

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Simmetrie e Teoria dei Gruppi nella Fisica delle Particelle

Relatore:  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:  
Lorenzo Paoloni

Anno Accademico 2018/2019

L'elaborato parte volutamente da nozioni di base sulla Teoria dei Gruppi per poi spingersi verso argomenti poco approfonditi se non omessi in un normale corso di Fisica del triennio che tratta dell'argomento. Dopo aver quindi preparato l'indispensabile anche per chi si affacci per la prima volta alla materia in questione, viene dato spazio alla classificazione delle algebre di Lie ed in particolar modo ai diagrammi di Dynkin. La tesi si chiude con un ultimo capitolo dove sono approfonditi due gruppi di grande interesse fisico,  $SU(2)$  ed  $SU(3)$ , a cui vengono applicate le analisi fatte in precedenza sulle algebre e sulle loro classificazioni, ponendo, però, anche particolare attenzione sulle applicazioni che questi due gruppi trovano nella fisica del '900.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione - La ricerca delle simmetrie</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Gruppi e Rappresentazioni</b>	<b>6</b>
2.1	Gruppi . . . . .	6
2.2	Rappresentazioni . . . . .	11
2.2.1	Rappresentazioni Irriducibili . . . . .	12
2.2.2	Prodotti di Kronecker e Caratteri . . . . .	13
2.2.3	Rappresentazioni Complesse, Reali e Pseudoreali . . . . .	17
2.2.4	Invarianti . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>23</b>
3.1	Spazi di Hilbert finito-dimensionali . . . . .	23
3.2	Spazi di Hilbert infinito-dimensionali . . . . .	24
3.3	L'importanza degli operatori negli spazi di Hilbert . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Algebre di Lie</b>	<b>29</b>
4.1	Classificazione delle algebre di Lie . . . . .	31
4.2	Radici semplici . . . . .	34
4.3	Algebre di rango 2 . . . . .	35
4.4	Diagrammi di Dynkin . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Gruppi di Lie</b>	<b>46</b>
5.1	SU(2) . . . . .	48
5.1.1	Rappresentazioni . . . . .	53
5.1.2	Alcune applicazioni di SU(2) . . . . .	57
5.2	SU(3) . . . . .	61
5.2.1	La base $\alpha$ . . . . .	65
5.2.2	La base $\omega$ . . . . .	66
5.2.3	Rappresentazioni . . . . .	67
5.2.4	Metodo grafico . . . . .	69
5.2.5	Alcune applicazioni di SU(3) . . . . .	71

<i>INDICE</i>	3
<b>6 Conclusioni</b>	<b>80</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>
<b>Sitografia</b>	<b>82</b>

# Capitolo 1

## Introduzione - La ricerca delle simmetrie

Gli oggetti simmetrici sono così singolari in natura da destare interesse nell'uomo sin dall'antichità, al punto da conferirgli, a volte, lo status di "oggetti magici". Ovviamente la maggior parte delle forme presenti in natura manifestano piccole se non nessuna simmetria anche se, comunque, se ne possono osservare di pressoché simmetriche come ad esempio un'arancia, vicina ad una sfera perfetta, o un uomo, quasi simmetrico rispetto al suo asse verticale.

Benchè sia stata abbandonata la visione del mondo antico che associava agli oggetti simmetrici la perfezione, non si può negare che tali oggetti siano quantomeno speciali, a tal punto da portare ad una crescita d'interesse nei confronti delle simmetrie che raggiunge il suo apice nel ventesimo secolo con l'avvento della Meccanica Quantistica, dove queste assumono un ruolo centrale nello studio della Natura.

Il Modello Standard delle particelle elementari suggerisce inoltre che la Natura presenti molte più simmetrie nel mondo subatomico rispetto a quello macroscopico. In termini cosmologici, questo sembra significare che l'Universo sia emerso dal Big Bang come una struttura altamente simmetrica, anche se molte di queste simmetrie non sono più evidenti oggi. Se l'Universo sia nato perfettamente simmetrico per poi essere "logorato" dall'evoluzione cosmologica o se sia nato già con difetti interni che hanno scatenato la rottura delle simmetrie non è chiaro.

La nozione di simmetria si identifica nell'invarianza di un sistema, di una sua proprietà o delle leggi che lo governano sotto una particolare trasformazione. Alcune simmetrie nel mondo che ci circonda sono così comuni che sono difficili da individuare. Il risultato di un esperimento condotto in laboratorio non dovrebbe dipendere nè dal momento in cui viene condotto, nè dall'ubicazione

## CAPITOLO 1. INTRODUZIONE - LA RICERCA DELLE SIMMETRIE<sup>5</sup>

del laboratorio: sperimentatori in laboratori diversi che eseguono lo stesso esperimento ad anni di distanza ottengono lo stesso risultato, se la procedura seguita è identica. Questo è il risultato dell'invarianza alle traslazioni spaziali e temporali, chiamata anche omogeneità dello spazio-tempo. Un altro esempio di simmetria celata si può trovare nel principio di relatività galileiano, che afferma come le leggi della fisica siano le stesse in un sistema in quiete e in un sistema che si muove con velocità uniforme (rispetto al primo).

Lo studio formale dei *gruppi* di trasformazioni e delle loro *rappresentazioni* dal punto di vista rigoroso della matematica è dunque fondamentale per una profonda analisi e comprensione del mondo che ci circonda.

# Capitolo 2

## Gruppi e Rappresentazioni

Per cominciare sono necessarie alcune nozioni riguardo ai gruppi ed alle loro rappresentazioni[2][9].

### 2.1 Gruppi

**Gruppo.** *Un gruppo  $G$  è un insieme di operatori  $\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$  munito di un'operazione binaria  $\star$  e con le seguenti proprietà:*

- **Chiusura**, per ogni coppia ordinata di elementi  $a_i$  e  $a_j$ , esiste un unico elemento del gruppo

$$a_i \star a_j = a_k$$

$$\forall i, j, k.$$

- **Associatività degli elementi**, per ogni terna di elementi  $a_i$ ,  $a_j$  e  $a_k$ ,

$$(a_i \star a_j) \star a_k = a_i \star (a_j \star a_k)$$

$$\forall i, j, k.$$

- **esistenza dell' Elemento Neutro**, ovvero di un elemento  $e$  appartenente al gruppo tale che

$$a_i \star e = e \star a_i = a_i$$

$$\forall i.$$

- *esistenza dell' **Inverso**, ovvero dell'elemento  $a^{-1}$  (appartenente al gruppo) associato all'elemento  $a$  tale che*

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$$

per ogni  $a \in G$ .

Inoltre se vale  $a \star b = b \star a$  per ogni coppia  $a, b$  di elementi di  $G$  il gruppo si dice **abeliano** o **commutativo**.

Quando  $G$  contiene un numero finito di elementi  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  è detto gruppo finito e  $n$  *ordine* del gruppo.

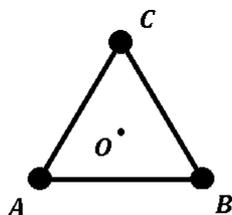
### Esempio: gruppi di ordine 6.

Ci sono due gruppi di ordine 6, il gruppo ciclico  $Z_6$  e il gruppo diedrale  $D_3$ . Il primo è composto dai sei elementi  $\{e, a, (a \star a), (a \star a \star a), (a \star a \star a \star a), (a \star a \star a \star a \star a)\}$  con  $a \star a \star a \star a \star a \star a = e$  (da cui il nome gruppo ciclico). Il suo elemento *generatore*,  $a$ , può essere visto come una rotazione di  $60^\circ$  nel piano.

Il gruppo diedrale invece ha come generatori un elemento di ordine 3,  $a$  ( $a^3 = e$ ), e un elemento di ordine 2,  $b$  ( $b^2 = e$ ): il gruppo è dunque composto dai sei elementi  $\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$  e la sua *presentazione* (la lista dei generatori, del loro ordine e di qualsiasi altra relazione necessaria a specificare il gruppo) risulta essere

$$\langle a, b \mid a^3 = b^2 = e; bab^{-1} = a^{-1} \rangle .$$

$D_3$  è anche il gruppo di simmetria del triangolo equilatero, infatti il suo ele-



mento di ordine 3 ( $a$ ) rappresenta la rotazione di  $120^\circ$  attorno a  $O$ , mentre

i suoi 3 elementi di ordine 2 ( $b$ ,  $ab$  e  $a^2b$ ) descrivono le riflessioni attorno ai tre assi  $OA$ ,  $OB$  e  $OC$ .

Un modo per rappresentare meglio il gruppo può essere quello di vederne gli elementi come le permutazioni delle tre lettere  $A$ ,  $B$  e  $C$  che identificano i vertici del triangolo: le riflessioni corrispondono alle permutazioni  $(BC)$ ,  $(AC)$  e  $(AB)$ , la rotazione corrisponde invece alla permutazione di tre lettere  $(ABC)$ <sup>1</sup>.

Si nota dunque come il gruppo diedrale  $D_3$  contenga tutte le  $3!$  permutazioni di tre lettere e coincida dunque con  $S_3$ , il gruppo delle permutazioni di tre oggetti.

Se si pensano invece i tre vertici del triangolo come vettori in uno spazio tridimensionale, ovvero

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora gli elementi del gruppo sono *rappresentati* da matrici  $(3 \times 3)$  ed i suoi generatori risultano essere

$$a = (ABC) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = (AB) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'operazione del gruppo è dunque la moltiplicazione tra matrici.

Questo è un primo esempio di come un gruppo possa essere un insieme di simmetrie per un particolare sistema. In questo caso il "sistema" è una semplice forma geometrica, il triangolo, così semplice da sembrare inizialmente un banale, seppur interessante, esercizio matematico, lontano da un qualsiasi collegamento fisico. In realtà un'applicazione della Teoria dei Gruppi che coinvolge proprio questo esempio la si trova in chimica, in particolare nella cristallografia, dove la teoria viene utilizzata per classificare le molecole attraverso le simmetrie molecolari. Esempi di molecole classificate sotto il gruppo  $D_3$  sono il trifluoruro di boro (Figura 2.1) ed il pentacloruro di fosforo (Figura 2.2).

L'interpretazione geometrica di  $D_3$  suggerisce una generalizzazione al gruppo diedrale  $D_n$ , con  $2n$  elementi ( $n - 1$  rotazioni di  $m \cdot \frac{2\pi}{n}$ , con  $m \in [1, n - 1]$ ,  $n$

<sup>1</sup>Con la notazione  $(ABC)$  si indica la trasformazione  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ .

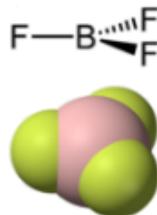


Figura 2.1: Trifloruro di Boro

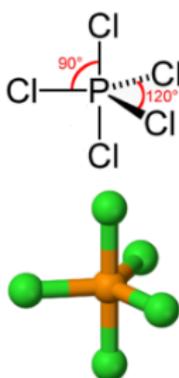


Figura 2.2: Pentacloruro di Fosforo

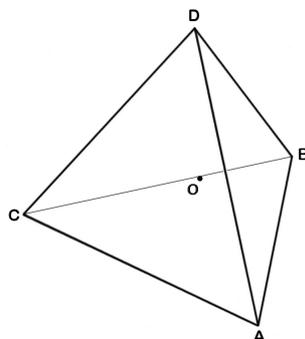
riflessioni e l'identità), come gruppo di simmetria dei poligoni piani regolari con  $n$  lati. La sua *presentazione* è

$$\langle a, b \mid a^n = b^2 = e; bab^{-1} = a^{-1} \rangle .$$

### Esempio: il gruppo tetraedrico.

Il gruppo tetraedrico  $\mathcal{T}$  è uno dei gruppi di ordine 12 ed è il gruppo di simmetria del tetraedro regolare.

Ogni sua faccia è un triangolo equilatero, invariante per le rotazioni di  $120^\circ$  e  $240^\circ$  attorno agli assi  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  e  $OD$ , per un totale di 8 operazioni di simmetria di ordine 3; a queste si aggiungono 3 rotazioni di ordine 2 attorno agli assi che collegano spigoli opposti, ad esempio  $AD$  e  $BC$ . Assieme all'identità, queste 11 operazioni formano il gruppo tetraedrico di ordine 12 con elementi di ordine 2 e 3 e presentazione



$$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = e \rangle .$$

Un modo per rappresentare il gruppo (come è stato fatto per  $D_3$ ) è quello di vederne gli elementi come le permutazioni delle quattro lettere  $A, B, C$  e  $D$  che identificano i vertici del tetraedro: i tre elementi di ordine 2 saranno  $(AB)(CD)$ ,  $(AC)(BD)$  e  $(AD)(BC)$ , mentre gli otto elementi di ordine 3 risulteranno essere  $(ABC)$ ,  $(ACB)$ ,  $(ABD)$ ,  $(ADB)$ ,  $(ACD)$ ,  $(ADC)$ ,  $(BCD)$  e  $(BDC)$ .

Se si pensano invece i quattro vertici del tetraedro come vettori in uno spazio tridimensionale, ovvero

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

allora gli elementi del gruppo sono rappresentati da matrici  $(4 \times 4)$  ed i suoi generatori risultano essere

$$a = (AB)(CD) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = (ABC) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Come il gruppo diedrale  $D_3$  anche il gruppo tetraedrico  $\mathcal{T}$  è utilizzato in cristallografia: esso è il gruppo di simmetria di molecole come il metano (Figura 2.3), l'anidride fosforica (Figura 2.4) e l'adamantano (Figura 2.5).

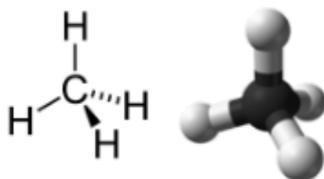


Figura 2.3: Metano

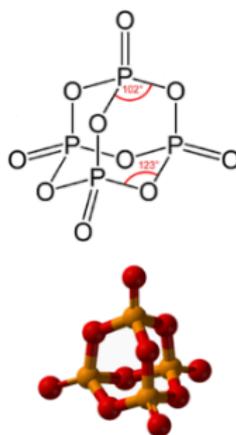


Figura 2.4: Anidride Fosforica

## 2.2 Rappresentazioni

**Rappresentazione.** Una rappresentazione  $\mathcal{R}$  è una mappa che fa corrispondere agli elementi del gruppo  $G$  una trasformazione lineare ed invertibile che agisce su vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ . Se la dimensione dello spazio vettoriale è  $N$ , ovvero finita, allora

$$\mathcal{R}(g) = M(g)$$

dove  $M(g)$  è una matrice  $N \times N$  non singolare tale che

$$\mathcal{R}(gg') = M(g)M'(g')$$

$$M(g^{-1}) = M^{-1}(g) ,$$

$$M(e) = \mathbf{I}$$

e la rappresentazione si dice  $N$ -dimensionale.

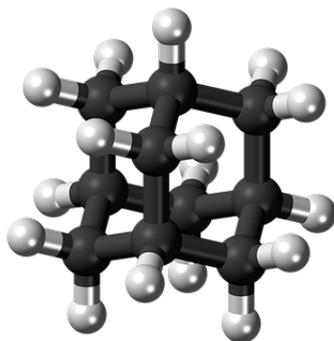


Figura 2.5: Adamantano

Se l'ordine del gruppo  $G$  e la dimensione della rappresentazione  $\mathcal{R}$  coincidono allora la rappresentazione si dice *regolare*.

Si dice *rappresentazione fondamentale* di un gruppo la rappresentazione con la dimensione più piccola diversa da quella banale. Per i gruppi abeliani la rappresentazione fondamentale è sempre quella a dimensione  $N = 1$  (elementi identificati da matrici  $1 \times 1$ , numeri), mentre per i gruppi non abeliani la rappresentazione fondamentale ha dimensione  $N \geq 2$  (sono richieste infatti le matrici per i gruppi non abeliani, come risulterà evidente in seguito).

### 2.2.1 Rappresentazioni Irriducibili

**Rappresentazione Riducibile e Irriducibile.** *Una rappresentazione si dice riducibile se, attraverso un opportuno cambio di base, può essere messa in forma diagonale a blocchi*

$$\begin{pmatrix} M^{[1]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M^{[2]} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & M^{[k]} \end{pmatrix},$$

*in tal caso la rappresentazione  $\mathcal{R}$  si esprimerà come somma di rappresentazioni irriducibili*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_k$$

*ovvero, banalmente, rappresentazioni non riducibili.*

Lo spazio vettoriale  $\mathbf{V}$  verrà dunque decomposto in sottospazi di dimensioni corrispondenti a quelle delle rappresentazioni irriducibili:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_k.$$

I vettori appartenenti allo spazio  $\mathbf{V}$  potranno quindi essere scritti nella forma  $\vec{v} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ , indifferente al gruppo di trasformazioni  $G$  che infatti trasforma  $\vec{v}$  nel vettore

$$\vec{v}' = (M^{[1]}\vec{a}_1, M^{[2]}\vec{a}_2, \dots, M^{[k]}\vec{a}_k) = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \dots, \vec{a}'_k)$$

non modificandone la struttura.

Due rappresentazioni  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{R}$  si dicono equivalenti se le matrici corrispondenti  $M'$  e  $M$  sono legate da una trasformazione di similitudine

$$M' = \mathcal{S}M\mathcal{S}^{-1}.$$

Se due rappresentazioni  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{R}$  sono irriducibili non esiste una trasformazione di similitudine che possa legarle: la matrice di trasformazione  $\mathcal{S}$  non può che essere nulla (*Primo Lemma di Schur*).

## 2.2.2 Prodotti di Kronecker e Caratteri

**Prodotto di Kronecker.** Siano  $G$  e  $K$  due gruppi rispettivamente con elementi  $\{g_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_G$ , e  $\{k_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n_K$  e operazioni  $\star$  e  $\bullet$ . Si costruiscano quindi gli elementi  $(g_i, k_\alpha)$  e si definisca l'operazione  $\cdot$  tale che

$$(g_i, k_\alpha) \cdot (g_j, k_\beta) = (g_i \star g_j, k_\alpha \bullet k_\beta)$$

Viene così a crearsi un un gruppo di ordine  $n_G n_K$  chiamato prodotto di Kronecker (o diretto) e indicato con  $G \times K$ .

**Coniugazione.** Sia  $G$  un gruppo con elementi  $\{g_i\}$ . Si definisce coniugato di  $g_i$  rispetto ad un altro elemento del gruppo  $g$  come

$$\tilde{g}_i = g g_i g^{-1}.$$

La coniugazione può essere usata per organizzare gli elementi di un gruppo in sottoinsiemi distinti. Prendendo un elemento  $g_j$ , si costruisce l'insieme  $C_j$  come l'insieme dei coniugati di  $g_j$  rispetto ad ogni elemento di  $G$ :  $C_j = \{\tilde{g}_j | \tilde{g}_j = g_i g_j g_i^{-1}, \forall g_i \in G\}$ . L'insieme  $C_j$  è detto *classe*. Si ripete la stessa procedura con  $g_k$ , arrivando a costruire  $C_k = \{\tilde{g}_k | \tilde{g}_k = g_i g_k g_i^{-1}, \forall g_i \in G\}$  con nessun elemento in comune con  $C_j$ . Dato che la scelta degli elementi  $g_j, g_k, \dots$  è arbitraria, il numero di classi in cui un gruppo si suddivide è unico ed è dunque una peculiarità del gruppo.

