una pallina bianca”

Per eventi che hanno a che fare con solo una scatola vale P5. Si può applicare 9. Preliminarmente calcolando i valori di probabilità che ne fanno parte.

$$
\begin{aligned}
&P(E|D) = 1/3\\
&P(E|D^c) = 1\\
&P(E) = P(E|D)\cdot P(D) + P(E|D^c)\cdot P(D^c) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Successivamente sostituendo i valori nella formula stessa.

$$P(D|E) = \frac{P(E|D)\cdot P(D)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

□

Esercizio 20. Federica e l'esame di l'algebra. Federica deve sostenere l'esame di algebra e, il giorno precedente l'esame, valuta 0,7 la probabilità di superare l'esame con la preparazione acquisita fino a quel momento. Inoltre ritiene che questa probabilità diventerà 0,9 se la professoressa non le farà domande sui prerequisiti del corso. Da numerose testimonianze, valuta 0,6 la probabilità che la professoressa chieda i prerequisiti.

- Calcolare la probabilità che Federica superi l'esame.

- Il giorno dopo Simone apprende che Federica non ha superato l'esame. Qual è la probabilità che la professoressa le abbia chiesto i prerequisiti?

$[0,78; \ \approx 0,818]$

Risoluzione.

$D =$"La professoressa chiede i prerequisiti"

$D^c =$"La professoressa non chiede i prerequisiti"

$E =$"Federica supera l'esame"

Per P8

$$P(E) = P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c) = 0,7 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,4 = 0,78.$$

Per P3

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0,78 = 0,22.$$

Per P9

$$P(D|E^c) = \frac{P(E^c|D) \cdot P(D)}{P(E^c)} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{0,22} \approx 0,818.$$

□

Esercizio 22. Falsi Positivi e Falsi Negativi. Un paziente si sottopone al test diagnostico che può risultare o positivo alla malattia o negativo. Tuttavia nel 5% in cui il paziente risulta sano, cioè sapendo che un paziente sano, il test è positivo, in questo caso si ha un falso positivo. Invece nel 10% dei casi in cui paziente è malato, cioè sapendo che un paziente malato, il test è negativo, in questo caso si ha un falso negativo. La probabilità di contrarre la malattia per cui si sta eseguendo il test diagnostico è 1/650.

- Calcolare la probabilità che il paziente sia sano dato che il test è risultato positivo.

- Calcolare la probabilità che il paziente sia malato dato che il test è risultato negativo.

- Sulla base di questi due risultati si può dire che il test risulta affidabile?

$[\approx 98\%; \ \approx 0,02\%;$ sì$]$

Risoluzione.

$D =$"Il paziente è sano"

$D^c =$"Il paziente è malato"

$E =$"Il test è positivo"

$E^c =$"Il test è negativo"

Nel condizionamento il nuovo spazio campionario è rispettivamente, prima D poi D^c.

$$
\begin{aligned}
P(D^c) &= \frac{1}{650} && \text{dal testo}\\
P(D) &= \frac{649}{650} && \text{da P3}\\
P(E|D) &= 0,05 && \text{dal testo}\\
P(E^c|D) &= 1 - P(E|D) = 0,05 && \text{da P3 su } D\\
P(E^c|D^c) &= 0,1 && \text{dal testo}\\
P(E|D^c) &= 1 - P(E^c|D^c) = 0,9 && \text{da P3 su } D^c
\end{aligned}
$$

Per P8

$$
P(E) = P(E|D) \cdot P(D) + P(E|D^c) \cdot P(D^c) = 0,05 \cdot \frac{649}{650} + 0,9 \cdot \frac{1}{650} \approx 0,051,
$$
$$
P(E^c) = 1 - P(E^c) = 0,949.
$$

Applicando P9

$$
P(D|E) = \frac{P(E|D) \cdot P(D)}{P(E)} = \frac{0,05 \cdot \frac{649}{650}}{0,051} \approx 0,98 = 98\%
$$
$$
P(D^c|E^c) = \frac{P(E^c|D^c) \cdot P(D^c)}{P(E^c)} = \frac{0,1 \cdot \frac{1}{650}}{0,949} \approx 0,0002 = 0,02\%
$$

La probabilità che il paziente sia sano, pur avendo riscontrato un test positivo, è del 98%, mentre la probabilità che il paziente sia malato, pur avendo riscontrato un test negativo, è dello 0,02%. A una prima occhiata ciò non è rassicurante, poiché sembra che il test non riconosca la malattia. In realtà, ragionando sulla probabilità di essere sani, si vede chiaramente che il test è rassicurante: se è positivo c'è una grossa probabilità di essere comunque sani, e se è negativo è praticamente impossibile essere comunque malati. Tuttavia per evitare spiacevoli angosce ai pazienti, i test diagnostici sono spesso praticati in batteria, cioè dato un campione, si divide in parti e si testa più volte per la stessa malattia, così da avere più risultati confrontabili.

□

Esericio 22. Tutti all'aperitivo da Ken. Ogni settimana Simone organizza un aperitivo da Ken assieme ai suoi colleghi universitari. La probabilità che si sieda fra Chiara ed Eleonora è il doppio più un terzo di quella che si sieda fra Marta e Lucia, mentre quella di sedersi fra Cecilia e Clara è il triplo più un terzo di quella di sedersi fra Marta e Lucia. Simone offre un giro a tutti, se si trova fra Marta e Lucia, con probabilità 0,16; mentre la probabilità diventa o il doppio o il quadruplo della precedente se si trova rispettivamente o fra Cecilia e Clara o fra Chiara ed Eleonora.

- Calcolare le probabilità descritte nel testo, sapendo che la probabilità totale che Simone offra un giro per tutti è di 0,408.

- Sapendo che Simone ha offerto un giro a tutti, calcolare la probabilità che si trovi fra Chiara ed Eleonora.

$[0,35;\ 0,15;\ 0,5;\ 0,32;\ 0,64]$

$[\approx 0,55]$

$ML =$"Simone è seduto fra Marta e Lucia"

$CC =$"Simone è seduto fra Cecilia e Clara"

$CE =$"Simone è seduto fra Chiara e Eleonora"

$O =$"Simone offre un giro a tutti"

ML, CC, CE costituiscono una partizione dello spazio campionario. Si può trattare P8 come un'equazione.

$$\begin{aligned}
&P(ML) = x \\
&P(CC) = \left(3 + \frac{1}{3}\right) x \\
&P(CE) = \left(2 + \frac{1}{3}\right) x \\
&P(O|ML) = 0,16 = \alpha \\
&P(O|CC) = 0,16 \cdot 2 = 0,32 = 2\alpha \\
&P(O|CE) = 0,16 \cdot 3 = 0,64 = 4\alpha \\
&P(O) = 0,408
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(O) &= P(O|ML) \cdot P(ML) + P(O|CC) \cdot P(CC) + P(O|CE) \cdot P(CE) \\
0,408 &= \alpha x \left(3 + \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1\right) \\
0,408 &= 17\alpha x \\
x &= \frac{0,408}{17\alpha} = 0,15 \\
\left(2 + \frac{1}{3}\right) x &= \frac{7}{3} x = 0,35 \\
\left(3 + \frac{1}{3}\right) x &= \frac{10}{3} x = 0,5
\end{aligned}
$$

Da P9

$$P(CE|O) = \frac{P(O|CE) \cdot P(CE)}{P(O)} = \frac{0,64 \cdot 0,35}{0,408} \approx 0,55.$$

$\square$

2.6 Verifica Teorica

Studente ______________________ Classe ________ Data ____________
Ogni esercizio ha lo stesso punteggio. È consentito l'uso della calcolatrice, ma non l'uso di appunti. Il tempo a disposizione è di 50 minuti.

Completa il testo: inserisci un'espressione per ogni spazio, scegliendo dall'elenco in fondo al testo, dove non tutte sono necessarie al completamento e alcune si possono usare più volte.
La branca della matematica "__________ delle probabilità" si occupa di __________ le probabilità di determinati __________ sulla base di __________ preliminarmente in nostro possesso, fra cui __________ di altri __________.
C'è una sostanziale differenza fra __________ e __________ la probabilità, in quanto nel primo caso si tratta di decidere un valore di probabilità solamente attraverso l'esecuzione in serie (quando possibile) dell'__________ e/o solamente attraverso l'analisi dei suoi effettivi __________. Ad esempio per __________ la probabilità che in un dado esca la faccia numero 1, bisogna lanciarlo un numero abbastanza alto di volte e vedere, in __________, quante volte esce la faccia numero 1 rispetto alle altre; o nel caso non si possa effettuare il lancio, almeno conoscere gli __________ di un numero abbastanza alto di tiri precedenti. La materia che si occupa di __________ la probabilità è una parte della __________.

