

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Stima dei vincoli cosmologici dalla funzione  
di massa degli ammassi di galassie  
nel progetto Euclid**

**Relatore:**  
**Prof. Federico Marulli**

**Presentata da:**  
**Mattia Di Palma**

**Correlatore:**  
**Dott. Alfonso Veropalumbo**

**Anno Accademico 2018/2019**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Brevi nozioni di Cosmologia</b>	<b>5</b>
2.1	Relatività generale . . . . .	5
2.2	Materia oscura . . . . .	6
2.3	Energia oscura . . . . .	8
2.4	Ammassi di galassie . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Euclid</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Calcolo della funzione di massa e risultati</b>	<b>13</b>
4.1	Funzione di massa . . . . .	13
4.2	CosmobolognaLib e Blade Runner . . . . .	14
4.3	Calcolo della funzione di massa . . . . .	14
4.4	Risultati . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Analisi e conclusioni</b>	<b>24</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>26</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

Uno dei problemi aperti di maggior interesse in campo astrofisico e non solo è sicuramente quello della materia oscura (sez 2.2). Questa rappresenta una forma di materia non barionica di cui non si conoscono ancora le proprietà. Un obiettivo di notevole importanza per la ricerca scientifica è comprenderne le caratteristiche in virtù del fatto che insieme all'energia oscura (sez 2.3) costituisce il 95% circa di tutta la materia e l'energia dell'Universo. L'ESA (European Space Agency) ha programmato per il 2022 il lancio di un satellite, Euclid (cap 3), che orbiterà intorno al punto lagrangiano L2 situato a circa un milione e mezzo di chilometri dalla Terra, al fine di arricchire la comprensione riguardo queste forme di materia ed energia sconosciute. Nell'allestimento di questo esperimento, un ruolo cruciale riveste la funzione di massa (sez 4.1) definita come la densità comovente di aloni virializzati di materia oscura con una certa massa  $M$  in un volume  $V$ . Su questa si basa l'analisi dei dati che Euclid sarà in grado di raccogliere. Il ruolo della funzione di massa è centrale poiché da essa è possibile estrarre e stimare i parametri cosmologici fondamentali relativi alla materia e all'energia oscura.

Grazie ad un codice che sfrutta le `CosmobolognaLib` (sez 4.2) sono stati analizzati sette modelli diversi di funzioni di massa per capire quale tra questi sia in grado di riprodurre al meglio l'andamento dei dati sperimentali. Successivamente attraverso un'analisi dei valori e dei grafici basati sull'output del codice, si è potuto stabilire quale o quali modelli presentavano un'elevata affidabilità per l'estrazione dei vincoli cosmologici. Per prima cosa nel capitolo 2 sono stati definiti e descritti gli strumenti teorici utili per comprendere le analisi ed i risultati presentati nel capitolo 4. Nel capitolo 3 è stato presentato e caratterizzato lo strumento al centro di questo progetto: il telescopio spaziale Euclid. Gli scopi di questa tesi sono:

- Analizzare diversi modelli della funzione di massa e confrontarne i valori con quelli fissati a priori nelle simulazioni.
- Stabilire l'affidabilità dei vari modelli di funzioni di massa ed estrapolare una stima dei vincoli cosmologici.

# Capitolo 2

## Brevi nozioni di Cosmologia

### 2.1 Relatività generale

La Relatività generale è la teoria che dal 1915 ad oggi ha offerto una descrizione quantitativa e rigorosa su come funzioni la forza di gravità dando spiegazione ad una consistente mole di fenomeni astrofisici prima di allora insoluti. La formulazione dell'equazione di campo si deve ad Albert Einstein. Il fisico tedesco a distanza di 10 anni dalla Relatività speciale, riuscì ad includere nella sua teoria i sistemi soggetti ad accelerazione, detti non inerziali descrivendoli in uno spazio-tempo quadridimensionale.

Questo fu possibile grazie all'introduzione del principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale che afferma che non è possibile distinguere gli effetti della gravità (massa gravitazionale) da quelli prodotti da un sistema di riferimento accelerato (massa inerziale).

L'equazione in questione è la seguente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Da questa equazione si evince una relazione tra spazio-tempo e materia. Nei membri a sinistra dell'equazione troviamo il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$ , quello di curvatura scalare  $R$  e il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  che possono essere riuniti e formare il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$ . Lo scalare  $\Lambda$  è la cosiddetta costante cosmologica che Einstein introdusse, con segno negativo, per riuscire a descrivere un Universo statico. Successivamente  $\Lambda$  venne rimossa dal a causa delle osservazioni di Hubble che misero in luce un Universo in espansione. Dopo diversi anni fu ripresa di nuovo in considerazione per tentare di spiegare l'accelerazione nell'espansione del cosmo.

Al secondo membro è presente il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . Questo descrive la massa e l'energia di un corpo e determina la geometria che assume lo spazio-tempo descritto da  $G_{\mu\nu}$ . Entrambi i tensori,  $G_{\mu\nu}$  e  $T_{\mu\nu}$ , sono simmetrici (0,2) e solenoidali. Karl Schwarzschild fu il primo a fornire una soluzione formale alla suddetta equazione, descrivendo

una sorgente nel vuoto a simmetria sferica, priva di carica e rotazione:

$$ds^2 = -1 - \left(\frac{R_H}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_H}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.2)$$

dove  $ds$  è l'elemento di linea,  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  sono le tre coordinate sferiche dello spazio,  $dt$  è il differenziale della coordinata temporale ed  $R_H$  è il raggio di Schwarzschild che corrisponde alla distanza tra l'orizzonte degli eventi, ovvero la regione di spazio-tempo in cui la velocità di fuga eguaglia la velocità della luce, ed il centro della sorgente. La metrica trovata da Schwarzschild descrive un spazio-tempo a 4 dimensioni.

## 2.2 Materia oscura

Analizzando la dinamica delle galassie, emerge una netta incongruenza tra la massa osservata e i valori della massa ricavati dalla dinamica stessa. Nelle galassie a spirale si utilizza la curva della velocità di rotazione per ricavare la massa per mezzo dell'equazione tra forza gravitazionale e forza centrifuga:

$$\frac{GM}{R^2} \simeq \frac{v_{rot}^2(R)}{R} \quad (2.3)$$

in cui  $M$  è la massa totale,  $R$  il raggio, e  $G$  la costante di gravitazione universale. Le galassie ellittiche, dal momento che non possiedono velocità angolare ordinata, possono essere descritte applicando il teorema del viriale:

$$\langle 2T \rangle + \langle \Omega \rangle = 0 \quad (2.4)$$

dove  $\Omega$  è l'energia potenziale e  $T$  l'energia cinetica.

In questo modo è possibile bilanciare l'energia cinetica ricavata dalla velocità di dispersione  $\bar{v}$  e l'energia potenziale di autogravitazione:

$$\frac{1}{2}M\bar{v}^2 \simeq \epsilon \frac{GM}{R} \quad (2.5)$$

dove  $\epsilon$  è un fattore geometrico dell'ordine dell'unità.