**Carattere.** Dato un gruppo  $G$  e una rappresentazione  $\mathcal{R}_\alpha$ , viene definito il carattere  $\chi^{[\alpha]}$  di un elemento  $g \in G$  come

$$\chi^{[\alpha]}(g) = \text{Tr } M^{[\alpha]}(g) .$$

Dato che la traccia è invariante per una permutazione ciclica, il carattere risulta lo stesso per un elemento e per il suo coniugato: il carattere è dunque comune ad un'intera classe.

Per studiare come due rappresentazioni si combinano, si considerino due rappresentazioni irriducibili  $\mathcal{R}_\alpha$  e  $\mathcal{R}_\beta$  dello stesso gruppo  $G$ , che agiscono sugli spazi vettoriali (di Hilbert)  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ , di dimensione rispettivamente  $d_\alpha$  e  $d_\beta$ , in modo tale da agire sulle basi

$$\begin{aligned} |i\rangle_{[\alpha]} &\rightarrow |i(g)\rangle_{[\alpha]} = M_{ij}^{[\alpha]}(g) |j\rangle_{[\alpha]} \\ |s\rangle_{[\beta]} &\rightarrow |s(g)\rangle_{[\beta]} = M_{st}^{[\beta]}(g) |t\rangle_{[\beta]} \end{aligned}$$

con  $i, j = 1, \dots, d_\alpha$  e  $s, t = 1, \dots, d_\beta$ .

Come si era fatto per costruire il prodotto diretto tra due gruppi distinti, così si costruisce l'elemento su cui agisce  $\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta$ , ovvero

$$|i\rangle_\alpha |s\rangle_\beta \equiv |A\rangle ,$$

dove  $A$  assume i  $d_\alpha d_\beta$  valori delle coppie  $(i, s)$ .

Viene definita la matrice della rappresentazione  $\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta$  da

$$|A\rangle \rightarrow |A(g)\rangle_{[\alpha\beta]} \equiv M_{AB}^{[\alpha\beta]}(g) |B\rangle = M_{ij}^{[\alpha]}(g) M_{st}^{[\beta]}(g) |j\rangle_{[\alpha]} |t\rangle_{[\beta]}$$

Questa nuova rappresentazione riducibile chiamata anch'essa prodotto di Kronecker è, come ogni altra rappresentazione riducibile, esprimibile come somma di rappresentazioni riducibili di  $G$  attraverso la *serie di Clebsch-Gordan*

$$\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta = \sum_{\gamma} d(\alpha, \beta | \gamma) \mathcal{R}_\gamma ,$$

o, in termini di caratteri,

$$\chi^{[\alpha\beta]} = \sum_{\gamma} d(\alpha, \beta | \gamma) \chi^{[\gamma]} .$$

Dato che, per ogni classe, il carattere del prodotto di Kronecker risulta essere

$$\chi^{[\alpha \times \beta]} = \chi^{[\alpha]} \chi^{[\beta]},$$

utilizzando la proprietà

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_C} n_i \chi_i^{[\alpha]} \bar{\chi}_i^{[\beta]} = \delta^{\alpha\beta}$$

di *ortogonalità dei caratteri* (dove  $n$  è l'ordine del gruppo,  $n_i$  il numero di elementi della  $i$ -esima classe e  $n_C$  il numero totale di classi), si ottiene l'espressione per i coefficienti

$$d(\alpha, \beta | \gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_C} n_i \chi_i^{[\alpha]} \bar{\chi}_i^{[\beta]},$$

grazie alla quale si può finalmente esprimere il prodotto di Kronecker come somma di rappresentazioni irriducibili.

Inoltre grazie ad ulteriori considerazioni sui caratteri si giunge ad un risultato fondamentale della *teoria delle rappresentazioni*,

*il numero delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito è uguale al numero di classi in cui esso può essere suddiviso.*

**Esempio: il gruppo alterno  $A_4$ .**

Il gruppo alterno  $A_4$  contiene le permutazioni pari di quattro lettere, ovvero le permutazioni nella forma  $(xxx)$  e  $(xx)(xx)$ . Se  $a = (12)(34)$  e  $b = (123)$  la presentazione del gruppo risulta essere

$$\langle a, b | a^2 = b^3 = (ba)^3 = e \rangle$$

e le quattro classi in cui il gruppo può essere diviso sono:  $C_1 = \{e\}$ , che contiene solo l'elemento neutro,  $C_2 = \{b, ab, aba, ba\}$ , con quattro elementi,  $C_3 = \{b^2, ab^2, b^2a, ab^2a\}$ , che contiene i quattro inversi di  $C_2$ , e  $C_4 = \{a, b^2ab, bab^2\}$ , con tre elementi. A queste quattro classi corrisponderanno dunque quattro rappresentazioni irriducibili ed utilizzando la relazione che lega la dimensione di queste ultime con l'ordine di un gruppo finito, ovvero

$$n = \sum_{i=1}^{n_C} (d_i)^2,$$

si riesce, dato il basso ordine del caso preso in esame, a risolvere  $12 = 1 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ , ottenendo  $d_2 = d_3 = 1$  e  $d_4 = 3$ . Denotando le rappresentazioni irriducibili con la loro dimensione si ha dunque

$$\mathcal{R}^{regolare}(A_4) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}_1 \oplus \mathbf{1}_2 \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}.$$

Si può dunque costruire la tavola dei caratteri di  $A_4$ , che risulta essere

$A_4$	$C_1$	$4C_2$	$4C_3$	$3C_4$
$\chi^{[\mathbf{1}]}$	1	1	1	1
$\chi^{[\mathbf{1}_1]}$	1	$e^{2\pi i/3}$	$e^{4\pi i/3}$	1
$\chi^{[\bar{\mathbf{1}}_1]}$	1	$e^{4\pi i/3}$	$e^{2\pi i/3}$	1
$\chi^{[\mathbf{3}]}$	3	0	0	-1

dove la rappresentazione  $\mathbf{1}_2$  viene indicata con  $\bar{\mathbf{1}}_1$ , in quanto i suoi caratteri sono i complessi coniugati di quelli della rappresentazione  $\mathbf{1}_1$ : allo stesso modo  $\bar{\mathbf{1}}_1$  viene quindi detta *rappresentazione complessa coniugata* di  $\mathbf{1}_1$ . Le espressioni dei generatori come matrici ( $3 \times 3$ ) nella rappresentazione  $\mathbf{3}$  sono:

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla tavola dei caratteri si può infine calcolare il prodotto di Kronecker tra rappresentazioni irriducibili di  $A_4$ , infatti

$$\begin{aligned} d(\mathbf{3}, \mathbf{3} | \mathbf{1}) &= d(\mathbf{3}, \mathbf{3} | \mathbf{1}_1) = d(\mathbf{3}, \mathbf{3} | \bar{\mathbf{1}}_1) = 1 \\ d(\mathbf{3}, \mathbf{3} | \mathbf{3}) &= \frac{3^3 + 3(-1)^3}{12} = 2, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{1} + \mathbf{1}_1 + \bar{\mathbf{1}}_1 + \mathbf{3} + \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \times \mathbf{1}_1 &= \mathbf{3}, \quad \mathbf{3} \times \bar{\mathbf{1}}_1 = \mathbf{3}, \quad \mathbf{1}_1 \times \bar{\mathbf{1}}_1 = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Rappresentazioni Complesse, Reali e Pseudoreali

Sia  $\mathbf{r}$  una rappresentazione irriducibile di un gruppo finito i cui elementi  $g$  sono rappresentati da matrici non singolari  $M^{[\mathbf{r}]}(g)$ . Le matrici complesse coniugate  $\overline{M}^{[\mathbf{r}]}(g)$  formano anch'esse una rappresentazione  $\mathbf{r}'$ , dal momento che soddisfano le proprietà di chiusura, e i caratteri delle classi corrispondenti soddisferanno dunque la relazione di coniugazione

$$\chi^{[\mathbf{r}]}(g) = \overline{\chi^{[\mathbf{r}']}(g)}$$

**Rappresentazione complessa coniugata.** *Se  $\mathbf{r}$  ha caratteri complessi,  $\mathbf{r}'$  è una rappresentazione distinta con caratteri complessi coniugati rispetto a  $\mathbf{r}$ .  $\mathbf{r}'$  è dunque detta rappresentazione complessa coniugata e indicata con  $\overline{\mathbf{r}}$ . In tal caso le due matrici  $M$  e  $\overline{M}$  non possono essere messe in relazione da una trasformazione di similitudine dal momento che hanno caratteri (tracce) diverse.*

Viceversa, se  $\mathbf{r}$  ha caratteri reali, allora  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  hanno caratteri identici e le loro matrici saranno legate da una trasformazione di similitudine

$$M = \mathcal{S} \overline{M} \mathcal{S}^{-1} .$$

Inoltre si ha che la matrice  $\mathcal{S}$  debba essere legata alla sua trasposta da

$$\mathcal{S}^T = \pm \mathcal{S} :$$

$\mathcal{S}$  è simmetrica o antisimmetrica. Nel primo caso è la parte simmetrica del prodotto della rappresentazione con sè stessa  $[(\mathbf{r} \times \mathbf{r})_{sim}]$  a contenere il singoletto ( $\mathbf{1}$ , invariante), mentre nel secondo è la parte antisimmetrica  $[(\mathbf{r} \times \mathbf{r})_{antisimm}]$ <sup>2</sup>.

**Rappresentazione Pseudoreale.** *È detta rappresentazione pseudoreale quella con matrice  $\mathcal{S}$  antisimmetrica.*

In entrambi i casi l'invariante può essere scritto nella forma

$$Y^T \overline{\mathcal{S}} X$$

---

<sup>2</sup>I concetti di *invariante* e *parte simmetrica/antisimmetrica di una rappresentazione* vengono definiti nella sezione **Invarianti**.

dove  $X$  e  $Y$  sono vettori colonna su cui agisce  $M^{[r]}$ .

Riassumendo, le rappresentazioni sono di tre tipi: complesse coniugate, con caratteri complessi; reali con caratteri reali e con invariante quadratico simmetrico; e pseudoreali con caratteri reali ma con invariante quadratico antisimmetrico.

Un altro modo per determinare il tipo di rappresentazione (complessa, reale o pseudoreale) è quello di valutare  $1/n \sum_g \chi(g^2)$ , infatti si ha

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi(g^2) = \begin{cases} +1 & \text{reale} \\ -1 & \text{pseudoreale} \\ 0 & \text{complessa} \end{cases} .$$

### 2.2.4 Invarianti

L'invarianza sotto l'azione di una trasformazione è la proprietà posseduta da alcune grandezze di non essere modificate dall'applicazione della trasformazione stessa [9].

Quest'invarianza si manifesta attraverso l'Hamiltoniana del sistema fisico: essendo infatti questa una funzione delle variabili dinamiche, quando tale funzione è indifferente alle trasformazioni di un gruppo si può affermare l'invarianza del sistema rispetto al gruppo di trasformazioni in esame.

In tal caso l'Hamiltoniana del sistema è anch'essa detta *invariante*.

**Invariante.** *Ente, grandezza o anche espressione, esprime un legame tra grandezze matematiche o fisiche, che non muta effettuando particolari trasformazioni. Una grandezza  $x$  è un invariante di ordine  $n$  se ciò che non muta applicando la trasformazione è  $x^n$ .*<sup>3</sup>

Gli invarianti appaiono ogni qualvolta il prodotto (di Kronecker) di rappresentazioni contenga il *singoletto*  $\mathbf{1}$ .

Si consideri un gruppo finito  $G$  di ordine  $N$  con  $n$  rappresentazioni irriducibili  $\mathbf{r}_a$  tra cui  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{1}$  è il singoletto. Esprimendo per ogni rappresentazione il prodotto di Kronecker simmetrico di  $k$  rappresentazioni irriducibili come somma delle stesse, si ha

---

<sup>3</sup>Si possono trovare anche appellativi diversi, come nel caso di invarianti di ordine 2, chiamati invarianti quadratici, o come nel caso di invarianti di ordine 3, chiamati invarianti cubici o invarianti di ordine cubico.

$$\underbrace{(\mathbf{r}_a \times \mathbf{r}_a \times \cdots \times \mathbf{r}_a)}_k = \sum_b \mathcal{N}^{[k]}(\mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a) \mathbf{r}_b ,$$

dove  $\mathcal{N}^{[k]}$  indica il numero di rappresentazioni irriducibili  $\mathbf{r}_b$  nel prodotto delle  $k$  rappresentazioni  $\mathbf{r}_a$ .

Per trovare tali coefficienti si consideri la *funzione di Molien*

$$M(\mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a; \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i \frac{\bar{\chi}_i^{[\mathbf{r}_b]}}{\det(1 - \lambda A_i^{[\mathbf{r}_a]})}$$

dove  $i$  indica l'appartenenza alla classe  $C_i$  di  $G$ , con  $n_i$  elementi  $A_i^{[\mathbf{r}_a]}$  espressi nella rappresentazione  $\mathbf{r}_a$ , e  $\bar{\chi}_i^{[\mathbf{r}_b]}$  i caratteri della rappresentazione  $\mathbf{r}_b$ .

I coefficienti desiderati si trovano espandendo in serie tale funzione, infatti

$$M(\mathbf{r}_a; \mathbf{r}_b; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}^{[k]}(\mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a) \lambda^k .$$

Una volta impostata  $\mathbf{r}_b = \mathbf{1}$ , rappresentazione irriducibile di singoletto, la funzione di Molien fornisce il numero dei possibili invarianti costruiti da una rappresentazione irriducibile

$$M(\mathbf{1}; \mathbf{r}; \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{\det(1 - \lambda A_i^{[\mathbf{r}]})} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}^{[k]} \lambda^k .$$

La funzione di Molien è particolarmente utile in quanto questa può essere sempre scritta nella forma

$$M(\mathbf{1}; \mathbf{r}; \lambda) = \frac{(1 + \sum d_k \lambda^k)}{(1 - \lambda^{a_1})^{n_1} (1 - \lambda^{a_2})^{n_2} \dots}$$

dove il numeratore è un polinomio finito in  $\lambda$  e  $d_k$ ,  $a_k$  e  $n_k$  sono interi *positivi*. Il numeratore porta  $d_k$  invarianti di ordine  $k$ , mentre l'espansione di ogni fattore del denominatore genera  $n_k$  invarianti di ordine  $a_k$ , etc. Questi infiniti invarianti possono essere espressi come prodotti di *invarianti di base*, senza

che l'espansione di Molien riesca però a individuarli. Inoltre gli invarianti, quando sono legati, soddisfano relazioni non lineari chiamate *sizigie*.

A volte può accadere invece che gli invarianti di ordine  $a_1, a_2, \text{etc.}$ , dal denominatore della funzione di Molien non soddisfino alcune sizigie tra loro: in tal caso questi vengono chiamati *invarianti liberi*. Le potenze al numeratore si riferiscono quindi a invarianti che soddisfano sizigie con gli invarianti liberi, e per questo vengono chiamati *invarianti vincolati*. Sfortunatamente, questa netta distinzione tra gli invarianti è spesso di validità limitata.

### Esempio: gli invarianti di $A_4$ .

*Nota: parte simmetrica e antisimmetrica di una rappresentazione.* Sia  $\mathbf{r}$  una rappresentazione di un gruppo  $G$  che agisce su uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ . Un modo per decomporre  $\mathbf{r}$  in rappresentazioni irriducibili è quello di separare le parti degli elementi dello spazio vettoriale  $\mathbf{V}$  tenendo conto delle proprietà di simmetria sotto l'azione della permutazione degli indici che caratterizzano il generico elemento  $T \in \mathbf{V}$  [11]. Ad esempio una matrice  $T$  può essere sempre decomposta in una parte simmetrica e in una antisimmetrica, infatti

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}$$

dove  $S_{ij} = S_{ji}$  e  $A_{ij} = -A_{ji}$  sono, rispettivamente, la parte simmetrica e antisimmetrica di  $T_{ij}$ .

Queste parti a simmetria distinta non si mischiano sotto l'azione di  $g \in G$ :

$$\begin{aligned} S_{ij} &\xrightarrow{g \in G} S'_{ij} = [\mathcal{R}(g)]_i^a [\mathcal{R}(g)]_j^b S_{ab} \\ &= [\mathcal{R}(g)]_i^a [\mathcal{R}(g)]_j^b S_{ba} \\ &= [\mathcal{R}(g)]_j^b [\mathcal{R}(g)]_i^a S_{ba} \\ &= S'_{ji} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &\xrightarrow{g \in G} A'_{ij} = [\mathcal{R}(g)]_i^a [\mathcal{R}(g)]_j^b A_{ab} \\ &= [\mathcal{R}(g)]_i^a [\mathcal{R}(g)]_j^b (-A_{ba}) \\ &= -[\mathcal{R}(g)]_j^b [\mathcal{R}(g)]_i^a A_{ba} \\ &= -A'_{ji}, \end{aligned}$$

dunque scrivendo

$$T = \begin{pmatrix} S \\ A \end{pmatrix}$$

si evidenzia la decomposizione della rappresentazione  $\mathbf{r}$ , normalmente agente sugli elementi di  $\mathbf{V}$  come

$$T' = \mathbf{r}(g)T ,$$

che si presenta come

$$\begin{pmatrix} S' \\ A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_S(g) & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_A(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ A \end{pmatrix} .$$

Non è detto che le rappresentazioni  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_S$  siano irriducibili: esse potrebbero essere a loro volta riducibili come lo era originariamente  $\mathbf{r}$ .

Nel caso di  $A_4$  si può separare il prodotto della stessa rappresentazione nelle sue parti simmetrica e antisimmetrica, che agiranno separatamente. Si avrà dunque

$$(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\text{sim}} = \mathbf{1} + \mathbf{1}_1 + \bar{\mathbf{1}}_1 + \mathbf{3} , \quad (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\text{antisim}} = \mathbf{3} .$$

Nel gruppo alterno  $A_4$ , che ha come rappresentazioni irriducibili  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}_1$ ,  $\bar{\mathbf{1}}_1$  e  $\mathbf{3}$ , i prodotti di Kronecker mostrano due modi per formare invarianti quadratici nei prodotti di due rappresentazioni irriducibili:

$$[\mathbf{3} \times \mathbf{3}]_{\text{singoletto}} \quad \mathbf{1}_1 \times \bar{\mathbf{1}}_1 ,$$

quattro modi per formare invarianti cubici dal prodotto di tre rappresentazioni irriducibili:

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{sim}} \times \mathbf{3}]_{\text{singoletto}}$$

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{antisim}} \times \mathbf{3}]_{\text{singoletto}}$$

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{1}_1}^{\text{sim}} \times \bar{\mathbf{1}}_1]_{\text{singoletto}}$$

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\bar{\mathbf{1}}_1}^{\text{sim}} \times \mathbf{1}_1]_{\text{singoletto}} ,$$

ma anche quattro modi per formare invarianti quartici dal prodotto di soli triplette:

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{sim}} \times (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{sim}}]_{\text{singoletto}}$$

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{antisim}} \times (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{sim}}]_{\text{singoletto}}$$

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{antisim}} \times (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{3}}^{\text{antisim}}]_{\text{singoletto}}$$

$$[(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathbf{1}_1}^{\text{sim}} \times (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\bar{\mathbf{1}}_1}^{\text{sim}}]_{\text{singoletto}} ,$$

anche se non tutti sono indipendenti. Questa procedura infatti, anche se molto utile per trovare invarianti dal prodotto delle rappresentazioni, produce troppe ridondanze.

Applicando invece il metodo che coinvolge la funzione di Molien al gruppo alterno  $A_4$  si trovano diversi risultati interessanti.

