Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

LA TEORIA CLASSICA DEI CAMPI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
André Georges Martinez

Presentata da:
Alessandra Deangelis

II Sessione
Anno Accademico 2018/2019

A tutti coloro che sono nel mio cuore …

Introduzione

In questa tesi mi occuperò di descrivere la dinamica dei sistemi conservativi con un numero infinito di gradi di libertà, descritti dai campi. Un campo, in generale, è una funzione che, data una regione di spazio in cui esso è presente, associa ad ogni punto di tale regione un valore, una grandezza fisica, che può essere scalare (in tal caso si parla di campo scalare) oppure vettoriale (in questo caso si parla di campo vettoriale). Michael Faraday per primo capì l'importanza del campo come oggetto fisico, durante la sua ricerca sul magnetismo. Egli capì che il campo elettrico e magnetico non erano solo campi che influenzavano il moto delle particelle, ma avevano un'interpretazione fisica reale. Queste idee portarono alla creazione, da parte di James Clerk Maxwell, della prima teoria unificata dei campi con l'introduzione delle equazioni per il campo elettromagnetico, note come equazioni di Maxwell.
Esistono in natura vari tipi di campi; l'esempio più comune è il campo gravitazionale: una qualsiasi massa che si trova in una regione di spazio è in grado di modificare lo spazio circostante.

Si intuisce che, se nello spazio è presente solo tale massa, non si possono notare gli effetti di tale deformazione; tuttavia, se sono presenti anche altri corpi, possiamo notare la deformazione dello spazio grazie agli effetti che questi subiscono (l'attrazione dovuta alla forza gravitazionale), i quali sono proporzionali all'intensità del campo stesso. Questa situazione viene descritta dicendo che la presenza di un corpo crea un campo gravitazionale in ogni punto dello spazio in cui si trova.
Un altro esempio importante è il campo elettromagnetico; è la combinazione

del campo elettrico e del campo magnetico. È una delle interazioni fondamentali della fisica. Esso è generato localmente da una qualunque distribuzione di carica elettrica variabile nel tempo e si propaga nello spazio sotto forma di onde elettromagnetiche. In natura c'è una stretta relazione tra il campo magnetico e il campo elettrico, ogni variazione del primo genera una variazione dell'altro, e viceversa. Il campo elettromagnetico interagisce nello spazio con le cariche elettriche, analogamente a quello gravitazionale che interagisce con corpi dotati di massa; può manifestarsi anche in assenza delle cariche, trattandosi di un'entità fisica che può essere definita indipendentemente dalle sorgenti che l'hanno generata.
Un altro esempio riguarda la teoria dell'elasticità: il problema fondamentale di tale teoria è quello di determinare il moto e la deformazione che un dato corpo elastico subisce sotto l'azione di determinate forze esterne. Nel dominio spaziale occupato dal corpo, tale problema è espresso da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per studiarne il comportamento se sottoposti a sforzo, i materiali possono essere modellati come privi di struttura interna e costituiti da un continuo solido; precisamente si può definire un campo, il cui dominio spaziale è la regione occupata dal corpo, che associa ad ogni punto una grandezza fisica, ad esempio il vettore spostamento.

La tesi è strutturata in questo modo: in un primo momento l'obiettivo sarà di trovare le equazioni del moto di un sistema a infiniti gradi di libertà; il metodo che utilizzerò per trovarle riguarda l'ambito della meccanica lagrangiana. In tale ambito diventa protagonista una funzione scalare, detta Lagrangiana (denotata con L), la quale racchiude in sé tutto ciò che c'è da sapere sul sistema; una specie di DNA del problema. Fu trovata da Lagrange, da qui il nome, e pubblicata nel 1788 nel suo testo "Meccanica Analitica". Tale Lagrangiana sarebbe interessante, ma poco utile se non avessimo uno strumento per estrarre la soluzione da questa espressione. Lagrange ci ha dato anche questo, aiutato da Eulero. Questo strumento è fatto di equazioni, le equazioni del moto, denominate equazioni di Eulero- Lagrange, nelle quali inserire la Lagrangiana per ottenere la soluzione, l'evoluzione temporale delle componenti del sistema fisico che stiamo esaminando. Una caratteristica importante di queste equazioni: sono sempre le stesse indipendentemente dal sistema di riferimento e dalle coordinate scelte. Quindi il riferimento potrebbe essere inerziale o non; le coordinate cartesiane o di qualsiasi altro tipo. Per entrare meglio nello spirito del metodo di Lagrange può essere utile sentire dallo stesso Lagrange quali erano le sue intenzioni, come le scrisse nella introduzione del suo libro "Meccanica Analitica" del 1788: "Ridurre la teoria della meccanica... a delle formule generali, il cui semplice sviluppo fornisce tutte le equazioni necessarie per la risoluzione del problema" e nelle avvertenze al lettore "I metodi che espongo non richiedono né costruzioni geometriche né ragionamenti geometrici o meccanici, ma soltanto operazioni algebriche". In questo approccio lagrangiano la traiettoria del sistema non viene studiata a partire dalle forze agenti su di esso, come avviene nell'ambito tradizionale della dinamica newtoniana, ma si basa su un principio, detto principio di minima azione, il quale stabilisce che ogni moto fisico, in natura, rende stazionaria una quantità detta azione, legata, come vedremo, alla Lagrangiana.

Successivamente introdurrò il formalismo hamiltoniano; qui lo scopo sarà riscrivere le equazioni di Eulero-Lagrange in nuove coordinate (la coordinata del campo sarà affiancata da una grandezza che indicheremo con π, chiamata impulso generalizzato). Le nuove equazioni saranno governate da una nuova funzione, detta Hamiltoniana (che rappresenta l'energia totale del sistema).

Un altro argomento che affronterò sarà trovare le quantità del sistema che si conservano nel tempo. Questo risultato, descritto dal Teorema di Noether, dovuto a Emmy Noether, stabilisce che a ogni simmetria della Lagrangiana, ovvero a ogni trasformazione continua delle coordinate del sistema che lascia inalterata la Lagrangiana, corrisponde una quantità conservata.

Infine mostrerò un'applicazione della parte riguardante le equazioni del moto del sistema descritto dal campo elettromagnetico. Si definirà uno specifico campo ϕ le cui coordinate saranno delle grandezze note come *potenziale sca-*

lare e *potenziale vettore*, legate, come vedremo, al campo elettrico **E** e magnetico **B**. Definiremo la funzione Lagrangiana e vedremo che le equazioni di Eulero-Lagrange diventeranno le note equazioni di Maxwell.

Indice

Capitolo 1

Lagrangiana e azione

In un sistema meccanico discreto a d gradi di libertà espresso nei parametri lagrangiani $q = (q_1, \dots q_d) \in \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^d$, per un percorso $t \to q(t) \in \mathbb{R}^d$ C^2 si hanno: l'energia cinetica $T(q(t), \dot{q}(t))$ (con $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$) e l'energia potenziale $V = V(q(t))$ (per i sistemi conservativi, ovvero in quei sistemi dove agiscono forze conservative).
Si definisce *Lagrangiana* (o *funzione di Lagrange*) del sistema l'unica funzione:

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

che associa $(q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$, tale che per ogni percorso $[t_0, t_1] \ni t \mapsto q(t) \in \Omega$ si ha: $\forall t$,

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = T(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t))$$

Per un percorso $q : [t_0, t_1] \ni t \mapsto q(t) \in \Omega$ C^1 si definisce la sua *azione* su $[t_0, t_1]$ come la quantità:

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t))dt$$

Se ora denotiamo $\mathcal{N}_1(q) := sup(\parallel q(t) \parallel + \parallel \dot{q}(t) \parallel)$ per $t \in [t_0, t_1]$, diciamo che un percorso $q_0 : [t_0, t_1] \to \Omega$, $t \mapsto q_0(t)$ rende stazionaria l'azione se e solo se esiste una costante c_0 tale che per ogni variazione $q : [t_0, t_1] \to \Omega$ C^1 di q_0 (cioè con $q(t_0) = q_0(t_0)$ e $q(t_1) = q_0(t_1)$) si ha:

$$| S(q) - S(q_0) | \leq c_0 \mathcal{N}_1(q - q_0)^2$$

Enunciamo adesso il Principio di Hamilton, detto anche Principio di minima azione: *Ogni moto fisico rende stazionaria l'azione.*
Osserviamo che il sistema di coordinate ($q = (q_1, \ldots, q_d)$) può anche dipendere dal tempo t. Qui avremo $T = T(q(t), \dot{q}(t), t)$ e $V = V(q(t), t)$, $L = L(q, \dot{q}, t)$ (cioè $L : \Omega \times \mathbb{R}^d \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$) e il Principio di Hamilton vale lo stesso.
Infine, si dimostra che, a partire dal Principio di Hamilton, è possibile trovare l'equazione del moto, infatti si ha che un percorso $q = q(t)$ rende stazionaria l'azione se e solo se è soluzione del sistema di equazioni differenziali, dette equazioni di Eulero Lagrange (interessanti perchè sono indipendenti dalla scelta dei parametri lagrangiani, ovvero sono sempre le stesse indipendentemente dal sistema di riferimento e dalle coordinate scelte, quindi il riferimento potrebbe essere inerziale o non)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q(t), \dot{q}(t), t)\right] = \frac{\partial L}{\partial q_k}(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{1.1}$$

per $k = 1, \ldots, d$.

Arriviamo ora ai casi descritti dalla Teoria Classica dei Campi, in cui gli oggetti analizzati sono i sistemi con infiniti gradi di libertà. La loro configurazione q è data, anziché dalla collezione discreta $(q_1, \ldots, q_d)$, da una collezione continua $q = (q_{\mathbf{x}})$ dove $\mathbf{x} = (x, y, z)$ varia in una regione dello spazio. In altre parole la configurazione è un campo $\phi = \phi(\mathbf{x})$. In generale un campo, dunque, può essere considerato come una collezione di funzioni $\phi_{\mathbf{x}}(t)$, una per ogni $\mathbf{x}$. La dipendenza di ϕ da $\mathbf{x}$ può essere dunque pensata come un indice (stavolta continuo, non più discreto). Per la sua evoluzione temporale scriveremo $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$ e per la sua 'velocità' scriveremo

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \partial_t \phi = \phi_t$$

Tale ϕ sarà un campo scalare, se ha valori reali, o un campo vettoriale, se ha valori vettoriali (in generale in $\mathbb{R}^n, \forall n$).

Concentriamoci adesso su una proprietà del dominio del nostro campo ϕ; prima però diamo la seguente definizione, che ci servirà per descrivere tale proprietà.