Calcolando il rapporto massa-luminosità  $\mathbf{M/L}$  che per il Sole è circa dell'ordine dell'unità, si nota che per le galassie a spirale esso può raggiungere valori superiori a 10. Per quelle ellittiche si può spingere fino a 20 o 30[1]; appare chiaro che esiste una componente gravitazionale predominante in queste strutture a grande scala che non interagisce elettromagneticamente, altrimenti sarebbe possibile rilevare effetti di assorbimento e di emissione. Questa componente massiva viene chiamata **materia oscura**. Tra gli effetti noti che essa produce c'è il **gravitational lensing**; con questi termini ci si riferisce alla capacità della massa e dell'energia di distorcere lo spazio-tempo e creare un "effetto lente" quando i raggi luminosi di una sorgente tentano di viaggiare in linea retta venendo distorti a causa del percorso deformato.

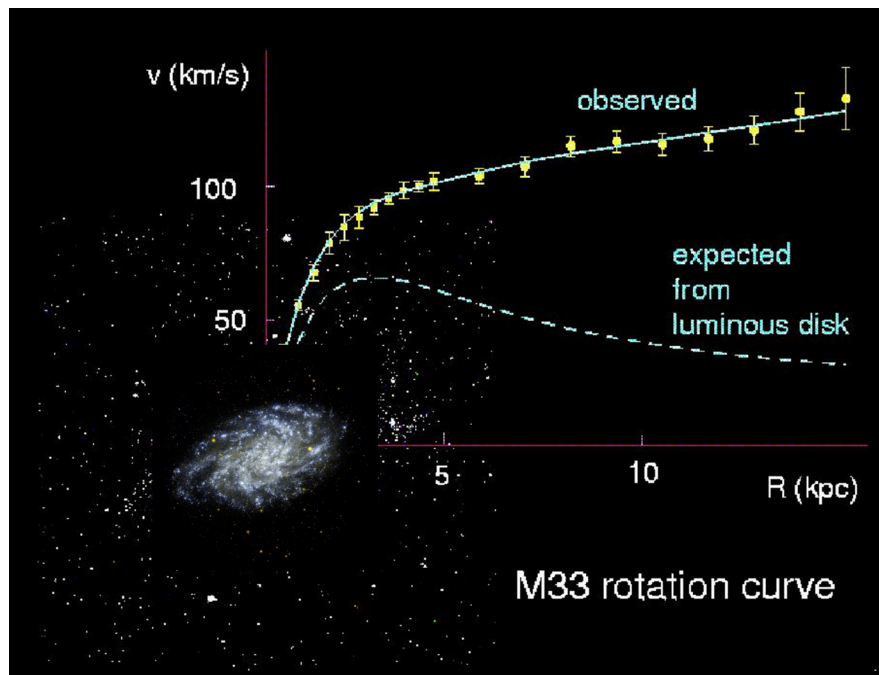


Figura 2.1: Curva della velocità di rotazione della galassia M33 [12].

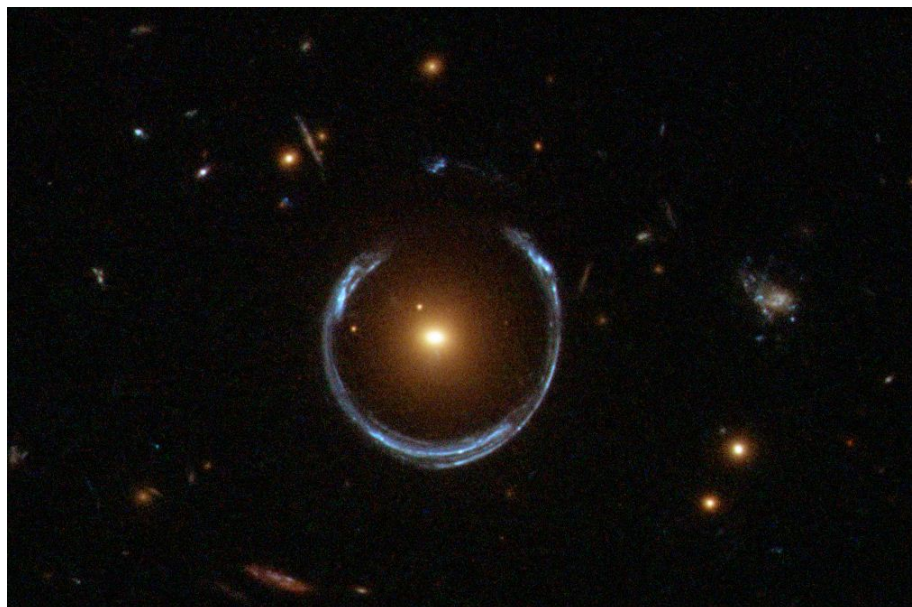


Figura 2.2: Gravitational lensing [13].



## 2.3 Energia oscura

**Energia oscura** è il termine che è stato coniato per indicare una qualche forma di energia del tutto sconosciuta, i cui effetti e le cui proprietà sono ancora inspiegati. La presenza di questa energia è stata rilevata a causa del seguente fatto: se si prova a studiare il modo in cui l'Universo si sta espandendo, si deduce subito che la legge di Hubble (linearmente proporzionale alla distanza), secondo cui la velocità con cui le galassie si allontanano le une dalle altre,

$$v = H_0 d \quad (2.6)$$

( $v$ =velocità,  $H_0$ =costante di Hubble,  $d$ =distanza) non rende conto di alcuni dati sperimentali. Nello specifico, le luminosità apparenti di supernove di tipo Ia (esplosioni stellari utilizzate come candele standard per la misura delle distanze a causa della loro ben determinata luminosità assoluta nel punto di massimo) in galassie con redshift compreso approssimativamente tra 0.4 e 0.7 sono minori di ciò che ci si aspetterebbe per un Universo che si espande linearmente secondo la legge di Hubble. L'interpretazione in grado di spiegare al meglio questa incongruenza assume che la velocità con cui una galassia si allontana da noi aumenti nel tempo e quindi con la distanza. Questo porta a concludere che l'espansione dell'Universo è in fase di accelerazione. Tutto ciò è in contraddizione con i modelli cosmologici che prevedono la generazione di una forza gravitazionale attrattiva da parte della massa a riposo[1].

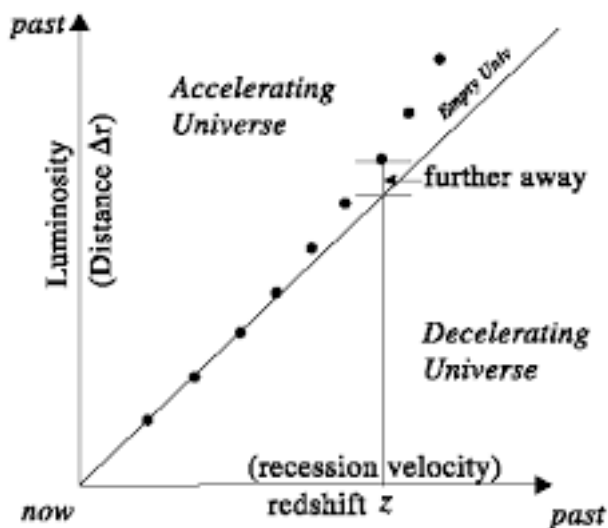


Figura 2.3: Accelerazione dell'espansione dell'Universo in un grafico della luminosità in funzione del redshift [14].