Usando la tavola dei caratteri di questo gruppo (riportata in alto) si può facilmente esplicitare l'espressione della funzione di Molien per ogni rappresentazione irriducibile. Si avrà dunque, per la rappresentazione  $\mathbf{1}$

$$M(\mathbf{1}, \mathbf{1}; \lambda) = \frac{1}{1 - \lambda} ,$$

che corrisponde all'invariante banale unidimensionale.

Per le altre due rappresentazioni unidimensionali si ottiene

$$M(\mathbf{1}, \mathbf{1}_1; \lambda) = M(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{1}}_1; \lambda) = \frac{1}{1 - \lambda^3} ,$$

ovvero un invariante di ordine cubico per queste rappresentazioni: se  $z$  è la sua (sola) componente, allora  $z^3$  è invariante.

Per il tripletto si ha

$$M(\mathbf{1}, \mathbf{3}; \lambda) = \frac{1 + \lambda^6}{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^3)(1 - \lambda^4)} ,$$

da cui tre invarianti liberi di ordine 2, 3 e 4 un invariante vincolato di ordine 6. Sono riportati, senza ricavarli, questi invarianti in funzione delle tre coordinate  $x_i$  con  $i = 1, 2, 3$  che caratterizzano lo spazio su cui agisce la rappresentazione di tripletto.

L'invariante quadratico è la classica lunghezza del vettore

$$\langle 2 \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 ,$$

l'invariante cubico è

$$\langle 3 \rangle = x_1 x_2 x_3 ,$$

e l'invariante quartico è

$$\langle 4 \rangle = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 .$$

L'invariante vincolato di ordine 6 è

$$\langle 6 \rangle = (x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$$

ed è legato agli invarianti liberi dalla complicata sизigia

$$4\langle 6 \rangle^2 - 2\langle 4 \rangle^3 + 108\langle 3 \rangle^4 + \langle 2 \rangle^6 + 36\langle 4 \rangle \langle 3 \rangle^2 \langle 2 \rangle - 20\langle 3 \rangle^2 \langle 2 \rangle^3 + 5\langle 4 \rangle^2 \langle 2 \rangle^2 - 4\langle 4 \rangle \langle 2 \rangle^4 = 0 .$$

# Capitolo 3

## Spazi di Hilbert

**Spazio di Hilbert.** *Uno spazio di Hilbert  $\mathbf{H} = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è uno spazio vettoriale reale o complesso sul quale è definito un prodotto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tale che, detta  $d$  la distanza indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $H$ , lo spazio metrico  $(H, d)$  sia completo.*

Tutta la fisica che si è in grado di descrivere ha luogo in spazi di Hilbert. Gli spazi di Hilbert sono descritti attraverso le loro basi, in modo tale che qualsiasi vettore appartenente allo spazio possa essere espresso come una combinazione lineare degli elementi della base. Il numero degli elementi della base, e di conseguenza la dimensione dello spazio, può essere finito o infinito, con la base descritta in termini di variabili continue o discrete definite su molteplici intervalli [2].

### 3.1 Spazi di Hilbert finito-dimensionali

Uno spazio di Hilbert finito dimensionale di dimensione  $D$  ha una base composta dai  $D$  kets  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |D\rangle\}$ . Il suo duale è invece caratterizzato da una base di  $D$  bras  $\{\langle 1|, \langle 2|, \dots, \langle D|\}$ . I kets ed i bras possono essere scelti in modo tale da soddisfare le relazioni di completezza e ortonormalità

$$\sum_{j=1}^D |j\rangle \langle j| = 1, \quad \langle i|j\rangle = \delta_{ij}.$$

In questo spazio si possono costruire  $D^2$  operatori lineari nella forma  $|j\rangle \langle k|$ , che hanno come effetto quello di restituire  $|j\rangle$  se vengono applicati a  $|k\rangle$ .

Prendendo le giuste combinazioni lineari, tutti gli operatori possono essere resi *hermitiani*.

**Operatore Hermitiano.** Sia  $\mathbf{H} = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uno spazio di Hilbert con  $\phi \in H$  e sia  $A: H \rightarrow H$  un operatore lineare.  $A$  è un operatore hermitiano se

$$\langle \phi, A\phi \rangle = \langle \phi, A\phi \rangle^* \quad \forall \phi \in H .$$

Nel caso finito-dimensionale, dove un operatore lineare può essere rappresentato come una matrice,  $A$  è hermitiano se

$$A = A^{*T} \equiv A^\dagger .$$

Gli operatori hermitiani sono

$$(|j\rangle \langle k| + |k\rangle \langle j|) , \quad i(|j\rangle \langle k| - |k\rangle \langle j|) , \quad \forall j, k \text{ con } j \neq k ,$$

e le  $(D - 1)$  combinazioni diagonali

$$\begin{aligned} & (|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2|) , \\ & (|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| - 2|3\rangle \langle 3|) , \\ & \dots \\ & (|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + \dots + |D-1\rangle \langle D-1| - (D-1)|D\rangle \langle D|) . \end{aligned}$$

## 3.2 Spazi di Hilbert infinito-dimensionali

Si consideri dapprima uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale dove i vettori che appartengono alla base sono indicati in termini della variabile discreta  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Ogni vettore (ket) appartenente allo spazio può essere espresso come una combinazione lineare degli elementi della base

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle z_n ,$$

con  $z_n \in \mathcal{C}$ . Per associare degli scalari a questi kets si introduce lo spazio duale allo spazio di Hilbert, la cui base, come già detto, si compone dei bras  $\langle n|$  con  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Ogni bra può essere scritto come una combinazione lineare degli elementi della base

$$\langle \Xi| = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \langle n| ,$$

con  $w_n \in \mathcal{C}$ . Nello specifico, il bra associato al ket  $|\Psi\rangle$  è

$$\langle\Psi| = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n \langle n| .$$

In generale dunque si avrà che

$$\langle \Xi | |\Psi\rangle \equiv \langle \Xi | \Psi\rangle \in \mathcal{C} ,$$

ed una volta scelta una base che soddisfa le relazioni di completezza e ortogonalità,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm} ,$$

si avrà

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 ,$$

norma del vettore  $|\Psi\rangle$ <sup>1</sup>.

In questo spazio un operatore può essere scritto nella forma

$$C = \sum_{n,m} c_m^n |m\rangle \langle n| ,$$

e una volta definito l'operatore

$$C^\dagger \equiv \sum_{n,m} \bar{c}_n^m |n\rangle \langle m| ,$$

segue che, se  $C$  è un operatore hermitiano, allora

$$C = C^\dagger \iff c_m^n = \bar{c}_n^m .$$

---

<sup>1</sup>La norma in questione è dunque definita positiva.

Per fare un parallelo col caso finito-dimensionale, qui gli operatori possono essere rappresentati con matrici infinito-dimensionali che agiscono sui kets da sinistra per produrre nuovi kets, e sui bras da destra per produrre nuovi bras.

Uno speciale interesse richiamano gli operatori che preservano la norma dei vettori. Considerando la trasformazione

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |\Psi'\rangle = U |\Psi\rangle ,$$

tale che

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle \quad \forall\Psi ,$$

allora si ha che

$$U^\dagger U = 1 \iff U^{-1} = U^\dagger$$

e l'operatore  $U$  è detto *unitario*. Inoltre scrivendo  $U$  nella forma esponenziale

$$U = e^M ,$$

con  $M$  anch'esso operatore, si trova che quest'ultimo dev'essere un operatore antihermitiano:

$$M^\dagger = -M .$$

Tra le infinite possibilità di composizione degli operatori in uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale, alcuni operatori sono di maggior interesse in fisica, come

$$a \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} |m\rangle \langle m+1| , \quad a^\dagger \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} |m+1\rangle \langle m| .$$

Questi due operatori soddisfano la relazione di commutazione

$$[a, a^\dagger] \equiv aa^\dagger - a^\dagger a = \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m| = 1 ,$$

e sono particolari per il loro effetto sui ket (in particolare sul ket dello stato di *vuoto*) :

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle , \quad a |0\rangle = 0 , \\ a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle , \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle .$$

È inoltre possibile cambiare base per ottenerne una descritta da una variabile continua: introducendo infatti le combinazioni hermitiane

$$X \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) , \quad P \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) ,$$

tali che

$$[X, P] = i\mathbf{I} ,$$

$X$  può essere trattato come un operatore di posizione il cui autovalore denota una coordinata che spazia da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Gli autoket  $|x\rangle$  saranno allora definiti dall'equazione agli autovalori

$$X |x\rangle = x |x\rangle ,$$

e andranno a formare una nuova base che soddisfa le condizioni di normalizzazione e completezza

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x| = 1 .$$

La relazione tra le due basi è definita attraverso l'ovvia relazione

$$|x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) |n\rangle ,$$

con

$$K_n(x) = \langle n|x\rangle .$$

### 3.3 L'importanza degli operatori negli spazi di Hilbert

L'importanza degli operatori negli spazi di Hilbert dipende dalla loro stabilità nel tempo. In Meccanica Quantistica lo stato di un sistema fisico ad ogni istante di tempo è descritto da un vettore di stato  $|\Psi\rangle_t$  che dopo un certo lasso di tempo si sarà evoluto nel vettore di stato  $|\Psi\rangle_{t'}$ . Questa evoluzione temporale in un intervallo finito da  $t$  a  $t'$  viene suddivisa in una moltitudine di step infinitesimi da  $t$  a  $t + \delta t$  e l'operatore che permette l'evoluzione del vettore di stato è detto Hamiltoniano:

$$|\Psi\rangle_{t+\delta t} \approx (1 + iH\delta t) |\Psi\rangle_t .$$

L'Hamiltoniano  $H$  è un operatore hermitiano che genera le traslazioni temporali. Il suo esponenziale permette le evoluzioni temporali finite

$$e^{iH(t-t')} |\Psi\rangle_{t'} = |\Psi\rangle_t$$

ed è un operatore unitario.

Ancora in Meccanica Quantistica ogni operatore che agisce su uno spazio di Hilbert può essere visto come il generatore di una qualche trasformazione (l'Hamiltoniano, che genera le traslazioni temporali, è spesso usato per definire un sistema fisico). Dati allora due operatori  $A$  e  $B$ , il loro commutatore  $[A, B]$  può avere due interpretazioni differenti: l'evoluzione infinitesima dell'operatore  $A$  dovuta alla trasformazione generata da  $B$ , o quella dell'operatore  $B$  dovuta a  $A$ . Se, per esempio,  $A = H$  il commutatore rappresenta sia l'evoluzione temporale di  $B$ , sia l'evoluzione di  $H$  sotto l'azione della trasformazione generata da  $B$ . In questo modo se il commutatore è nullo significa che  $H$  è invariante per la trasformazione  $B$  e che  $B$  è invariante nel tempo: rappresenterà dunque una costante del moto. Se si sceglie come  $B$  l'operatore del momento angolare, che genera le rotazioni spaziali, l'annullarsi del commutatore significherà che l'energia (autovalore di  $H$ ) è invariante per rotazioni, e che il momento angolare è una costante del moto (generato dall'Hamiltoniano).

L'Universo si pensa sia rappresentato da uno stato in uno spazio di Hilbert ed è dunque importante rappresentare correttamente in tale spazio i gruppi di trasformazione che vi agiscono.

# Capitolo 4

## Algebre di Lie

**Algebra di Lie.** Si definisce algebra di Lie una collezione finita di elementi  $X^A$ , con  $A = 1, 2, \dots, N$ , che soddisfano le seguenti proprietà <sup>1</sup>

- **Chiusura** rispetto all'operazione (antisimmetrica) di commutazione,

$$[X^A, X^B] = if^{AB}_C X^C ;$$

- validità dell' **Identità di Jacobi**

$$[[X^A, X^B], X^C] + [[X^B, X^C], X^A] + [[X^C, X^A], X^B] = 0 .$$

I coefficienti  $f^{AB}_C$  sono detti *costanti di struttura* dell'algebra di Lie. Essi sono vincolati dalla prima proprietà dell'algebra ad essere antisimmetrici rispetto allo scambio di  $A$  e  $B$ ,

$$f^{AB}_C = -f^{BA}_C ,$$

e dalla seconda proprietà dell'algebra a soddisfare

$$f^{AB}_C f^{DC}_F + f^{DA}_C f^{BC}_F + f^{BD}_C f^{AC}_F = 0 .$$

Nel caso in cui gli elementi dell'algebra in questione siano hermitiani (caso di interesse fisico), le costanti di struttura devono necessariamente essere reali <sup>2</sup>.

Se si pensano le costanti di struttura come matrici ( $N \times N$ )

$$f^{AB}_C \equiv i(T^A)^B_C$$

---

<sup>1</sup>Da qui viene utilizzata la convenzione di Einstein per la somma degli indici.

<sup>2</sup>Si dimostra prendendo l'aggiunto dell'assioma di chiusura sopra riportato.

che agiscono su uno spazio vettoriale reale  $N$ -dimensionale, l'identità di Jacobi diventa

$$(T^A T^D)_F^B - (T^D T^A)_F^B = i f^{AD}_C (T^C)_F^B ,$$

che altro non è che l'elemento  $(BF)$  dell'equazione matriciale

$$T^A T^D - T^D T^A = i f^{AD}_C T^C .$$

Questa rappresentazione dell'algebra di Lie in termini di matrici  $(N \times N)$ , che agiscono su uno spazio vettoriale reale la cui dimensione è la stessa dell'algebra, è chiamata *rappresentazione aggiunta*.

**Algebra abeliana.** Un'algebra di Lie  $\mathcal{G}$  è detta abeliana se

$$[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$$

**Ideale.** Un ideale dell'algebra di Lie  $\mathcal{G}$  è un sottospazio  $\mathcal{H}$  di  $\mathcal{G}$  tale che

$$[a, y] \in \mathcal{H} \quad \forall a \in \mathcal{G} \wedge \forall y \in \mathcal{H}$$

**Algebra semplice e semi-semplice.** Un'algebra di Lie semplice è un'algebra non abeliana che come unici ideali ha  $\mathcal{G}$  e il sottospazio nullo  $\emptyset$ . Un'algebra di Lie è semi-semplice se è somma diretta di algebre di Lie semplici.

Si costruisca ora la matrice simmetrica di rango 2

$$g^{AB} \equiv -f^{AC}_D f^{BD}_C = Tr(T^A T^B)$$

e, nel caso in cui il determinante di tale matrice non si annulli <sup>3</sup>, si definisca l'inversa con gli indici abbassati

$$g^{AB} g_{BC} = \delta_C^A :$$

$g$  è detta *forma di Cartan-Killing* ed agisce come una metrica che può essere usata per alzare o abbassare gli indici. In particolare, si possono definire la costanti di struttura con tre indici alti

$$f^{ABC} \equiv f^{AB}_D g^{CD} = -f^{AB}_D f^{CE}_F f^{DF}_E = -i Tr(T^A T^B T^C - T^B T^A T^C) [1][2].$$

<sup>3</sup>Il determinante non si annulla mai nel caso di algebre semi-semplici.

## 4.1 Classificazione delle algebre di Lie

Si consideri un'algebra di Lie dove  $r$  generatori  $H^i$  commutano tra di loro

$$[H^i, H^j] = 0 ,$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , ovvero un'algebra dove  $f^{ij}_C = 0$ . Dal momento che commutano l'uno con l'altro, questi elementi  $H^i$  possono essere rappresentati da matrici diagonali. Nella rappresentazione aggiunta si impone dunque

$$-if^{ia}_b = (T^i)^a_b \equiv \beta^i(a)\delta^a_b$$

dove  $a$  e  $b$  si riferiscono ai rimanenti  $(N - r)$  elementi dell'algebra ed i  $\beta^i(a)$  sono reali, dal momento che i generatori di quest'ultima sono hermitiani. Segue dalla relazione precedente che

$$[H^i, X^a] = \beta^i(a)\delta^a_b X^b = \beta^i(a)X^a .$$

Ad ogni  $X^a$  sono dunque associati  $r$  coefficienti  $(\beta^1(a), \beta^2(a), \dots, \beta^r(a))$ , che identificano un vettore  $\beta(a)$ , chiamato *radice*, in uno spazio vettoriale  $r$ -dimensionale. Rinominando questi elementi, assumendo che non ci siano elementi con le stesse radici, si può scrivere

$$X^a \equiv E_{\beta(a)} .$$

Per ogni radice  $\beta$ , si giunge dunque all'equazione

$$[H^i, E_{\beta(a)}] = \beta^i E_{\beta(a)}$$

la cui versione aggiunta permette di scrivere

$$E_{\beta(a)}^\dagger = E_{-\beta(a)} .$$

Dal momento che l'opposto di ciascuna radice è comunque una radice,  $(N - r)$  è sempre un numero pari.

Un'algebra di Lie di rango  $r$  ( $r$  elementi commutanti) e dimensione  $N$  ( $N$  elementi in totale) contiene  $(N - r)$  elementi associati ad altrettanti vettori non nulli in uno spazio  $r$ -dimensionale, e  $r$  elementi (commutanti) associati ad altrettanti vettori di lunghezza nulla nel medesimo spazio.

Si consideri il commutatore dei due elementi corrispondenti alle generiche radici  $\beta$  e  $\gamma$  e lo si commuti a sua volta con  $H^i$ , usando l'identità di Jacobi si trova

$$[H^i, [E_\beta, E_\gamma]] = (\beta^i + \gamma^i)[E_\beta, E_\gamma] :$$

il commutatore è associato alla radice  $\beta + \gamma$ . In tutta generalità si può dunque scrivere

$$[E_\beta, E_\gamma] = N_{\beta,\gamma} E_{\beta+\gamma}$$

dove le costanti  $N_{\beta,\gamma}$  soddisfano la relazione

$$N_{\beta,\gamma} = -N_{\gamma,\beta} .$$

Esistono però solamente  $(N - r)$  radici, quindi non tutte le combinazioni lineari di radici possono essere radici. Dato che si parla sempre di elementi dell'algebra, se  $\beta + \gamma$  non è una radice, allora il commutatore deve annullarsi:

$$N_{\beta,\gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta + \gamma \text{ non è una radice .}$$

Se  $\beta + \gamma = 0$  il commutatore di  $[E_\beta, E_\gamma]$  con  $H^i$  si annulla e si deve avere necessariamente che

$$[E_\beta, E_{-\beta}] \equiv \beta_i H^i ,$$

dove le costanti  $\beta_i$  non devono essere confuse con le componenti  $\beta^i$  del vettore-radice. Per metterle in relazione con queste ultime si deve infatti moltiplicare l'ultima espressione per  $H^i$  e in seguito considerarne la traccia, si ottiene

$$\beta^j \text{Tr}(E_{-\gamma} E_\gamma) = \beta_i \underbrace{\text{Tr}(H^i H^j)}_{g^{ij}}$$

dove  $g^{ij}$  è la forma di Cartan-Killing, che, nello spazio  $r$ -dimensionale delle radici, agisce come metrica: essa infatti non è solo in grado di trasformare le coordinate delle radici da covarianti a controvarianti (e viceversa), ma può anche essere usata per definire un prodotto scalare in questo spazio. Impostando arbitrariamente  $\text{Tr}(E_{-\gamma} E_\gamma) = 1$  per ciascun  $\beta$ , si ha

$$\beta^j = \beta_i g^{ij} , \quad \beta_i = g_{ij} \beta^j ,$$

mentre il prodotto scalare nello spazio delle radici risulta essere

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) \equiv \alpha^i \beta^j g_{ij} = \alpha_i \beta_j g^{ij} .$$

Si può dimostrare che questo prodotto scalare è definito positivo.