ESPERIMENTO ALEATORIO - ESITO - CALCOLO - ESITI - DIFFERENZA
EVENTI - ATTRIBUZIONE - STATISTICA - PROPORZIONE - ATTRIBUIRE
SUPPOSIZIONI - PROBABILITÀ - CALCOLARE - EVENTI ELEMENTARI
EVENTO - INFORMAZIONI

Vero o falso.	V	F
Esito ed evento elementare sono equivalenti	☐	☐
Evento certo ed evento impossibile sono eventi complementari	☐	☐
Eventi complementari sono sicuramente incompatibili	☐	☐
Un evento risulta verificato se l'esito dell'esperimento aleatorio gli appartiene	☐	☐
La probabilità di E è un valore che misura la sicurezza che E si verifichi	☐	☐
Dato un evento E, può verificarsi che $\Omega \subset E$	☐	☐

Dimostra[18]**:**

- P1: $P(\Omega) = 1$, e attraverso essa, P3: $P(E) = 1 - P(E^c)$;
- P5: se la distribuzione della probabilità è uniforme, la probabilità di ogni evento elementare è data da $P(\omega_i) = 1/|\Omega|$, dove $|\Omega|$ è la cardinalità dello spazio campionario, cioè il numero di esiti che contiene. La probabilità di ogni evento è data da $P(E) = |E|/|\Omega|$, dove $|E|$ è la cardinalità di E.

[18] Dando per scontate le proprietà degli insiemi.

- di una proprietà a tua scelta fra la 1 e la 9, tranne quelle già dimostrate.

Enuncia:

- i tre assiomi del Calcolo delle Probabilità;
- la definizione di probabilità condizionata;
- la definizione di eventi indipendenti.

Esercizi[19]

1 Si lanciano due dadi equilibrati, a sei facce, e si sommano i risultati ottenuti. Qual è la probabilità (in frazione) che la somma sia otto? Descrivere il problema attraverso l'esperimento aleatorio, lo spazio campionario Ω e l'evento E dato. Dato l'esperimento aleatorio "lancio di un dado, una volta", da quante e da quali facce dovrebbe essere composto il dado affinché l'esperimento aleatorio risulti equivalente al precedente?

2 Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da uno a dodici. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero tre si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Calcolare in percentuale (due cifre decimali dopo la virgola): il valore di p e la probabilità che in cinque lanci del dado la faccia tre esca almeno due volte.[20]

[19] Citare definizioni, assiomi e proprietà, quando necessario.
[20] Seconda prova di matematica, sessione ordinaria 2017, liceo scientifico e scienze applicate.

2.7 Verifica Pratica

Studente ______________________________ Classe ________ Data ______________
Ogni punto dell'esercizio ha lo stesso punteggio. È consentito l'uso della calcolatrice e degli appunti. Risolvere l'esercizio citando definizioni, assiomi e proprietà, definendo tutti gli eventi utilizzati durante la risoluzione. Esprimere tutte le probabilità in frazione.

La festa di fin anno. Davide propone al suo professore di matematica di organizzare una festa di fine anno. Il professore accetta e invita tutti gli studenti delle classi in cui insegna: quarta M, quarta T e quarta Y.

1 Ogni invitato ha la stessa probabilità di appartenere a una e una sola delle tre classi. La probabilità di essere maschio dato che si appartiene alla quarta M è la stessa probabilità di essere maschio dato che si appartiene alla quarta T, mentre la probabilità di essere maschio dato che si appartiene alla quarta Y è la metà delle precedenti. Calcolare queste probabilità sapendo che, preso uno studente a caso, la probabilità che sia un maschio è di 8/15.

2 Calcolare la probabilità che, preso uno studente a caso, sia una femmina.

3 Sapendo che il primo ad arrivare alla festa è un maschio, qual è la probabilità che appartenga alla quarta Y.

4 Sapendo che ogni classe è formata da 22 studenti, dimostra che gli studenti maschi in ogni classe sono[21]: 14 in M, 14 in T e 7 in Y. Tenendo conto anche del professore[22], se tutti gli studenti partecipano alla festa, qual è la probabilità che, presa una persona a caso, sia un maschio.

5 Se tutti gli studenti partecipano alla festa, calcola la probabilità che arrivino esattamente nell'ordine: per primo un ragazzo di Y, per seconda una ragazza di Y, per terza una ragazza di T e per quarto un ragazzo di M. Traduci la probabilità calcolata in percentuale (arrotondando alle prime due cifre diverse da zero).

6 Lucrezia lancia un dado equilibrato a 8 facce, se esce un numero maggiore di 5 non verrà alla festa. Decidono di fare così anche Diego ed Emma. Calcola la probabilità che alla festa si presentino solo loro due.

[21] Arrotondando alla parte intera.
[22] In nessun altro punto della verifica, il professore è contato.

Prontuario

D1. Esperimento Aleatorio EA: esperimento di risultato incerto.
D2. Esito $\boldsymbol{\omega}$: è un ipotetico risultato dell'E.A.
D3. Evento $\boldsymbol{E}$: è un'affermazione riguardante uno o più esiti con $E \subseteq \Omega$.
D4. Spazio Campionario: $\boldsymbol{\Omega \neq \emptyset}$ e $\{\omega_i\} \in \Omega \quad \forall i = 1, ..., n$ dove $n = |\Omega|$.
D5. Evento Elementare $\boldsymbol{\{\omega\}}$: è l'insieme costituito da un singolo esito.
Per alleggerire la notazione scriveremo d'ora in poi $P(\{\omega_i\}) := P(\omega_i)$.
D6. Spazio di Probabilità: $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{P})$.
D7. Spazio di Prob. Uniforme: tutti gli eventi element. sono tutti equiprobabili.
A1. $P(\omega)$ è un legge tale che $0 \leq P(\{\omega_i\}) \leq 1 \quad \forall i = 1, ..., n$.
A2. La somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari è 1,
cioè $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$.
A3. Se $E = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$, con $m \leq n$, allora $P(E) = P(\omega_1) + ... + P(\omega_m) \leq 1$, cioè $P(E)$ è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono. $P(\emptyset) = 0$.
I1. $P(A \cup B)$ è la probabilità che si verifichi almeno uno fra A e B.
I2. $P(A \cap B)$ è la probabilità che si verifichino contemporaneamente A e B.
I3. $P(A \setminus B)$ è la probabilità che si verifichi A ma non B.
I4. $P(A^c)$ è la probabilità che si non verifichi A.
I5. $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ è la probabilità che si verifichi o solo A o solo B.
I6. Se $A \subseteq B$, se si verifica A anche anche B lo fa, ma non viceversa.
Inoltre $B = A \cup (B \setminus A)$.
I7. De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(valgono anche per 3 o più eventi).
D8. Evento Contrario: $E^c = \Omega \setminus E$. $E \cap E^c = \emptyset$, $E \cup E^c = \Omega$ e $(E^c)^c = E$.
D9. Eventi Disgiunti o Incompatibili: $A \cap B = \emptyset$.
P1. $P(\Omega) = 1$.
P2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Per 3 eventi $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
P3. $P(E) = 1 - P(E^c)$.
P4. Se $A \subseteq B$ allora $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
P5. Se lo spazio di prob. è uniforme: $P(\omega_i) = 1/|\Omega| \quad \forall i = 1, ..., n$ e $P(E) = |E|/|\Omega|$.
P6. $P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - P((A^c \cap B^c \cap C^c)$.
D10. Probabilità Condizionata: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, con $B \neq \emptyset$.
D11. Eventi Indipendenti: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, con A e B compatibili.
P7. Formula di Moltiplicazione: dati E_1,...,E_n eventi compatibili, allora
$P(E_1 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|(E_2 \cap E_1) \cdot ... \cdot P(E_n|(E_{n-1} \cap ... \cap E_1)$.
Se gli eventi sono indipendenti $P(E_1 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot ... \cdot P(E_n)$.
D12. Partizione di $\boldsymbol{\Omega}$: $E_1, ..., E_n$ tali che $(E_i \cap E_j) = \emptyset \ \forall i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$.
P8. Teorema della Prob. Totale: $P(E) = P(E|E_1) \cdot P(E_1) + ... + P(E|E_n) \cdot P(E_n)$.
D13. Percentuale: $n\% = \frac{n}{100}$.
P9. Teorema di Bayes: $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$, con A e B non vuoti.

Capitolo 3

Analisi e Raccolta Dati

3.1 Risposte al Questionario

Tenendo conto di tutte le considerazioni fatte nel paragrafo 2.4, si presentano le risposte al questionario preliminare 1.5. Rispetto alle diverse classi non si sono riscontrate differenze sostanziali fra i tipi di risposte e la loro frequenza, quindi si analizzerà il campione di studenti nella sua interezza.

1. Che cos'è la probabilità? (secondo te)

Di per sé una domanda aperta mette gli studenti in difficoltà, perché gli viene chiesto di mettere in gioco le proprie conoscenze e le proprie opinioni. Considerando che la domanda, in matematica, non ha una risposta precisa e potrebbe non averla proprio, è naturale che le risposte siano le più disparate possibili e che sia difficile suddividerle in classi. Tuttavia è interessante fare alcune considerazioni. Alcune risposte significative sono riportate di seguito con la dicitura R.

È evidente che quasi la totalità degli studenti ha già affrontato l'argomento in passato, visto che nelle risposte cercano di riprendere le definizioni date dai più comuni libri di testo, o che che comunque inseriscono termini propri della materia o attinenti a essa (evento, percentuale, statistica, frequenza, ecc.).