## 2.4 Ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono costituiti da materia luminosa, gas intergalattico e materia oscura. Quest'ultima è la componente più abbondante; un generico ammasso ne è composto per circa l'80%. Il gas intergalattico che circonda gli ammassi è presente in una percentuale che si aggira intorno al 15%. Si trova a temperature molto elevate, nell'ordine delle decine di milioni di gradi e per questo è completamente ionizzato. E' possibile rivelarlo tramite la sua stessa emissione, detta Bremsstrahlung che lo rende visibile nella regione dello spettro elettromagnetico appartenente ai raggi X. Il riscaldamento del gas è dovuto alla sua "compressione" nel campo gravitazionale dell'ammasso. Gli ammassi si presentano in due diversi tipi morfologici, ammassi irregolari e regolari. Negli ammassi irregolari prevalgono le galassie a spirale, mentre in quelli regolari prevalgono quelle ellittiche[2]. Il gas presente negli ammassi irregolari raggiunge temperature intorno ai  $10^7$  K e l'emissione è concentrata intorno alle singole galassie; negli ammassi regolari il gas è più caldo, fino ai  $10^8$  K e l'emissione X riproduce la distribuzione del gas intergalattico in equilibrio idrostatico nel campo gravitazionale. In un ammasso tipico, solo il 5% della massa totale si presenta sotto forma di materia luminosa.

Le osservazioni indicano che più un ammasso è ricco, più numerose sono le sue galassie ellittiche e più è regolare. L'ipotesi più accreditata per la loro formazione si basa sull'attrazione gravitazionale presente tra strutture più piccole come gruppi di galassie o galassie singole. La massa di queste strutture è dell'ordine di circa  $10^{14}$ - $10^{15}$  masse solari e il loro diametro si aggira tipicamente intorno ai 25 milioni di anni luce, a differenza dei gruppi di galassie che presentano una massa di circa  $10^{13}$  masse solari e un diametro approssimativamente di 3 milioni di anni luce[1].



Figura 2.4: Ammasso di galassie Abell 2218 [15].

# Capitolo 3

## Euclid

Euclid si occuperà di operare una continua ed approfondita scansione del cielo fino ad una distanza corrispondente a redshift  $\simeq 2$ , circa 10 miliardi di anni luce. Euclid avrà a disposizione due strumenti per raccogliere più dati possibili e far luce sul lato più oscuro dell'Universo: Il VIS (Visible Instrument) e il NISP (Near Infrared Spectrometer Photometer). Il satellite in questione cercherà di dare risposta ai seguenti punti di domanda:

- **Energia oscura:** Si tratta semplicemente di una costante cosmologica oppure è possibile considerarla come un campo che evolve dinamicamente con l'espansione dell'Universo?
- **Gravità modificata:** E' possibile che l'accelerazione dell'Universo indichi un limite della Relatività generale su scale molto grandi e delle ipotesi di omogeneità e isotropia?
- **Materia oscura:** Che cos'è la materia oscura? Qual è la massa dei neutrini?
- **Condizioni iniziali:** Qual è lo spettro di potenza della densità delle fluttuazioni primordiali che ha dato luogo alle strutture a grande scala? Queste possono essere descritte da una distribuzione di probabilità Gaussiana?

Per quanto riguarda il primo punto si deve considerare l'equazione di stato dell'energia oscura, ovvero il rapporto tra la pressione e la densità di energia oscura

$$w(a) = \frac{p(a)}{\rho(a)c^2} \quad (3.1)$$

dove  $p$  è la pressione,  $\rho$  la densità di energia oscura,  $w$  è la costante cosmologica fissata a -1 ed  $a$  è un fattore di scala dell'Universo ( $a = \frac{1}{1+z}$ ). Euclid determinerà la dipendenza dal redshift di questa funzione. La dipendenza può essere parametrizzata attraverso uno

sviluppo di Taylor al primo ordine rispetto ad  $a$ . Se venisse rilevato un valore di  $w(a)$  diverso da -1, sarebbe la prova che l'energia oscura non è una costante cosmologica, ma piuttosto un vero e proprio campo che evolve dinamicamente.

Per studiare la causa dell'accelerazione dell'espansione come un comportamento diverso della gravità, è necessario analizzare il fattore di crescita  $f(z) = \Omega_m^\gamma$  molto sensibile alla gravità.  $f(z)$  quantifica l'accuratezza relativa alla crescita della struttura dell'Universo. Un discostarsi di  $\gamma$  (tasso di crescita) dal valore di 0.55 indicherebbe una deviazione dalla Relatività generale e un'origine probabilmente diversa dell'accelerazione dell'espansione. Riguardo il terzo punto ci sono alcune precisazioni da dover fare. La prima è che molti esperimenti, il cui obiettivo è comprendere le proprietà della materia oscura, hanno già confermato che sebbene almeno due specie di neutrino su tre possiedano una massa che oscilla tra valori diversi da zero, solo una piccola frazione di queste particelle costituirebbe parte della materia oscura presente nell'Universo. Negli esperimenti di laboratorio è molto complicato misurare la massa assoluta del neutrino; riuscire ad eseguire una tale misura potrebbe portare alla risposta riguardo quale tipo di gerarchia seguono i neutrini, nello specifico: normale (due neutrini leggeri ed uno pesante), oppure invertita (due neutrini pesanti ed uno leggero). Tutto ciò mostrerebbe quale meccanismo regoli l'attribuzione della massa per queste particelle. La seconda doverosa precisazione, consiste nel supporre che se la materia oscura potesse interagire con sé stessa, la formazione di strutture su scale relativamente piccole sarebbe soppressa. Le osservazioni attuali dimostrano che la materia oscura ha una bassa autointerazione ed una massa molto elevata. Euclid misurerà la densità degli aloni di materia oscura e lo spettro di potenza con altissima precisione migliorando così i vincoli sull'autointerazione di circa 3 ordini di grandezza rispetto agli attuali vincoli.

Per quel che concerne il quarto ed ultimo punto, una caratterizzazione accurata dello spettro di potenza primordiale fornirebbe un'importante test per i modelli di inflazione, dove per inflazione si intende l'intervallo di tempo di circa  $10^{-30}$  secondi in cui l'Universo si è espanso molto rapidamente aumentando il suo raggio di circa  $10^{25}$ - $10^{30}$  volte a circa  $10^{-35}$  secondi dal Big Bang. Gli attuali modelli prevedono uno spettro di potenza primordiale, il cui indice spettrale  $n_s$  è dell'ordine dell'unità. In modelli di inflazione più complessi l'indice  $n_s$  potrebbe dipendere anche dalla scala. Euclid sarà in grado di misurare l'indice spettrale e la sua dipendenza dalla scala con una precisione simile a quella del telescopio Planck e potrà così porre dei limiti più precisi sullo spettro di potenza della densità delle fluttuazioni iniziali. Dato che qualsiasi modello inflazionario prevede delle piccole deviazioni da una distribuzione di probabilità Gaussiana per le suddette fluttuazioni, dalla raccolta dei dati di Euclid sarà possibile misurare il parametro  $f_{NL}$ , utilizzato per descrivere quanto una distribuzione si discosti da una Gaussiana.