A due radici possono essere associati naturalmente due interi  $p$  e  $q$ : si prenda  $E_\alpha$  e lo si commuti  $k$  volte con  $E_\beta$ , in modo tale da ottenere la catena  $\alpha$  di radici

$$[E_\beta, [E_\beta, [\dots, [E_\beta, E_\alpha] \dots]]] ,$$

che corrisponde ad un elemento associato alla radice  $\alpha + k\beta$  o a 0. Dal momento che l'algebra contiene un numero finito di elementi, deve esistere un valore massimo  $k_{max} = q$  tale che  $\alpha + (q + 1)\beta$  non sia una radice. Nello stesso modo, commutando ripetutamente  $E_\alpha$  con  $E_{-\beta}$ , si ottiene un intero  $p$  tale che  $\alpha - (p + 1)\beta$  non sia una radice.

Si può dimostrare che

$$\frac{2\beta_i\alpha^i}{\beta_j\beta^j} = 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = p - q \equiv n$$

e, dal momento che  $p$  e  $q$  sono interi positivi, anche  $n$  risulterà tale. Questa equazione ha diverse conseguenze.

In primo luogo si ottiene un'espressione per le costanti  $N_{\alpha,\beta}$

$$(N_{\alpha,\beta})^2 = \frac{1}{2}q(p + 1)(\beta, \beta) .$$

Un'altra conseguenza è che

$$\alpha' = \alpha - (p - q)\beta = \alpha - \frac{2\beta_i\alpha^i}{\beta_j\beta^j}\beta$$

è una radice che ha come componente lungo  $\beta$  l'opposto della proiezione di  $\alpha$  lungo la stessa direzione, infatti

$$(\alpha', \beta) = -(\alpha, \beta) .$$

Si comprende anche come solo determinati valori di angoli tra le radici siano consentiti: scambiando infatti i ruoli di  $\alpha$  e  $\beta$  si arriva a

$$2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = p' - q' \equiv n' ,$$

dove  $p'$  e  $q'$  sono gli interi derivanti dalla catena  $\beta + k\alpha$ .

Dal momento che

$$\frac{n}{n'} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} ,$$

$n$  e  $n'$  hanno lo stesso segno ed inoltre

$$(\beta, \alpha)^2 = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)\frac{nn'}{4} .$$

Come risultato, detto  $\Theta_{\alpha\beta}$  l'angolo tra le due radici, si ottiene

$$\cos^2 \Theta_{\alpha\beta} = \frac{nn'}{4} \leq 1 .$$

Dopo ulteriori osservazioni si può infine costruire una tabella dove sono raccolti i possibili valori degli angoli tra due radici in un'algebra semi-semplce

$n$	$n'$	$\Theta$	<i>Rapporto tra le lunghezze</i>
0	0	$\pi/2$	<i>Indeterminato</i>
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	$\sqrt{2}$
-1	-2	$3\pi/4$	$\sqrt{2}$
1	3	$\pi/6$	$\sqrt{3}$
-1	-3	$5\pi/6$	$\sqrt{3}$

in modo tale che si abbia sempre

$$\frac{4(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})^2}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})} = 0, 1, 2, 3 .$$

Dal momento che  $n, n' \leq 3$  non esistono catene con 5 o più radici [1][2][8].

## 4.2 Radici semplici

Tutto ciò che è stato derivato nella sezione precedente è valido per due qualsiasi radici  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$ . In ogni caso però esistono  $(N - r)$  radici che vivono in uno spazio  $r$ -dimensionale, di conseguenza si avranno diverse dipendenze lineari tra i vettori in questione.

Siano  $H^1, H^2, \dots, H^r$  sempre gli  $r$  elementi commutanti dell'algebra e si considerino le componenti ordinate di  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^r)$ , ottenute dai suddetti elementi. Una radice è quindi detta positiva se la sua prima componente (la numerazione è stabilita ordinando gli elementi commutanti) non nulla è positiva. Dato che l'opposto di una radice è una radice a sua volta, si avranno  $(N - r)/2$  radici positive (non tutte indipendenti). Vengono quindi introdotte  $r$  radici semplici,  $\boldsymbol{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, r$ , ovvero radici positive con la proprietà che nessuna di esse può essere espressa come una combinazione lineare a coefficienti positivi di altre radici semplici.

Si considerino due radici semplici  $\boldsymbol{\alpha}_i$  e  $\boldsymbol{\alpha}_j$  e la loro differenza  $\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_j$ . Si dimostra facilmente che questa differenza non può essere una radice e che, richiamando i risultati della sezione precedente, il numero  $p$  naturalmente associato alle due radici non può essere altro che  $p = 0$ .

Questo comporta che  $(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) \leq 0$  e che l'angolo tra due radici semplici possa essere solamente  $2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$ . Ci possono quindi essere solo tre catene

costruite con radici semplici:  $\{\alpha_i - \alpha_j\}$ ,  $\{\alpha_i - \alpha_j - 2\alpha_j\}$ ,  $\{\alpha_i - \alpha_j - 2\alpha_j - 3\alpha_j\}$  (con  $q = 1, 2, 3$  rispettivamente). Solo la prima radice delle catene è semplice [1][2][8].

### 4.3 Algebre di rango 2

Prendendo in considerazione le algebre di rango 2, si possono facilmente rappresentare le radici nel piano. Le due radici nulle (rappresentanti i due elementi commutanti dell'algebra  $H^1$  e  $H^2$ ) saranno situate all'origine dello spazio bidimensionale mentre le altre, di lunghezza finita, verranno posizionate a cominciare da una radice semplice sulla parte positiva dell'asse delle ascisse<sup>4</sup>. A ciò seguirà il collocamento della sua opposta, posizionata simmetricamente rispetto alla prima nella parte negativa del suddetto asse, e della seconda radice semplice, il cui angolo dalla prima si è scoperto, nella sezione precedente, essere vincolato ad assumere solamente quattro valori.

Tutte le altre radici saranno individuate attraverso *riflessioni di Weyl*.

**Riflessione di Weyl.** *Riflessione di una radice nello spazio bidimensionale delle stesse utilizzando come asse di riflessione la direzione di una seconda radice. Il risultato di una riflessione di Weyl è sempre una radice.*

Dunque, solamente le quattro seguenti configurazioni sono possibili per un algebra di rango 2:

1. La seconda radice semplice è ad un angolo di  $\pi/2$  rispetto alla prima ed ha una lunghezza arbitraria. Il diagramma corrispondente è mostrato in basso ed è il diagramma dell'algebra semi-semplice  $SU(2) \times SU(2)$ .

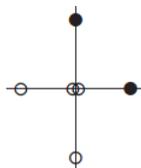


Figura 4.1: Diagramma dell'algebra semi-semplice  $SU(2) \times SU(2)$ .

<sup>4</sup>Le radici verranno contrassegnate nei diagrammi con semplici cerchi, mentre le radici semplici con cerchi pieni.

2. La seconda radice semplice è ad un angolo di  $2\pi/3$  rispetto alla prima ed ha la sua stessa lunghezza. Si disegna dunque la sua opposta e si operano due riflessioni di Weyl rispetto all'asse orizzontale (dove giacciono le prime due radici posizionate) in modo da trovare una radice in basso a sinistra (ottenuta dalla riflessione della radice, semplice, in alto a sinistra) e una radice in alto a destra (ottenuta dalla riflessione della radice, opposta a quella semplice, in basso a destra). Il diagramma corrispondente è mostrato in basso ed è il diagramma dell'algebra  $SU(3)$ .

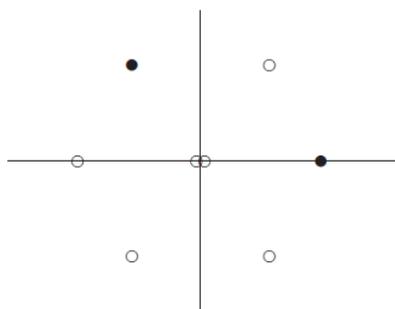


Figura 4.2: Diagramma dell'algebra  $SU(3)$ .

3. La seconda radice semplice è ad un angolo di  $3\pi/4$  rispetto alla prima ed ha una lunghezza pari a  $1/\sqrt{2}$  rispetto alla prima. Si disegna dunque la sua opposta e si operano diverse riflessioni di Weyl: prima rispetto all'asse orizzontale (dove giacciono le prime due radici posizionate) in modo da trovare una radice in basso a sinistra e una in alto a destra; poi rispetto agli assi bisettrici dei quadranti, individuati dalle radici che sono state collocate inizialmente (bisettrice II e IV quadrante) e costruite per riflessione un attimo fa (bisettrice I e III quadrante), per ottenere una radice sulla parte positiva dell'asse delle ordinate ed un'altra sulla parte negativa. Il diagramma corrispondente è mostrato in basso ed è il diagramma dell'algebra decadimensionale  $B_2$  o  $C_2$  (10 radici di cui due nulle).
4. La seconda radice semplice è ad un angolo di  $5\pi/6$  rispetto alla prima ed ha una lunghezza pari a  $1/\sqrt{3}$  rispetto alla prima. Si disegna dunque la sua opposta e si operano le opportune riflessioni di Weyl. Il diagramma

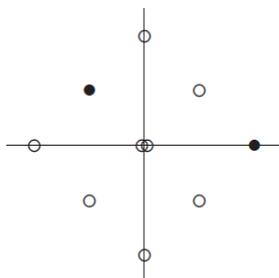


Figura 4.3: Diagramma dell'algebra decadimensionale  $B_2$  o  $C_2$ .

corrispondente è mostrato in basso ed è il diagramma dell'algebra 14-dimensionale  $G_2$  (14 radici di cui due nulle).

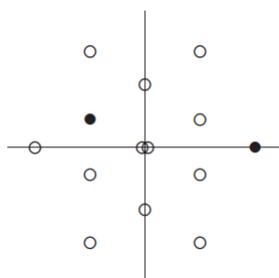


Figura 4.4: Diagramma dell'algebra 14-dimensionale  $G_2$ .

Termina così l'elenco di tutte le possibili algebre di Lie semi-semplici di rango 2.

Si noti come tutte le algebre contengano al massimo due lunghezze diverse di radici: dal momento che esistono solo tre valori per il rapporto delle lunghezze ( $1 \div 1$ ,  $1 \div \sqrt{2}$  e  $1 \div \sqrt{3}$ ), un'algebra con tre lunghezze diverse di radici conterrebbe anche il rapporto  $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ , che invece non risulta esistere [1][2][8].

## 4.4 Diagrammi di Dynkin

I diagrammi di Dynkin sono un metodo alternativo di rappresentazione su un piano delle informazioni rilevanti di un'algebra. Questo metodo diventa indispensabile nel momento in cui il disegno delle radici risulta impossibile, ovvero per algebre di rango maggiore di 2. Un tale diagramma è un insieme di  $r$  punti, uno per ogni radice semplice (positiva). Quando l'algebra contiene

radici di lunghezza diversa, le radici corte sono indicate con  $\circ$ , mentre quelle lunghe con  $\bullet$ .

Per convenienza si normalizza il maggior numero di radici alla lunghezza unitaria e si ottiene

$$(\widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Le regole di costruzione dei diagrammi di Dynkin sono le seguenti:

1. I punti rappresentanti le radici che soddisfano

$$4(\widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_j)^2 = 0, 1, 2, 3^5, \quad i \neq j,$$

sono connessi da 0,1,2 o 3 linee, rispettivamente. Negli ultimi due casi le radici devono avere lunghezze differenti.

Sono riportati in Figura 4.5 i diagrammi di Dynkin delle algebre di rango 2 costruite nella sezione precedente.



Figura 4.5: Diagrammi di Dynkin delle algebre di rango 2 ( $SU(2) \times SU(2)$ ,  $SU(3)$ ,  $B_2$  o  $C_2$  e  $G_2$ ).

2. Rimuovere i punti (radici) da un diagramma di Dynkin genera un(più) diagramma(i) di Dynkin associato(i) alla(e) algebra(e) di Lie (semplice(i) o semi-semplice(i)) di rango  $s < r$ .

Queste semplici regole sono sufficienti per derivare i diagrammi di Dynkin di tutte le algebre di Lie semplici.

A seguito di semplici considerazioni, che qua non verranno riportate, si è in grado di scrivere, a partire dalle regole appena enunciate, le seguenti limitazioni a cui ogni diagramma dovrà obbligatoriamente ubbidire:

- Il numero di coppie di radici connesse può essere al massimo  $r - 1$ ;

---

<sup>5</sup>Com'è già stato mostrato questi sono gli unici valori consentiti, considerando la condizione di normalizzazione.

- Non ci sono diagrammi di Dynkin con cicli chiusi;
- Da una radice non possono originarsi più di tre linee, per cui le connessioni multiple saranno dei soli quattro tipi mostrati in Figura 4.6, dove l'ultimo è l'unico diagramma a cui non può essere aggiunto nessun collegamento (altrimenti da una radice originerebbero almeno 4 collegamenti) ed è dunque l'unico possibile quando due radici sono collegate da tre linee: è il diagramma (già incontrato) dell'algebra eccezionale di rango 2 e 14-dimensionale  $G_2$ ;

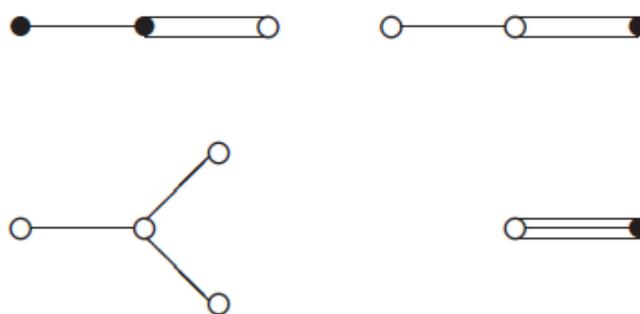


Figura 4.6: Tipi di connessioni multiple consentite

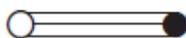


Figura 4.7:  $G_2$

- Rimpiazzare una catena di radici con una radice produce un diagramma di Dynkin.

Si consideri un diagramma di Dynkin con due radici  $\hat{\alpha}_n$  e  $\hat{\beta}_m$  connesse tra loro da due linee e ciascuna collegata ad una propria catena di radici (di lunghezza  $n$  per  $\hat{\alpha}_n$  e  $m$  per  $\hat{\beta}_m$ ). Allora, detti  $\hat{\alpha}_i$  e  $\hat{\beta}_p$  con  $i < n$  e  $p < m$  i generici elementi delle catene, si avrà

$$(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_m)^2 = 1/2$$

$$(\widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_{i+1}) = (\widehat{\beta}_p, \widehat{\beta}_{p+1}) = -1/2$$

$$(\widehat{\alpha}_i, \widehat{\beta}_p) = 0 .$$

Si introducano i vettori

$$\alpha = \sum_{j=1}^n j \widehat{\alpha}_j , \quad \beta = \sum_{j=1}^m j \widehat{\beta}_j$$

con norme

$$(\alpha, \alpha) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(\beta, \beta) = \frac{m(m+1)}{2} .$$

Dal momento che le due catene sono ortogonali eccezion fatta per i due elementi finali delle stesse, si avrà anche

$$(\alpha, \beta)^2 = m^2 n^2 (\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_m)^2 = \frac{m^2 n^2}{2}$$

che, per la disuguaglianza di Schwartz, sarà minore del prodotto delle norme, per cui

$$\frac{m^2 n^2}{2} < \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$(n-1)(m-1) < 2 .$$

Questa equazione ha tre soluzioni:

- $n = m = 2$ , da cui origina il diagramma di Dynkin dell'algebra eccezionale di rango 4  $F_4$ ;



Figura 4.8: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $F_4$

- $n = 1, \forall m$ , da cui origina il diagramma di Dynkin dell'algebra  $B_r$ , anche detta  $SO(2r + 1)$ , algebra del gruppo ortogonale speciale i cui elementi sono rappresentati da matrici ortogonali  $(2r + 1) \times (2r + 1)$  reali di determinante 1;



Figura 4.9: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $B_r$

- $m = 1, \forall n$ , da cui origina il diagramma di Dynkin dell'algebra  $C_r$ , anche detta  $Sp(2r)$ , algebra del gruppo simplettico compatto i cui elementi sono rappresentati da matrici unitarie quaternioniche  $2r \times 2r$ ;



Figura 4.10: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $C_r$

Le ultime due algebre hanno, ovviamente, lo stesso diagramma di Dynkin quando  $r = 2$ .

Si considerino invece ora un diagramma di Dynkin con una radice  $\widehat{\delta}$  collegata a tre catene lineari di lunghezze  $m, n$  e  $p$ , con radici  $\widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_j$  e  $\widehat{\alpha}_k$ . Come prima si introducano i vettori

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} i\widehat{\alpha}_i, \quad \beta = \sum_{j=1}^{m-1} j\widehat{\beta}_j, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{p-1} j\widehat{\gamma}_k,$$

con norme

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{n(n+1)}{2} \\(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{m(m+1)}{2} \\(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) &= \frac{p(p+1)}{2} .\end{aligned}$$

Dato che  $\widehat{\boldsymbol{\delta}}$  è collegata con una linea a  $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{m-1}$  e  $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{p-1}$  si avrà

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})^2 &= (n-1)^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})^2 = \frac{(n-1)^2}{4} \\(\boldsymbol{\beta}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})^2 &= (m-1)^2(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{m-1}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})^2 = \frac{(m-1)^2}{4} \\(\boldsymbol{\gamma}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})^2 &= (p-1)^2(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{p-1}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})^2 = \frac{(p-1)^2}{4}\end{aligned}$$

limitando gli angoli tra  $\widehat{\boldsymbol{\delta}}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  a

$$\cos^2 \Theta_{\widehat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad \cos^2 \Theta_{\widehat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}, \quad \cos^2 \Theta_{\widehat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} .$$

Si prenda ora il vettore perpendicolare a tutti e tre i vettori-catena, opportunamente normalizzati,  $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$  e  $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} - (\widehat{\boldsymbol{\delta}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}})\widehat{\boldsymbol{\alpha}} - (\widehat{\boldsymbol{\delta}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}})\widehat{\boldsymbol{\beta}} - (\widehat{\boldsymbol{\delta}}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}} ;$$

la norma di tale vettore dovrà essere positiva, da cui

$$\begin{aligned}(\widehat{\boldsymbol{\delta}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}})^2 + (\widehat{\boldsymbol{\delta}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}})^2 + (\widehat{\boldsymbol{\delta}}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}})^2 &< 1 \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} &> 1 .\end{aligned}$$

Questa disequazione ha le seguenti soluzioni:

- $m = p = 2, \forall n$ , da cui origina il diagramma di Dynkin dell'algebra  $D_{r+2}$ , anche detta  $SO(2r+4)$ , algebra del gruppo ortogonale speciale i cui elementi sono rappresentati da matrici ortogonali  $(2r+4) \times (2r+4)$  reali di determinante 1;
- per  $p = 2$  la disuguaglianza si riduce alla famosa equazione Diofantina