R. L'attendibilità dell'accadimento di un evento.

R. Un procedimento che permette di stabilire la frequenza con cui si presenta un determinato fenomeno.

R. È la percentuale che una determinata cosa si possa concretizzare sulla base di dati statistici.

Molte risposte sono circolari, citano la stessa parola probabilità o suoi sinonimi. A dimostrazione che il concetto intuitivo di incertezza, di possibilità, è già radicato in noi, come qualcosa di ancestrale, per certi aspetti assiomatico, soprattutto se contrapposto all'assoluta certezza e all'assoluta impossibilità.

Per certi aspetti diventa molto difficile dare la definizione di qualcosa che si è sempre pensato di aver capito. Ad esempio è molto facile definire insiemisticamente i numeri interi e i numeri razionali, partendo dai numeri naturali, ma è abbastanza difficile definire gli stessi numeri naturali, o i numeri reali, senza una conoscenza algebrica di base. Le cose facili, semplici, e le cose difficili sono sempre le più difficili da capire. La facilità di comprensione si trova nel mezzo, nelle cose intermedie.

R. É la possibilità o probabilità che qualcosa succeda.

R. Qualcosa che serve per capire quanto è probabile un fenomeno.

R. Un calcolo che ti permette di vedere le opzioni più o meno probabili.

Un altro aspetto che emerge è la confusione fra statistica e probabilità. La probabilità è vista come un'analisi della scelta, dove alla fine si decide un valore sulla base delle informazioni in nostro possesso e non sulla base di precise regole di calcolo. In effetti, tutto ciò anticipa l'argomento della seconda domanda del questionario. Il linguaggio naturale di certo non aiuta a incasellare questi due diversi processi, in quanto molte parole come attribuire, associare, assegnare, decidere, nella lingua italiana sono spesso viste come sinonimi. Il linguaggio naturale è di per sé relativo, mentre quello matematico cerca in tutti i modi di essere assoluto.

R. Una previsione che viene idealizzata in base a dei dati statistici.

R. Una branca della statistica.

R. La probabilità è un insieme di calcoli matematici svolti per ottenere una percentuale o una statistica su un'azione.

Emerge anche la questione della percentuale, questo strumento che gli studenti usano quotidianamente, ma di cui non hanno ancora capito chiaramente la definizione e l'uso, sembra, a loro parere, molto legato alla probabilità se non addirittura il risultato di essa.

R. Uno strumento che si utilizza per conoscere le percentuali di successo di una determinata azione.

R. È un ramo della matematica che serve per calcolare la percentuale di una cosa o per trovare una parte del totale.

R. La percentuale di una determinata cosa in un insieme.

Infine, è indicativo che alcuni studenti abbiamo preferito non rispondere alla domanda. Se questo sia sintomo di umiltà socratica o assoluta indifferenza non è dato saperlo.

2. C'è differenza fra attribuire e calcolare una probabilità? (secondo te)

Aver posto questa domanda, in questo modo, ha fatto ragionare molti studenti anche sull'idea di probabilità che già avevano maturato. Lo si vede chiaramente perché alcuni di loro hanno risposto in maniera completamente diversa rispetto alla domanda precedente, sintomo che c'è stato un effettivo ragionamento fra la risposta alla prima domanda e la risposta alla seconda.

Porre questo tipo di domande può essere utile per portare lo studente nella propria zona di sviluppo prossimale, e per cercare di accompagnarlo nella deduzione della verità, non attraverso una dimostrazione imposta dall'alto, ma anzi, attraverso un percorso personale fatto anche di errori e vicoli ciechi.

Questa volta possiamo individuare quattro classi di risposte.

R1. Riposte secche: "sì" o "no", in egual misura, "non lo so", "forse", più raramente.

R2. Dipendenza: attribuire stima, calcolare conferma.

R3. Differenza: fra attribuire e calcolare, ragionamenti corretti o meno.

R4. Indifferenza.

In generale risulta in maggioranza chi crede ci sia differenza, e chi non lo crede tende a dare risposte più secche e sbrigative. Sulla seconda classe di risposte si può dire che in effetti una certa dipendenza si possa riscontrare nel fatto che senza dati iniziali, fra cui valori di probabilità, attribuiti per mezzo della statistica inferenziale, il Calcolo delle Probabilità resterebbe un sistema di calcolo completamente astratto, tuttavia funzionante. Così come è interessante notare che si percepisca una differenza fra le due azioni, ma si sbagli il ragionamento per spiegarla. Comunque è sintomo che il pensiero dello studente si sia messo in moto, sia fluido e pronto a cambiare idea.

Di seguito alcune risposte significative divise per classe.

R2. Attribuire è fare una previsione senza un procedimento che la dimostra, calcolare invece significa avere fatto un ragionamento logico.

R2. L'attribuzione è a mio parere una stima approssimata di quella che può essere una probabilità. Il calcolo invece è arrivare alla percentuale esatta con operazioni matematiche.

R3. È che la prima (attribuire) è già calcolata la probabilità quindi è un numero mentre nella seconda (calcolare) è un procedimento.

R3. Penso di sì perché per attribuire una probabilità si dà un numero non a caso ma quasi, mentre per calcolare una probabilità si intende proprio calcolare in modo preciso.

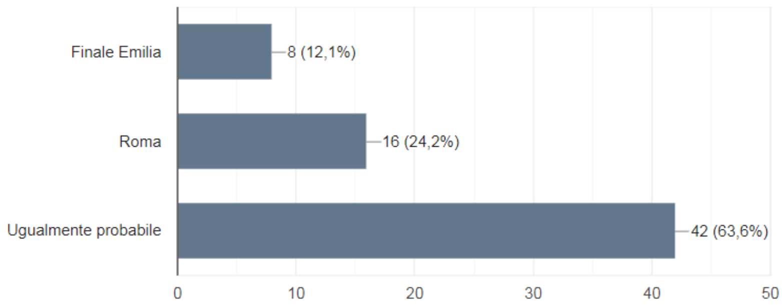
R3. Se attribuisci una probabilità la scegli tu, mentre se la calcoli devi tenere conto delle altre probabilità.

R3. Che l'attribuzione è un'ipotesi mentre il calcolo è un dato certo.

R4. No, in entrambi i casi sono necessari dei dati iniziali da cui partire (non per forza matematici).

R4. No perché la posso attribuire se però prima la calcolo.

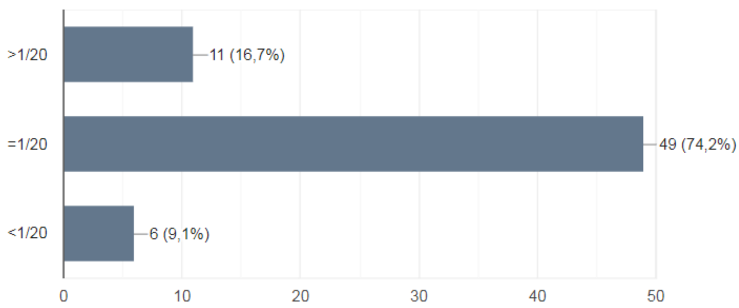
3. È più probabile vincere alla Lotteria Italia comprando un biglietto a Finale Emilia o comprando un biglietto a Roma?



Risultati Domanda 3

Il 36% ha scelto le prime due risposte, entrambe errate. Mentre il 64% ha risposto correttamente. È comunque significativa una percentuale così alta di risposte sbagliate. La definizione dell'evento e l'equivalenza di eventi restano un nodo cruciale nella comprensione del Calcolo delle Probabilità, che si è rilevato problematico anche in fase di verifica.

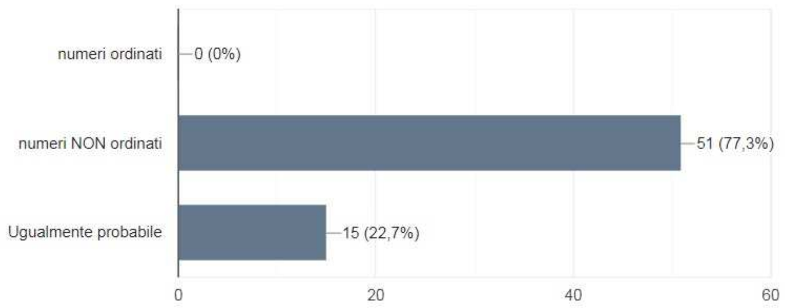
4. La seria A è composta da 20 squadre. Qual è la probabilità che nel prossimo campionato (2019/2020) il Napoli vinca lo scudetto?



Risultati Domanda 4

L'attribuzione indiscriminata dell'equiprobabilità degli eventi è palese, oltre il 74%. Inoltre gli studenti si sono dimostrati abbastanza coinvolti dal particolare esempio del calcio, alcuni hanno volontariamente penalizzato o favorito la squadra presa in esame.