Euclid sfrutterà i seguenti effetti per la sua indagine durante i suoi sei anni in orbita: il **Weak gravitational lensing** e il **Galaxy clustering**. Il telescopio analizzerà il profilo di circa 1.5 miliardi di galassie per catturare più informazioni possibili riguardo l'espansione e la crescita dell'Universo con precisione molto elevata. Questo è possibile grazie



# Capitolo 4

## Calcolo della funzione di massa e risultati

### 4.1 Funzione di massa

La funzione di massa  $n$  è definita come la densità comovente di aloni virializzati di materia oscura con una certa massa  $M$  in un volume  $V$ .

$$dN = n(M)dM \quad (4.1)$$

dove  $dN$  è il numero di aloni di materia oscura per unità di volume comovente con massa compresa tra  $M$  e  $M+dM$ .

Attraverso un'analisi statistica è possibile utilizzare  $n$  per estrarre dei valori al fine di ottenere una stima dei parametri cosmologici, come ad esempio  $\Omega_m$ , ovvero la densità di materia presente nell'Universo. I modelli presi in esame sono quelli di: Jenkins (et al. 2001), Sheth & Tormen (et al. 2002), Warren (et al. 2006), Tinker (et al. 2008), Courtin (et al. 2010), Crocce (et al. 2010), Despali (et al. 2016). I primi a fornire una formulazione analitica della funzione di massa  $n(M)$  furono William H. Press e Paul Schechter nel 1974:

$$n(M)dM = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d\sigma_M}{dM} \frac{\delta_c \rho_0}{M \sigma_M^2} \exp\left(-\frac{\delta_c}{2\sigma_M^2}\right) dM \quad (4.2)$$

dove  $\rho_0$  è la densità critica,  $\sigma_M^2$  è la varianza di un campo di densità lineare  $\delta_M$  da cui partirono Press e Schechter per ricavare la formula finale di  $n(M)$ .  $\delta_c$  è il valore di una certa densità di soglia che viene superato dal campo  $\delta_M$ ; l'idea di Press e Schechter infatti è quella di studiare l'aggregarsi di una certa quantità di materia di massa  $M$  osservando la porzione di  $\delta_M$  che eccede  $\delta_c$  nell'ipotesi di un collasso a simmetria sferica di raggio  $R$  e massa  $M$ . Alcuni dei modelli analizzati in questo lavoro di tesi seguono

da modifiche analitiche apportate all'equazione 4.2 nel tentativo di generalizzarla. Altri scaturiscono dall'aggiunta di parametri liberi i cui valori sono stati definiti attraverso il best-fit eseguito sui risultati di simulazioni N-body. Si fa notare infine che la dipendenza della funzione di massa  $n(M)$  dai parametri cosmologici entra in gioco in  $\sigma_M$  e in  $\rho_0$ .

## 4.2 CosmobolognaLib e Blade Runner

In questo capitolo verrà illustrata la parte operativa e verranno presentati i risultati ottenuti. L'intero lavoro di si è basato sulle CBL (CosmobolognaLib), delle librerie C++ che mettono a disposizione una vasta gamma di strumenti per calcoli di cosmologia[8]. I due parametri al centro di questa analisi sono  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$ . Quest'ultimo è stato calcolato mediante il metodo Eisenstein-Hu contenuto in una classe esterna allegata alla distribuzione delle CBL. Il codice presenta due metodologie diverse per l'analisi della funzione di massa:

- Best-fit
- Markov Chain

Sia il best-fit che le catene di Markov sono stati eseguiti su tre diversi valori di redshift ( $z$ ):  $z=0$ ,  $z=0.5066$ ,  $z=1.019$ . A livello operativo è stato necessario avvalersi del cluster di calcolo Blade Runner dell'Università di Bologna poiché la mole di dati da analizzare e la potenza di calcolo richiesta erano superiori a quelle accessibili a un solo pc. Le risorse necessarie per il calcolo consistono in 48 Gb di Ram, 24 processori e 2.1 GHz di frequenza di clock. I parametri in input associati all'esecuzione del codice sono contenuti in un file `parameter.ini`.

## 4.3 Calcolo della funzione di massa

Le catene di Markov si identificano come stati finiti nei quali la transizione da uno stato all'altro avviene su base probabilistica, anziché deterministica. L'informazione disponibile circa una catena al generico istante  $t$  è fornita dalle probabilità che essa si trovi in uno qualsiasi degli stati, e l'evoluzione temporale della catena viene specificata precisando in quale modo tali probabilità si aggiornino passando dall'istante  $t$  all'istante  $t+1$ . Esse permettono un'analisi più precisa delle funzioni di massa fornendo anche l'errore sui parametri liberi ( $\Omega_m$  e  $\sigma_8$ ) ed il grafico più rilevante che è possibile estrapolare è quello di dispersione relativo ai suddetti parametri[9].

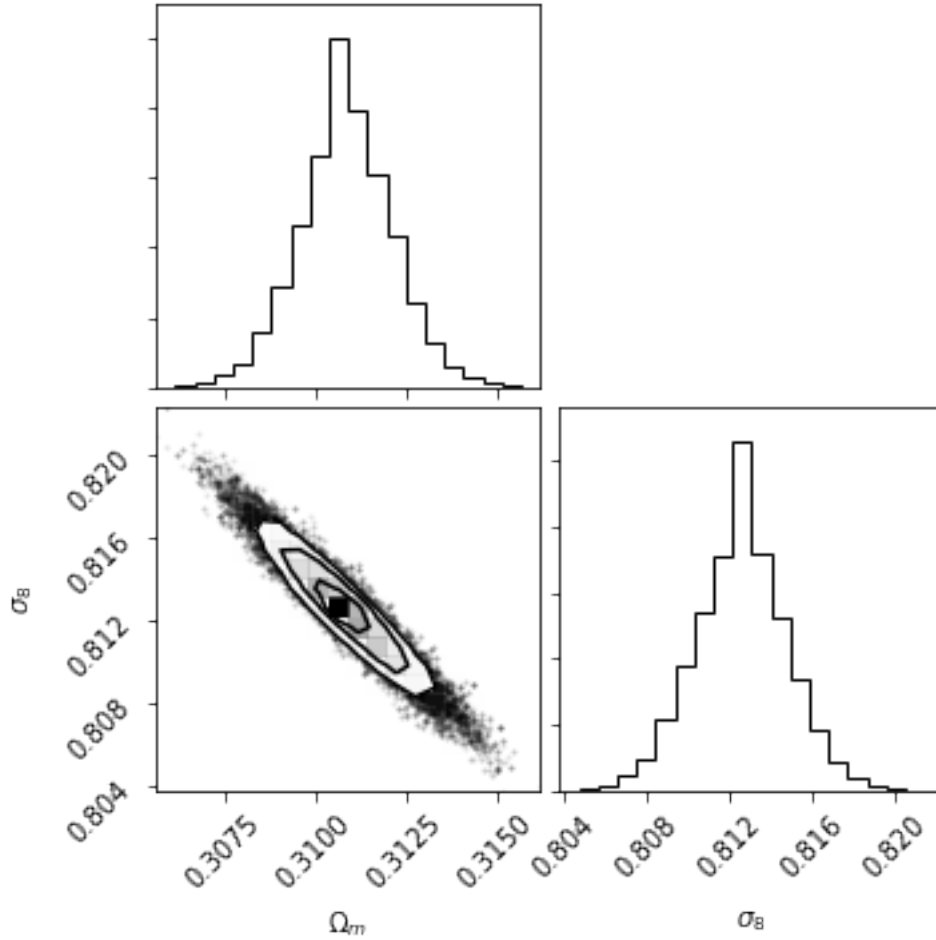


Figura 4.1: Grafico di dispersione di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  relativo a Despali per  $z = 0$ .