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} ,$$

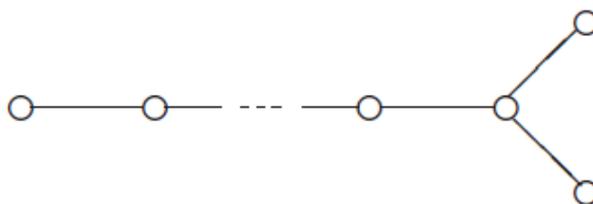


Figura 4.11: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $D_{n+2}$

che ha un interessante significato geometrico: considerando  $n$  il numero degli  $m$ -poligoni che si incontrano in un vertice, ciascuno di essi arriverà nel vertice con un angolo in radianti di  $\pi - 2\pi/m$  e dal momento che la somma di tutti gli angoli deve essere minore di  $2\pi$  si ha

$$n\left(\pi - \frac{2\pi}{m}\right) < 2\pi ,$$

da cui si arriva alla già nominata equazione Diofantina le cui soluzioni sono in corrispondenza coi 5 solidi platonici:

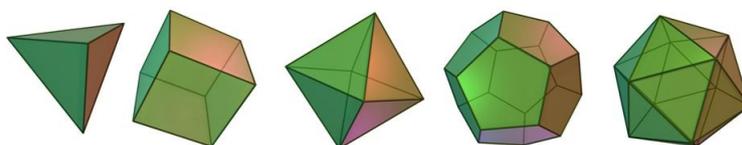


Figura 4.12: I solidi platonici. Da sinistra a destra: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

1. Per il tetraedro,  $m = n = 3$ , si ha il diagramma di Dynkin dell'algebra eccezionale 78-dimensionale di rango 6  $E_6$ ;

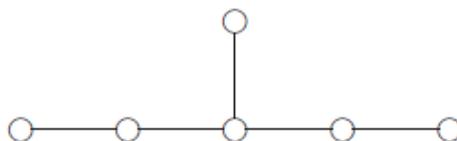


Figura 4.13: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $E_6$

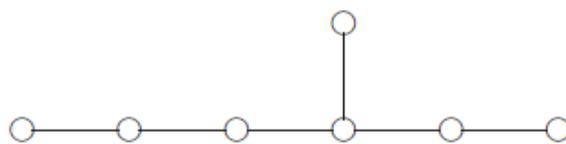


Figura 4.14: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $E_7$

2. Per il cubo e l'ottaedro,  $n = 3$  e  $m = 4$ , si ha il diagramma di Dynkin dell'algebra eccezionale 133-dimensionale di rango 7  $E_7$ ;
3. Per il dodecaedro e l'icosaedro,  $n = 5$  e  $m = 3$ , si ha il diagramma di Dynkin dell'algebra eccezionale 248-dimensionale di rango 8  $E_8$ ;

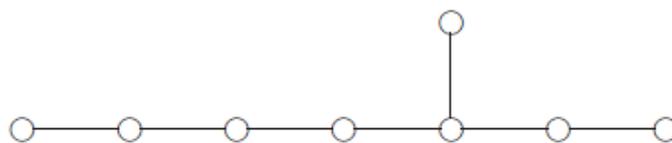


Figura 4.15: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $E_8$

Infine, radici di uguale lunghezza possono sempre essere connesse da una linea, dando luogo al diagramma di Dynkin dell'algebra  $A_r$ , anche detta  $SU(r + 1)$ , algebra del gruppo unitario speciale i cui elementi sono rappresentati da matrici unitarie complesse  $(r + 1) \times (r + 1)$  di determinante 1.

Questi sono tutti i possibili diagrammi di Dynkin: le algebre di Lie risultano



Figura 4.16: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $A_r$

dunque essere membri di una delle quattro famiglie infinite  $A_n, B_n, C_n$  o  $D_n$ , con  $n = 1, 2, \dots$ , o di una delle cinque algebre eccezionali  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  [1][2][7][8]. Un riassunto è mostrato in Figura 4.17.

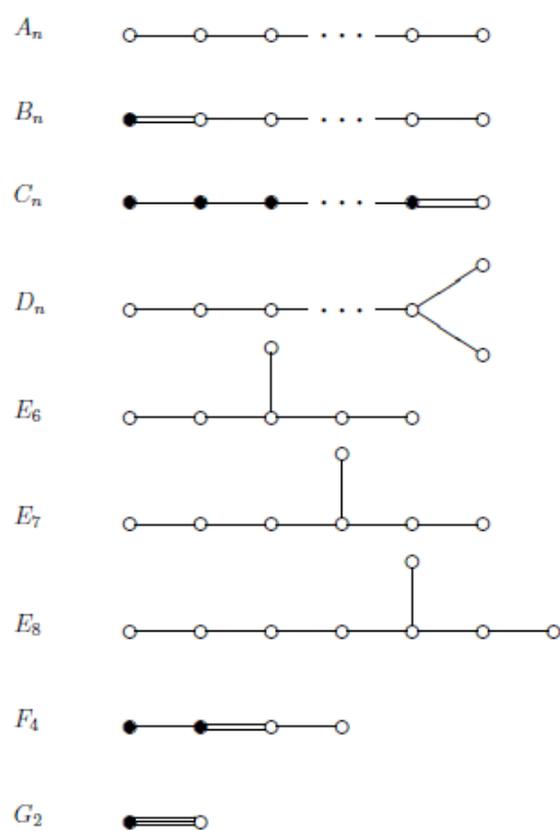


Figura 4.17: Tutti i possibili diagrammi di Dynkin.

# Capitolo 5

## Gruppi di Lie

**Gruppo di Lie.** *Un gruppo di Lie  $G$  è un gruppo continuo<sup>1</sup> i cui elementi sono funzioni analitiche (continue e infinitamente differenziabili) di un numero finito di parametri continui  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , reali o complessi [10].*

Hanno un particolare rilievo i gruppi di Lie connessi poichè, grazie alla proprietà di analiticità, si può connettere con continuità l'elemento identità a qualsiasi altro elemento del gruppo.

Un gruppo di Lie connesso avrà un numero infinito di elementi in un intorno dell'identità. In particolare, sono di rilievo per le applicazioni in Fisica (poichè devono avere sicuramente una rappresentazione matriciale e si connettono univocamente all'identità) i gruppi di Lie che dipendono linearmente dai parametri ( $\partial/\partial\alpha_i \neq 0$ ), per piccoli valori degli stessi. In questo caso, quando si è infinitesimalmente vicini all'identità si ha

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{0}} g \simeq 1 + i\alpha_k T^k$$

con  $g \in G$  generico elemento del gruppo, e  $\{T^k\} \equiv \left\{-i \frac{\partial g}{\partial \alpha_k}\right\}$  chiamati generatori del gruppo di Lie.

I generatori permettono attraverso l'esponenziazione di scrivere un qualsiasi elemento del gruppo in modo più semplice, infatti è conveniente studiare le proprietà degli  $N$  generatori invece delle proprietà degli infiniti elementi che compongono il gruppo di Lie in esame. Un elemento del gruppo si ottiene quindi applicando infinite volte la trasformazione infinitesima

$$g(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{i}{n} \alpha_k T^k \right]^n = e^{i\alpha_k T^k},$$

---

<sup>1</sup>Un gruppo continuo è un gruppo il cui numero di elementi è infinito e non denumerabile.

<sup>2</sup>Viene ancora utilizzata la convenzione di Einstein.

dove  $\vec{\alpha}$  questa volta è un vettore finito (non più infinitesimo).  
 Se il gruppo di Lie è unitario ( $U^\dagger = U^{-1}$ ) ed a parametri reali ( $\alpha_k \in \text{Re}$ ), allora i generatori sono hermitiani ( $T^\dagger = T$ )

$$U^\dagger = [e^{i\alpha_k T^k}]^\dagger = e^{-i\alpha_k (T^k)^\dagger} = e^{-i\alpha_k T^k} = U^{-1} .$$

Ad ogni gruppo di Lie si può associare un'algebra di Lie che è in grado di esprimere interamente la struttura locale del gruppo. La relazione gruppo-algebra non riguarda invece le caratteristiche globali, come connessione o semplice connessione: diversi gruppi di Lie possono quindi avere la stessa algebra. Lo studio delle proprietà e la classificazione delle algebre di Lie è molto più agevole rispetto all'analogo studio dei gruppi, per questo risultano molto utili una serie di teoremi che permettono di mettere in relazione le proprietà delle algebre a quelle dei gruppi corrispondenti. In particolare l'algebra associata ad un gruppo di Lie vede come componenti i generatori del gruppo che, infatti, devono rispettare le proprietà indotte dalla chiusura e dall'associatività degli elementi del gruppo (espressi come esponenziali<sup>3</sup>):

- dalla chiusura rispetto alla composizione di elementi appartenenti al gruppo si ha

$$[T^i, T^j] = i f^{ij}_k T^k ;$$

- dall'associatività degli elementi appartenenti al gruppo si ha

$$[[T^i, T^j], T^k] + [[T^j, T^k], T^i] + [[T^k, T^i], T^j] = 0 .$$

Il rango dell'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie sarà dato dunque dal numero di generatori commutanti tra loro, ovvero dal numero di generatori che potranno essere rappresentati da matrici diagonalizzabili simultaneamente (cfr. **Classificazione delle algebre di Lie**).

**Operatore di Casimir.** *Un operatore di Casimir è una qualsiasi funzione polinomiale dei generatori (elementi dell'algebra di Lie associata al gruppo) che commuti con gli stessi.*

---

<sup>3</sup>La dimostrazione si basa sul teorema di Baker-Hausdorff, che permette di scrivere il prodotto di esponenziali come

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}([A,[A,B]] - [B,[A,B]]) + \dots}$$

Si può dimostrare che il numero degli operatori di Casimir linearmente indipendenti coincide al rango dell'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie.

Come si è visto (cfr. **Algebre di Lie**), ogni algebra di Lie possiede una rappresentazione aggiunta e così accade anche per l'algebra associata ad un gruppo di Lie. Inoltre per tali algebre la dimensione di questa rappresentazione eguaglia il numero dei generatori del gruppo.

Si conclude infine questa parte introduttiva sui gruppi di Lie analizzando la rappresentazione complessa coniugata nel caso di un'algebra derivante da un suddetto gruppo. Sia dunque  $G$  un generico gruppo di Lie e  $D(g)$  la rappresentazione di un suo elemento  $g \in G$ :  $D^*(g)$  sarà dunque la sua rappresentazione complessa coniugata e, indicando ora con  $T^k$  la rappresentazione del generico generatore del gruppo, si avrà

$$\begin{aligned} D(g) &= e^{i\alpha_k T^k} \\ D^*(g) &= e^{-i\alpha_k (T^k)^*} \end{aligned}$$

da cui si comprende come  $\{-(T^k)^*\}$  siano i generatori della rappresentazione complessa coniugata. Come è già stato detto nel paragrafo **Rappresentazioni Complesse, Reali e Pseudoreali**, non è detto che queste due rappresentazioni coincidano: in analogia con quanto già detto infatti, ciò accadrà solamente nel caso in cui  $T^k$  e  $-(T^k)^*$  siano equivalenti, ovvero solo nel caso in cui esista una matrice  $S$  tale che  $ST^kS^{-1} = -(T^k)^*$ .

## 5.1 SU(2)

$SU(2)$  è il gruppo di Lie i quali elementi sono rappresentati, nella loro *rappresentazione fondamentale* **2**, dalle matrici  $2 \times 2$  unitarie con  $\det = +1$

$$SU(2) = \{U \text{ matrice } 2 \times 2 \mid U^\dagger = U^{-1}, \det U = +1\} .$$

Si consideri uno spazio di Hilbert bidimensionale, su cui agiscono gli operatori lineari [2][4]

$$T^+ \equiv |1\rangle\langle 2| \quad , \quad T^- \equiv |2\rangle\langle 1| \quad , \quad T^3 \equiv \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) \quad ,$$

che soddisfano l'algebra

$$[T^+, T^-] = 2T^3 \quad , \quad [T^3, T^\pm] = \pm T^\pm .$$

Si definiscano ora gli operatori hermitiani

$$T^1 \equiv \frac{1}{2}(T^- + T^+) , \quad T^2 \equiv \frac{i}{2}(T^- - T^+) ,$$

per i quali, assieme all'operatore  $T^3$ , vale l'algebra

$$[T^A, T^B] = i\epsilon^{AB}{}^C T^C$$

(con  $A, B, C = 1, 2, 3$  e  $\epsilon^{ABC} = \epsilon^{AB}{}_C = \epsilon^A{}_{BC} = \epsilon_{ABC} = \epsilon_{AB}{}^C = \epsilon_A{}^{BC}$  simbolo di Levi-Civita), dal momento che è soddisfatta anche, per costruzione, l'identità di Jacobi.

Quest'algebra di Lie, la più piccola non banale, è quella associata ai gruppi  $SU(2)$ ,  $SO(3)$  e  $Sp(2)$  ( $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ ).

Per tale algebra esiste un unico operatore di Casimir

$$C_2 \equiv (T^1)^2 + (T^2)^2 + (T^3)^2 , \quad [C_2, T^A] = 0 .$$

Questa prima costruzione rappresenta l'algebra in uno spazio di Hilbert bi-dimensionale: l'algebra avrà dunque una rappresentazione irriducibile fondamentale di dimensione 2, **2**.

Ora si vogliono trovare tutte le rappresentazione irriducibili dell'algebra appena descritta, e per farlo si deve tener conto di due accorgimenti:

1. In Meccanica Quantistica gli stati vengono etichettati dagli autovalori del massimo numero di operatori commutanti. In questo caso  $C_2$  commuta con tutti e tre gli operatori  $T^A$ , dunque si scelgano  $C_2$  e  $T^3$ . Le rappresentazioni del gruppo agiranno dunque sugli autostati di questi due operatori.
2. Dato che l'operatore di Casimir è definito positivo, lo spettro di uno qualsiasi dei  $T^A$  è limitato.

Dunque, per lo stato  $|c; m\rangle$ , si avrà

$$C_2 |c; m\rangle = c |c; m\rangle , \quad T^3 |c; m\rangle = m |c; m\rangle ,$$

dove  $c$  e  $m$  sono reali (gli operatori sono hermitiani).

Gli altri operatori dell'algebra possono essere usati per creare nuovi stati. Dalle operazioni di commutazione si vede infatti come  $T^+$  aumenti il valore di  $T^3$  di un'unità, lasciando inalterato  $C_2$ :

$$T^+ |c; m\rangle = d_m^+ |c; m+1\rangle ,$$

con  $d_m^+$  da determinare.

Sembra quindi a prima vista potersi generare un insieme infinito di autostati di  $T^3$  con autovalori  $m, m+1, m+2, \dots$  dall'applicazione ripetuta di  $T^+$ , ma ad un'attenta analisi, ricordando il secondo accorgimento enunciato in precedenza, si realizza come questa sequenza debba terminare ( $T^3$  è limitato). Sia dunque  $j$  il massimo autovalore di  $T^3$ :

$$T^+ |c; j\rangle = 0, \quad T^3 |c; j\rangle = j |c; j\rangle .$$

Questo è detto *stato più alto* della rappresentazione.

Calcolando il valore dell'operatore di Casimir per tale stato si trova

$$C_2 |c; j\rangle = j(j+1) |c; j\rangle ,$$

da cui  $c = j(j+1)$ . L'autovalore massimo di  $T^3$  determina quindi l'autovalore dell'operatore di Casimir: si possono rinominare gli stati utilizzando  $j$  al posto di  $m$ , ovvero  $|c; m\rangle \rightarrow |j; m\rangle$ .

In modo simile si possono costruire anche autostati di  $T^3$  con autovalori  $m, m-1, m-2, \dots$  dall'applicazione ripetuta di  $T^-$ , ma anche questo processo è destinato ad avere un termine

$$T^- |j; k\rangle = 0, \quad T^3 |j; k\rangle = k |j; k\rangle ,$$

con  $|j; k\rangle$  *stato più basso* della rappresentazione e  $k$  appartenente alla successione  $j, j-1, j-2, \dots$ .

Calcolando il valore dell'operatore di Casimir per tale stato si trova

$$C_2 |j; k\rangle = k(k-1) |j; k\rangle$$

ma, visto che lo stato più basso ha lo stesso autovalore per  $C_2$ , si avrà  $j(j+1) = k(k-1)$ . L'unica soluzione accettabile di questa equazione è  $k = -j$ .

Ogni rappresentazione irriducibile di questa algebra avrà dunque dimensione  $2j+1$  ( $2j$  deve quindi essere un intero) e gli autovalori di  $T^3$  spazieranno da  $j$  a  $-j$  con passo unitario.

In fisica  $j$  è detto momento angolare totale, mentre in matematica  $2j$  è detto *indice di Dinkin* della rappresentazione.

$SU(2)$  ha quindi un infinito numero di rappresentazioni irriducibili, ogniuna per ogni valore intero di  $2j$ : per  $j = 0$  si ha la rappresentazione banale di singoletto **1**, per  $j = 1/2$  si ha la famosa rappresentazione spinoriale **2** (rappresentazione fondamentale), per  $j = 1$  si ha la rappresentazione di tripletto **3** che agisce su vettori tridimensionali, etc.

Prima di proseguire è meglio notare come l'applicazione di  $T^-$  diminuisca il valore di  $T^3$  di un'unità, lasciando inalterato  $C_2$ :

$$T^- |j; m\rangle = d_m^- |j; m-1\rangle ,$$

con  $d_m^-$  anch'esse da determinare come  $d_m^+$ . A tal proposito si può dimostrare come per

$$d_m^\pm = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$$

gli stati soddisfino le condizioni di ortonormalità e completezza

$$\langle j; m | j; m' \rangle = \delta_{m,m'} \sum_{m=-j}^{m=+j} |j; m\rangle \langle j; m| = 1 .$$

È dunque utile rappresentare gli elementi dell'algebra di Lie della rappresentazione  $(2\mathbf{j}+1)$  come matrici  $(2j+1) \times (2j+1)$

$$(T^A)_{pq} ,$$

con  $p, q = 1, 2, \dots, 2j+1$ . Si può scegliere di porre  $T^3$  nella forma diagonale

$$\begin{pmatrix} j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & -j \end{pmatrix}$$

ed in tal caso  $T^+$  e  $T^-$  saranno rispettivamente una matrice triangolare superiore ed una matrice triangolare inferiore. Le matrici della rappresentazione saranno sempre a traccia nulla grazie alla proprietà ciclica della traccia ed al fatto che tutte sono il risultato di una commutazione tra due matrici.

**Esempio:  $\mathbf{j}=1/2$ .**

La rappresentazione più piccola (e dunque la fondamentale) è quella con  $j = 1/2$ , ovvero  $\mathbf{2}$ . In questa rappresentazione i generatori possono essere espressi in termini delle tre matrici di Pauli  $2 \times 2$ :

$$T^A = \frac{\sigma^A}{2}$$

$$\sigma^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

che soddisfano

$$\sigma^A \sigma^B = \delta^{AB} + i\epsilon^{ABC} \sigma^C, \quad -\sigma^{A*} = \sigma^2 \sigma^A \sigma^2.$$

Dalla seconda relazione tra le due appena scritte risulta chiaro (cfr. **Rappresentazioni Complesse, Reali e Pseudoreali, Gruppi di Lie**) come le rappresentazioni  $\bar{\mathbf{2}}$  e  $\mathbf{2}$  coincidano.