Definizione 1.1 (k-superficie di $\mathbb{R}^n$)**.** (Σ, r) si dice una *k-superficie* di $\mathbb{R}^n$ se $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, $r : A \to \Sigma$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto, $r \in C(A)$ (r viene detta *parametrizzazione* di Σ), $(u_1, \ldots, u_k) \in A$.
Se $r \in C^m$, diciamo che (Σ, r) è una superficie di classe C^m.
Se $r \in C^1$, sia $P \in \Sigma$ (ad esempio: $P = r(u_1^0, \ldots, u_k^0)$). Diciamo che P è *regolare* se $J_r(u_1^0, \ldots, u_k^0)$ ha rango massimo (k) (con $J_r = (\partial_{u_1} r, \ldots, \partial_{u_k} r)$ matrice $n \times k$, $0 < k < n, k \in \mathbb{N}$). In un punto regolare P i vettori $r_{u_1}, \ldots, r_{u_k}$ generano lo *spazio tangente*.
(Σ, r) si dice *regolare* se $r \in C^1$ e tutti i punti di Σ sono regolari (in questo caso Σ si chiama anche *varietà differenziabile* o *di classe* C^1).
Nel caso $k = n - 1$, (Σ, r) si dice *ipersuperficie*.

Definizione 1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Diciamo che Ω è un aperto regolare se:

- Ω è limitato
- int($\bar{\Omega}$)=Ω (int($\bar{\Omega}$) indica la parte interna di $\bar{\Omega}$). (Un controesempio di questo punto lo abbiamo se, per esempio, $\Omega := B(x_0, r) \setminus x_0$, con $B(x_0, r)$ palla aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro x_0 e raggio r; infatti, $\bar{\Omega} = \overline{B(x_0, r)}, int(\bar{\Omega}) = int(\overline{B(x_0, r)} = B(x_0, r))$
- $\partial\Omega$ (la frontiera di Ω) è una $(n-1)$ varietà di classe C^1.

Definizione 1.3. Se Ω è un aperto regolare si definisce ν *normale esterna* a Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ un versore normale a $\partial\Omega$ (in x_0) e tale che $\exists\delta > 0$ tale che $x_0 + r\nu \notin \Omega \quad \forall 0 < r < \delta$ e $x_0 - r\nu \in \Omega \quad \forall 0 < r < \delta$, $\nu \perp \partial\Omega$ in x_0.

Definiamo ora il campo ϕ:
Sia $B :=]t_0, t_1[\times \mathcal{D} = \{(t, x, y, z) =: (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4 : t \in]t_0, t_1[, \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathcal{D}\}$ con $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto regolare, $]t_0, t_1[$ intervallo aperto reale. Naturalmente, $\bar{B} = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4 : t \in [t_0, t_1], \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{D}}\}$.
Sia ora $\phi \in C^2(\bar{B})$, cioè C^2 su un aperto che contiene $\bar{B}$.

$$\phi : \bar{B} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \phi \in C^2(\bar{B})$$

Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Considerando una funzione

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

di classe C^2, si chiama *Lagrangiana* del sistema la funzione che a ϕ associa

$$L(\phi(t, \mathbf{x}), \partial_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x})) = L(\phi(t, \mathbf{x}), \partial_t\phi(t, \mathbf{x}), \partial_x\phi(t, \mathbf{x}), \partial_y\phi(t, \mathbf{x}), \partial_z\phi(t, \mathbf{x}))$$

In generale tale Lagrangiana dipenderà anche da t:

$$L = L(\phi(t, \mathbf{x}), \partial_t\phi(t, \mathbf{x}), \partial_x\phi(t, \mathbf{x}), \partial_y\phi(t, \mathbf{x}), \partial_z\phi(t, \mathbf{x}), t)$$

Definiamo ora l'*azione* di un campo ϕ (ϕ come sopra) su $\bar{B} = [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}}$

$$S(\phi) = \int_B L(\phi(t, \mathbf{x}), \partial_t\phi(t, \mathbf{x}), \partial_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}), t)dxdydzdt$$

1.1 Equazioni del moto

Il nostro obiettivo ora è di ricavare l'analogo delle equazioni di Eulero-Lagrange, cioè le equazioni del moto che descrivono la dinamica dei sistemi conservativi, nel caso in cui i nostri oggetti da studiare sono i sistemi

con infiniti gradi di libertà, descritti dai campi. Abbiamo visto, nel caso di un sistema meccanico rappresentato dai parametri lagrangiani $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_d(t))$ (d indica il numero di gradi di libertà del sistema), che, partendo dal principio di Hamilton, si trovavano le equazioni di Eulero-Lagrange (1.1), le cui soluzioni erano quei percorsi $q(t)$ che rendevano stazionaria l'azione $S(q)$.
Per trovare tali equazioni per i campi si procede in modo analogo, partendo quindi dal principio di Hamilton, o di minima azione, in cui considereremo, invece della variabile $q(t)$, $\phi(t, \mathbf{x})$ (definito come sopra), la quale rappresenta il nostro campo.

Diamo prima una definizione di *variazione* di un campo $\phi(t, \mathbf{x})$.

Definizione 1.4. Sia $\phi : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto regolare, $\phi \in C^2([t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}})$, Ω aperto. Un campo $\psi : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \Omega$, $\psi \in C^2([t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}})$ si dice una *variazione* di ϕ se $\phi = \psi$ nella frontiera di $[t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}}$.

Il *principio di minima azione* afferma che ogni configurazione $\phi(t, \mathbf{x})$ sul dominio $\bar{B} = [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}}$ del sistema è un punto stazionario di $S(\phi)$, ovvero

$$\mid S(\psi) - S(\phi) \mid \leq c_1 \mathcal{N}_2(\psi - \phi)^2$$

per una certa costante c_1 e con $\mathcal{N}_2(\psi) := sup(\parallel \psi(t, \mathbf{x}) \parallel + \parallel \partial_t \psi(t, \mathbf{x}) \parallel + \parallel \partial_x \psi(t, \mathbf{x}) \parallel + \parallel \partial_y \psi(t, \mathbf{x}) \parallel + \parallel \partial_z \psi(t, \mathbf{x}) \parallel)$, per $(t, \mathbf{x}) \in \bar{B}$, $\forall$ variazione ψ.

Sia ϕ una configurazione e sia $\psi = \phi + h$ una sua variazione ($\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $h : \bar{B} \to \Omega$, $h \in C^2(\bar{B})$); ciò implica che

$$[h(t, \mathbf{x})]_{\partial B} = 0 \tag{1.2}$$

ovvero

$$[h(t, \mathbf{x})]_{t=t_0} = [h(t, \mathbf{x})]_{t=t_1} = 0, \qquad [h(t, \mathbf{x})]_{\partial \mathcal{D}} = 0$$

Usando la notazione:

$$h_t := \frac{\partial h}{\partial t}, \quad h_x := \frac{\partial h}{\partial x}, \quad h_y := \frac{\partial h}{\partial y}, \quad h_z := \frac{\partial h}{\partial z} \tag{1.3}$$

abbiamo (sviluppando il polinomio di Taylor della funzione L):

$$\begin{aligned}
&S(\psi) - S(\phi) = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} ((L(\phi + h, \partial_t(\phi + h), \partial_x(\phi + h), \partial_y(\phi + h), \partial_z(\phi + h)) \\
&\quad -L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi) dxdydz) dt + \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2) = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_\phi L, h > + < \nabla_{\phi_t} L, h_t > + < \nabla_{\phi_x} L, h_x > + \\
&\quad + < \nabla_{\phi_y} L, h_y > + < \nabla_{\phi_z} L, h_z > dxdydz) dt + \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Utilizzando la notazione 1.3

$$\begin{aligned}
&S(\psi) - S(\phi) = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_\phi L, h > + < \nabla_{\phi_t} L, \frac{\partial h}{\partial t} > + < \nabla_{\phi_x} L, \frac{\partial h}{\partial x} > + \\
&\quad + < \nabla_{\phi_y} L, \frac{\partial h}{\partial y} > + < \nabla_{\phi_z} L, \frac{\partial h}{\partial z} > dxdydz) dt + \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2) = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_\phi, h > dxdydz) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_{\phi_t} L, \frac{\partial h}{\partial t} > dxdydz) dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_{\phi_x} L, \frac{\partial h}{\partial x} > dxdydz) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_{\phi_y} L, \frac{\partial h}{\partial y} > dxdydz) dt + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< \nabla_{\phi_z} L, \frac{\partial h}{\partial z} > dxdydz) dt + \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Procedendo:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\nabla_{\phi_t}L,\frac{\partial h}{\partial t}> dxdydz)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial t}<\nabla_{\phi_t}L,h> dxdydz)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\phi_t}L,h> dxdydz)dt$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\nabla_{\phi_x}L,\frac{\partial h}{\partial x}> dxdydz)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial x}<\nabla_{\phi_x}L,h> dxdydz)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x}L,h> dxdydz)dt$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\nabla_{\phi_y}L,\frac{\partial h}{\partial y}> dxdydz)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial y}<\nabla_{\phi_y}L,h> dxdydz)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y}L,h> dxdydz)dt$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\nabla_{\phi_z}L,\frac{\partial h}{\partial z}> dxdydz)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial z}<\nabla_{\phi_z}L,h> dxdydz)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(<\frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z}L,h> dxdydz)dt$$

ottengo da (1.5)

$$S(\psi) - S(\phi) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}((<\nabla_{\phi}L,h> - <\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\phi_t}L,h> - <\frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x}L,h> -$$
$$- <\frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y}L,h> - <\frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z}L,h>)dxdydz)dt +$$
$$+\int_{\mathcal{D}}\int_{t_0}^{t_1}(\frac{\partial}{\partial t}<\nabla_{\phi_t}L,h> dt)dxdydz + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}(\frac{\partial}{\partial x}<\nabla_{\phi_x}L,h> +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}<\nabla_{\phi_y}L,h> + \frac{\partial}{\partial z}<\nabla_{\phi_z}L,h> dxdydz)dt +$$
$$+\mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2)$$

da cui

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{t_0}^{t_1}(\frac{\partial}{\partial t}<\nabla_{\phi_t}L,h> dt)dxdydz = \int_{\mathcal{D}}[<\nabla_{\phi_t}L,h>]_{t_0}^{t_1}dxdydz = 0$$

poichè $h(t_0, \mathbf{x}) = h(t_1, \mathbf{x}) = 0$.
Ora, se chiamo $F := (< \nabla_{\phi_x} L, h >, < \nabla_{\phi_y} L, h >, < \nabla_{\phi_z} L, h >)$, ho che, $\forall t \in [t_0, t_1]$, $F : \bar{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(\bar{\mathcal{D}})$, con $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto regolare:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (\frac{\partial}{\partial x} < \nabla_{\phi_x} L, h > + \frac{\partial}{\partial y} < \nabla_{\phi_y} L, h > + \frac{\partial}{\partial z} < \nabla_{\phi_z} L, h > dxdydz)dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} div(F(\mathbf{x}))dxdydz)dt$$

quindi posso applicare il teorema della divergenza:

$$S(\psi) - S(\phi) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} ((< \nabla_\phi L, h > - < \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\phi_t} L, h > - < \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\phi_x} L, h > -$$
$$- < \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\phi_y} L, h > - < \frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\phi_z} L, h >)dxdydz)dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{(\partial\mathcal{D})^+} < F, \nu > d\sigma + \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2)$$

con $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ normale esterna di $\partial\mathcal{D}$ e $(\partial\mathcal{D})^+$ sta ad indicare che la parametrizzazione scelta per $\partial\mathcal{D}$ è compatibile con ν, cioè $det(\partial_{u_1} r, \partial_{u_2} r, \nu) > 0$.
F lo possiamo anche scrivere come

$$F = \begin{pmatrix} \nabla_{\phi_x} L \\ \nabla_{\phi_y} L \\ \nabla_{\phi_z} L \end{pmatrix} h =: M(t, \mathbf{x}) h(t, \mathbf{x})$$

con M matrice $3 \times n$. Dunque, l'ultimo integrale

$$\int_{(\partial\mathcal{D})^+} < F, \nu > d\sigma = \int_{(\partial\mathcal{D})+} < Mh, \nu > d\sigma$$

si annulla, per la condizione $[h(t, \mathbf{x})]_{\partial\mathcal{D}} = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, perciò rimane:

$$S(\psi) - S(\phi) =$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< (\nabla_\phi L - \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\phi_t} L - \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\phi_x} L - \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\phi_y} L - \frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\phi_z} L), h > dxdydz)dt$$
$$+ \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h^2)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} (< A(t, \mathbf{x}), h(t, \mathbf{x}) > dxdydz)dt + \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h)^2) \quad (1.6)$$

con $A(t,\mathbf{x}) := \nabla_\phi L - \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla_{\phi_t} L - \dfrac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L - \dfrac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L - \dfrac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L \in \mathbb{R}^n$.
Arrivati a questo punto, dimostriamo il seguente