## 4.4 Risultati

In questo paragrafo verranno presentati i risultati delle catene di Markov. Inoltre verrà mostrato l'andamento delle funzioni di massa degli autori studiati; successivamente verrà eseguito un confronto tra tutti i modelli e quello di Despali (et al. 2016), poiché è il modello utilizzato per generare i cataloghi simulati. Di seguito sono presenti tre grafici che descrivono la distribuzione dei valori medi di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  con i loro rispettivi errori nei tre redshift presi in considerazione ( $z=0$ ,  $z=0.5066$ ,  $z=1.109$ ) e una tabella per semplificare la lettura dei suddetti valori. Si precisa che i valori di fiducia (presi in input dal programma) con cui verranno confrontati i valori di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  sono:

- $\Omega_{m,FID} = 0.30711$



- $\sigma_{8,FID} = 0.8288$

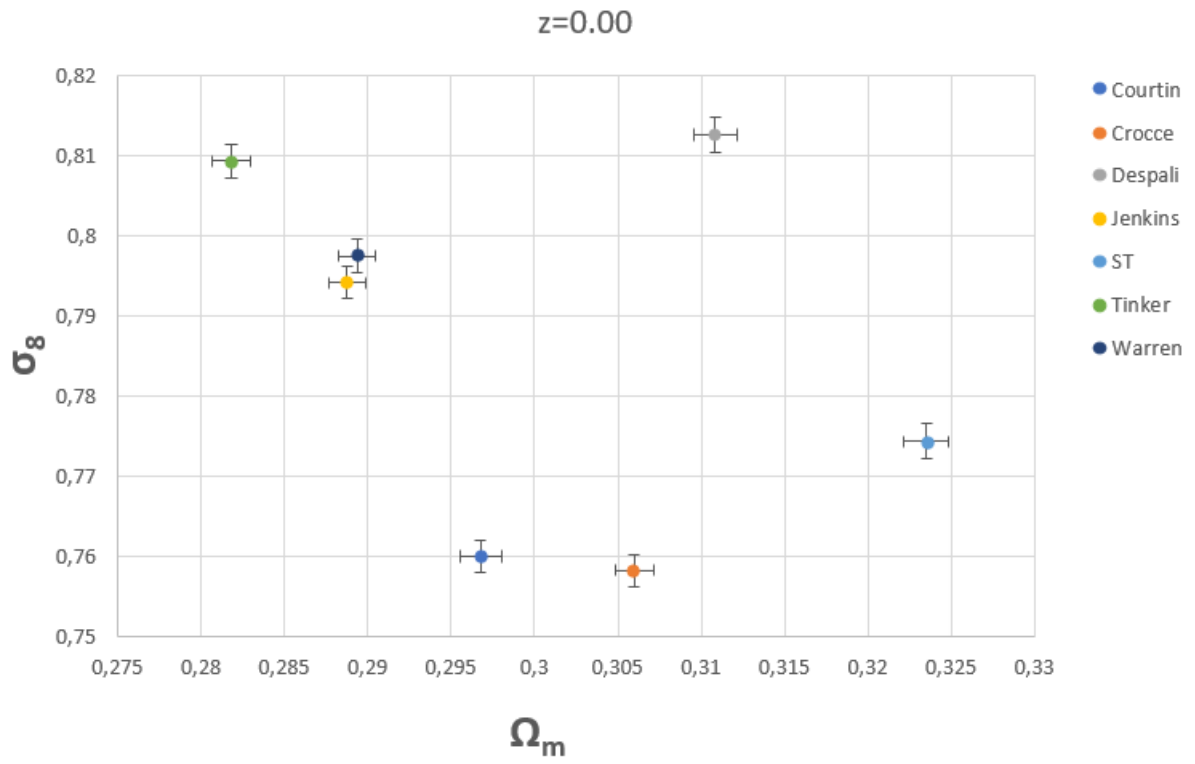


Figura 4.2: Grafico di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  con i rispettivi errori per  $z=0$ .

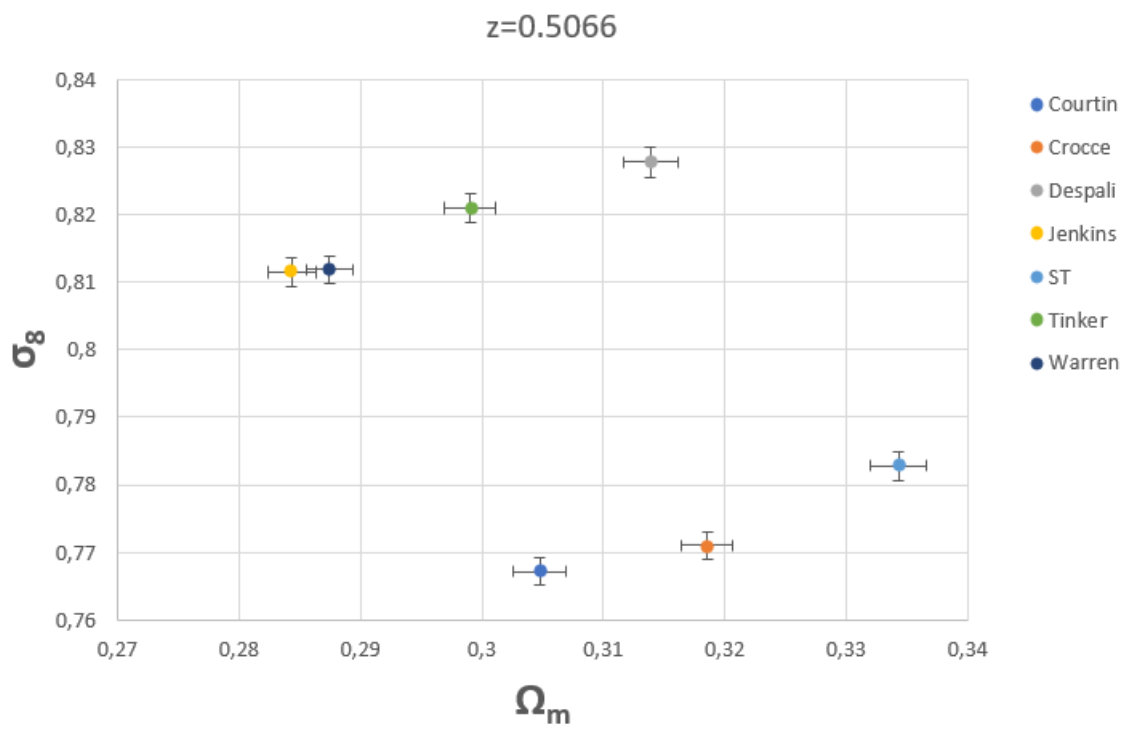


Figura 4.3: Grafico di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  con i rispettivi errori per  $z=0.5066$ .