5. Al gioco del lotto è più probabile che escano sei numeri ordinati o sei numeri non ordinati?

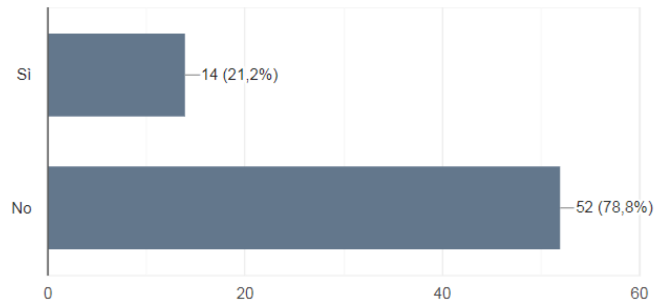


Risultati Domanda 5

Così era stata posta originariamente la quinta domanda. Ma in questo modo risultava ambigua. Ordinati non significa necessariamente consecutivi. Ed è quindi vero che, fissata una determinata cinquina, sia più probabile che essa sia estratta non ordinata rispetto a che essa sia estratta ordinata. Gli studenti hanno risposto molto bene a questa formulazione, ma in questo modo la domanda non andava a testare errori di rappresentatività, o comunque non direttamente. È stata quindi riformulata in: al gioco del lotto è più probabile che sia estratta la cinquina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o la cinquina $\{18, 33, 45, 62, 81\}$? Purtroppo non è stato possibile somministrare agli studenti la nuova formulazione.

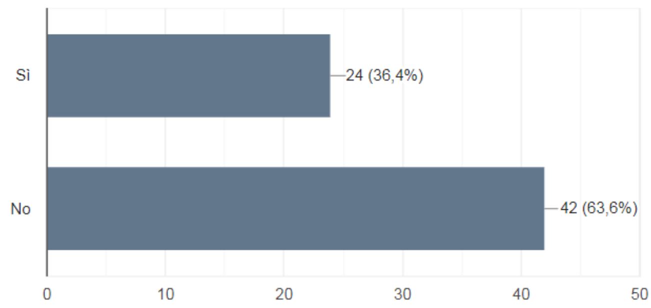
6. Si lancia un dado a sei facce. Se esce sei, si vince, oppure si ha diritto a lanciarlo una seconda volta e se esce sei, si vince. Altrimenti si perde. Quale probabilità si ha di vincere? Risposta: se si ha un sei al primo lancio si vince, oppure se non si ha un sei al primo lancio e si ha sei al secondo si ha ugualmente vinto. Altrimenti si perde. Ci sono due casi su tre in cui si vince, dunque si hanno due possibilità su tre di vincere. Secondo te la risposta è corretta?

Anche questa volta gli studenti hanno capito che c'era qualcosa che non andava ma, durante la discussione in classe, non hanno saputo spiegare cosa. La probabilità condizionata rappresenta forse lo scoglio più difficile da superare. Una formulazione diversa della domanda, ad esempio chiedendo di argomentare o presentando la risposta scorretta senza il ragionamento che ha portato ad essa, avrebbe potuto evidenziare maggiormente la reale impreparazione degli studenti.



Risultati Domanda 6

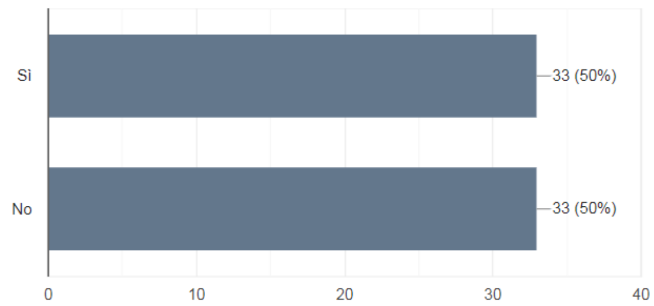
7. Sapendo che, al gioco del lotto, il numero trentasette non è mai stato estratto negli ultimi sei mesi, saresti più portato a giocarlo rispetto ad un altro numero?



Risultati Domanda 7

La percentuale di risposte errate, 36%, restano alte. Le credenze fuorvianti sul gioco d'azzardo sono drammaticamente radicate nella popolazione, soprattutto fra i giocatori. E molti studenti lo sono.

8. È corretto affermare che al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste tende al numero di croci?



Risultati Domanda 8

Il campione è perfettamente spaccato a metà. In effetti la legge dei grandi numeri è spesso fraintesa, non solo dagli studenti, ma anche dagli insegnanti.

3.2 Le Verifiche

Si è scelto di utilizzare una scala lineare per l'attribuzione dei voti, così come si è deciso di attribuire lo stesso punteggio ad ogni esercizio. Questa è sembrata una scelta prima di tutto coerente con la sperimentazione, per dare l'idea che ogni fase dell'apprendimento sia equivalentemente importante, in secondo luogo per trasparenza nei confronti degli studenti a cui era stato comunicato solo che ogni esercizio avrebbe avuto lo stesso punteggio; assegnare voti non linearmente avrebbe potuto portarli a pensare che si volesse nascondere l'effettivo peso degli esercizi.

L'attribuzione dei voti su scala lineare non significa associare 0 punti al voto minimo assegnabile, in questo caso 3, secondo le regole dell'Istituto; significa, invece, che ad ogni punteggio a cui corrisponderebbe un voto al di sotto di 3 si assegna "d'ufficio" il voto 3.

Per evitare incomprensioni dovute alla traduzione di voti più o meno "fantasiosi" in valori numerici[1], si è deciso di assegnare i voti dal 3 al 10 comprensivi solo ed esclusivamente di mezzi voti, ovviamente oltre ai voti interi, arrotondando al mezzo voto più vicino. Ad esempio un punteggio corrispondente al voto 6,81 è stato valutato con 7, mentre un punteggio corrispondente al voto 6,71 con 6 e mezzo.

Risoluzione Verifica Teorica

Completa il testo: inserisci un'espressione per ogni spazio, scegliendo dall'elenco in fondo al testo, dove non tutte sono necessarie al completamento e alcune si possono usare più volte.

La branca della matematica "**CALCOLO** delle probabilità" si occupa di **CALCOLARE** le probabilità di determinati **EVENTI** sulla base di **INFORMAZIONI** preliminarmente in nostro possesso, fra cui **PROBABILITÀ** di altri **EVENTI**. C'è una sostanziale differenza fra **ATTRIBUIRE** e **CALCOLARE** la probabilità, in quanto nel primo caso si tratta di decidere un valore di probabilità solamente attraverso l'esecuzione in serie (quando possibile) dell'**ESPERIMENTO ALEATORIO** e/o solamente attraverso l'analisi dei suoi effettivi **ESITI**. Ad esempio per **ATTRIBUIRE** la probabilità che in un dado esca la faccia numero 1, bisogna lanciarlo un numero abbastanza alto di volte e vedere, in **PROPORZIONE**, quante volte esce la faccia numero 1 rispetto alle altre; o nel caso non si possa effettuare il lancio, almeno conoscere gli **ESITI** di un numero abbastanza alto di tiri precedenti. La materia che si occupa di **ATTRIBUIRE** la probabilità è una parte della **STATISTICA**.

ESPERIMENTO ALEATORIO - ESITO - CALCOLO - ESITI - DIFFERENZA
EVENTI - ATTRIBUZIONE - STATISTICA - PROPORZIONE - ATTRIBUIRE
SUPPOSIZIONI - PROBABILITÀ - CALCOLARE - EVENTI ELEMENTARI
EVENTO - INFORMAZIONI

[1] 6+, 7-, 7/8 ...

Vero o falso.

Esito ed evento elementare sono equivalenti	**F**
Evento certo ed evento impossibile sono eventi complementari	**V**
Eventi complementari sono sicuramente incompatibili	**V**
Un evento risulta verificato se l'esito dell'esperimento aleatorio gli appartiene	**V**
La probabilità di E è un valore che misura la sicurezza che E si verifichi	**V**
Dato un evento E, può verificarsi che $\Omega \subset E$	**F**

Le dimostrazioni, gli assiomi e le definizioni che sono richieste in verifica, nei successivi esercizi, non sono riportate perché contenute nel capitolo 2.

Esercizio 1. Si lanciano due dadi equilibrati, a sei facce, e si sommano i risultati ottenuti. Qual è la probabilità (in frazione) che la somma sia otto? Descrivere il problema attraverso l'esperimento aleatorio, lo spazio campionario Ω e l'evento E dato. Dato l'esperimento aleatorio "lancio di un dado equilibrato, una volta", da quante e da quali facce dovrebbe essere composto il dado affinché l'esperimento aleatorio risulti equivalente al precedente?

Risoluzione. Prima parte.

E.A.="lancio di due dadi equilibrati a sei facce"

$$\Omega = \{(i,j) \mid i,j = 1,...,6\}$$

$$E = \{(i,j) \mid i+j = 8\}$$

Seconda parte. Ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, quindi vale P5.

$$\begin{aligned}
&E = \{(3,5);(5,2);(4,4);(2,6);(6,2);\}\\
&|E| = 5\\
&|\Omega| = 6^2 = 36\\
&P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

Terza parte. Si possono riordinare i possibili esisti secondo lo stessa somma.

$$\begin{gathered}
(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)(2,6)(3,6)(4,6)(5,6)(6,6)\\
(2,1)(3,1)(4,1)(5,1)(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)\\
(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(3,5)(4,5)(5,5)\\
(3,2)(4,2)(5,2)(5,3)(5,4)\\
(3,3)(3,4)(4,4)\\
(4,3)
\end{gathered}$$

Il nuovo esperimento aleatorio risulterebbe equivalente al precedente se si potesse costruire un dado equilibrato a 36 facce, di cui:

- una faccia col valore 2;
- due facce col valore 3;
- tre facce col valore 4;
- quattro facce col valore 5;
- cinque facce col valore 6;
- sei facce col valore 7;
- ...