Teorema 1.1. Una configurazione $\phi = \phi(t,\mathbf{x})$ rende stazionaria l'azione se e solo se è soluzione del sistema di equazioni, dette *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_k} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_t}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_x}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_y}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_z}}\right) = 0 \qquad (1.7)$$

con

$$\phi_{k_t} := \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \quad \phi_{k_x} := \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \quad \phi_{k_y} := \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \quad \phi_{k_z} := \frac{\partial \phi_k}{\partial t}$$

e $k = 1, \ldots, n$ con n dimensione del vettore $\phi(t,\mathbf{x})$; cioè

$$\nabla_\phi L - \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\phi_t} L - \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L - \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L - \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L = 0 \qquad (1.8)$$

Dimostrazione. Vediamo la condizione sufficiente ($\Leftarrow$): supponiamo che $(t,\mathbf{x}) \mapsto \phi(t,\mathbf{x})$ sia soluzione di (1.8) su $\bar{B}$; allora abbiamo $A(t,\mathbf{x}) = 0\ \forall (t,\mathbf{x})$, quindi (1.6) diventa:

$$S(\psi) - S(\phi) = \mathcal{O}(\mathcal{N}_2(h^2))$$

cioè $\phi = \phi(t,\mathbf{x})$ rende l'azione stazionaria (ovvero ϕ è un'estremale dell'azione).
Analizziamo la condizione necessaria ($\Rightarrow$): supponiamo che $\phi = \phi(t,\mathbf{x})$ rende l'azione stazionaria; allora $\mid S(\psi) - S(\phi) \mid \leq c_1 \mathcal{N}_2(h)^2$, quindi in (1.6) viene:

$$\mid \int_B < A(t,\mathbf{x}), h(t,\mathbf{x}) > dxdydzdt \mid \leq c\mathcal{N}_2(h)^2 \qquad (1.9)$$

con $c > 0$ una costante; c è indipendente dalla scelta della funzione $h \in C^2$ tale che $\forall (t,\mathbf{x}),\ \phi(t,\mathbf{x}) + h(t,\mathbf{x}) \in \Omega,\ [h(t,\mathbf{x})]_{\partial B} = 0$. In particolare, c è indipendente da h tale che

$$sup \parallel h(t,\mathbf{x}) \parallel << 1, \quad (t,\mathbf{x}) \in \bar{B}, \quad [h(t,\mathbf{x})]_{\partial B} = 0 \qquad (1.10)$$

Fissiamo $h_0 = h_0(t,\mathbf{x})$ con $sup \parallel h_0(t,\mathbf{x}) \parallel << 1$ per $(t,\mathbf{x}) \in \bar{B}$, $[h_0(t,\mathbf{x})]_{\partial B} = 0$. In particolare, $\forall \lambda \in]0,1]$ allora $h = \lambda h_0$ verifica (1.10) e quindi, sostituendo λh_0 a h in (1.9)

$$\mid \int_B < A(t,\mathbf{x}), \lambda h_0(t,\mathbf{x}) > dxdydzdt \mid \leq c\mathcal{N}_2(\lambda h_0)^2$$

cioè

$$\lambda \mid \int_B < A(t,\mathbf{x}), h_0(t,\mathbf{x}) > dxdydzdt \mid \leq c\lambda^2 \mathcal{N}_2(h_0)^2 \quad \forall \lambda \in]0,1]$$

Al limite $\lambda \to 0^+$ viene:

$$\int_B < A(t,\mathbf{x}), h_0(t,\mathbf{x}) > dxdydzdt = 0 \tag{1.11}$$

$\forall h_0$ che soddisfa $sup \parallel h_0(t,\mathbf{x}) \parallel << 1$ per $(t,\mathbf{x}) \in \bar{B}$, $[h_0(t,\mathbf{x})]_{\partial B} = 0$.
Sia $\chi(t,\mathbf{x})$ tale che $\chi(t,\mathbf{x}) > 0$ in B, $[\chi(t,\mathbf{x}]_{\partial B} = 0$, $\chi \in C^2(\bar{B})$. Prendiamo $h_0(t,\mathbf{x}) = \delta_0 \chi(t,\mathbf{x}) A(t,\mathbf{x})$, con $0 < \delta_0 << 1$. (1.11) viene:

$$\int_B \delta_0 \chi(t,\mathbf{x}) \parallel A(t,\mathbf{x}) \parallel^2 dxdydzdt = 0$$

e poichè $\chi(t,\mathbf{x}) > 0$ in B, deve essere $\parallel A(t,\mathbf{x}) \parallel^2 = 0$ in B, quindi

$$\nabla_\phi L - \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\phi_t} L - \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L - \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L - \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L = 0$$

su $\bar{B}$ (per continuità di $A(t,\mathbf{x})$). □

Per il principio di Hamilton si ha dunque che ogni configurazione $(t,\mathbf{x}) \mapsto \phi(t,\mathbf{x})$ di un sistema a infiniti gradi di libertà è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange.

Capitolo 2

Formalismo hamiltoniano

In fisica e matematica, in particolare nella meccanica razionale e nell'analisi dei sistemi dinamici, la meccanica hamiltoniana è una riformulazione della meccanica classica introdotta nel 1833 da William Rowan Hamilton a partire dalla meccanica lagrangiana, descritta inizialmente da Joseph-Louis Lagrange nel 1788. La dinamica di un sistema fisico è caratterizzata dal fatto che il moto di un corpo tende a rendere stazionaria (a variazione nulla) una quantità astratta detta azione (definita come nel capitolo 1). La meccanica hamiltoniana fa corrispondere all'energia una funzione scalare detta hamiltoniana, e le equazioni del moto di Eulero-Lagrange, che erano alla base della descrizione di Lagrange, vengono ora riscritte, attraverso la scelta di nuove coordinate, nella forma di equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana.
Nel caso di un sistema meccanico descritto dai parametri lagrangiani $q(t) = (q_1(t), \dots, q_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ (d grado di libertà del sistema), con velocità data da $\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_d(t))$, l'approccio seguito dalla meccanica hamiltoniana si basa sull'utilizzo di un diverso sistema di coordinate, dette coordinate canoniche, in cui alle coordinate $q(t)$ vengono affiancate, anziché la velocità $\dot{q}(t)$, l'impulso generalizzato $p(t)$. Vediamolo meglio.
Come ipotesi, $\forall (q, t)$ fissati, l'applicazione $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, che a $\dot{q}$ associa $p = \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t)$ è un diffeomorfismo globale, quindi è invertibile.
Denotiamo con $y(q, p, t) \in \mathbb{R}^d$, per $q \in \Omega$ (Ω aperto di $\mathbb{R}^d$), $t \in [t_0, t_1]$,$p \in \mathbb{R}^d$

l'unico punto di $\mathbb{R}^d$ tale che $p = \nabla_{\dot{q}} L(q, y(q,p,t), t)$ (quindi l'applicazione $p \mapsto y(q,p,t)$ è la reciproca dell'applicazione $\dot{q} \mapsto \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t)$; in particolare è un diffeomorfismo (C^∞) globale di $\mathbb{R}^d$).

Chiamiamo *trasformata di Legendre* di L la funzione H definita su $\Omega \times \mathbb{R}^d \times [t_0, t_1]$ da:

$$H(q,p,t) :=< p, y(q,p,t) > -L(q, y(q,p,t), t)$$

Si noti che $y(q,p,t)$ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^d$ che annulla $\nabla_{\dot{q}}(< p, \dot{q} > -L(q, \dot{q}, t))$, cioè è l'unico punto critico della funzione $\dot{q} \mapsto < p, \dot{q} > -L(q, \dot{q}, t)$; quindi $H(q,p,t)$ è l'unico valore critico della funzione $\dot{q} \mapsto < p, \dot{q} > -L(q, \dot{q}, t)$.
Se L è la lagrangiana di un sistema meccanico H si chiama *hamiltoniana* o *funzione di Hamilton.*
Sia ora $L(q, \dot{q}, t)$ la lagrangiana di un sistema, con trasformata di Legendre $H = H(q,p,t)$. Si ha che, se $t \mapsto q(t)$ è un moto soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange (1.1) allora, ponendo $p(t) := \nabla_{\dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t)$ la coppia $(q(t), p(t))$ è soluzione del cosiddetto *sistema di Hamilton* (H):

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \nabla_p H(q(t), p(t), t) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), t) \end{cases}$$

e vale anche il viceversa.

La formulazione hamiltoniana sviluppata per i sistemi con un numero finito di gradi di libertà si estende ai sistemi infinito dimensionali, ossia ai campi classici.
Sia $L = L(\phi(t, \mathbf{x}), \phi_t(t, \mathbf{x}), \phi_x(t, \mathbf{x}), \phi_y(t, \mathbf{x}), \phi_z(t, \mathbf{x}), t)$ Lagrangiana di un campo ϕ definito come nel Capitolo 1 (consideriamo $\phi(t, \mathbf{x})$ a valori in $\mathbb{R}^n$).
Fissato un certo n (dimensione di un campo ϕ generica), assumiamo che $\forall(\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$ fissati e $\forall \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{D}}$, l'applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, che associa $\dot{\phi} \mapsto \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$, sia un diffeomorfismo globale (C^∞). Ad esempio, se

L è della forma:

$$L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) =< A(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)\dot{\phi},\dot{\phi} > + < b(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\dot{\phi} > + \\ + c(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$$

con $A(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$ matrice $n \times n$ simmetrica invertibile, $b(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) \in \mathbb{R}^n$, $c(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) \in \mathbb{R}$, in questo caso:

$$\nabla_{\dot{\phi}} L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) = 2A(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)\dot{\phi} + b(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$$

Perciò $\dot{\phi} \mapsto \pi = \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$ è invertibile, d'inversa $\pi \mapsto \dot{\phi} = \frac{1}{2}A(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)^{-1}(\pi - b(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$ (π, come è evidente, è l'analogo dell'impulso generalizzato p in un sistema meccanico finito dimensionale).
Denotiamo con $y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) \in \mathbb{R}^n$, per $\phi \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $t \in [t_0,t_1]$,$\pi \in \mathbb{R}^n$, l'unico punto di $\mathbb{R}^n$ tale che $\pi = \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$, quindi l'applicazione $\pi \mapsto y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$ è la reciproca di $\dot{\phi} \mapsto \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$. In particolare è un diffeomorfismo (C^∞) globale di $\mathbb{R}^n$. Possiamo definire analogamente la *trasformata di Legendre* H di L di un campo:

$$H(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) :=< \pi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) > - \\ -L(\phi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$$

ovvero come l'unico valore critico della funzione
$\dot{\phi} \mapsto< \pi,\dot{\phi} > -L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$, infatti $y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ che è punto critico della funzione $\dot{\phi} \mapsto< \pi,\dot{\phi} > -L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$.
H si interpreta come *densità di energia* del sistema.