In questa rappresentazione gli elementi del gruppo  $SU(2)$  sono dunque

$$U(\vec{\theta}) = e^{i\theta_A \sigma^A / 2} = \mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} + i \hat{\theta}_A \sigma^A \sin \frac{\theta}{2},$$

con  $\hat{\theta}_A \equiv \frac{\theta_A}{\theta}$  e  $\theta \equiv \sqrt{\sum_A \theta_A^2}$ . Questi descrivono una trasformazione periodica solo dopo una rotazione di  $4\pi$ , dopo una trasformazione di  $2\pi$  si ottiene un'inversione del segno del vettore su cui agisce. La sua azione su un vettore  $(z_1, z_2)$ , appartenente allo spazio di Hilbert bidimensionale sul quale agisce la trasformazione, lascia invariata la forma quadratica

$$|z_1|^2 + |z_2|^2.$$

Qualsiasi elemento del gruppo può essere rappresentato come un punto sulla superficie di una ipersfera tridimensionale  $S_3$ , la varietà associata al gruppo  $SU(2)$ . Una successione di trasformazioni traccia una curva continua su  $S_3$  ed in particolare si ha, per questa varietà, che ogni curva chiusa può essere ristretta ad un punto:  $SU(2)$  è connesso semplicemente [2][10].

**Esempio:  $j=1$ .**

La rappresentazione con  $j = 1$ , ovvero quella di tripletto  $\mathbf{3}$ , ha tanti stati quanti sono gli elementi dell'algebra ed è dunque la rappresentazione aggiunta (cfr. **Algebra di Lie**). Qui i generatori possono essere rappresentati con le matrici hermitiane  $3 \times 3$

$$(T^A)_{BC} = -i\epsilon^A_{BC}$$

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questa rappresentazione gli elementi del gruppo  $SU(2)$  sono dunque le matrici  $3 \times 3$

$$(R(\vec{\theta}))_{BC} = e^{\theta_A \epsilon^A_{BC}} = \delta_{BC} \cos \theta + \hat{\theta}_A \epsilon^A_{BC} \sin \theta + \hat{\theta}_B \hat{\theta}_C (1 - \cos \theta)$$

che generano le rotazioni, nello spazio tridimensionale dei vettori  $\vec{v}$ , di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $\hat{\theta}_A$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = R(\vec{\theta})\vec{v} .$$

Queste matrici sono reali e sono equivalenti alle rappresentazioni degli elementi del gruppo delle rotazioni nel consueto spazio tridimensionale,  $SO(3) = \{R \text{ matrice } 3 \times 3 \mid R^T = R^{-1}, \det R = +1\}$ . Tale gruppo codifica infatti l'invarianza della norma dei vettori soggetti a rotazione con l'ortogonalità delle matrici che ne rappresentano gli elementi:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}' \cdot \vec{v}' \leftrightarrow R(\vec{\theta})^T R(\vec{\theta}) = \mathbf{I} .$$

La varietà associata al gruppo  $SO(3)$  (al contrario di quella, già analizzata, di  $SU(2)$ ) può essere visualizzata raffigurando in uno spazio tridimensionale  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  e  $\hat{\theta}_3$  sugli assi ortogonali, in modo tale che, una volta realizzato che una trasformazione è la stessa per l'angolo  $\theta$  e l'angolo  $\theta + 2\pi$ , questa varietà risiede all'interno di una sfera di raggio  $\pi$ <sup>4</sup> dove però punti antipodali sulla superficie della stessa corrispondono al medesimo elemento del gruppo.

Questo porta a proprietà topologiche particolari. Si consideri infatti una curva in tale varietà che parta dall'origine e, non toccando la superficie, ritorni al punto di partenza: tale curva può essere ridotta ad un punto (come nel caso di  $SU(2)$ ). Si consideri però ora un secondo percorso che raggiunga un punto sulla superficie e ricompaia su essa nella posizione diametralmente opposta, per poi ricongiungersi all'origine da cui è partito. Questa curva, benchè possibile in quanto punti antipodali corrispondano alla stessa trasformazione, non può essere ridotta ad un punto senza che vi siano delle ostruzioni.  $SO(3)$  è quindi detto *moltepiamente connesso* e, in particolare, *doppiamente connesso*.

Si è mostrato come gruppi diversi possano avere la stessa algebra e quindi le stesse caratteristiche topologiche locali, pur non possedendo la stessa struttura a livello globale [2][10].

### 5.1.1 Rappresentazioni

Esiste un altro modo per generare le rappresentazioni irriducibili, e spesso viene utilizzato in fisica. Tutte le rappresentazioni possono infatti essere generate prendendo il prodotto diretto delle rappresentazioni più piccole, in questo caso il prodotto diretto multiplo di **2** [2].

Si supponga quindi di clonare l'algebra di Lie in questione dando vita a due

---

<sup>4</sup> $-\pi \leq \theta \leq \pi$

copie identiche,  $T_{(1)}^A$  e  $T_{(2)}^A$ , ciascuna obbediente alla stessa algebra, ma commutante con l'altra:

$$[T_{(a)}^A, T_{(a)}^B] = i\epsilon^{AB}{}_C T_{(a)}^C, \quad a = 1, 2$$

$$[T_{(1)}^A, T_{(2)}^A] = 0,$$

e ciascuna agente sul proprio spazio di Hilbert, di basi  $|\cdots\rangle_{(1)}$  e  $|\cdots\rangle_{(2)}$ . La somma dei generatori produce la stessa algebra

$$[T_{(1)}^A + T_{(2)}^A, T_{(1)}^B + T_{(2)}^B] = i\epsilon^{AB}{}_C (T_{(1)}^C + T_{(2)}^C)$$

ed agisce sul prodotto diretto degli spazi di Hilbert, di base  $|\cdots\rangle_{(1)}|\cdots\rangle_{(2)}$ . Dal momento che la somma dei generatori soddisfa le stesse relazioni di commutazione, ci si aspetta di poter rappresentare la loro azione in termini delle rappresentazioni già derivate in precedenza. Quando  $SU(2)$  si identifica con le rotazioni tridimensionali questa costruzione viene detta somma del momento angolare.

Si consideri dunque il prodotto diretto (di Kronecker) delle due rappresentazioni arbitrarie  $\mathbf{2k}+\mathbf{1}$  e  $\mathbf{2j}+\mathbf{1}$ . Lo stato originato dal prodotto diretto degli stati più alti, indicati solamente con gli autovalori di  $T_{(1)}^3$  e  $T_{(2)}^3$ , sarà ovviamente  $|j\rangle_{(1)}|k\rangle_{(2)}$  e soddisferà le due relazioni

$$T^3 |j\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} = (T_{(1)}^3 + T_{(2)}^3) |j\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} = (j + k) |j\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)},$$

$$T^+ |j\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} = (T_{(1)}^+ + T_{(2)}^+) |j\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} = 0 :$$

questo deve dunque essere lo stato più alto della rappresentazione  $\mathbf{2(j+k)}+\mathbf{1}$ . Per generare gli altri stati si ricorre all'utilizzo dell'operatore  $T^- \equiv T_{(1)}^- + T_{(2)}^-$ , la cui prima applicazione produce lo stato

$$d_j^- |j-1\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} + d_k^- |j\rangle_{(1)} |k-1\rangle_{(2)} = \sqrt{2j} |j-1\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} + \sqrt{2k} |j\rangle_{(1)} |k-1\rangle_{(2)},$$

il cui ortogonale

$$\frac{1}{\sqrt{2j}} |j-1\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} - \frac{1}{\sqrt{2k}} |j\rangle_{(1)} |k-1\rangle_{(2)}$$

è l'autostato di  $T^3$  con autovalore  $j+k-1$ , annichilito da  $T^+$ : anch'esso è dunque lo stato più alto di una rappresentazione, in particolare di  $\mathbf{2(j+k-1)}+\mathbf{1}$ .

ripetendo il processo si trovano stati come combinazioni lineari di

$$|j-2\rangle_{(1)} |k\rangle_{(2)} , |j-1\rangle_{(1)} |k-1\rangle_{(2)} , |j\rangle_{(1)} |k-2\rangle_{(2)} .$$

Due combinazioni lineari sono gli stati subito inferiori agli stati più alti delle due rappresentazioni  $\mathbf{2(j+k)+1}$  e  $\mathbf{2(j+k-1)+1}$ , mentre la terza è lo stato più alto della nuova rappresentazione  $\mathbf{2(j+k-2)+1}$ . Ad ogni livello dunque verrà generata una nuova rappresentazione fino all'esaurimento degli stati a causa del raggiungimento del limite inferiore delle due rappresentazioni originarie. È facile vedere come ci si fermi alla rappresentazione  $|j-k|$  ottenendo quindi la decomposizione (scegliendo il caso in cui  $j \geq k$ )

$$[2j+1] \times [2k+1] = [2(j+k)+1] + [2(j+k-1)+1] + \dots + [2(j-k)+1] .$$

**Esempio:  $\mathbf{2 \times 2}$ .**

Il prodotto degli stati più alti dei singoli spazi, e dunque lo stato più alto del prodotto degli spazi, è

$$|\uparrow\uparrow\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(2)} .$$

L'azione dell'operatore di abbassamento  $T^- \equiv T_{(1)}^- + T_{(2)}^-$  produce prima la combinazione lineare <sup>5</sup>

$$|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(2)} + \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(2)} ,$$

poi

$$|\downarrow\downarrow\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(2)} .$$

Un'ulteriore applicazione a questo stato dell'operatore di abbassamento dà come risultato 0.

Questi tre stati formano dunque la rappresentazione tridimensionale dell'algebra: la rappresentazione di tripletto  $\mathbf{3}$ .

Il quarto stato del prodotto diretto degli spazi di Hilbert è lo stato ortogonale

$$|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(2)} - \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(2)} ,$$

annichilito sia dall'operatore di innalzamento che da quello di abbassamento: questo stato forma dunque la rappresentazione di singoletto dell'algebra,  $\mathbf{1}$ . È stato quindi provato come due stati di spin  $j = 1/2$  si compongano in modo simmetrico in uno stato di spin  $j = 1$ , o in modo antisimmetrico in uno stato di spin  $j = 0$ . Questo risultato viene indicato nel modo usuale (attraverso la dimensione delle rappresentazioni)

$$\mathbf{2 \times 2 = 3 + 1} .$$

---

<sup>5</sup> $d_{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}}^- = 1$ .

**Esempio:  $2 \times 3$ .**

Dall'espressione generale si ricava come la decomposizione per il prodotto delle due rappresentazioni con  $j = 1/2$  e  $j = 1$  debba essere

$$2 \times 3 = 4 + 2 ,$$

dunque la somma diretta delle rappresentazioni  $j = 3/2$  e  $j = 1/2$ . Per vederlo esplicitamente si costruisca, come prima, il prodotto degli stati più alti dei singoli spazi (e dunque lo stato più alto del prodotto degli spazi), che è

$$\left| \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; 1\rangle_{(2)} .$$

Per proseguire è utile scrivere esplicitamente gli effetti degli operatori di abbassamento sulle rappresentazioni con  $j = 1/2$  e  $j = 1$

$$T^- \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle , \quad T^- |1; 1\rangle = \sqrt{2} |1; 0\rangle , \quad T^- |1; 0\rangle = \sqrt{2} |1; -1\rangle .^6$$

Ora, dal momento che

$$T^- \left| \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle ,^7$$

allora

$$\left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} T^- \left| \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; 1\rangle_{(2)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; 0\rangle_{(2)}$$

e, continuando il processo, si ottiene prima

$$\left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} T^- \left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; 0\rangle_{(2)} + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; -1\rangle_{(2)} ,^8$$

poi

$$\left| \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} T^- \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; -1\rangle_{(2)} ,^9$$

lo stato più basso.

I rimanenti due stati si trovano tenendo conto che lo stato ortogonale a  $\left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$ ,

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; 1\rangle_{(2)} - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle_{(1)} |1; 0\rangle_{(2)} ,$$

---

<sup>6</sup>  $d_{1;1}^- = d_{1;0}^- = \sqrt{2}$ .

<sup>7</sup>  $d_{\frac{3}{2};\frac{3}{2}}^- = \sqrt{3}$ .

<sup>8</sup>  $d_{\frac{3}{2};\frac{1}{2}}^- = 2$ .

<sup>9</sup>  $d_{\frac{3}{2};-\frac{1}{2}}^- = \sqrt{3}$ .

è l'autostato di  $T^3$  con autovalore  $j = 1/2$  ed esso viene annichilito dall'operatore d'innalzamento  $T^+$ : questo è dunque lo stato più alto della rappresentazione  $\mathbf{2}$  con  $j = 1/2$ ,  $|\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$ , il cui stato più basso verrà generato dall'applicazione dell'operatore  $T^-$ , dando vita a

$$|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle_{(1)} |1; 0\rangle_{(2)} - \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle_{(1)} |1; -1\rangle_{(2)} .$$

È stato quindi provato come due stati  $j = 1/2$  e  $j = 1$  si compongano in uno stato con  $j = 3/2$  o in uno stato con  $j = 1/2$ . Questo risultato viene indicato nel modo usuale (attraverso la dimensione delle rappresentazioni)

$$\mathbf{2} \times \mathbf{3} = \mathbf{4} + \mathbf{2} .$$

I coefficienti che appaiono in queste decomposizioni sono chiamati *coefficienti di Clebsch-Gordan*.

### 5.1.2 Alcune applicazioni di SU(2)

**L'atomo di Bohr.**

Il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno è descritto dall'Hamiltoniano di un elettrone di momento  $\vec{p}$ , carica  $e$  e massa  $m$ , attratto al nucleo da un potenziale Coulombiano [2][6]

$$H = \frac{\vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{P}}}{2m} - \frac{e^2}{r} ,$$

dove  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , con  $x_i$  autovalori degli operatori posizione  $X_i$ . Lo spettro dei suoi stati legati è dato dalle energie negative

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2} ,$$

con  $R_y$  costante di Rydberg e  $n = 1, 2, \dots$  numero quantico principale.

L'invarianza di questo sistema sotto rotazioni spaziali risulta evidente dall'annullamento del commutatore

$$[H, L_i] = 0 ,$$

con  $\vec{\mathbf{L}} = (L_1, L_2, L_3)$  consueto pseudovettore le cui componenti sono gli operatori del momento angolare

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{P}} \leftrightarrow L_i = \epsilon_i^{jk} X_j P_k ,$$

e si manifesta con l'indipendenza dell'energia del sistema dal numero quantico  $m_z$ , autovalore della componente  $z$  del momento angolare. L'energia scritta sopra risulta però anche indipendente dal numero quantico secondario  $l$ , autovalore dell'operatore  $L^2$  (modulo quadro del momento angolare), portando ad un'altra degenerazione dei livelli energetici (il primo stato eccitato ad esempio,  $n = 2$ , si presenta con due rappresentazioni di  $SO(3)$ ,  $l = 0$  e  $l = 1$ ). Come prima la presenza di una degenerazione nei livelli energetici suggerisce la presenza di uno o più operatori commutanti con l'Hamiltoniano e dunque di una o più simmetrie del sistema. Mentre una è stata scovata senza difficoltà ( $[H, L_i] = 0$ ), la seconda sembra non essere banale. Fortunatamente la soluzione arriva dall'equivalente classico del problema a campo centrale in questione: il *vettore di Laplace-Rouge-Lenz*, costante del moto del sistema ed equivalente a

$$\vec{A}_{classico} = \vec{p} \times \vec{L} - me^2 \frac{\vec{r}}{r}.$$

Per il passaggio alla Meccanica Quantistica è necessario riscrivere tale vettore come il vettore di operatori hermitiani

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{P} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{P}) - me^2 \frac{\vec{X}}{r},$$

le cui componenti soddisfano le relazioni di commutazione

$$[H, A_i] = 0.$$

$\vec{A}$  si conferma dunque costante del moto ed il sistema risulta invariante sotto l'azione delle trasformazioni generate da  $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ . Quest'invarianza extra è tuttavia non manifesta da cui il nome attribuitole di *simmetria nascosta*.

Tale simmetria permette una veloce ed elegante soluzione per l'atomo di Bohr. Per prima cosa è bene scrivere le relazioni (di commutazione e non) che interessano il vettore di Lenz:

$$\begin{aligned} \vec{L} \cdot \vec{A} &= \vec{A} \cdot \vec{L} = 0 \\ [L_i, A_j] &= i\epsilon_{ij}^k A_k \\ [A_i, A_j] &= i\epsilon_{ij}^k L_k (-2mH). \end{aligned}$$

è inoltre conveniente definire gli operatori riscaldati

$$\hat{A}_i \equiv \frac{1}{\sqrt{-2mE_n}} A_i,$$

grazie ai quali si chiude l'algebra formata da  $\hat{A}_i$  e  $L_i$ :

$$\begin{aligned} [L_i, A_j] &= i\epsilon_{ij}^k A_k \\ [\widehat{A}_i, \widehat{A}_j] &= i\epsilon_{ij}^k L_k \\ [L_i, L_j] &= i\epsilon_{ij}^k L_k . \end{aligned}$$

Con le particolari combinazioni lineari di  $\widehat{A}_i$  e  $L_i$

$$\begin{aligned} F_i &\equiv \frac{1}{2}(L_i + \widehat{A}_i) \\ G_i &\equiv \frac{1}{2}(L_i - \widehat{A}_i) , \end{aligned}$$

tale algebra si rivela essere nient'altro che quella di  $SU(2) \times SU(2)$ , infatti

$$\begin{aligned} [F_i, F_j] &= i\epsilon_{ij}^k F_k \\ [G_i, G_j] &= i\epsilon_{ij}^k G_k \\ [F_i, G_j] &= 0 . \end{aligned}$$

I due operatori di Casimir  $\vec{\mathbf{F}}^2$  e  $\vec{\mathbf{G}}^2$  devono dunque essere costanti del moto ma, ricordando l'ortonormalità tra  $\vec{\mathbf{L}}$  e  $\vec{\mathbf{A}}$ , essi risultano coincidenti

$$\vec{\mathbf{F}}^2 = \frac{1}{4}(\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{A}})(\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{A}}) = \frac{1}{4}(\vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{A}})(\vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{G}}^2 .$$

Si avrà dunque

$$\begin{aligned} j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |\Psi\rangle &= \vec{\mathbf{F}}^2 |\Psi\rangle = \vec{\mathbf{G}}^2 |\Psi\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |\Psi\rangle \\ &\Downarrow \\ j_1(j_1 + 1) &= j_2(j_2 + 1) \\ &\Downarrow \\ j_1 &= j_2 \equiv j . \end{aligned}$$

Per concludere la trattazione è ora necessario esprimere la relazione tra l'Hamiltoniano e gli operatori di Casimir. Dopo alcuni calcoli si arriva a

$$2(\vec{\mathbf{F}}^2 + \vec{\mathbf{G}}^2) + \mathbf{I} = -\frac{me^2}{2}H^{-1} ,$$

da cui, applicando entrambi i membri all'autostato comune  $|\Psi\rangle$  e riordinando,

$$E_n = -\frac{me^2}{2\hbar^2(2j + 1)^2} .$$

Dunque  $j$  in questo caso non corrisponderà al momento angolare ma sarà collegato al numero quantico principale  $n$  dalla relazione

$$n = 2j + 1 .$$

Questa relazione è inoltre coerente coi valori che  $j$  e  $n$  possono assumere: infatti se  $n = (2j + 1)1, 2, 3, \dots$ , allora  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  come ci si aspettava.

Infine si nota come, essendo

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{G}} ,$$

per l'additività dei momento angolari<sup>10</sup> l'autovalore  $l$  di  $\vec{\mathbf{L}}^2$  potrà assumere solamente i valori  $l = 0, 1, 2, \dots, 2j = n - 1$ , come ci si aspettava.

Riconoscendo le simmetrie dell'atomo di idrogeno nel modello di Bohr ed utilizzando le sue conoscenze sulle rappresentazioni di  $SU(2)$  Pauli fu il primo a derivare lo spettro energetico dell'idrogeno.