□

Esercizio 2. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da uno a dodici. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero tre si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Calcolare in percentuale (due cifre decimali dopo la virgola): il valore di p e la probabilità che in cinque lanci del dado la faccia tre esca almeno due volte.

Risoluzione. Prima parte.

$$\begin{aligned}
&|\Omega| = 12 \\
&P(1) + P(2) + ... + P(12) = 1 \qquad \text{da A2} \\
&P(3) = p \\
&P(1) = P(2) = P(4) = ... = P(12) = \frac{p}{2} \\
&p + \frac{11}{2}p = 1 \\
&p = \frac{2}{13} \approx 15,38\%
\end{aligned}$$

Seconda parte.

$E =$"esce 3 almeno due volte"

$E^c = A \cup B =$"esce 3 una volta" $\cup$ "non esce 3"

$A \cap B = \emptyset$

$E_i =$"esce 3 al lancio i"

$P(E_i) = \frac{2}{13}$

$P(E_i^c) = \frac{11}{13}$ da P3

Utilizzando P3 e P2

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)).$$

Utilizzando P7, visto che c'è indipendenza fra i lanci, e applicando P2, poiché $P(A)$ è formato da 5 eventi disgiunti in cui il 3 esce rispettivamente in prima, seconda, terza, quarta, o quinta posizione, si ottiene

$$\begin{aligned}
P(A) &= 5 \cdot P(E) \cdot P(E_i^c)^4 = 5 \cdot \frac{2}{13} \cdot \left(\frac{11}{13}\right)^4 = 10 \cdot \frac{11^4}{13^5}, \\
P(B) &= P(E_i^c)^5 = \left(\frac{11}{13}\right)^5, \\
P(E) &= 1 - \left(10 \cdot \frac{11^4}{13^5} + \left(\frac{11}{13}\right)^5\right) = 1 - (10 + 11) \cdot \frac{11^4}{13^5} \approx 17{,}19\%.
\end{aligned}$$

□

Considerazioni Verifica Teorica

Come da consegna la verifica è durata 50 minuti ed ogni esercizio valeva allo stesso modo, più precisamente sono stati assegnati 6 punti per ogni esercizio:

- 0,6 punti per ogni parola inserita correttamente nel completamento del testo;
- 1 punto per ogni risposta corretta nel vero o falso;
- 2 punti per ogni dimostrazione corretta (P1 e P3 viste come dimostrazione unica);
- 2 punti per ogni enunciazione corretta;
- 2 punti per ognuna delle tre parti del primo esercizio;
- 3 punti per ognuna delle due parti del secondo esercizio.

Per un totale di 36 punti. Il fattore tempo non ha inciso in maniera significativa, nel senso che gli studenti che non sono riusciti a completare tutti gli esercizi hanno ammesso che non ci sarebbero riusciti anche con più tempo a loro disposizione. In questo senso ha influito molto il fattore studio: le classi erano poco abituate alle verifiche di tipo teorico.

Sul completamento del testo occorre spendere qualche parola. L'esercizio è stato concepito per testare la zona di sviluppo prossimale degli studenti. Anche se il paragrafo 2.4 è stato consegnato successivamente alle verifiche, nei precedenti paragrafi, soprattutto nel paragrafo 2.1, erano presenti tutte le informazioni necessarie a ricostruire il ragionamento esposto nell'esercizio, che si è rilevato essere un valido strumento per misurare l'effettivo grado di apprendimento del campione.

Per quanto riguarda l'enunciazione degli assiomi e delle definizioni, l'errore principale riscontrato è stata l'omissione di alcune parti precise, considerate accessorie, ma che in classe erano state specificate come indispensabili, come ad esempio $P(\emptyset) = 0$ per A3 o $B \neq \emptyset$ per la probabilità condizionata. Inoltre nelle definizioni alcuni soggetti hanno utilizzato esclusivamente linguaggio naturale, pensando di fare cosa corretta, quando nel materiale didattico è ampiamente utilizzato il linguaggio matematico. Comunque questo modo di esporre sarebbe stato valutato positivamente, se nel fare ciò non avessero commesso errori e imprecisioni.

Un altro aspetto interessante è stato vedere come alcuni studenti abbiano avuto difficoltà a capire la differenza fra eventi indipendenti ed eventi disgiunti. Spesso le loro definizioni e l'applicazione delle loro proprietà intrinseche sono state scambiate, se non addirittura fuse assieme, sebbene fossero state ampiamente affrontate nel corso delle lezioni.

Nel primo esercizio pratico è emersa un difficoltà nel definire lo spazio campionario, l'esperimento aleatorio e l'evento considerato, c'è stata anche confusione fra lo spazio campionario e la sua cardinalità. A conferma della teoria secondo la quale le cose più semplici siano le più difficili, oltre a quelle oggettivamente difficili; infatti quasi nessuno è riuscito a risolvere la seconda parte, che aveva a che fare sempre con l'esperimento aleatorio, in un esercizio un po' divergente rispetto a quelli dati in classe. Si sarebbe potuto spendere più tempo nel fare esempi ed esercizi sulle definizioni iniziali, ma ciò avrebbe appesantito di molto l'unità didattica.

Un errore frequente nel primo esercizio è stato contare due volte l'esito (4,4). L'errore nasce dal fatto che ordinando gli esiti dei due tiri contemporanei, secondo una qualche regola, si è portati a pensare che esistano due esiti differenti di (4,4) anche se apparentemente indistinguibili, ma così non è. Questo si sarebbe capito risolvendo l'esercizio attraverso le combinazioni, cioè con nozioni di calcolo combinatorio, argomento non ancora affrontato.

Per quanto riguarda il secondo esercizio, si sono rilevati molti problemi di comprensione del testo. Molti studenti hanno definito esplicitamente esperimento aleatorio e spazio campionario, anche se non era richiesto. È stata presa un'incognita diversa da quella indicata, chiamando $2p$ quella che nel testo era definita come p. Tuttavia è stato conteggiato parte del punteggio a chi è riuscito ad arrivare comunque al risultato corretto, sbagliando quindi solo l'interpretazione del testo.

Anche in questo caso la seconda parte non è stata risolta quasi da nessuno. Essa rappresentava un esempio molto semplificato dell'esercizio 16, presentato allo scopo di introdurre successivamente il problema delle prove ripetute, nel capitolo sul calcolo combinatorio. Ed è evidente la difficoltà di risoluzione senza le adeguate nozioni.

È abbastanza naturale, ma è bene ricordarlo, che siano state valutate come corrette anche le versioni equivalenti delle definizioni dell'esperimento aleatorio, dello spazio campionario e dell'evento, richieste nel primo esercizio, nonché le versioni equivalenti della risoluzione degli esercizi.

Valutazione Verifica Teorica

Il voto è stato calcolato mediante la semplice proporzione

$$voto : 10 = punteggio : 36.$$

Seguendo le considerazioni viste prima, ad ogni punteggio inferiore a 10,8 corrisponde il voto 3 e ogni voto è arrotondato al mezzo voto più vicino.

Visto il mancato completamento della seconda parte degli esercizi da parte della quasi totalità degli studenti, si è deciso di aumentare la valutazione di un voto a tutti.

Per i particolari si vedano le tabelle nelle figure 3.2, 3.3, 3.4.

Risoluzione Verifica Pratica

La festa di fin anno. Davide propone al suo professore di matematica di organizzare una festa di fine anno. Il professore accetta e invita tutti gli studenti delle classi in cui insegna: quarta M, quarta T e quarta Y.

$E_1 =$"lo studente è in IV M"

$E_1 =$"lo studente è in IV T"

$E_1 =$"lo studente è in IV Y"

I tre insiemi costituiscono una partizione di Ω, cioè $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \Omega$ e sono disgiunti a due a due.

1 Ogni invitato ha la stessa probabilità di appartenere a una e una sola delle tre classi. La probabilità di essere maschio dato che si appartiene alla quarta M è la stessa probabilità di essere maschio dato che si appartiene alla quarta T, mentre la probabilità di essere maschio dato che si appartiene alla quarta Y è la metà delle precedenti. Calcolare queste probabilità sapendo che, preso uno studente a caso,

la probabilità che sia un maschio è di 8/15.