2.1 Equazioni di Hamilton

Le equazioni di Hamilton costituiscono la forma più evoluta ed interessante delle equazioni della dinamica.
Sia $L(\phi,\dot{\phi},\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$ la lagrangiana di un sistema infinito dimensionale (con $\dot{\phi} \mapsto \nabla_{\dot{\phi}} L$ un diffeomorfismo globale), di trasformata di Legendre $H = H(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$. Sia $(t,\mathbf{x}) \mapsto \phi(t,\mathbf{x})$ soluzione delle equazioni di

Eulero Lagrange. Il nostro scopo è riscrivere quest'ultime usando solo la funzione H.

Teorema 2.1. 1. Se $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$ è un moto soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange, ponendo $\pi(t, \mathbf{x}) := \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \phi_x(t, \mathbf{x}), \phi_y(t, \mathbf{x}), \phi_z(t, \mathbf{x}), t)$, la coppia $(\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}))$ è soluzione del sistema chiamato *sistema di Hamilton* (H)

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t, \mathbf{x}) = \nabla_\pi H \\ \dot{\pi}(t, \mathbf{x}) = -\nabla_\phi H + \dfrac{\partial}{\partial x} \nabla_{\phi_x} H + \dfrac{\partial}{\partial y} \nabla_{\phi_y} H + \dfrac{\partial}{\partial z} \nabla_{\phi_z} H \end{cases}$$

con $H = H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$, $\dot{\pi}(t, \mathbf{x}) \equiv \partial_t \pi(t, \mathbf{x})$ e $\dot{\phi}(t, \mathbf{x}) \equiv \partial_t \phi(t, \mathbf{x})$.

2. Reciprocamente, se $(t, \mathbf{x}) \mapsto (\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{x}))$ è soluzione di (H), allora necessariamente abbiamo $\pi(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \phi_x(t, \mathbf{x}), \phi_y(t, \mathbf{x}), \phi_z(t, \mathbf{x}), t)$ e $\phi(t, \mathbf{x})$ è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange.

Prima della dimostrazione abbiamo bisogno di due lemmi.

Lemma 2.1. Vale l'uguaglianza $\nabla_\pi H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$.

Dimostrazione. Per definizione si ha

$$\begin{gathered} H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) :=< \pi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) > - \\ -L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) \end{gathered}$$

da cui

$$\begin{gathered} \nabla_\pi H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) + d_\pi y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)^T \pi - \\ -d_\pi y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)^T \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = \\ = y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) \end{gathered}$$

dato che $\pi = \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$. $\square$

Lemma 2.2. Vale l'uguaglianza, $\forall (\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$,

1. $\nabla_\phi H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = -\nabla_\phi L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$
2. $\nabla_{\phi_x} H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = -\nabla_{\phi_x} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$
3. $\nabla_{\phi_y} H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = -\nabla_{\phi_y} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$
4. $\nabla_{\phi_z} H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = -\nabla_{\phi_z} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$

Dimostrazione. 1. Si ha

$$\begin{gathered}
\nabla_\phi H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = d_\phi y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)^T \pi - \\
-\nabla_\phi L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\
-d_\phi y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)^T \nabla_{\dot\phi} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = \\
= -\nabla_\phi L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)
\end{gathered}$$

Le uguaglianze 2. 3. 4. si dimostrano in modo analogo.

□

Dimostrazione teorema. 1. $\phi(t, \mathbf{x})$ è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange

$$\begin{gathered}
\nabla_\phi L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot\phi} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\
-\frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\phi_x} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\phi_y} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\
-\frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\phi_z} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = 0
\end{gathered}$$

cioè:

$$\begin{gathered}
\dot\pi = \nabla_\phi L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\
-\frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\phi_x} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\phi_y} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\
-\frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\phi_z} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)
\end{gathered}$$

Per ipotesi, $\pi = \nabla_{\dot\phi} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$ e per definizione $y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$ è l'unica soluzione di $\pi = \nabla_{\dot\phi} L(\phi, \dot\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$, allora necessariamente (per $\pi = \pi(t, \mathbf{x})$, $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$, $\dot\phi = \dot\phi(t, \mathbf{x})$, $\phi_x = \phi_x(t, \mathbf{x})$, $\phi_y = \phi_y(t, \mathbf{x})$

e $\phi_z = \phi_z(t, \mathbf{x})$) $y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = \dot{\phi}(t, \mathbf{x})$, quindi

$$\begin{aligned}\dot{\pi} &= \nabla_\phi L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = \\ &= \nabla_\phi L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L(\phi, y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t), \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)\end{aligned}$$

da cui, utilizzando il lemma (2.2) viene

$$\dot{\pi} = -\nabla_\phi H + \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} H + \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} H + \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} H \tag{2.1}$$

con $H = H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$.

Inoltre,

$$\dot{\phi} = y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) = \nabla_\pi H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t) \tag{2.2}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il lemma (2.1).

Le equazioni (2.1) e (2.2) formano il sistema di Hamilton.

2. Supponiamo ora che $(t, \mathbf{x}) \mapsto (\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}))$ sia soluzione di (H):

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t, \mathbf{x}) = \nabla_\pi H & (1) \\ \dot{\pi}(t, \mathbf{x}) = -\nabla_\phi H + \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} H + \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} H + \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} H & (2) \end{cases}$$

con $H = H(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$.

(1) $\Rightarrow \dot{\phi} = y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$ per il lemma (2.1) ($\pi \mapsto y(\phi, \pi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$ è l'applicazione reciproca di $\dot{\phi} \mapsto \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$); per definizione di y abbiamo $\pi = \nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)$. Inserendo in (2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\dot{\phi}} L(\phi, \dot{\phi}, \phi_x, \phi_y, \phi_z, t)) &= -\nabla_\phi H + \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} H + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} H + \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} H\end{aligned}$$

da cui, per il lemma (2.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\dot\phi} L(\phi,\dot\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)) &= \nabla_\phi L(\phi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)- \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L(\phi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)- \\ &-\frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L(\phi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)- \\ &-\frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L(\phi, y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)\end{aligned} \tag{2.3}$$

in cui vale $\dot\phi = y(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$, quindi da (2.3) viene:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\dot\phi} L(\phi,\dot\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)) = \nabla_\phi L(\phi,\dot\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)- \\ -\frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} L(\phi,\dot\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) - \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} L(\phi,\dot\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)- \\ -\frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} L(\phi,\dot\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)\end{gathered}$$

□

Osservazione 2.1. Se denotiamo $\Gamma_H(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t) := (\nabla_\pi H, -\nabla_\phi H + \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\phi_x} H + \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\phi_y} H + \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\phi_z} H) \in \mathbb{R}^{2n}$ (esso è detto *Campo Hamiltoniano* associato a H), allora (H) si può riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi,\pi) = \Gamma_H(\phi,\pi,\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$$

cioè con $X(t,\mathbf{x}) := (\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}))$:

$$\frac{\partial}{\partial t}X(t,\mathbf{x}) = \Gamma_H(X(t,\mathbf{x}),\phi_x,\phi_y,\phi_z,t)$$

Capitolo 3

Leggi di conservazione

Il nostro scopo è ora quello di trovare quantità che si conservano nel tempo, chiamate integrali primi del moto, sfruttando simmetrie della Lagrangiana. Come è noto, l'uso del formalismo lagrangiano, eventualmente allargato alla descrizione di sistemi infinito dimensionali, permette di mettere in luce in maniera più diretta il legame fra proprietà di invarianza e leggi di conservazione. Infatti, dalle equazioni di Eulero Lagrange, supponendo $\frac{\partial L}{\partial \phi_k}(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_y, \phi_z) = 0$ per un certo k, avremo

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_t}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_x}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_y}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_z}} = 0$$

per quel k. Più precisamente, se indichiamo con $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})=$ $(J_0(t, \mathbf{x}), J_1(t, \mathbf{x}), J_2(t, \mathbf{x}), J_3(t, \mathbf{x})) = (J_0(t, \mathbf{x}), \vec{J}(t, \mathbf{x})) = (\frac{\partial L}{\partial \phi_{k_t}}, \frac{\partial L}{\partial \phi_{k_x}}, \frac{\partial L}{\partial \phi_{k_y}}, \frac{\partial L}{\partial \phi_{k_z}})$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}J_0 + \frac{\partial}{\partial x}J_1 + \frac{\partial}{\partial y}J_2 + \frac{\partial}{\partial z}J_3 = \\ = div(\mathbf{J}(t, \mathbf{x})) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Questo risultato si può leggere come una legge di conservazione. Infatti, definendo la quantità

$$Q = \int_{\mathcal{D}} J_0(t, \mathbf{x}) dxdydz$$

otteniamo da (3)

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} J_0(t, \mathbf{x}) dxdydz = -\int_{\mathcal{D}} div(\vec{J}(t, \mathbf{x})) dxdydz = -\int_{\partial \mathcal{D}} < \vec{J}, \nu > d\sigma \tag{3.2}$$

(l'ultima uguaglianza la si ha per il teorema della divergenza), con ν normale esterna della varietà di classe C^1 $\partial\mathcal{D}$. Se il vettore $\vec{J}$ si annulla sulla frontiera di $\mathcal{D}$ abbiamo che

$$Q = \int_{\mathcal{D}} J_0 dxdydz$$

è costante nel tempo, oppure se consideriamo $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ e supponiamo che per $\| \mathbf{x} \| \to \infty$ $\vec{J} \to 0$, avremo che la quantità

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} J_0 dxdydz$$

è costante nel tempo.

In un sistema meccanico discreto di lagrangiana $L : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto (d grado di libertà del sistema), che associa $(q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$, con $q = (q_1, \dots, q_d)$ parametri lagrangiani, diciamo che un'applicazione $h : \Omega \to \Omega$, C^∞, che associa $q \mapsto h(q)$ è *ammissibile* per L se e solo se:

- $\forall (q, \dot{q}) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$, $L(h(q), dh(q)\dot{q}) = L(q, \dot{q})$ (con $dh(q) = \left(\frac{\partial h_i(q)}{\partial q_j} \right)_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$)
- $\forall q \in \Omega$, $dh(q) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è un isomorfismo (cioè h è diffeomorfismo).

Enunciamo il Teorema di Noether, dovuto a Emmy Noether, il quale mette in luce il legame esistente tra simmetrie della lagrangiana e quantità conservate (in un sistema con un grado finito di libertà).