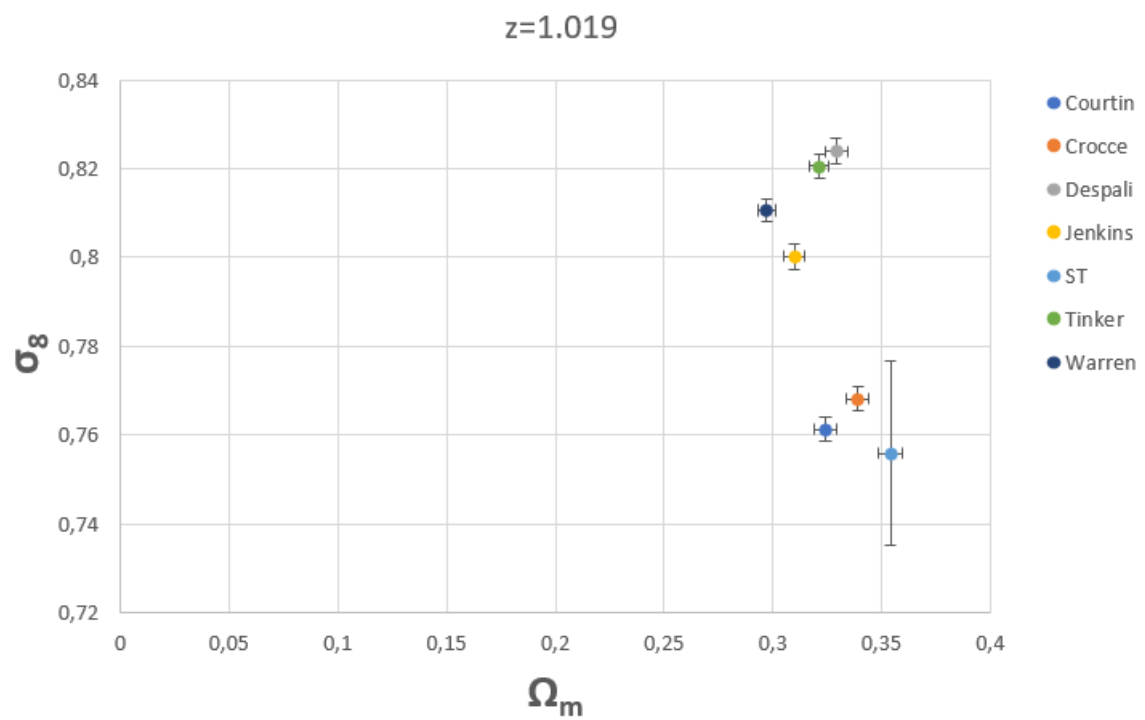


Figura 4.4: Grafico di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  con i rispettivi errori per  $z=1.019$ .

<b>AUTORE</b>	<b>REDSHIFT (z)</b>	<b><math>\Omega_m + \Delta\Omega_m</math></b>	<b><math>\sigma_8 + \Delta\sigma_8</math></b>
Jenkins	$z = 0$	$0.289 \pm 0.001$	$0.7941 \pm 0.002$
ST	$z = 0$	$0.323 \pm 0.001$	$0.774 \pm 0.002$
Warren	$z = 0$	$0.289 \pm 0.001$	$0.797 \pm 0.002$
Tinker	$z = 0$	$0.282 \pm 0.001$	$0.809 \pm 0.002$
Courtin	$z = 0$	$0.297 \pm 0.001$	$0.760 \pm 0.002$
Crocce	$z = 0$	$0.306 \pm 0.001$	$0.758 \pm 0.002$
Despali	$z = 0$	$0.311 \pm 0.001$	$0.812 \pm 0.002$
Jenkins	$z = 0.5066$	$0.284 \pm 0.002$	$0.811 \pm 0.002$
ST	$z = 0.5066$	$0.334 \pm 0.002$	$0.783 \pm 0.002$
Warren	$z = 0.5066$	$0.287 \pm 0.002$	$0.812 \pm 0.002$
Tinker	$z = 0.5066$	$0.299 \pm 0.002$	$0.821 \pm 0.002$
Courtin	$z = 0.5066$	$0.305 \pm 0.002$	$0.767 \pm 0.002$
Crocce	$z = 0.5066$	$0.318 \pm 0.002$	$0.771 \pm 0.002$
Despali	$z = 0.5066$	$0.314 \pm 0.002$	$0.828 \pm 0.002$
Jenkins	$z = 1.109$	$0.310 \pm 0.005$	$0.800 \pm 0.003$
ST	$z = 1.109$	$0.354 \pm 0.005$	$0.76 \pm 0.02$
Warren	$z = 1.109$	$0.297 \pm 0.004$	$0.811 \pm 0.002$
Tinker	$z = 1.109$	$0.321 \pm 0.005$	$0.821 \pm 0.003$
Courtin	$z = 1.109$	$0.324 \pm 0.005$	$0.761 \pm 0.003$
Crocce	$z = 1.109$	$0.339 \pm 0.005$	$0.768 \pm 0.003$
Despali	$z = 1.109$	$0.329 \pm 0.005$	$0.824 \pm 0.003$

Figura 4.5: Tabella riassuntiva con i valori dei parametri cosmologici estrapolati dalle catene con i relativi errori.

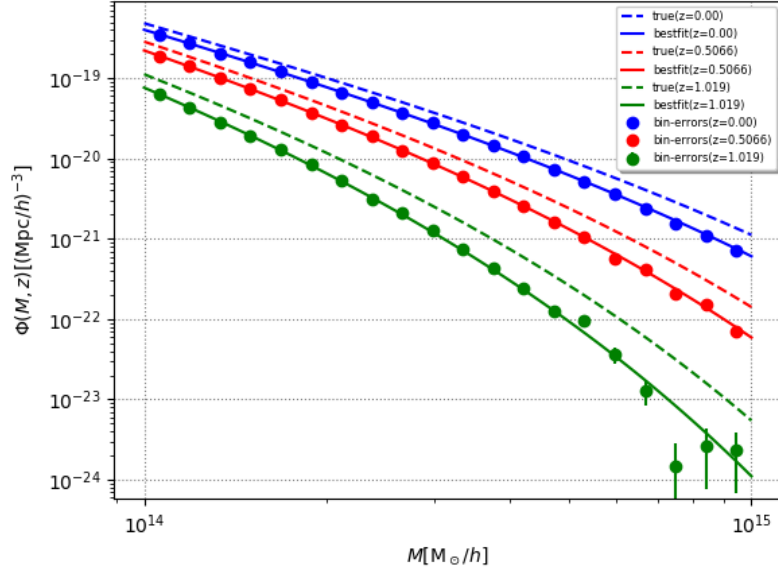


Figura 4.6: Confronto tra la funzione di massa di **Courtin** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).