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = p$
$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 3p = 1$ da P3, ricordando P2 per insiemi disgiunti
$p = \frac{1}{3}$
$M =$ "lo studente è maschio"
$P(M) = \frac{8}{15}$
$P(M|E_1) = 2x$
$P(M|E_2) = 2x$
$P(M|E_3) = x$
$P(M) = P(M|E_1) \cdot P(E_1) + P(M|E_2) \cdot P(E_2) + P(M|E_3) \cdot P(E_3)$ da P8
$\frac{8}{15} = 2x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{3}$
$x = \frac{8}{25}$
$2x = \frac{16}{25}$

2 Calcolare la probabilità che, preso uno studente a caso, sia una femmina.

$$P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \quad \text{da P3}$$

3 Sapendo che il primo ad arrivare alla festa è un maschio, qual è la probabilità che appartenga alla quarta Y.

$$P(E_3|M) = \frac{P(M|E_3) \cdot P(E_3)}{P(M)} = \frac{\frac{8}{25} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{5} \quad \text{da P9}$$

4 Sapendo che ogni classe è formata da 22 studenti, dimostra che gli studenti maschi in ogni classe sono[2]: 14 in M, 14 in T e 7 in Y. Tenendo conto anche del professore[3], se tutti gli studenti partecipano alla festa, qual è la probabilità che, presa una

[2]Arrotondando alla parte intera.
[3]In nessun altro punto della verifica, il professore è contato.

persona a caso, sia un maschio.

Per il principio di ragione non sufficiente, vale P5, allora la probabilità è una proporzione fra insiemi di studenti.

$x : 22 = P(M|E_3)$

$x : 22 = \frac{8}{25}$

$x = 7,04 \approx 7$

$2x = 14$

$P(\text{“Un partecipante alla festa è maschio”}) = \frac{14 + 14 + 7 + 1}{22 + 22 + 22 + 1} = \frac{36}{67}$

5 Se tutti gli studenti partecipano alla festa, calcola la probabilità che arrivino esattamente nell'ordine: per primo un ragazzo di Y, per seconda una ragazza di Y, per terza una ragazza di T e per quarto un ragazzo di M. Traduci la probabilità calcolata in percentuale (arrotondando alle prime due cifre diverse da zero).

$A =$ “un ragazzo di IV Y arriva alla festa per I”

$B =$ “una ragazza di IV Y arriva alla festa per II”

$C =$ “a ragazza di IV T arriva alla festa per III”

$D =$ “un ragazzo di IV M arriva alla festa per IV”

Non sono eventi indipendenti, allora si applica P7.

$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B|A)P(C|B \cap A)P(D|C \cap B \cap A) =$

$= \frac{7}{66} \cdot \frac{15}{65} \cdot \frac{8}{64} \cdot \frac{14}{63} \approx 0,068\%$

6 Lucrezia lancia un dado equilibrato a 8 facce, se esce un numero maggiore di 5 non verrà alla festa. Decidono di fare così anche Diego ed Emma. Calcola la probabilità che alla festa si presentino solo loro due.

Dato che il dado è equilibrato vale P5

$L =$ “Lucrezia NON va alla festa” $\quad P(L) = \frac{3}{8}$

$D =$ “Diego va alla festa” $\quad P(L) = \frac{5}{8}$

$E =$ “Emma va alla festa” $\quad P(L) = \frac{5}{8}$

I tre eventi sono da considerare indipendenti, perché non ci sono informazioni sul fatto che la decisione di uno sia influenzata dalla decisione degli altri, conta solo il risultato del tiro del dado. Quindi vale D11.

$$P(L \cap D \cap E) = P(L) \cdot P(D) \cdot P(E) = \frac{75}{512}$$

Considerazioni Verifica Pratica

La verifica è durata tutto il tempo disponibile dell'ora di lezione, fra i 50 e i 55 minuti, ed ogni parte dell'esercizio valeva allo stesso modo, cioè 5 punti, per un totale di 30 punti. Anche questa volta il fattore tempo non ha inciso in maniera significativa.

La verifica dell'apprendimento non passa e non deve passare esclusivamente dalla verifica, il docente è in grado di verificare l'apprendimento anche attraverso altre vie, ad esempio attraverso gli interventi corretti fatti in classe dagli studenti o quelli privati, anche per mail e messaggistica istantanea. Questo per non discriminare le persone caratterialmente più timide. Da parte sua, uno studente, può trovare una certa forma di verifica non adatta alle proprie attitudini. Vari sono gli esempi di ragazzi con buoni voti scritti e pessimi orali, e viceversa. Per tutti questi motivi si è deciso di attribuire un bonus, fino a 3 punti in più, corrispondenti ad un massimo di un voto in più, agli studenti che hanno dimostrato l'apprendimento attraverso altre vie.

E sorto spontaneo il dubbio che questa valutazione possa sembrare soggettiva ed influenzare la validità della sperimentazione, ma è necessario tenere conto delle diverse forme di apprendimento, se si vuole al contrario cercare di ottenere una sperimentazione il più possibile completa ed esaustiva. Inoltre, per sua natura, la valutazione possiede una componente soggettiva, ed forse è giusto che sia così, dal momento che l'insegnante è l'unico qualificato a giudicare un programma da lui stesso pensato e concepito. Il dibattito sulla valutazione è tutt'oggi molto effervescente e resta un argomento molto divisivo.

In allegato alla verifica pratica 2.7 è stato inserito un prontuario delle formule. L'obbiettivo della verifica infatti consisteva nel saper usare gli assiomi, le definizioni e le proprietà apprese, e non nell'impararle a memoria.

Gli studenti si sono trovati più a loro agio nell'avere un esercizio diviso in vari passi, spesso indipendenti fra di loro. Questo è stato d'aiuto anche nella valutazione, potendo verificare l'apprendimento di ogni studente in modo molto specifico. Infatti, per risolvere l'esercizio occorrono molte delle formule che si sono affrontate in classe, le quali toccano più o meno tutti gli argomenti.

La maggiore difficoltà riscontrata dagli studenti è stato il corretto utilizzo di P7 nei punti 5 e 6. In effetti, a posteriori, si è notata nel materiale didattico una carenza di esercizi di quel tipo, oltre al fatto che l'indipendenza rimane un nodo spinoso, come già considerato durante la verifica teorica.

La parte più divergente dell'esercizio è rappresentata dalla prima parte del punto 4. Si sono riscontrate difficoltà nel riuscire a tradurre la probabilità in una proporzione e nell'approssimare il risultato esatto nel risultato realistico, cioè rappresentato da un numero naturale. Si è cercato di far capire che a volte il modello si scontra con la realtà, e rappresenta solo un'approssimazione di essa.

Oltre a questo, restano valide alcune considerazioni fatte per la verifica teorica, quelle più generali.

Valutazione Verifica Teorica

Il voto è stato calcolato mediante la semplice proporzione

$$voto : 10 = (punteggio + bonus) : 30.$$

Seguendo le considerazioni fatte in precedenza, ad ogni punteggio inferiore a 10 corrisponde il voto 3 e ogni voto è arrotondato al mezzo voto più vicino.

Per i particolari si vedano le tabelle nelle figure 3.5, 3.6, 3.7.

3.3 Valutazione della Sperimentazione

Prima di confrontare i risultati congiunti delle classi test con i risultati della classe campione, occorre spiegare nel dettaglio l'approccio avuto con quest'ultima.

Come testo di riferimento è stato utilizzato il libro di testo scolastico [3], all'unità didattica che tratta di probabilità (Capitolo $\alpha 2$), omettendo le parti che non sono state trattate nelle classi test, ossia i paragrafi: probabilità e calcolo combinatorio, concezione frequentista e concezione soggettiva della probabilità. Come è ovvio è stato completamente omesso il paragrafo sull'impostazione assiomatica, che comunque ricopre un ruolo finale e marginale all'interno del capitolo. L'intera unità si basa sulla concezione classica della probabilità:

> La probabilità di un evento E è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili u, quando sono tutti ugualmente probabili.

I limiti di questa concezione sono palesi nel momento in cui i casi possibili sono tutti equiprobabili, come in molti degli esempi riportati nel materiale didattico, i cui esercizi sono stati gli stessi presentati alla classe campione.

> "Si è dunque ridotti a completare la definizione dicendo: e il numero di tutti i casi possibili purché questi casi siano egualmente probabili. Ed eccoci ridotti a definire il probabile con il probabile." (J.H. Poincaré)

È stato molto difficile spiegare come abbandonare la definizione iniziale in favore di una risoluzione più pratica. Gli studenti si sono resi conto che c'era qualcosa di confuso. Tuttavia citando Israel:[4]

> D'altra parte delle varie definizioni di probabilità l'unica che ha senso introdurre a livello scolastico è quella classica, evitando di ridurre a brevi sentenze problemi difficili come quelli del caso e del determinismo. Se si vuole aprire la strada all'introduzione di altre vedute (in particolare frequentista o soggettivista) occorrerà farlo sulla base delle domande e dei problemi che la definizione classica susciterà negli alunni, quando egli si porrà (o sarà suscitato a porsi) di fronte ad esempi meno semplici della moneta e del dado, nei quali dichiarare che gli eventi sono equipossibili non trova una giustificazione di tipo meccanico o logico abbastanza evidente e può apparire addirittura del tutto arbitraria.

Anche a questa classe sono state consegnate le risoluzioni degli esercizi, con le stesse modalità temporali delle altre due, ma con una risoluzione consona al loro percorso didattico. Non potendo citare gli assiomi, molte dimostrazioni delle proprietà erano diverse. Una delle differenze più importanti fra i due materiali didattici utilizzati è che P5, la probabilità degli spazi uniformi, per la classe campione era, di fatto, la definizione di probabilità. Ciò ha generato cambiamenti anche nella verifica teorica, dove la

[4] G. Israel - A.M. Gasca, Pensare in Matematica, Zanichelli, 2012.

dimostrazione di P5 è stata sostituita con quella di P2, la probabilità dell'unione di eventi.