Teorema 3.1. Sia un sistema meccanico di lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, t)$ ($q \in \Omega$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^d$); sia $(h^s)_{s \in]-s_0, s_0[}$ ($s_0 > 0$) una famiglia di applicazioni $\Omega \to \Omega$ C^∞ tale che

- $\forall s$, h^s è un'applicazione ammissibile per L

- per $s = 0$, $h^0 = Id$
- l'applicazione $]-s_0, s_0[\times\Omega \to \Omega$, che associa $(s, q) \mapsto h^s(q)$, è C^2.

Allora la quantità

$$J :=< \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t), \frac{\partial}{\partial s} h^s(q) \mid_{s=0}>$$

è un integrale primo del moto.

Consideriamo ora un sistema meccanico descritto dal campo $\phi(t, \mathbf{x})$ ($\bar{B} = [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \ni (t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $\mathcal{D}$ aperto regolare di $\mathbb{R}^3$), con infiniti gradi di libertà. Vogliamo, in modo analogo, sfruttare le simmetrie della lagrangiana per trovare quantità che si conservano.
Consideriamo dunque la lagrangiana

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi) \mapsto L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$

di classe C^2.

Definizione 3.1. Un'applicazione C^∞

$$h : \Omega \to \Omega$$
$$\phi \mapsto h(\phi)$$

è detta ammissibile per L se e solo se:

1. $\forall(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

   $$L(h(\phi), dh(\phi)\partial_t\phi, dh(\phi)\partial_x\phi, dh(\phi)\partial_y\phi, dh(\phi)\partial_z\phi) = L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$

2. $\forall\phi \in \Omega$, $dh(\phi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo (quindi h diffeomorfismo).

con $dh(\phi) = \left(\frac{\partial h_i(\phi)}{\partial \phi_j}\right)_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ (notiamo che, così come è definita $dh(\phi)$, $dh(\phi)\partial_t\phi$ è proprio $\partial_t h(\phi)$, così come anche $\partial_x h(\phi) = dh(\phi)\partial_x\phi$, $\partial_y h(\phi) = dh(\phi)\partial_y\phi$, $\partial_z h(\phi) = dh(\phi)\partial_z\phi$).
Enunciamo il teorema di Noether per i campi.

Teorema 3.2 (di Noether)**.** Sia un sistema meccanico a infiniti gradi di libertà di lagrangiana $L = L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t)$ ($\bar{B} = [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \ni (t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x}) = \phi \in \Omega$, $\bar{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{R}^3$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}$ aperto regolare di $\mathbb{R}^3$, $\partial_t\phi$, $\partial_x\phi$, $\partial_y\phi$, $\partial_z\phi \in \mathbb{R}^n$) e sia $(h^s)_{s\in]-s_0,s_0[}$ ($s_0 > 0$) una famiglia di applicazioni $\Omega \to \Omega$ C^∞ tale che

1. $\forall s$, h^s è un'applicazione ammissibile per L
2. per $s = 0$, $h^0 = Id$
3. l'applicazione
$$]-s_0, s_0[\times\Omega \to \Omega$$
$$(s, \phi) \mapsto h^s(\phi)$$
è C^2.

Inoltre, definiamo, $\forall s$ e per $L = L(h^s(\phi), \partial_t h^s(\phi), \partial_x h^s(\phi), \partial_y h^s(\phi), \partial_z h^s(\phi), t)$:

$$\vec{J}_s(t, \mathbf{x}) := (J_{1_s}(t, \mathbf{x}), J_{2_s}(t, \mathbf{x}), J_{3_s}(t, \mathbf{x})) =$$
$$= (< \nabla_{\partial_x\phi} L, \partial_s h^s(\phi) >, < \nabla_{\partial_y\phi} L, \partial_s h^s(\phi) >, < \nabla_{\partial_z\phi} L, \partial_s h^s(\phi) >)$$

quindi $\vec{J}_s : \bar{B} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{J}_s \in C^1(\bar{B})$. In particolare, per $s = 0$ e di conseguenza $L = L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t)$:

$$\vec{J}(t, \mathbf{x}) := (J_1(t, \mathbf{x}), J_2(t, \mathbf{x}), J_3(t, \mathbf{x})) =$$
$$= (< \nabla_{\partial_x\phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>, < \nabla_{\partial_y\phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>, < \nabla_{\partial_z\phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>)$$

Allora, la quantità

$$Q = \int_{\mathcal{D}} < \nabla_{\partial_t\phi} L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}> dxdydz$$

è tale che

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{\partial\mathcal{D}} < \vec{J}, \nu > d\sigma$$

con ν normale esterna di $\partial\mathcal{D}$. In particolare, per $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$, se supponiamo che per $\parallel \mathbf{x} \parallel \longrightarrow \infty$, $\vec{J} \longrightarrow 0$, si ha

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

cioè

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} < \nabla_{\partial_t \phi} L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0} > dxdydz$$

è costante nel tempo.

Per la dimostrazione ci serve il seguente

Lemma 3.1. Sia $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$ un moto soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange e sia h un'applicazione ammissibile per L. Allora anche $(t, \mathbf{x}) \mapsto h(\phi(t, \mathbf{x}))$ è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange.

Dimostrazione. $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$ è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange su $[t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}}$ se e solo se $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$ rende stazionaria l'azione

$$S(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{D}} L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t) dxdydzdt$$

Poichè h è un'applicazione ammissibile per L, si ha $L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t) = L(h, \partial_t h, \partial_x h, \partial_y h, \partial_z h, t)$, dunque $S(\phi) = S(h(\phi))$. Quindi $(t, \mathbf{x}) \mapsto h(\phi(t, \mathbf{x}))$ rende stazionaria l'azione e ciò equivale al fatto che $(t, \mathbf{x}) \mapsto h(\phi(t, \mathbf{x}))$ è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange. □

Prova del teorema di Noether. Abbiamo, $\forall s \in]-s_0, s_0[$,

$$L(h^s(\phi), dh^s(\phi)\partial_t \phi, dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_y \phi, dh^s(\phi)\partial_z \phi, t) = L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t)$$

Deriviamo rispetto a s:

$$\begin{aligned}
&< \nabla_{\phi} L(h^s(\phi), dh^s(\phi)\partial_t \phi, dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_y \phi, dh^s(\phi)\partial_z \phi, t), \frac{\partial}{\partial s} h^s(\phi) > \\
&+ < \nabla_{\partial_t \phi} L(h^s(\phi), dh^s(\phi)\partial_t \phi, dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_y \phi, dh^s(\phi)\partial_z \phi, t), \frac{\partial}{\partial s}[dh^s(\phi)\partial_t \phi] > \\
&+ < \nabla_{\partial_x \phi} L(h^s(\phi), dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_y \phi, dh^s(\phi)\partial_z \phi, t), \frac{\partial}{\partial s}[dh^s(\phi)\partial_x \phi] > \\
&+ < \nabla_{\partial_y \phi} L(h^s(\phi), dh^s(\phi)\partial_t \phi, dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_y \phi, dh^s(\phi)\partial_z \phi, t), \frac{\partial}{\partial s}[dh^s(\phi)\partial_y \phi] > \\
&+ < \nabla_{\partial_z \phi} L(h^s(\phi), dh^s(\phi)\partial_t \phi, dh^s(\phi)\partial_x \phi, dh^s(\phi)\partial_y \phi, dh^s(\phi)\partial_z \phi, t), \frac{\partial}{\partial s}[dh^s(\phi)\partial_z \phi] > \\
&= 0 \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Sia $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$ un moto fisico (soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange) e denotiamo:

$$\gamma(s, t, \mathbf{x}) := h^s(\phi(t, \mathbf{x}))$$

Per il lemma $(t, \mathbf{x}) \mapsto h(\phi(t, \mathbf{x}))$ è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange, cioè (considerando tutte le funzioni che intervengono come funzioni di $(s, t, \mathbf{x})$)

$$\begin{aligned}
&\nabla_\phi L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\partial_t\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\partial_x\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\nabla_{\partial_y\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\nabla_{\partial_z\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

D'altra parte, (3.3) si scrive (con $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$, $\partial_t\phi = \partial_t\phi(t, \mathbf{x})$, $\partial_x\phi = \partial_x\phi(t, \mathbf{x})$, $\partial_y\phi = \partial_y\phi(t, \mathbf{x})$, $\partial_z\phi = \partial_z\phi(t, \mathbf{x})$)

$$\begin{aligned}
&< \nabla_\phi L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t), \frac{\partial}{\partial s}\gamma(s,t,\mathbf{x}) > \\
&+ < \nabla_{\partial_t\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t), \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\gamma(s,t,\mathbf{x}) > \\
&+ < \nabla_{\partial_x\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t), \frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\gamma(s,t,\mathbf{x}) > \\
&+ < \nabla_{\partial_y\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t), \frac{\partial^2}{\partial s\partial y}\gamma(s,t,\mathbf{x}) > \\
&+ < \nabla_{\partial_z\phi} L(\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}), \partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}), t), \frac{\partial^2}{\partial s\partial z}\gamma(s,t,\mathbf{x}) > \\
&= 0
\end{aligned}$$

Quindi, usando (3.4) e applicando la regola di Leibniz, viene:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}[< \nabla_{\partial_t\phi}L(\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}),t),\partial_s\gamma(s,t,\mathbf{x}) >]+\\
&\frac{\partial}{\partial x}[< \nabla_{\partial_x\phi}L(\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}),t),\partial_s\gamma(s,t,\mathbf{x}) >]+\\
&\frac{\partial}{\partial y}[< \nabla_{\partial_y\phi}L(\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}),t),\partial_s\gamma(s,t,\mathbf{x}) >]+\\
&\frac{\partial}{\partial z}[< \nabla_{\partial_z\phi}L(\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_t\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_x\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_y\gamma(s,t,\mathbf{x}),\partial_z\gamma(s,t,\mathbf{x}),t),\partial_s\gamma(s,t,\mathbf{x}) >]\\
&= 0 \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Chiamo, $\forall s$,

$$J_{0_s}(t,\mathbf{x}) :=< \nabla_{\partial_t\phi}L(\gamma,\partial_t\gamma,\partial_x\gamma,\partial_y\gamma,\partial_z\gamma,t),\partial_s\gamma >$$

e sia

$$\begin{aligned}
J_{1_s}(t,\mathbf{x}) &=< \nabla_{\partial_x\phi}L(\gamma,\partial_t\gamma,\partial_x\gamma,\partial_y\gamma,\partial_z\gamma,t),\partial_s\gamma >\\
J_{2_s}(t,\mathbf{x}) &=< \nabla_{\partial_y\phi}L(\gamma,\partial_t\gamma,\partial_x\gamma,\partial_y\gamma,\partial_z\gamma,t),\partial_s\gamma >\\
J_{3_s}(t,\mathbf{x}) &=< \nabla_{\partial_z\phi}L(\gamma,\partial_t\gamma,\partial_x\gamma,\partial_y\gamma,\partial_z\gamma,t),\partial_s\gamma >
\end{aligned}$$

con $\vec{J}_s(t,\mathbf{x}) = (J_{1_s}, J_{2_s}, J_{3_s})$ e poniamo $\mathbf{J}_s(t,\mathbf{x}) := (J_{0_s}, \vec{J}_s)$ (per $s = 0$ avremo $\mathbf{J} = (J_0, \vec{J})$, con $J_0(t,\mathbf{x}) =< \nabla_{\partial_t\phi}L(\phi,\partial_t\phi,\partial_x\phi,\partial_y\phi,\partial_z\phi,t),\partial_s h^s(\phi)\mid_{s=0}>$). Da (3.5) si ottiene dunque:

$$div(\mathbf{J}_s) = \frac{\partial}{\partial t}J_{0_s} + \frac{\partial}{\partial x}J_{1_s} + \frac{\partial}{\partial y}J_{2_s} + \frac{\partial}{\partial z}J_{3_s} = 0 \qquad (3.6)$$