### Spin Isotopico.

Il fatto che le forze nucleari sembrano agire allo stesso modo su protoni e neutroni, portò Heisenberg a pensare a questi come due stati differenti della stessa particella: il nucleone. Protone e neutrone risultavano dunque come due componenti (*isodoppietto*) della rappresentazione fondamentale  $\mathbf{2}$  di  $SU(2)$  chiamata di spin isotopico o di *isospin*. Tale simmetria non risulta però essere perfetta nemmeno considerando solamente la forza forte: tralasciando la diversa carica elettrica delle particelle, il neutrone è infatti leggermente più massivo del protone. Dunque l'invarianza di spin isotopico è una simmetria, anche se di poco, approssimata dell'interazione forte ed è una simmetria rotta dalla forza elettromagnetica e dalla forza debole. Inoltre si pensava che le tre particelle  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  e  $\pi^-$  (i pioni) potessero essere organizzate in un *isotripletto* dove ogni componente, rappresentante una delle tre particelle, fosse uno stato legato nucleone-antinucleone, in analogia alla decomposizione del prodotto diretto delle rappresentazioni  $\mathbf{2} \times \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{3} + \mathbf{1}$  [2][5].

Esplicitamente, detti  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  i tre generatori dell'isospin e  $\vec{\mathbf{I}}^2$  il solito operatore di Casimir associato, si avrà

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{I}}^2 |p\rangle &\sim \frac{3}{4} |p\rangle , & \vec{\mathbf{I}}^2 |n\rangle &\sim \frac{3}{4} |n\rangle , \\ I_3 |p\rangle &\sim \frac{1}{2} |p\rangle , & I_3 |n\rangle &\sim -\frac{1}{2} |n\rangle , \\ \vec{\mathbf{I}}^2 |\bar{p}\rangle &\sim \frac{3}{4} |\bar{p}\rangle , & \vec{\mathbf{I}}^2 |\bar{n}\rangle &\sim \frac{3}{4} |\bar{n}\rangle , \\ I_3 |\bar{p}\rangle &\sim \frac{1}{2} |\bar{p}\rangle , & I_3 |\bar{n}\rangle &\sim -\frac{1}{2} |\bar{n}\rangle \end{aligned}$$

<sup>10</sup>In questo caso si tratta della decomposizione di  $(\mathbf{2j+1}) \times (\mathbf{2j+1})$ .

da cui la notazione

$$\begin{aligned} |p\rangle &\equiv \left|\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle, & |n\rangle &\equiv \left|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\rangle, \\ |\bar{p}\rangle &\equiv \left|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\rangle, & |\bar{n}\rangle &\equiv \left|\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

Fermi e Yang notarono che i numeri quantici dei pioni corrispondevano a quelli di un sistema nucleone-antinucleone. Questa osservazione portò i due a costruire gli stati dei tre pioni come

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |1; 1\rangle \longleftrightarrow |p\rangle |\bar{n}\rangle \\ |\pi^0\rangle &= |1; 0\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle |\bar{p}\rangle + |n\rangle |\bar{n}\rangle) \\ |\pi^-\rangle &= |1; -1\rangle \longleftrightarrow |n\rangle |\bar{p}\rangle. \end{aligned}$$

Essi erano dunque considerati stati relativi al sistema legato nucleone-antinucleone matematicamente descritto dal prodotto delle rappresentazioni  $\mathbf{2} \times \bar{\mathbf{2}}$  e furono sistemati nell'isotripletto ottenuto dalla decomposizione di tale prodotto diretto, come anticipato in precedenza.

Benchè questo primo modello fosse errato, l'idea sopravvive tutt'oggi, dal momento che i pioni si ritengono essere composti da coppie quark-antiquark. Questo è un primo esempio di come la Teoria dei Gruppi può essere usata nella tassonomia delle particelle elementari.

## 5.2 SU(3)

$SU(3)$  è il gruppo di Lie i quali elementi sono rappresentati, nella loro *rappresentazione fondamentale*  $\mathbf{3}$ , dalle matrici  $3 \times 3$  unitarie con  $\det = +1$ :

$$SU(3) = \{U \text{ matrice } 3 \times 3 \mid U^\dagger = U^{-1}, \det U = +1\}.$$

Si consideri uno spazio di Hilbert tridimensionale, su cui agiscono gli operatori lineari [2][3][10][12]

$$X_b^a \equiv |a\rangle \langle b|, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

che soddisfano le relazioni commutazione

$$[X_b^a, X_d^c] = \delta_b^c X_d^a - \delta_d^a X_b^c.$$

Si definiscano ora gli operatori hermitiani (cfr. **Spazi di Hilbert finito-dimensionali**)

$$\begin{aligned}
T^1 &\equiv \frac{1}{2}(X^1_2 + X^2_1), & T^2 &\equiv -\frac{i}{2}(X^1_2 - X^2_1), \\
T^4 &\equiv \frac{1}{2}(X^1_3 + X^3_1), & T^5 &\equiv -\frac{i}{2}(X^1_3 - X^3_1), \\
T^6 &\equiv \frac{1}{2}(X^2_3 + X^3_2), & T^7 &\equiv -\frac{i}{2}(X^2_3 - X^3_2), \\
T^3 &\equiv \frac{1}{2}(X^1_1 - X^2_2), & T^8 &\equiv \frac{1}{2\sqrt{3}}(X^1_1 + X^2_2 - 2X^3_3),
\end{aligned}$$

per i quali vale l'algebra

$$[T^A, T^B] = if^{AB} T^C$$

con  $A, B, C = 1, 2, 3$  e  $f^{ABC} = f^{AB}{}_C = f^A{}_{BC} = f_{ABC} = f_{AB}{}^C = f_A{}^{BC}$  costanti di struttura completamente antisimmetriche, i cui valori per le componenti non nulle sono

$$\begin{aligned}
f_{123} &= 1 \\
f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2} \\
f_{156} &= f_{367} = -\frac{1}{2} \\
f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Nella rappresentazione **3** tali operatori vengono espressi attraverso le matrici  $3 \times 3$  hermitiane a traccia nulla diretta generalizzazione delle matrici di Pauli, le matrici di Gell-Mann:

$$\begin{aligned}
T^A &= \frac{\lambda^A}{2}, \\
\lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'algebra di Lie è completata da 56 identità di Jacobi ed è quella associata al gruppo  $SU(3)$  ( $A_2$ ).

Per tale algebra valgono inoltre le relazioni di anticommutazione<sup>11</sup>

<sup>11</sup>L'anticommutatore di due operatori è definito come

$$\{T^A, T^B\} = \frac{1}{3}\delta^{AB}\mathbf{I} + d^{AB}{}_C T^C ,$$

con  $d^{ABC} = d^{AB}{}_C = d^A{}_{BC} = d_{ABC} = d_{AB}{}^C = d_A{}^{BC}$  tensore completamente simmetrico le cui 16 componenti indipendenti sono

$$\begin{aligned} d_{146} &= d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \frac{1}{2} \\ d_{247} &= d_{366} = d_{377} = -\frac{1}{2} \\ d_{118} &= d_{228} = d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = d_{888} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dal momento che, detti  $H^1 = T^3$  e  $H^2 = T^8$ ,

$$[H^1, H^2] = 0 ,$$

tale algebra avrà rango 2 e, conseguentemente, due operatori di Casimir

$$C_2 \equiv \sum_A (T^A)^2 , \quad [C_2, T^A] = 0 ,$$

$$C_3 \equiv \frac{2}{3}d_{ABC}T^AT^BT^C , \quad [C_3, T^A] = 0 ,$$

rispettivamente quadratico e cubico.

Questa prima costruzione rappresenta l'algebra in uno spazio di Hilbert tridimensionale: l'algebra avrà dunque una rappresentazione irriducibile fondamentale di dimensione 3, **3**.

Tornando ora ai primi operatori definiti,  $X^a_b$ , si scrivano le relazioni di commutazione che legano  $X^1_2$ ,  $X^1_3$  e  $X^2_3$  ad  $H^1$  e  $H^2$ , nonchè ai loro aggiunti<sup>12</sup>

$$[H^1, X^1_2] = X^1_2 ; \quad [H^1, X^1_3] = \frac{1}{2}X^1_3 ; \quad [H^1, X^2_3] = -\frac{1}{2}X^2_3 ;$$

$$[H^2, X^1_2] = 0 ; \quad [H^2, X^1_3] = \frac{\sqrt{3}}{2}X^1_3 ; \quad [H^2, X^2_3] = \frac{\sqrt{3}}{2}X^2_3 ;$$

$$[X^1_2, X^{1\dagger}_2] = 2H^1 ; \quad [X^1_3, X^{1\dagger}_3] = H^1 + \sqrt{3}H^2 ; \quad [X^2_3, X^{2\dagger}_3] = -H^1 + \sqrt{3}H^2 .$$

---


$$\{A, B\} \equiv AB + BA .$$

<sup>12</sup> $X^{1\dagger}_2 = X^2_1$

Seguendo il procedimento illustrato nel capitolo **Classificazione delle algebre di Lie** si possono associare agli operatori  $X_b^a$  dei vettori bidimensionali (l'algebra ha rango 2), attraverso

$$[H^i, X_b^a] = \beta^i(ab)X_b^a ,$$

grazie ai quali rinominiamo gli stessi come

$$X_2^1 \equiv E_{\beta(1)} , \quad X_3^1 \equiv E_{\beta(2)} , \quad X_3^2 \equiv E_{\beta(3)} .$$

I tre vettori in questione, chiamati radici, risultano essere (confrontando le relazioni di commutazione scritte sopra)

$$\beta(1) = (1, 0) , \quad \beta(2) = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) , \quad \beta(3) = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) ,$$

dove le componenti si riferiscono alla cosiddetta *base H*. Come si è visto, anche il loro opposti sono radici.

Le due *radici semplici* saranno  $\beta(1)$  e  $\beta(3)$ , infatti

$$\beta(2) = \beta(1) + \beta(3)$$

(si veda la definizione di radice semplice in **Radici semplici**).

I restanti commutatori di quest'algebra diversi da zero saranno

$$[X_2^1, X_3^1] = -X_2^3 , \quad [X_2^1, X_3^2] = X_3^1 , \quad [X_3^1, X_3^2] = X_2^1 ,$$

concordemente al fatto che

$$[E_\beta, E_\gamma] = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta + \gamma \text{ non e' una radice} \\ N_{\beta,\gamma} E_{\beta+\gamma} & \text{se } \beta + \gamma \text{ e' una radice} \end{cases} .$$

La forma di Cartan-Killing associata a quest'algebra sarà

$$g^{ij} = Tr(H^i H^j) = \frac{1}{2} \delta^{ij} ,$$

e permette, come al solito, di trasformare nello spazio bidimensionale delle radici le coordinate covarianti in controvarianti (e viceversa) e di definire un prodotto scalare.

Tutte le informazioni sull'algebra si possono rappresentare nel piano  $H^1 - H^2$ , dove vengono disegnate tutte le radici, ottenendo il noto diagramma in Figura 5.1, oppure con un diagramma di Dynkin, dove vengono disegnate solamente le radici semplici, riportato in Figura 5.2.

Dato che il numero delle radici supera la dimensione dello spazio dove giacciono, queste non sono linearmente indipendenti. Fermo restando che sia preferibile descrivere le proprietà di un'algebra in maniera indipendente dalla base, alcune basi sono più convenienti di altre, a seconda delle applicazioni. Verranno di seguito studiate due particolari scelte di basi per lo spazio bidimensionale delle radici.

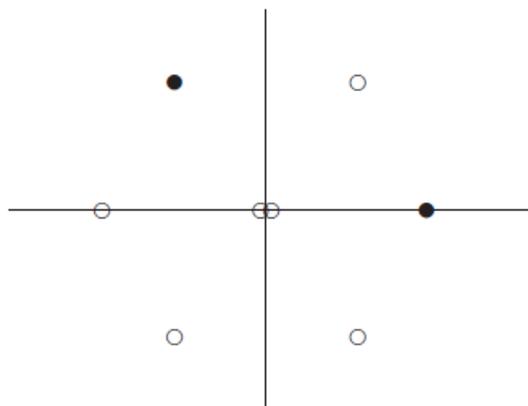


Figura 5.1: Diagramma dell'algebra  $SU(3)$  nel piano  $H^1 - H^2$ .



Figura 5.2: Diagramma di Dynkin dell'algebra  $SU(3)$ .

### 5.2.1 La base $\alpha$

In questa particolare base, i vettori sono le due radici semplici [2]

$$\alpha_1 \equiv \beta(1) , \quad \alpha_2 \equiv \beta(3) .$$

Questa scelta definisce la base  $\alpha$  che, a differenza della base  $H$ , non è ortogonale, infatti

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 2 , \quad (\alpha_1, \alpha_2) = -1 :$$

le due radici semplici di  $SU(3)$  avranno dunque la stessa lunghezza e saranno separate da un angolo di  $2\pi/3$ , come mostra esplicitamente il grafico in Figura 5.1 e, conoscendo le regole di costruzione dei diagrammi di Dynkin, il diagramma in Figura 5.2.

Un altro modo per riassumere queste informazioni sui prodotti scalari è attraverso la *matrice di Cartan*, i cui elementi sono

$$A_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} .$$

Per  $SU(3)$  questa è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

### 5.2.2 La base $\omega$

In questa particolare base i componenti sono i due vettori  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , definiti in modo tale che gli elementi della base  $\alpha$  espressi nella base  $\omega$  abbiano come coordinate le righe della matrice di Cartan [2]

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv 2\omega_1 - \omega_2 \\ \alpha_2 &\equiv -\omega_1 + 2\omega_2\end{aligned}$$

Le componenti di questi vettori nella base  $H$  sono

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \omega_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Anche questi hanno, dunque, la stessa lunghezza e saranno separate da un angolo di  $\pi/3$ , come mostra esplicitamente il grafico in Figura 5.3.

Gli elementi dell'algebra possono essere rappresentati in termini delle com-

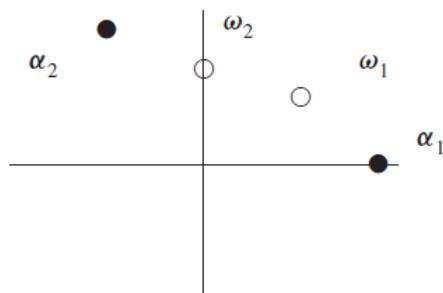


Figura 5.3: Vettori della base  $\alpha$  e della base  $\omega$  espressi nella base  $H$ .

ponenti dei vettori ad essi associati: gli elementi commutanti  $H^1$  e  $H^2$  sono associati a vettori che hanno componenti nulle in tutte le basi. Nella base  $H$  le componenti delle sei radici presentano radici quadrate e frazioni, mentre nelle basi  $\alpha$  e  $\omega$  hanno coordinate intere:

Radici :	$\beta(1)$	$\beta(3)$	$\beta(2)$	$-\beta(1)$	$-\beta(3)$	$-\beta(2)$
Base $\alpha$ :	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)
Base $\omega$ :	(2, -1)	(-1, 2)	(1, 1)	(-2, 1)	(1, -2)	(-1, -1)

Assieme ai due stati  $(0, 0)$ , tali coordinate definiscono la rappresentazione aggiunta dell'algebra  $SU(3)$ .

### 5.2.3 Rappresentazioni

Le basi appena viste sono utilizzate per costruire le rappresentazioni del gruppo  $SU(3)$  [2][10]. Infatti, nello stesso modo in cui erano state costruite le rappresentazioni di  $SU(2)$ , gli autostati vengono nominati con gli autovalori dell'insieme massimo di operatori commutanti, in questo caso con gli autovalori  $h^1$  e  $h^2$  degli operatori  $H^1$  e  $H^2$ :

$$H^i |h^1; h^2\rangle = h^i |h^1; h^2\rangle .$$

Dal momento che, com'è stato visto per  $SU(2)$ , il range degli autovalori degli operatori commutanti determina gli autovalori degli operatori di Casimir, in questo caso avremo due range. Lo studio si concentrerà dunque su tali range, senza prestare attenzione agli operatori di Casimir ed ai loro autovalori. Risolvendo la semplice equazione agli autovalori per gli operatori  $H^1$  e  $H^2$ , si ottengono i tre stati

$$\left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle , \quad \left| 0; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle , \quad \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle ,$$

che, espressi nelle basi  $\alpha$  e  $\omega$ , assumeranno la forma (di maggior estetica)

$$\text{base } \alpha : \quad \left| \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\rangle , \quad \left| -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\rangle , \quad \left| -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\rangle ,$$

$$\text{base } \omega : \quad |1; 0\rangle , \quad |0; -1\rangle , \quad |-1; 1\rangle .$$

Si noti come i valori numerici identificativi di ogni stato siano numeri razionali nella base  $\alpha$  e interi nella base  $\omega$ : questa particolarità si ritrova in ogni algebra di Lie.

Per costruire le rappresentazioni alla stregua di  $SU(2)$  sono necessari gli operatori di innalzamento e di abbassamento.  $SU(3)$  ha tre operatori di abbassamento (innalzamento) ma uno di essi risulta essere linearmente dipendente dagli altri due (la radice a lui associata è una combinazione lineare delle due radici semplici), questo permette di poter esprimere tutti gli operatori di abbassamento (innalzamento) in termini di due operatori, ciascuno associato ad ogni radice semplice. L'applicazione di un operatore di abbassamento (innalzamento) associato alla radice semplice  $\beta(i)$  abbasserà (alzerà) gli indici dello stato concordemente alle coordinate delle radici:

$$E_{\beta(1)}^- |h^1; h^2\rangle \sim |h^1 - 1; h^2\rangle , \quad E_{\beta(1)}^+ |h^1; h^2\rangle \sim |h^1 + 1; h^2\rangle ,$$

$$E_{\beta(3)}^- |h^1; h^2\rangle \sim \left| h^1 + \frac{1}{2}; h^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle , \quad E_{\beta(3)}^+ |h^1; h^2\rangle \sim \left| h^1 - \frac{1}{2}; h^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle .$$

Queste equazioni si riferiscono ovviamente al caso in cui gli stati siano identificati da coordinate nella base  $H$ , infatti nelle basi  $\alpha$  e  $\omega$  le due radici semplici hanno coordinate intere (cfr. tabella a pag. 63) e dunque l'applicazione dei relativi operatori di innalzamento/abbassamento farà slittare gli indici degli autostati di valori interi. Si comprende quindi il grande vantaggio della base  $\omega$ : partendo dallo stato più alto con indici interi nella suddetta base, si generano solamente autostati con indici interi (positivi o negativi). Inoltre i due operatori di innalzamento o abbassamento della base  $\omega$  sono associati a vettori le cui componenti sono le righe della matrice di Cartan,  $(2, -1)$  e  $(-1, 2)$ , o ai loro negativi, rispettivamente. Ciò significa che nella rappresentazione aggiunta ottadimensionale, l'applicazione degli operatori di innalzamento allo stato  $|1; 1\rangle$  darà come risultato 0, dal momento che gli stati generati,  $|3; 0\rangle$  e  $|0, 3\rangle$ , non appartengono alla rappresentazione. Questo permette di generalizzare, affermando che gli stati più alti (annichiliti dagli operatori di innalzamento) saranno quelli che nella base  $\omega$  sono etichettati da interi positivi o da zeri. Come altro esempio si consideri l'applicazione degli operatori di abbassamento allo stato più alto (sempre nella base  $\omega$ )  $|1; 0\rangle$ , il risultato sarà la formazione dei tre stati sopra indicati:

$$|1; 0\rangle \xrightarrow{E_{\beta(1)}^-} |-1; 1\rangle \xrightarrow{E_{\beta(3)}^-} |0; -1\rangle ,$$

che andranno dunque a formare la rappresentazione di tripletto  $\mathbf{3}$ . L'ultimo stato è lo stato più basso in quanto tra i suoi indici non compaiono indici positivi, infatti un'ulteriore applicazione degli operatori di abbassamento dà come risultato 0.