Sulla base di queste informazioni, si può procedere al confronto fra le valutazioni delle classi test, nel loro insieme, e le valutazioni della classe campione. Nella tabella seguente sono riportate tutte le informazioni utili al confronto, in campo puramente valutativo, ricordando che ogni voto è arrotondato al mezzo voto più vicino. Per quanto riguarda la percentuale di voti sufficienti, essa è stata calcolata riunendo tutti i voti, sia teorici che pratici.

	Classi Test	Classe Campione
Media Voti Verifiche Teoriche	6,5	6,0
Media Voti Verifiche Pratiche	7,0	5,0
Media Generale dei Voti	6,5	5,5
Voti sufficienti sulle classi	70%	50%
Voti sufficienti sul totale	60%	

Figura 3.1: Confronto Valutazioni Classi Test - Classe Campione

Alla luce di questi dati inequivocabili, si può dire che la sperimentazione abbia avuto successo. Sebbene nella verifica pratica si siano verificate estremizzazioni molto importanti (si vedano le figure 3.5 e 3.6), anche analizzando solo le verifiche teoriche si nota un certo miglioramento, delle classi test rispetto alla classe campione. La maggioranza degli studenti è risultata sufficiente in almeno una delle due verifiche e, a parte nella verifica pratica della classe campione, non si sono riscontrate valutazioni sotto il 4. Quindi anche dal punto di vista del rendimento scolastico l'esperienza è stata soddisfacente.

3.4 Conclusioni

L'esperienza di docenza all'interno di una classe è parte integrante dell'attività di tesi, contribuisce alla crescita professionale, culturale e personale del laureando, e attraverso di essa si ha modo di affrontare direttamente la ricerca in didattica della matematica e i problemi relativi all'insegnamento, in tutte le loro forme.

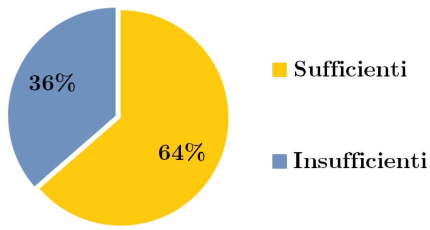
Gli studenti e i loro professori si sono dimostrati interessati al progetto e hanno affrontato l'esperienza con consapevolezza critica e spirito di iniziativa. Sebbene non siano mancate criticità nell'introduzione di una nuova esperienza di docenza ad anno scolastico quasi concluso, si può dire che per gli studenti l'esperienza sia stata positiva e di crescita.

Si coglie l'occasione per ringraziare il Liceo Scientifico Morando Morandi, per aver reso possibile la realizzazione di questa sperimentazione. In particolare si ringraziano: la preside e la vice preside dell'anno scolastico 2018/2019, Anna Maria Silvestris e Linda Battaglioli, le professoresse di matematica delle classi test e campione, Iris Corradi, Marcella Facchini e Maria Elena Rinaldi, tutto il personale che ha offerto supporto e accoglienza, e infine, il ringraziamento più importante di tutti va agli studenti delle classi IV M, IV T e IV Y, senza i quali non sarebbe stato possibile tutto questo.

La prima esperienza di cattedra è un evento che rimarrà scolpito indelebile nei ricordi di un docente che lo accompagneranno per tutta la vita.

3.5 Tabelle delle Valutazioni

Punti	Voto		
17,8	4,94	5,0	6,0
11,1	3,08	3,0	4,0
18,0	5,00	5,0	6,0
12,5	3,47	3,5	4,5
15,8	4,39	4,5	5,5
13,2	3,67	3,5	4,5
18,8	5,22	5,0	6,0
18,3	5,08	5,0	6,0
19,5	5,42	5,5	6,5
24,6	6,83	7,0	8,0
26,9	7,47	7,5	8,5
23,2	6,44	6,5	7,5
15,3	4,25	4,5	5,5
17,4	4,83	5,0	6,0
13,9	3,86	4,0	5,0
23,6	6,56	6,5	7,5
14,0	3,89	4,0	5,0
23,0	6,39	6,5	7,5
13,3	3,69	3,5	4,5
24,4	6,78	7,0	8,0
24,7	6,86	7,0	8,0
18,0	5,00	5,0	6,0



Media
6,2
quindi 6

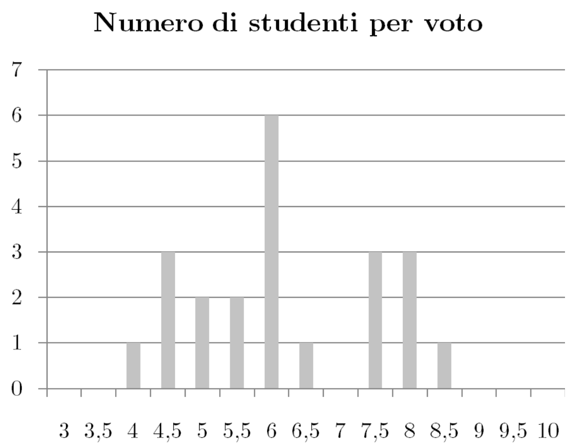
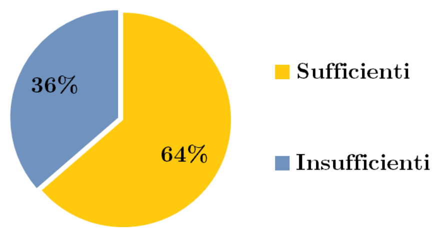


Figura 3.2: Valutazioni Verifica Teorica IV M - Classe Campione

Punti	Voto		
23,9	6,64	6,5	7,5
30,7	8,53	8,5	9,5
15,5	4,31	4,5	5,5
26,8	7,44	7,5	8,5
21,4	5,94	6	7
19,9	5,53	5,5	6,5
16,8	4,67	4,5	5,5
29,3	8,14	8	9
8,4	2,33	3	4
18,1	5,03	5	6
12,6	3,50	3,5	4,5
14,5	4,03	4	5
26,8	7,44	7,5	8,5
21,9	6,08	6	7
24,7	6,86	7	8
18,7	5,19	5	6
28,8	8,00	8	9
22,7	6,31	6,5	7,5
12,8	3,56	3,5	4,5
12,4	3,44	3,5	4,5
16,4	4,56	4,5	5,5
30,7	8,53	8,5	9,5



Media
6,8
quindi 7

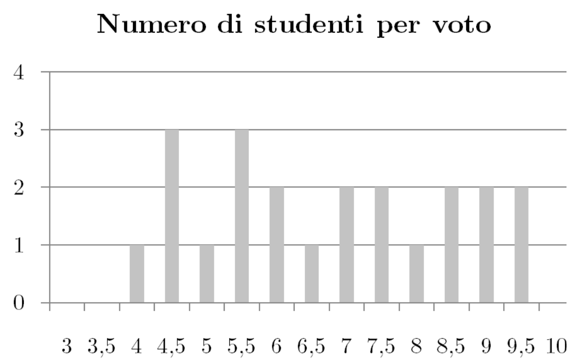
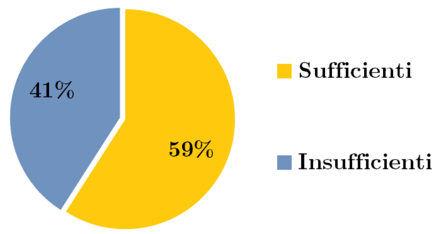


Figura 3.3: Valutazioni Verifica Teorica IV T - Classe Test
Mentre le altre classi interpolano una distribuzione dei voti che ricorda vagamente una normale, qui si osserva una distribuzione abbastanza uniforme.

Punti	Voto		
15,1	4,19	4	5
15,0	4,17	4	5
23,3	6,47	6,5	7,5
19,3	5,36	5,5	6,5
14,6	4,06	4	5
28,6	7,94	8	9
23,1	6,42	6,5	7,5
13,2	3,67	3,5	4,5
25,7	7,14	7	8
20,5	5,69	5,5	6,5
15,7	4,36	4,5	5,5
18,7	5,19	5	6
25,3	7,03	7	8
19,4	5,39	5,5	6,5
24,8	6,89	7	8
14,9	4,14	4	5
15,0	4,17	4	5
21,1	5,86	6	7
15,7	4,36	4,5	5,5
21,3	5,92	6	7
36,0	21,20	6	7
12,2	3,39	3,5	4,5



Media
6,3
quindi 6,5

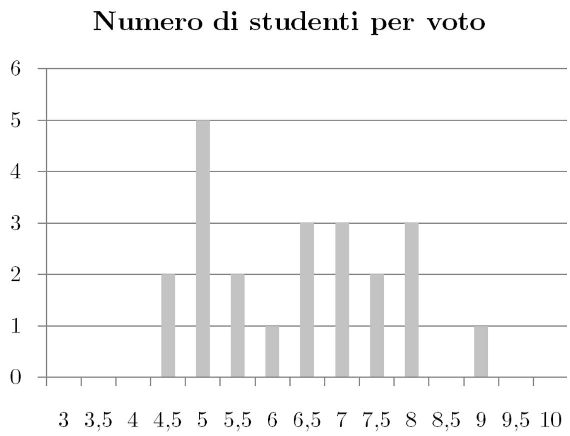
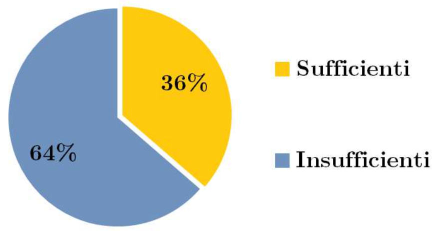


Figura 3.4: Valutazioni Verifica Teorica IV Y - Classe Test
Sebbene la media dei voti sia sufficiente, la distribuzione di essi presenta un picco nel voto 5. La differenza caratteriale fra le due classi test è notevole, e questo si riflette anche nelle valutazioni. Questa classe possiede una consapevolezza delle proprie capacità e un senso critico maggiore rispetto all'altra, ma questo ha influito negativamente sulla valutazione. Le discussioni fra gli studenti hanno generato continue interruzioni durante la spiegazione, mettendo a dura prova la loro capacità di attenzione, nonché quella dell'insegnante, provocando questo tipo di risultati.