Tale equazione esprime una legge di conservazione. $\forall \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{D}}$, $\forall s \in]-s_0, s_0[$, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t}J_{0_s} = 0$$

ovvero l'applicazione

$$t \mapsto < \nabla_{\partial_t\phi}L(\gamma,\partial_t\gamma,\partial_x\gamma,\partial_y\gamma,\partial_z\gamma,t),\partial_s\gamma >$$

è costante. In particolare, per $s = 0$ (usando $\gamma(0,t,\mathbf{x}) = h^0(\phi(t,\mathbf{x})) = \phi(t,\mathbf{x})$)

$$< \nabla_{\partial_t\phi}L(\phi,\partial_t\phi,\partial_x\phi,\partial_y\phi,\partial_z\phi,t),\partial_s h^s(\phi)\mid_{s=0}>$$

si conserva nel tempo, $\forall \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{D}}$.
Se ora fissiamo il tempo t, ho, $\forall t$ e $\forall s$, che J_{0_s} è definita in ogni punto dello spazio $\bar{\mathcal{D}}$:

$$\bar{\mathcal{D}} \ni \mathbf{x} \mapsto J_{0_s}(\mathbf{x})$$

(tale applicazione è $C^1(\bar{\mathcal{D}})$); dunque se definisco la quantità

$$Q_s := \int_{\mathcal{D}} J_{0_s}(t, \mathbf{x}) dx dy dz$$

otteniamo da (3.6), utilizzando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_s}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} J_{0_s}(t, \mathbf{x}) dx dy dz = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} J_{0_s}(t, \mathbf{x}) dx dy dz = \\ &= -\int_{\mathcal{D}} div(\vec{J}_s(t, \mathbf{x})) dx dy dz = -\int_{\partial \mathcal{D}} < \vec{J}_s, \nu > d\sigma \end{aligned}$$

(dove nella seconda uguaglianza si è tenuto presente che, se si fissa il volume di integrazione, il segno di derivata parziale si può portare fuori dall'integrale per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale). In particolare, per $s = 0$:

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{\partial \mathcal{D}} < \vec{J}, \nu > d\sigma$$

Inoltre, se $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ e per ipotesi per $\| \mathbf{x} \| \longrightarrow \infty$ si ha $\vec{J} \longrightarrow 0$,

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

ovvero

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} < \nabla_{\partial_t \phi} L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0} > dx dy dz$$

è costante nel tempo. □

3.1 Traslazioni spaziali

Applichiamo il teorema di Noether attraverso degli esempi. Consideriamo la famiglia di traslazioni spaziali $(\tau^s)_{s \in]-s_0, s_0[}$ tale che, $\forall s \in]-s_0, s_0[$

$$\tau^s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + s\mathbf{n}$$

con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vettore arbitrario di norma 1. Sia $(h^s)_{s\in]-s_0,s_0[}$ la famiglia di applicazioni $\Omega \to \Omega$ C^∞ tale che $\forall\phi$

$$\phi(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \tau^s(\mathbf{x})) = \phi(t, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) = h^s(\phi(t, \mathbf{x}))$$

Vediamo quando la prima ipotesi del teorema riguardante tale famiglia

1. $L(h^s(\phi), \partial_t h^s(\phi), \partial_x h^s(\phi), \partial_y h^s(\phi), \partial_z h^s(\phi), t) = L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t)$, $\forall s$, $\forall(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t)$

è soddisfatta. Si ha:

$$\begin{aligned}
\partial_t h^s(\phi) &= \partial_t\phi(t, x + sn_1, y + sn_2, z + sn_3) = \partial_t\phi \\
\partial_x h^s(\phi) &= \partial_x\phi(t, x + sn_1, y + sn_2, z + sn_3) = \partial_x\phi \\
\partial_y h^s(\phi) &= \partial_y\phi(t, x + sn_1, y + sn_2, z + sn_3) = \partial_y\phi \\
\partial_z h^s(\phi) &= \partial_z\phi(t, x + sn_1, y + sn_2, z + sn_3) = \partial_z\phi
\end{aligned}$$

quindi $L(h^s(\phi), \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t) = L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t)$ per tutte le lagrangiane che non dipendono da ϕ (quindi in generale per le lagrangiane che hanno solo il termine cinetico). Le altre due ipotesi 2. e 3. sono ovviamente soddisfatte. Se supponiamo, infine, che il vettore

$$\vec{J}(t, \mathbf{x}) = (< \nabla_{\partial_x\phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>, < \nabla_{\partial_y\phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>, < \nabla_{\partial_z\phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>)$$

si annulli per $\| \mathbf{x} \| \longrightarrow \infty$, $\forall t$, abbiamo che

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} < \nabla_{\partial_t\phi} L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}> dxdydz$$

è costante nel tempo.
Calcoliamo dunque $< \nabla_{\partial_t\phi} L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>$.

$$\begin{aligned}
\partial_s h^s(\phi) = \partial_s\phi(t, x + sn_1, y + sn_2, z + sn_3) &= \partial_x\phi(t, \mathbf{x})n_1 + \partial_y\phi(t, \mathbf{x})n_2 + \partial_z\phi(t, \mathbf{x})n_3 = \\
&= M(t, \mathbf{x})\mathbf{n}
\end{aligned}$$

con

$$M(t, \mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial_x\phi_1 & \partial_y\phi_1 & \partial_z\phi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x\phi_n & \partial_y\phi_n & \partial_z\phi_n \end{pmatrix}$$

da cui

$$< \nabla_{\partial_t \phi} L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0} >=$$
$$=< (\nabla_{\partial_t \phi} L \partial_x \phi, \nabla_{\partial_t \phi} L \partial_y \phi, \nabla_{\partial_t \phi} L \partial_z \phi), \mathbf{n} >$$

Ricordando la definizione data nel capitolo 2 di
$\pi(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\partial_t \phi} L(\phi(t, \mathbf{x}), \partial_t \phi(t, \mathbf{x}), \partial_x \phi(t, \mathbf{x}), \partial_y \phi(t, \mathbf{x}), \partial_z \phi(t, \mathbf{x}), t)$ otteniamo che la quantità $\rho = \pi(\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$ si conserva nel tempo (dato che il versore $\mathbf{n}$ è stato fissato una volta introdotta la famiglia di traslazioni) e inoltre

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} < \rho, \mathbf{n} > dxdydz$$

è costante in t.

3.2 Traslazioni temporali

Consideriamo la lagrangiana di un sistema descritto dal campo $\phi(t, \mathbf{x})$ (il quale soddisfi le equazioni di Eulero Lagrange) che non dipende esplicitamente dal tempo

$$L = L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$$

Sia $(t^s)_{s \in\,]-s_0, s_0[}$ $(s_0 > 0)$ una famiglia di traslazioni della variabile t

$$t^s(t) = t + s$$

e dunque consideriamo l'insieme delle trasformazioni $(h^s(\phi))_{s \in]-s_0, s_0[}$ tale che $\forall s$

$$\Omega \to \Omega \qquad C^\infty$$
$$\phi(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t^s(t), \mathbf{x}) = \phi(t + s, \mathbf{x}) =: h^s(\phi)$$

tale che soddisfi le prime 3 ipotesi del teorema di Noether. Supponiamo, come prima, che il vettore

$$\vec{J}(t, \mathbf{x}) = (< \nabla_{\partial_x \phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0} >, < \nabla_{\partial_y \phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0} >, < \nabla_{\partial_z \phi} L, \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0} >)$$

si annulli per $\parallel \mathbf{x} \parallel \longrightarrow \infty$.
Calcoliamo $< \nabla_{\partial_t \phi} L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, t), \partial_s h^s(\phi) \mid_{s=0}>$. Abbiamo:

$$\partial_s h^s(\phi) = \partial_s \phi(t+s, \mathbf{x}) = \partial_t \phi(t, \mathbf{x})$$

dunque, per il teorema di Noether, per $s=0$, la quantità

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} < \nabla_{\partial_t \phi} L(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi), \partial_t \phi > dxdydz$$

è costante nel tempo. Poichè L non dipende esplicitamente dal tempo,

$$\frac{dL}{dt} =< \nabla_\phi L, \partial_t \phi > + < \nabla_{\partial_t \phi} L, \partial_t \partial_t \phi > +$$
$$+ < \nabla_{\partial_x \phi} L, \partial_t \partial_x \phi > + < \nabla_{\partial_y \phi} L, \partial_t \partial_y \phi > + < \nabla_{\partial_z \phi} L, \partial_t \partial_z \phi >=$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}[< \nabla_{\partial_t \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial x}[< \nabla_{\partial_x \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial y}[< \nabla_{\partial_y \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial z}[< \nabla_{\partial_z \phi} L, \partial_t \phi >]$$

in cui abbiamo sostituito $\nabla_\phi L$, dalle equazioni di Eulero Lagrange

$$\nabla_\phi L = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\partial_t \phi} L + \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\partial_x \phi} L + \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\partial_y \phi} L + \frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\partial_z \phi} L$$

Continuando:

$$\frac{dL}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}[< \nabla_{\partial_t \phi} L, \partial_t \phi >] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}[< \nabla_{\partial_x \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial y}[< \nabla_{\partial_y \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial z}[< \nabla_{\partial_z \phi} L, \partial_t \phi >]$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt}(L - < \nabla_{\partial_t \phi} L, \partial_t \phi >) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}[< \nabla_{\partial_x \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial y}[< \nabla_{\partial_y \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial z}[< \nabla_{\partial_z \phi} L, \partial_t \phi >]$$

da cui

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt}(L - < \nabla_{\partial_t \phi} L, \partial_t \phi >) dxdydz =$$
$$= \int_{\mathcal{D}} (\frac{\partial}{\partial x}[< \nabla_{\partial_x \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial y}[< \nabla_{\partial_y \phi} L, \partial_t \phi >] + \frac{\partial}{\partial z}[< \nabla_{\partial_z \phi} L, \partial_t \phi >]) dxdydz =$$
$$= \int_{\mathcal{D}} div \vec{J}(\mathbf{x}) dxdydz = \int_{\partial \mathcal{D}} < \vec{J}, \nu > dxdydz$$

utilizzando il teorema della divergenza, con ν normale esterna di $\partial\mathcal{D}$.
In conclusione, per $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ con $\vec{J}(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$ per $\| \mathbf{x} \| \longrightarrow \infty$, la quantità

$$E := \int_{\mathbb{R}^3} (< \nabla_{\partial_t \phi} L, \partial_t \phi > -L) dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} H dxdydz$$

che rappresenta l'energia totale del sistema, si conserva nel tempo.