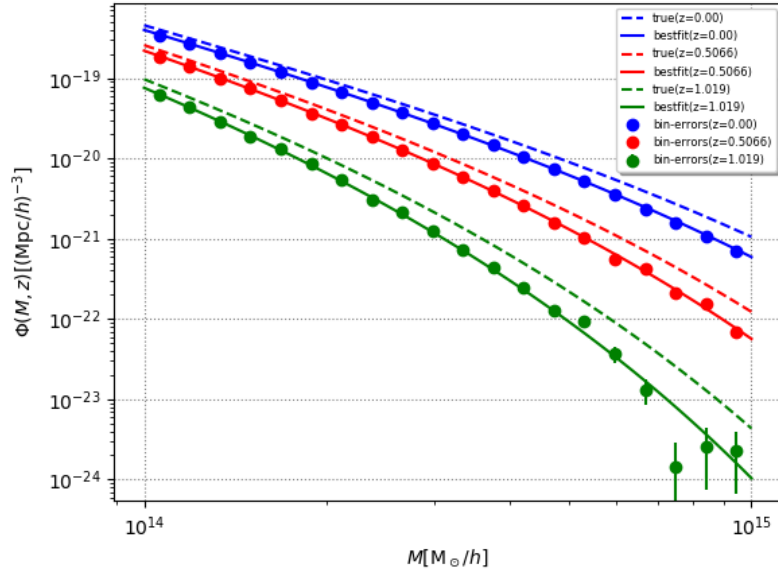


Figura 4.7: Confronto tra la funzione di massa di **Crocce** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).

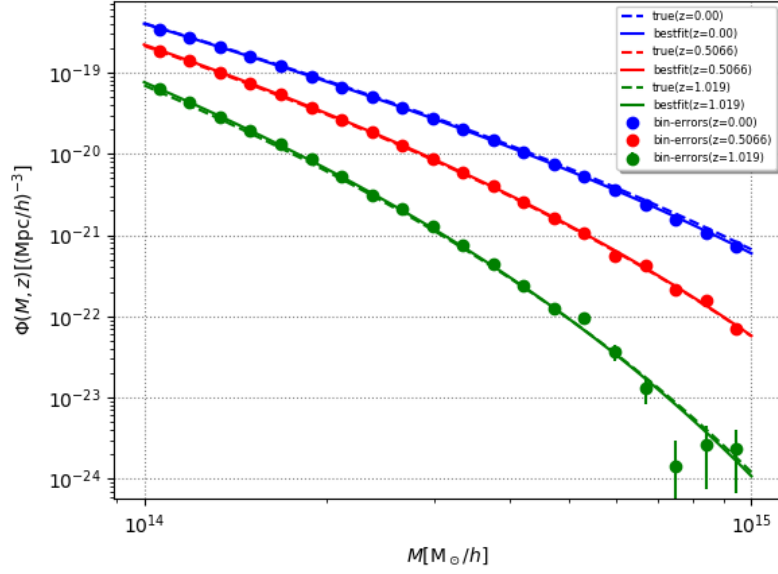


Figura 4.8: Confronto tra la funzione di massa di **Despali** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).

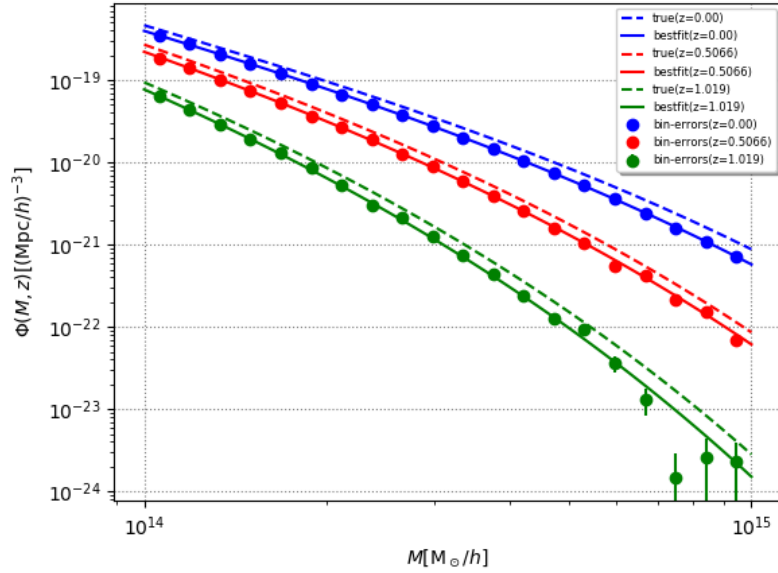


Figura 4.9: Confronto tra la funzione di massa di **Jenkins** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).

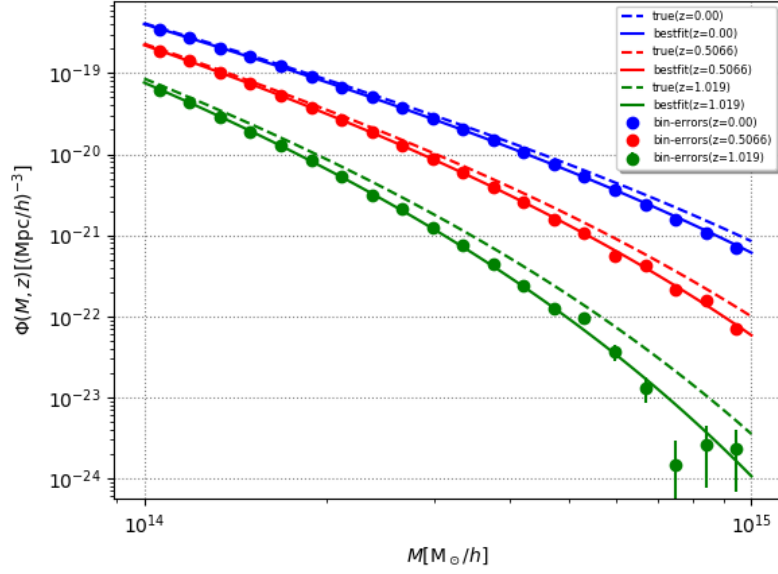


Figura 4.10: Confronto tra la funzione di massa di **ST** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).