Punti	Bonus	Voto	
26,5	1,0	9,17	9
12,5	2,5	5,00	5
17,0	1,0	6,00	6
7,0	0,0	2,33	3
4,5	0,0	1,50	3
7,5	0,0	2,50	3
6,0	0,0	2,00	3
10,5	1,5	4,00	4
14,5	0,5	5,00	5
19,5	0,5	6,67	6,5
8,5	1,5	3,33	3,5
14,5	3,0	5,83	6
14,5	2,5	5,67	5,5
8,5	0,0	2,83	3
2,5	0,0	0,83	3
18,0	2,0	6,67	6,5
12,0	2,0	4,67	4,5
13,0	0,0	4,33	4,5
7,5	0,0	2,50	3
16,5	1,5	6,00	6
25,5	1,0	8,83	9
19,5	1,0	6,83	7



Media
5,0

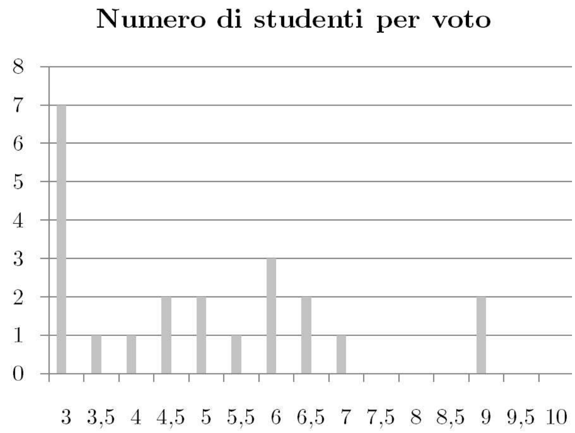
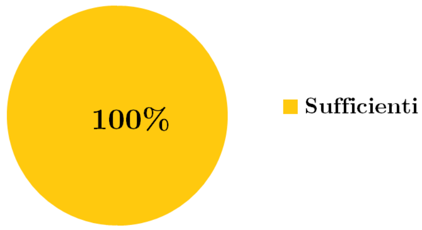


Figura 3.5: Valutazioni Verifica Pratica IV M - Classe Campione
Questa è l'unica verifica in cui sono insufficienti sia la media che la maggioranza dei voti. Da un lato è evidente il problema della concezione classica della probabilità, dall'altro gli studenti hanno ammesso di aver avuto difficoltà a integrarsi con un insegnante esterno, difficoltà che nelle classi test ha inciso in maniera poco significativa.

Punti	Bonus	Voto	
26,0	0,0	8,67	8,5
25,0	0,5	8,50	8,5
20,0	0,0	6,67	6,5
23,5	0,0	7,83	8
22,0	1,5	7,83	8
21,5	0,0	7,17	7
20,5	1,5	7,33	7,5
28,0	0,0	9,33	9
16,5	1,5	6,00	6
24,5	0,0	8,17	8
Studente Assente			
23,0	0,0	7,67	7,5
22,5	0,5	7,67	7,5
21,0	2,0	7,67	7,5
27,5	3,0	10,17	10
22,5	0,0	7,50	7,5
22,0	0,0	7,33	7
24,5	0,0	8,17	8
19,5	0,5	6,67	6,5
20,5	2,0	7,50	7,5
24,5	0,0	8,17	8
29,0	2,0	10,33	10



Media
7,8
quindi 8

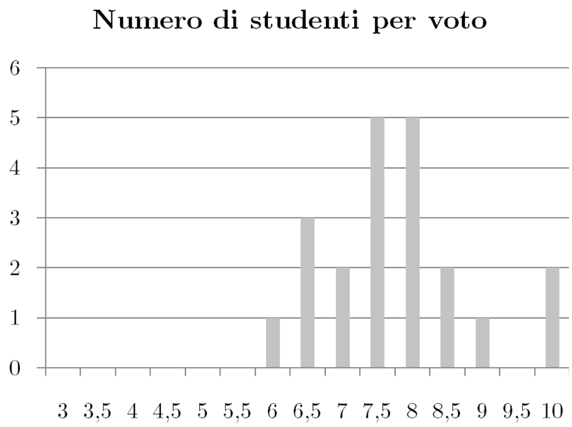
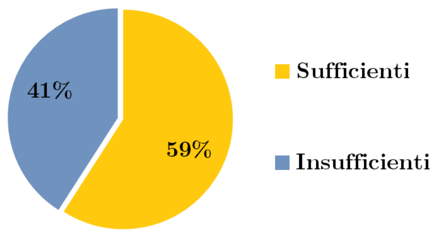


Figura 3.6: Valutazioni Verifica Pratica IV T - Classe Test

Specularmente alla precedente, questa è l'unica verifica in cui tutti gli studenti sono risultati sufficienti. Un risultato di questo tipo potrebbe falsare di molto il risultato della sperimentazione. Infatti una classe può essere più preparata di altre, ecco perché si è deciso di utilizzare più di una classe test. Questo ragionamento potrebbe essere fatto anche per la classe campione, ma nell'istituto non vi erano altre classi con un percorso scolastico così simile da poter permettere un confronto.

Punti	Bonus	Voto	
10,5	1,5	4,00	4
10,0	0,0	3,33	3,5
18,0	0,0	6,00	6
5,0	3,0	2,67	3
15,5	2,5	6,00	6
29,0	2,0	10,33	10
18,0	0,0	6,00	6
17,5	0,0	5,83	5,5
18,0	2,5	6,83	6,5
11,5	0,5	4,00	4
16,0	2,0	6,00	6
26,5	1,0	9,17	9
24,5	2,0	8,83	9
14,0	0,0	4,67	4,5
21,5	3,0	8,17	8
14,5	0,0	4,83	5
10,0	0,0	3,33	3,5
7,5	1,5	3,00	3
20,0	3,0	7,67	7,5
19,5	1,5	7,00	7
17,5	2,0	6,50	6,5
27,0	0,0	9,00	9



Media
6,0

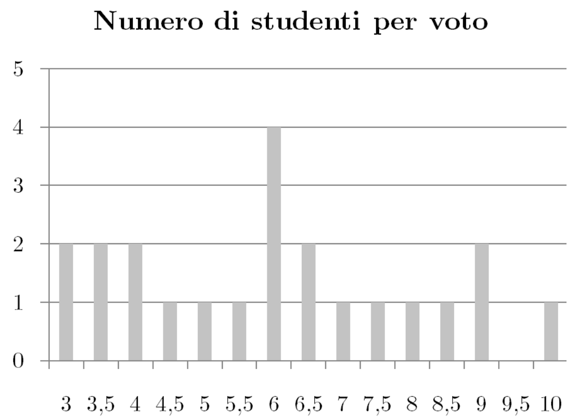


Figura 3.7: Valutazioni Verifica Pratica IV Y - Classe Test

Bibliografia

[1] A. Cosso - A. Lanconelli - A. Pascucci, *Probabilità: logica, calcolo e informazione*, Rimini, 28-30 settembre 2018
https://eventi.unibo.it/pls-matematica/corso-di-formazione

[2] V. Tonti, *L'insegnamento della probabilità nelle scuole secondarie di secondo grado*, tesi di laurea [LM-DM270]. https://amslaurea.unibo.it/18251/

[3] M. Bergamini - G. Barozzi - A. Trifone, *Manuale blu 2.0 di matematica 4A, seconda edizione*, Bologna, Zanichelli, 2017.

[4] Decreto Ministeriale 211 del 7 ottobre 2010 "Indicazioni Nazionali", allegato F.
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[5] La seconda prova di matematica. I testi e gli svolgimenti delle prove d'esame.
http://online.scuola.zanichelli.it/provamatematica/testi-e-svolgimenti

[6] http://www.letsmakeadeal.com/problem.htm

[7] A. Pascucci, *Teoria della Probabilità*, 2019.
https://www.dropbox.com/sh/ejjjj09g8c3wipb/AAAsuxl9pMyr_vKjCkbJTJEaa?dl=0