Capitolo 4

Equazioni di Maxwell

In fisica classica le equazioni di Maxwell, elaborate da James Clerk Maxwell, sono un sistema di equazioni (due vettoriali e due scalari, per un totale di otto equazioni scalari) costituiscono le leggi fondamentali che governano l'interazione elettromagnetica. Esse esprimono l'evoluzione temporale e i vincoli a cui è soggetto il campo elettromagnetico in relazione alle distribuzioni di carica e corrente elettrica da cui è generato.
Le proprietà del campo elettromagnetico sono descritte dal campo elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$

$$\mathbf{E} : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \Omega$$
$$(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$
$$\mathbf{B} : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \Omega$$
$$(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$$

con Ω aperto di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ aperto regolare di $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ di classe C^1.

La prima equazione, nota come *legge di Gauss*, descrive la relazione tra un campo elettrostatico e le cariche elettriche che lo causano: il campo elettrostatico punta fuori dalle cariche positive e verso le cariche negative. Se consideriamo una carica Q_{int} all'interno di una superficie chiusa ∂V di classe C^1 di un volume V (V aperto regolare) si ha che il flusso del campo elettrico

$\Phi(\mathbf{E})$ dipende solamente da Q_{int}:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{\partial V} < \mathbf{E}, \nu > d\sigma = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{4.1}$$

con ν normale esterna di ∂V e ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$. Per il teorema della divergenza

$$\int_V div\mathbf{E} dxdydz = \int_{\partial V} < \mathbf{E}, \nu > d\sigma = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Se definiamo

$$Q_{int} = \int_V \rho dxdydz$$

con $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ che viene detta *densità di carica*, si ottiene

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.2}$$

Essa è la prima equazione di Maxwell.

La seconda legge, chiamata la legge di Faraday sull'elettromagnetismo (anche nota come legge dell'induzione elettromagnetica o legge di Faraday-Neumann), è una legge fisica che descrive il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, che si verifica quando il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata da un circuito elettrico è variabile nel tempo. La legge impone che nel circuito si generi una forza elettromotrice indotta (fem) pari all'opposto della variazione temporale del flusso di $\mathbf{B}$.
Sperimentalmente si trova che la circuitazione del campo elettrico lungo una curva γ regolare ovvero

$$\int_\gamma < \mathbf{E}, T > ds$$

con T versore tangente alla curva, è uguale all'opposto della variazione nel tempo del flusso del campo magnetico attraverso una superficie regolare Σ con bordo γ:

$$\int_\gamma < \mathbf{E}, T > ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma < \mathbf{B}, \nu > d\sigma$$

con ν normale esterna di Σ. Per il teorema di Stokes

$$\int_\gamma < \mathbf{E}, T > ds = \int_\Sigma < \nabla \times \mathbf{E}, \nu > d\sigma$$

quindi abbiamo la seconda legge di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.3}$$

La terza legge, la *legge di Gauss per il magnetismo*, afferma che il flusso del campo magnetico $\mathbf{B}$ in una qualsiasi superficie chiusa ∂V di classe C^1 di un volume V (V aperto regolare) è sempre nullo:

$$\int_{\partial V} < \mathbf{B}, \nu > d\sigma = 0$$

ovvero, per il teorema della divergenza:

$$div \mathbf{B} = 0 \tag{4.4}$$

L'ultima legge, la legge di Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4.5}$$

con $J = \rho \mathbf{v}$ *densità di corrente*, in cui $\mathbf{v}$ è la velocità delle cariche che compongono la corrente e ρ la loro densità volumica. Questa equazione mostra come anche la variazione temporale di un campo elettrico sia sorgente di un campo magnetico; nel caso stazionario, la legge afferma che l'integrale lungo una linea chiusa ∂S del campo magnetico $\mathbf{B}$ (ovvero la circuitazione del campo magnetico) è uguale alla somma algebrica delle correnti elettriche concatenate a ∂S (ovvero le correnti che passano per la superficie delimitata da ∂S) moltiplicata per la costante di permeabilità magnetica del vuoto μ_0.

Nel caso non stazionario abbiamo l'estensione (4.5).
Ecco qui di seguito esposte le 4 equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} div\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ div\mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{4.6}$$

Osservando la terza equazione del sistema, essa ci dice che la divergenza del campo magnetico $\mathbf{B}$ è sempre nulla; ciò significa che $\mathbf{B}$ si può scrivere come rotore di un campo vettoriale, detto *potenziale vettore* del campo magnetico, indicato con $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \tag{4.7}$$

con

$$\mathbf{A} : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^3$$

Osservazione 4.1. La divergenza di un rotore è sempre nulla, infatti: il rotore di un campo vettoriale $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, con $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω aperto, di classe C^2, opera così:

$$\nabla \times \mathbf{F} = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

con e_1, e_2, e_3 versori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Ora, facendo la divergenza del rotore:

$$div(\nabla \times \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0$$

Andando a sostituire (4.7) nella seconda equazione del sistema di Maxwell (4.6), si ha:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times (\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A})$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}) = 0$$

ovvero il campo $\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ di classe C^1 è irrotazionale su ogni punto del suo dominio spaziale $\bar{\mathcal{D}}$, quindi, per un lemma chiamato *lemma di Poincaré*, esso è conservativo su ogni aperto semplicemente connesso contenuto nel suo dominio spaziale, dunque esiste un campo scalare φ, detto *potenziale scalare*, tale che

$$\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} = -\nabla\varphi$$

In particolare, se $\bar{\mathcal{D}}$ è semplicemente connesso ed è contenuto in un aperto U di $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso ($\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ è di classe C^1 su U ed è irrotazionale su U) allora avremo che il potenziale scalare è definito su ogni punto di U, in particolare su ogni punto di $\bar{\mathcal{D}}$

$$\bar{\mathcal{D}} \to \varphi(\bar{\mathcal{D}})$$

Noi consideriamo il caso particolare, quindi $\bar{\mathcal{D}}$ semplicemente connesso contenuto in un aperto U semplicemente connesso, con i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ di classe C^1 su U. Ricapitolando

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \end{aligned} \tag{4.8}$$

su $\bar{\mathcal{D}}$. Naturalmente, poichè i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in generale dipendono dal tempo t, allora anche φ, come $\mathbf{A}$, ne dipendono.

$$\begin{gathered} \mathbf{A} : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^3 \\ (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = (A_x(t, \mathbf{x}), A_y(t, \mathbf{x}), A_z(t, \mathbf{x})) \\ \varphi : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{x}) \mapsto \varphi(t, \mathbf{x}) \end{gathered}$$

Entrambe sono funzioni di classe C^2.
Indichiamo con $\phi(t, \mathbf{x}) := (\varphi(t, \mathbf{x}), \mathbf{A}(t, \mathbf{x}))$ il campo vettoriale che ha come componenti il potenziale scalare e il potenziale vettore.

$$\begin{gathered} \phi : [t_0, t_1] \times \bar{\mathcal{D}} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad \phi \in C^2 \\ (t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x}) = (\varphi(t, \mathbf{x}), \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) \end{gathered}$$

Ω aperto di $\mathbb{R}^4$. Su questo campo ϕ applicheremo il metodo lagrangiano analizzato nel primo capitolo e vedremo che le equazioni di Eulero Lagrange ci porteranno alle equazioni di Maxwell.
Dobbiamo definire la lagrangiana: sappiamo che in generale essa è un'espressione del tipo

$$L = T - V$$

con T energia cinetica del sistema, V energia potenziale; V dipenderà solamente da ϕ, mentre T dipenderà da tutte le derivate parziali di ϕ.
La nostra lagrangiana sarà una funzione

$$\Omega \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$
$$(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi) \mapsto L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$

di classe C^2, ovvero

$$L = L(\varphi, \mathbf{A}, \partial_t\varphi, \partial_t\mathbf{A}, \partial_x\varphi, \partial_x\mathbf{A}, \partial_y\varphi, \partial_y\mathbf{A}, \partial_z\varphi, \partial_z\mathbf{A})$$

Il termine cinetico T lo definiamo come:

$$\begin{aligned} T = & -\frac{1}{2}[-\mu_0\epsilon_0(\| (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, \partial_z\varphi) \|^2 + \| \partial_t\mathbf{A} \|^2) + \| \partial_x\mathbf{A} \|^2 + \| \partial_y\mathbf{A} \|^2 + \| \partial_z\mathbf{A} \|^2] + \\ & +\frac{1}{2}[2\mu_0\epsilon_0 < \partial_t\mathbf{A}, (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, \partial_z\varphi) > + < \partial_x\mathbf{A}, (\partial_x A_x, \partial_y A_x, \partial_z A_x) > + \\ & + < \partial_y\mathbf{A}, (\partial_x A_y, \partial_y A_y, \partial_z A_y) > + < \partial_z\mathbf{A}, (\partial_x A_z, \partial_y A_z, \partial_z A_z) >] \end{aligned}$$

mentre il termine relativo a V:

$$V(\phi) = \mu_0 < \phi, \vec{J} >$$

con $\vec{J} = (\rho, -\mathbf{J}) = (\rho, -J_x, -J_y, -J_z)$, ρ densità di carica, $\mathbf{J}$ densità di corrente.

4.1 Dalle equazioni di Eulero-Lagrange alle equazioni di Maxwell

Partendo dalla lagrangiana definita prima, riusciamo a ricavare la prima e la quarta equazione del sistema di Maxwell (4.6), mentre la seconda e la terza si ricavano direttamente dalle definizioni (4.8). La configurazione $\phi(t, \mathbf{x}) = (\varphi(t, \mathbf{x}), \mathbf{A}(t, \mathbf{x}))$ è un moto fisico soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange (dal principio di Hamilton e utilizzando il teorema visto nel capitolo 1 il cui enunciato è: un moto fisico rende stazionaria l'azione se e solo se è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \partial_t \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \partial_x \varphi} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \partial_y \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \partial_z \varphi} = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial L}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \partial_t A_x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \partial_x A_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \partial_y A_x} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \partial_z A_x} = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial L}{\partial A_y} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \partial_t A_y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \partial_x A_y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \partial_y A_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \partial_z A_y} = 0 \quad (3) \\ \frac{\partial L}{\partial A_z} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \partial_t A_z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \partial_x A_z} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \partial_y A_z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \partial_z A_z} = 0 \quad (4) \end{cases} \tag{4.9}$$

da cui, nella (1) abbiamo:

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\mu_0 \rho$
- $\frac{\partial L}{\partial \partial_t \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \partial_t \varphi} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \partial_x \varphi} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial_x \varphi + \partial_t A_x) = -\mu_0 \epsilon_0 E_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \partial_x \varphi} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}$
- $\frac{\partial L}{\partial \partial_y \varphi} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial_y \varphi + \partial_t A_y) = -\mu_0 \epsilon_0 E_y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \partial_y \varphi} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial y}$
- $\frac{\partial L}{\partial \partial_z \varphi} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial_z \varphi + \partial_t A_z) = -\mu_0 \epsilon_0 E_z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \partial_z \varphi} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z}$

quindi (1) viene

$$-\mu_0 \epsilon_0 div(\mathbf{E}) = -\mu_0 \rho \Rightarrow div(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ovvero la prima legge del sistema di Maxwell. Nell'equazione (2) di (4.9) abbiamo:

- $\frac{\partial L}{\partial A_x} = \mu_0 J_x$
- $\frac{\partial L}{\partial \partial_t A_x} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial_t A_x + \partial_x \varphi) = -\mu_0 \epsilon_0 E_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \partial_t A_x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_x A_x} = \partial_x A_x - \partial_x A_x = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_x A_x} = 0$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_y A_x} = -\partial_y A_x + \partial_x A_y = B_z \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_y A_x} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_z A_x} = -\partial_z A_x + \partial_x A_z = -B_y \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_z A_x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial z}$

quindi

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu_0 J_x$$

Si procede in modo analogo per le equazioni (3) e (4) di (4.9), verifichiamo. Per la (3):

- $\dfrac{\partial L}{\partial A_y} = \mu_0 J_y$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_t A_y} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial_t A_y + \partial_y \varphi) = -m u_0 \epsilon_0 E_y \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_t A_y} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_x A_y} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_x A_y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial x}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_y A_y} = -\partial_y A_y + \partial_y A_y = 0$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_z A_y} = -\partial_z A_y + \partial_y A_z = B_x \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_z A_y} = \dfrac{\partial B_x}{\partial z}$

quindi

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 J_y$$

Infine, dalla (4):

- $\dfrac{\partial L}{\partial A_z} = \mu_0 J_z$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_t A_z} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial_t A_z + \partial_z \varphi) = -\mu_0 \epsilon_0 E_z \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_t A_z} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_x A_z} = -\partial_x A_z + \partial_z A_x = B_y \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_x A_z} = \dfrac{\partial B_y}{\partial x}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_y A_z} = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -B_x \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial L}{\partial \partial_y A_z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial x}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \partial_z A_z} = -\partial_z A_z + \partial_z A_z = 0$

cioè

$$(4) \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

(2), (3), (4) in forma più compatta danno proprio l'ultima equazione del sistema di Maxwell (4.6)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Appendice A

Teorema della divergenza

Per dimostrare il teorema della divergenza si può utilizzare un altro teorema, chiamato *teorema di integrazione per parti in* $\mathbb{R}^n$, che enunciamo qui di seguito, con una dimostrazione.

A.1 Teorema di integrazione per parti in $\mathbb{R}^n$

Abbiamo dato nel capitolo 1 la definizione di *aperto regolare*, riprendiamola.

Definizione A.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che Ω è un *aperto regolare* se:

1. Ω è limitato
2. $int(\bar{\Omega}) = \Omega$
3. $\partial\Omega$ è una $(n-1)$ varietà di classe C^1.

Abbiamo definito la *normale esterna* ν di $\partial\Omega$:

Definizione A.2. Se Ω è un aperto regolare si definisce ν *normale esterna* a Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ un versore normale a $\partial\Omega$ in x_0 tale che $\exists\delta > 0$ tale che $x_0 + r\nu \notin \Omega$, $\forall 0 < r < \delta$ e $x_0 - r\nu \in \Omega$, $\forall 0 < r < \delta$.

Teorema A.1 (di integrazione per parti in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$, cioè C^1 su un aperto che contiene $\bar{\Omega}$. Allora:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{(\partial\Omega)^+} f \nu_j d\sigma$$

$\forall j = 1, \dots, n$, dove ν_j è la componente j-esima della normale esterna.

Notazione A.1. $(\partial\Omega)^+$ indica che la parametrizzazione da scegliere per $\partial\Omega$ deve essere compatibile con ν, ovvero $det(\partial_{u_1} r \quad \partial_{u_{n-1}} r, \nu) > 0$, con $r : T \to \partial\Omega$ parametrizzazione di $\partial\Omega$, $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ aperto connesso, $u_1, \dots, u_{n-1}) \in T$, $r \in C^1$.

Per la dimostrazione ci servono 2 lemmi:

Lemma A.1. Sia O aperto di $\mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, $supp(h) \subset\subset O$ ($supp(h) \subset$ in un compatto $\subset O$, con $supp(h) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \neq 0\}}$). Allora:

$$\int_{O} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = 0$$

$\forall j = 1, \dots, n$.

Per il secondo lemma dobbiamo dare la seguente

Definizione A.3. Sia $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, sia $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Diciamo che D è *k-normale* se $\exists V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ aperto, $]a, b[$ intervallo reale e $\varphi : V \to]a, b[$ di classe C^1 tale che $D = \{(\bar{x}_k, x_k) \in V \times]a, b[: \varphi(\bar{x}_k) > x_k\}$=sottografico di φ, oppure $D = \{(\bar{x}_k, x_k) \in V \times]a, b[: \varphi(\bar{x}_k) < x_k\}$=sopragrafico di φ.

Lemma A.2. Sia D k-normale, $D \subset V \times]a, b[$ e sia $h \in C^1(\Omega)$ con Ω un aperto che contiene $\bar{V} \times [a, b]$ e supponiamo che $supp(h) \subset\subset V \times]a, b[$. Allora:

$$\int_{D} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = \int_{\partial^* D} h \nu_j d\sigma$$

$\forall j = 1, \dots, n$, dove $\partial^* D = \{(\bar{x}_k, x_k) : x_k = \varphi(\bar{x}_k)\}$.

Per la dimostrazione del teorema, diamo un'ultima definizione:

Definizione A.4. Una *partizione dell'unità* associata ad un compatto K e a un suo ricoprimento aperto $B = \{U_j; j \in I\}$ è una famiglia finita di funzioni $\{P_h, h = 1, \ldots, m\}$ tale che $P_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tale che

1. $supp(h) \subset\subset U_{i_h}$ per $i_h \in I$
2. $0 \leq P_h \leq 1$
3. $\sum_{h=1}^m P_h = 1$ in un aperto che contiene K.

Dimostrazione teorema. Sia $x \in \partial\Omega$ ($n-1$ varietà di classe C^1) e sia U_x un intorno di x tale che $\Omega \cap U_x$ sia k-normale per un certo k.
Sia $U_x^{'} \subset U_x$ tale che $\Omega \cap U_x^{'}$ è k-normale. Al variare di $x \in \partial\Omega$, $(U_x^{'})_{x\in\partial\Omega}$ sono un ricoprimento aperto di $\partial\Omega$, il quale è compatto. Da $(U_x^{'})_{x\in\partial\Omega}$, per compattezza, si può estrarre un sottoricoprimento finito $(U_j^{'})_{j=1,\ldots,m}$. Chiamo $U_0 = \Omega \setminus \overline{(\cup_{j=1}^m U_j^{'})}$. U_0 è aperto.
$B = \{U_0, \ldots, U_m\}$ è un ricoprimento aperto di $\bar{\Omega}$. Consideriamo una partizione dell'unità associata a $\bar{\Omega}$ e B, la famiglia di funzioni $supp(h) \subset\subset U_h$ $\forall h = 0, \ldots, m$.

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} h(x)dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(h(x)\cdot 1)dx = (\sum_{j=0}^m P_j = 1) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(h\sum_{k=0}^m P_k)dx =$$
$$= \sum_{k=0}^m \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(hP_k)dx$$

$supp(P_0) \subset\subset U_0 \subset \Omega$; per il lemma 1

$$\sum_{k=0}^m \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(hP_k)dx = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega\cap U_k} \frac{\partial}{\partial x_j}(hP_k)dx$$

$supp(P_k) \subset\subset U_k$; per il lemma 2

$$\sum_{k=1}^m \int_{\Omega\cap U_k} \frac{\partial}{\partial x_j}(hP_k)dx = \sum_{k=1}^m \int_{\partial^*(\Omega\cap U_k)=\partial\Omega\cap U_k} (hP_k\nu_j)d\sigma =$$
$$= \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Omega} hP_k\nu_j d\sigma = \int_{\partial\Omega} h(\sum_{k=1}^m P_k)\nu_j d\sigma =$$
$$= \int_{\partial\Omega} h(\sum_{k=0}^m P_k)\nu_j d\sigma = \int_{\partial\Omega} h\nu_j d\sigma$$

□

A.2 Teorema della divergenza

Attraverso il teorema di integrazione per parti in $\mathbb{R}^n$, siamo pronti ad enunciare e dimostrare il teorema della divergenza.

Teorema A.2 (della divergenza)**.** Sia $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, con Ω aperto regolare, $F \in C^1(\bar{\Omega})$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Allora

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{(\partial\Omega)^+)} < F, \nu > d\sigma$$

con ν normale esterna di $\partial\Omega$ e $div(F) := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j$.

Dimostrazione.

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \partial_{x_j} F_j$$

da cui, per il teorema di integrazione per parti in $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^n \int_\Omega \partial_{x_j} F_j = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial\Omega)^+} F_j \nu_j d\sigma = \int_{(\partial\Omega)^+} \sum_{j=1}^n F_j \nu_j d\sigma =$$
$$= \int_{(\partial\Omega)^+} < F, \nu > d\sigma$$

□

Bibliografia

[1] Joseph Conlon, *Elements of Classical Field Theory*, University of Oxford, notes,
http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/courses/C6/C6_2017/C6Notes/classic.pdf.

[2] Alberto Strumia, *Complementi di Meccanica Analitica*, notes,
http://albertostrumia.it/sites/default/files/images/books/Meccanica/24_capitolo24.pdf.

[3] Giuseppe Gaeta, *Il principio di minima azione, le equazioni di Eulero-Lagrange, ed il teorema di Noether*, notes,
http://www.mat.unimi.it/users/gaeta/FM3/princ_var.pdf,
2019.

[4] Diego Bettoni, *Lagrangiane, fenomenologia delle Interazioni Forti*,
http://www.fe.infn.it/ bettoni/particelle/Lezione2.pdf, Anno Accademico 2008-09.

[5] Giorgio Turchetti, *Modelli e Metodi Numerici della Fisica*, cap 19,
http://www.physycom.unibo.it/LibroModelliNumericiTurchetti/Met_Num_19.pdf, A.A 2017/2018.

Ringraziamenti

All'ultima pagina si trovano i ringraziamenti. Dovrebbero essere nella prima, in realtà. In generale penso che oggi si tenda spesso a ringraziare troppo poco, per questo do importanza a questa pagina.
Ho capito, in questi anni di università, che le persone che ci Sono, con la S maiuscola, si contano davvero nelle dita di una mano. Sono quelle persone che tu sai che ci saranno sempre per te, lo sai e basta. Non servono parole, rumori, è sufficiente il silenzio. Questa pagina è dedicata a loro, perchè sono loro che mi hanno fatta arrivare fin qui, sono loro che mi porteranno ovunque, nel futuro. Mi riempiono la vita. Queste persone sono la mia Famiglia, il mio fidanzato Marco, i miei migliori amici. Un Grazie non basterà mai, ma qui ve lo scrivo, in modo che rimarrà scritto e nessuno potrà cancellarlo. Un bene immenso per voi, siete nel mio cuore.