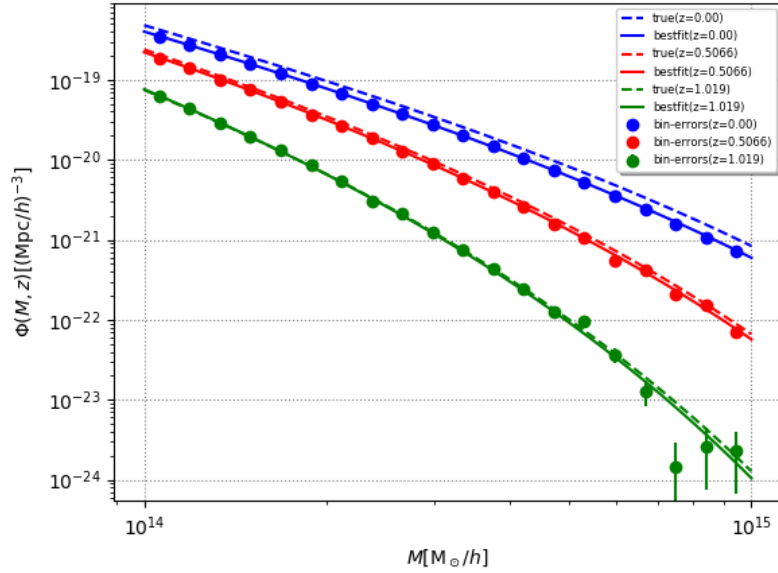


Figura 4.11: Confronto tra la funzione di massa di **Tinker** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).

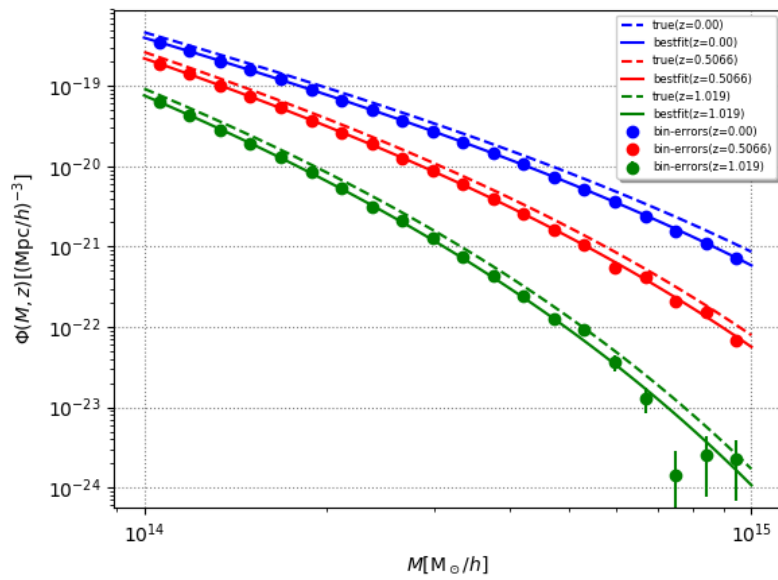


Figura 4.12: Confronto tra la funzione di massa di **Warren** con i parametri di best-fit e quella di fiducia (true).



# Capitolo 5

## Analisi e conclusioni

I sette grafici precedenti sono stati prodotti grazie ad un programma scritto in python che sfrutta le librerie grafiche matplotlib [5]. Per quanto riguarda la stima dell'affidabilità dei modelli teorici presi in esame viene di seguito presentata una tabella in cui sono riportate le discrepanze in termini di  $\sigma$  (deviazione standard), tra i valori misurati e quelli di fiducia (true) sui due parametri liberi, calcolate nel seguente modo per ogni modello di funzione di massa studiato:

- $\sigma_{\Omega_m} = |\Omega_m - \Omega_{m,FID}| \frac{1}{\Delta\Omega_m}$
- $\sigma_{\sigma_8} = |\sigma_8 - \sigma_{8,FID}| \frac{1}{\Delta\sigma_8}$

I risultati riportati nella tabella seguente mostrano delle discrepanze molto significative tra i valori di fiducia e quelli misurati. Si nota soprattutto un disaccordo tra l'andamento dei grafici con le curve di best fit e di fiducia e le discrepanze calcolate. Delle spiegazioni per questi risultati potrebbero essere trovate ipotizzando una sottostima dei parametri alla base delle analisi causata dall'aver eseguito delle approssimazioni solo con errori poissoniani. Un'altra ipotesi potrebbe risiedere nella presenza di errori numerici che introducono errori sistematici maggiori di quelli statistici.

AUTORE	REDSHIFT(z)	$ \Omega_m - \Omega_{m,FID} $ $\Delta\Omega_m$	$ \sigma_8 - \sigma_{8,FID} $ $\Delta\sigma_8$
Jenkins	$z = 0$	16.8	17.8
ST	$z = 0$	12.1	24.8
Warren	$z = 0$	15.6	15.4
Tinker	$z = 0$	22.3	9.3
Courtin	$z = 0$	8.3	33.0
Crocce	$z = 0$	0.9	35.1
Despali	$z = 0$	3.0	7.3
Jenkins	$z = 0.5066$	11.5	8.3
ST	$z = 0.5066$	11.6	21.6
Warren	$z = 0.5066$	10.1	8.2
Tinker	$z = 0.5066$	3.9	3.6
Courtin	$z = 0.5066$	1.1	29.6
Crocce	$z = 0.5066$	5.4	28.5
Despali	$z = 0.5066$	3.0	0.4
Jenkins	$z = 1.109$	0.5	10.2
ST	$z = 1.109$	8.9	3.5
Warren	$z = 1.109$	2.4	7.1
Tinker	$z = 1.109$	3.0	2.9
Courtin	$z = 1.109$	3.5	25.1
Crocce	$z = 1.109$	6.4	21.6
Despali	$z = 1.109$	4.4	1.6

Figura 5.1: Discrepanze tra i valori misurati e quelli di fiducia di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$



# Bibliografia

- [1] Stelle galassie e universo, Attilio Ferrari, 2011, Springer.
- [2] Introduzione all'analisi degli errori, John R. Taylor, 2000, Zanichelli.
- [3] <https://www.ira.inaf.it/Computing/staff/CD/pannelliattuali/astrofisica/astrofisica-23.pdf>
- [4] Euclid, ESA, Luglio 2011.  
url: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1110/1110.3193.pdf>
- [5] Elements of Relativity, Casadio R., September 2017.
- [6] <https://matplotlib.org/index.html>
- [7] The Halo Mass Function, Zarija Lukić, Katrin Heitmann, Salman Habib, Sergei Bashinsky, Paul M. Ricker, The Astrophysical Journal.  
url: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/523083/fulltext/>
- [8] Introduzione alla Cosmologia, Marconi A., Luglio 2015  
url: <http://www.arcetri.astro.it/marconi/Lezioni/IntAst14-15/Lezione14.pdf>
- [9] <http://federicomarulli.github.io/CosmoBolognaLib/Doc/html/index.html>
- [10] Catene di Markov, Fornasini E, Università degli Studi di Padova.  
url: <http://www.dei.unipd.it/~fornasini/10BisCatene%20di%20Markov.pdf>
- [11] <https://corner.readthedocs.io/en/latest/>
- [12] <https://www.euclid-ec.org/>
- [13] <https://www.lngs.infn.it/en/materia-oscura>
- [14] <http://physicsgg8.rssing.com/chan-12113167/latest.php>
- [15] Dark energy in the Accelerating Universe, T.P. Cheng.  
url: <http://www.umsl.edu/chengt/dkenergy-talk.pdf>

[16] <https://www.galassiere.it/ammassigx.html>

[17] Press W. H., Schechter P., "Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation", 02/1974, The Astrophysical Journal.