Seguendo un procedimento simile si sarebbe potuta costruire la rappresentazione di antitripletto  $\bar{\mathbf{3}}$ . Per  $SU(3)$  infatti la rappresentazione  $\mathbf{3}$  e la rappresentazione  $\bar{\mathbf{3}}$ , come in generale una rappresentazione e la sua complessa coniugata, non sono equivalenti (come lo erano  $\mathbf{2}$  e  $\bar{\mathbf{2}}$  per  $SU(2)$ ): le matrici

$$\tilde{\lambda}^A \equiv -\lambda^{A*} ,$$

ottenute a partire dalle matrici di Gell-Mann, non possono essere ricavate operando una trasformazione di similitudine sulle matrici  $\lambda^{A13}$ ; queste dunque, obbedendo alla stessa algebra di  $SU(3)$  ed agendo su uno spazio tridimensionale, generano una rappresentazione differente da quella generata dalle consuete matrici di Gell-Mann. Gli autostati, nella base  $\omega$ , indicati tramite gli autovalori degli operatori  $\tilde{H}^1 \equiv \tilde{T}^3 = \frac{\tilde{\lambda}^3}{2} = -\frac{\lambda^{3*}}{2}$  e

$$\tilde{H}^2 \equiv \tilde{T}^8 = \frac{\tilde{\lambda}^8}{2} = -\frac{\lambda^{8*}}{2} \text{ saranno}$$

<sup>13</sup>Per  $SU(2)$  valeva invece la relazione  $-\sigma^{A*} = \sigma^2 \sigma^A \sigma^2$ .

$$|-1; 0\rangle, |0; 1\rangle, |1; -1\rangle,$$

con  $|0; 1\rangle$  stato più alto.

### 5.2.4 Metodo grafico

Le rappresentazioni irriducibili possono essere trovate, come era stato fatto nel caso di  $SU(2)$ , anche dal prodotto diretto delle rappresentazioni più piccole, in questo caso  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$  [10].

Per decomporre questi prodotti viene presentato il metodo grafico, per il quale devono essere fatte alcune premesse ed osservazioni. Innanzitutto sia

$$\mathbf{Y} \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}H^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}T^8,$$

ed  $Y$  il suo autovalore detto *ipercarica*. Gli stati della rappresentazione di tripletto saranno dunque rinominati (nella base  $H$ )

$$\left|\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle, \left|0; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle \rightarrow \left|\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\rangle, \left|0; -\frac{2}{3}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\rangle$$

e, detto  $T^3$  l'autovalore di  $H^1$ , identificati dai punti di un triangolo in un piano che vede come assi  $T^3$  e  $Y$  (Figura 5.4).

Allo stesso modo gli stati della rappresentazione di antitripletto diventeran-

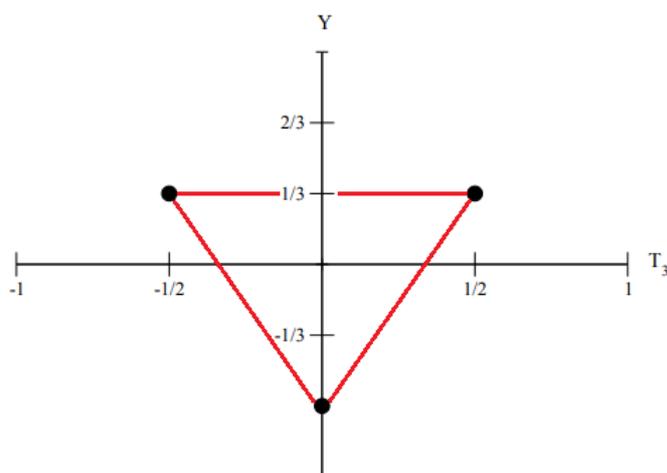


Figura 5.4: Stati della rappresentazione di tripletto  $\mathbf{3}$ .

no

$$\left|\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\rangle, \left|0; \frac{2}{3}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\rangle$$

e saranno identificati dai punti di un triangolo ribaltato rispetto a quello corrispondente alla rappresentazione  $\mathbf{3}$  (Figura 5.5).

Il metodo grafico nominato in precedenza consiste a questo punto nel sovrapporre

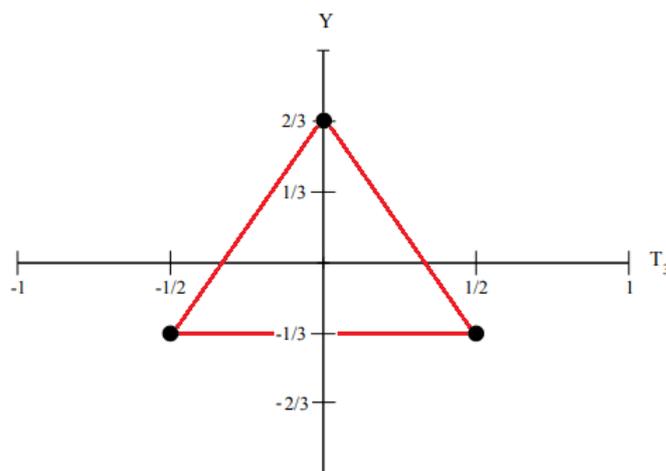


Figura 5.5: Stati della rappresentazione di antitripetto  $\bar{\mathbf{3}}$ .

porre il baricentro del triangolo che identifica la seconda rappresentazione nel prodotto di Kronecker agli estremi della figura che identifica la prima rappresentazione.

Ci sono solamente tre prodotti diretti di due rappresentazioni possibili:  $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ ,  $\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}}$  e  $\bar{\mathbf{3}} \times \bar{\mathbf{3}}$ . Tale metodo applicato a questi tre casi fornisce i risultati in Figura 5.6, 5.7 e 5.8 rispettivamente.

In Figura 5.6 il fatto che i punti  $T^3 = 0$ ,  $Y = 2/3$  e  $T^3 = \pm 1/2$ ,  $Y = -1/3$  siano due volte degeneri a sinistra dell'uguaglianza determina la scomposizione grafica che permette di dedurre come  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{6} + \bar{\mathbf{3}}$  per  $SU(3)$ . Nello stesso modo in Figura 5.7 e 5.8, grazie alla degenerazione dei punti a sinistra dell'uguaglianza, si arriva a  $\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} + \mathbf{1}$  e  $\bar{\mathbf{3}} \times \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{6}} + \mathbf{3}$ .

Per il prodotto di tre rappresentazioni si cita solamente il caso  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$  di maggior interesse fisico. In tale situazione si costruiscono prima i grafici relativi al prodotto  $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ , ovvero  $\mathbf{6}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$ , poi si applica la stessa procedura sviluppando  $\mathbf{6} \times \mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}} \times \mathbf{3}$ . Il procedimento ed il risultato finale sono illustrati in Figura 5.9.

Si deduce dunque che  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{10} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{1}$ .

Questo metodo "geometrico" non è altro che la traduzione grafica dell'azione degli operatori di innalzamento e di abbassamento. Esso poteva infatti essere utilizzato anche con l'algebra di  $SU(2)$ , dov'erano presenti solamente

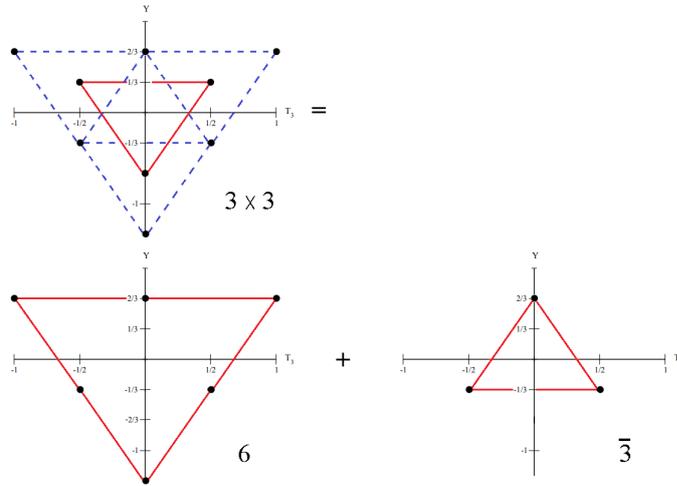


Figura 5.6: Metodo grafico per il prodotto  $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ .

un operatore di innalzamento e un operatore di abbassamento per autostati labellati dal solo autovalore di  $T^3 = \frac{\sigma^3}{2}$  (tralasciando l'autovalore relativo all'unico operatore di Casimir). Non si avrà più quindi uno spazio bidimensionale per rappresentare gli stati, bensì uno spazio unidimensionale: una retta.

Dal momento che la rappresentazione fondamentale di  $SU(2)$  è  $\mathbf{2}$  e che questa coincide con la sua rappresentazione complessa coniugata  $\bar{\mathbf{2}}$ , esiste solo un prodotto diretto di due rappresentazioni possibile:  $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ . Il metodo grafico applicato a questo caso fornisce il risultato in Figura 5.10:  $\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{3} + \mathbf{1}$ .

Si noti infine come la rappresentazione  $\mathbf{3}$  esista sia in  $SU(2)$  che in  $SU(3)$  ma che il prodotto multiplo della stessa abbia decomposizioni diverse:

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{5} + \mathbf{3} + \mathbf{1} \text{ in } SU(2), \\ \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{6} + \bar{\mathbf{3}} \text{ in } SU(3); \\ \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{7} + \mathbf{5} + \mathbf{5} + \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{1} \text{ in } SU(2), \\ \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{10} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{1} \text{ in } SU(3). \end{aligned}$$

### 5.2.5 Alcune applicazioni di $SU(3)$

Negli anni '60 le particelle conosciute, gli adroni, si dividevano in due famiglie: i mesoni (più leggeri e di spin intero) e i barioni (più pesanti e di spin semi-intero)[2][10][12]. Era stato inoltre osservato come il numero

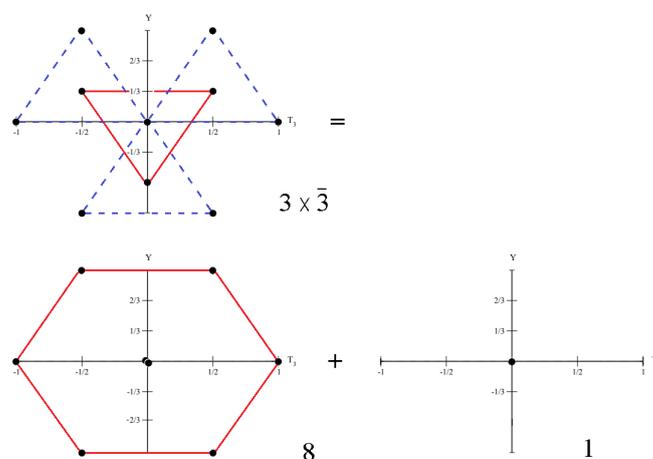


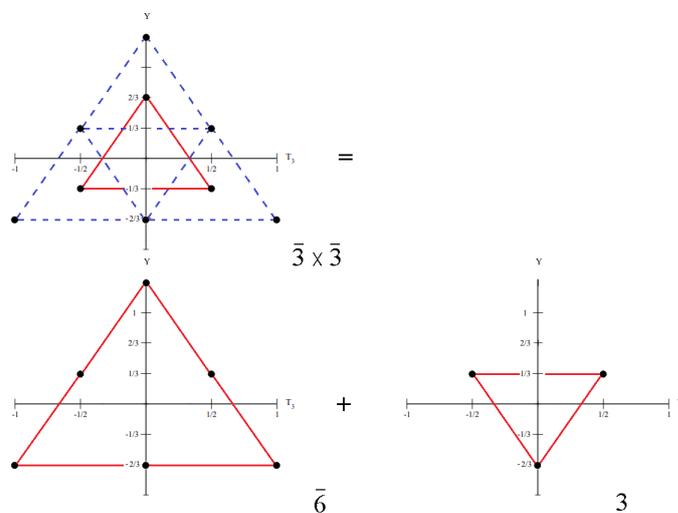
Figura 5.7: Metodo grafico per il prodotto  $\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}}$ .

barionico  $B$ , con  $B = +1$  per i barioni,  $B = -1$  per gli antibarioni e  $B = 0$  per i mesoni, si conservasse nelle interazioni forti.

All'epoca erano noti una simmetria  $SU(2)$  (spin isotopico) per le interazioni forti ed i seguenti multipletti:

$I = 0,$	$\eta, \eta', \omega, \phi$	$Q = I_3 = 0, B = 0$
	$\Lambda^0$	$Q = I_3 = 0, B = 1$
$I = 1/2,$	$n, p$	$Q = I_3 + \frac{1}{2}, B = 1$
	$K^0, K^+$	$Q = I_3 + \frac{1}{2}, B = 0$
	$K^-, \bar{K}^0$	$Q = I_3 - \frac{1}{2}, B = 0$
	$\Xi^-, \Xi^0$	$Q = I_3 - \frac{1}{2}, B = 1$
$I = 1,$	$\pi^-, \pi^0, \pi^+$	$Q = I_3, B = 0$
	$\rho^-, \rho^0, \rho^+$	$Q = I_3, B = 0$
	$\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$	$Q = I_3, B = 1$
$I = 3/2,$	$\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$	$Q = I_3 + \frac{1}{2}, B = 1 .$

Con  $I$  autovalore dell'operatore  $\vec{I}$  (modulo dell' isospin),  $I_3$  autovalore dell'operatore  $I^3$  (terza componente dell' isospin) e  $Q$  carica elettrica.


 Figura 5.8: Metodo grafico per il prodotto  $\bar{\mathbf{3}} \times \bar{\mathbf{3}}$ .

Per molte di queste particelle vale la relazione

$$Q = I_3 + \frac{B}{2} .$$

Quelle che non rispettavano tale relazione vennero chiamate *strane* e quest'ultima relazione venne corretta con la formula di Gell-Mann e Nishijima dove viene introdotto il numero quantico  $S$  detto, per l'appunto, *stranezza*:

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} .$$

Si pensò dunque, con l'avvento delle "particelle strane", di implementare la simmetria  $SU(2)$  di isospin per le interazioni forti ad una simmetria approssimata di  $SU(3)$  dove venisse trasformato il doppietto di isospin in un tripletto, aggiungendo un terzo nucleone neutro a spin semintero. Per i mesoni ed i barioni vengono quindi elaborati due modelli, il Modello di Sakata per i primi ed il modello soprannominato *la Via dell'Ottetto* per i secondi.

### Il Modello di Sakata.

I nucleoni e gli antinucleoni ora formeranno la rappresentazione di tripletto  $\mathbf{3}$  e di antitripetto  $\bar{\mathbf{3}}$  ed i pioni, come nel caso della simmetria di isospin dove essi erano raccolti nella rappresentazione a spin intero  $I = 1$  generata dal prodotto diretto di uno stato di doppietto (nucleone) e uno di

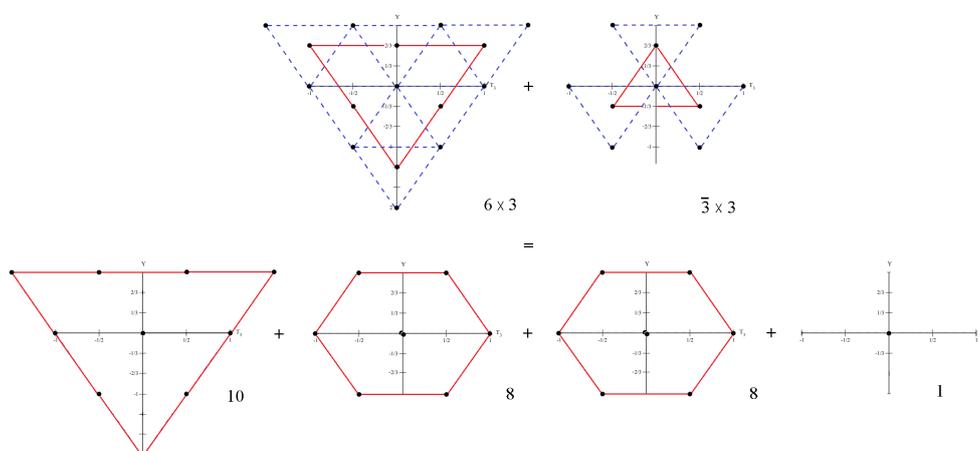


Figura 5.9: Metodo grafico per il prodotto  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$ .

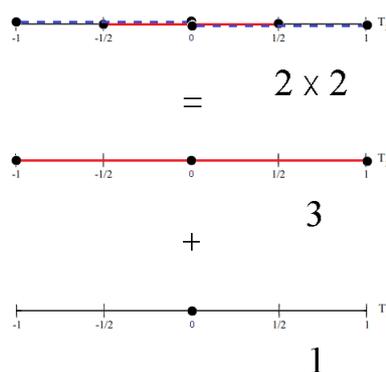


Figura 5.10: Metodo grafico per il prodotto  $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ .

antidoppietto (antinucleone)<sup>14</sup>, risiederanno nella rappresentazione aggiunta di ottetto, ottenuta dal prodotto diretto di uno stato di tripletto (nucleone) e uno di antitripletto (antinucleone)[2][12]

$$\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} + \mathbf{1} .$$

La rappresentazione aggiunta di  $SU(3)$  contiene infatti un singoletto, due doppietti ed un tripletto di  $SU(2)$  (quest'ultimo non è altro che la sua rappresentazione aggiunta):

<sup>14</sup>Si ricorda come in  $SU(2)$  la rappresentazione  $\mathbf{2}$  e  $\bar{\mathbf{2}}$  coincidano, da cui

$$\mathbf{2} \times \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{3} + \mathbf{1} .$$

$$\mathbf{8} = \mathbf{3}_0 + \mathbf{2}_1 + \mathbf{2}_{-1} + \mathbf{1}_0 ,$$

qui indicati con pedici riportanti il valore dell'ipercarica, autovalore omonimo del suo operatore  $Y = 2/\sqrt{3}T^8$ .

Per i mesoni di spin 0, gli isodoppietti sono i Kaoni strani ( $K^0, K^+$ ) e ( $K^-, \bar{K}^0$ ), il singoletto è il mesone  $\eta$  mentre il tripletto è composto per l'apunto dai pioni  $\pi^-, \pi^0$  e  $\pi^+$ . Per i mesoni di spin 1, gli isodoppietti sono i Kaoni eccitati ( $K^{*0}, K^{*+}$ ) e ( $K^{*-}, \bar{K}^{*0}$ ), il singoletto è il mesone  $\phi$  mentre il tripletto è composto dai mesoni  $\rho^-, \rho^0$  e  $\rho^+$ .

I mesoni  $\eta'$  e  $\omega$  sopracitati sono rappresentati dagli stati di singoletto prodotti dalla decomposizione  $\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} + \mathbf{1}$ . In forma grafica il tutto è riportato in Figura 5.11.

Si noti come l'ampliamento della simmetria da  $SU(2)$  d'isospin a  $SU(3)$

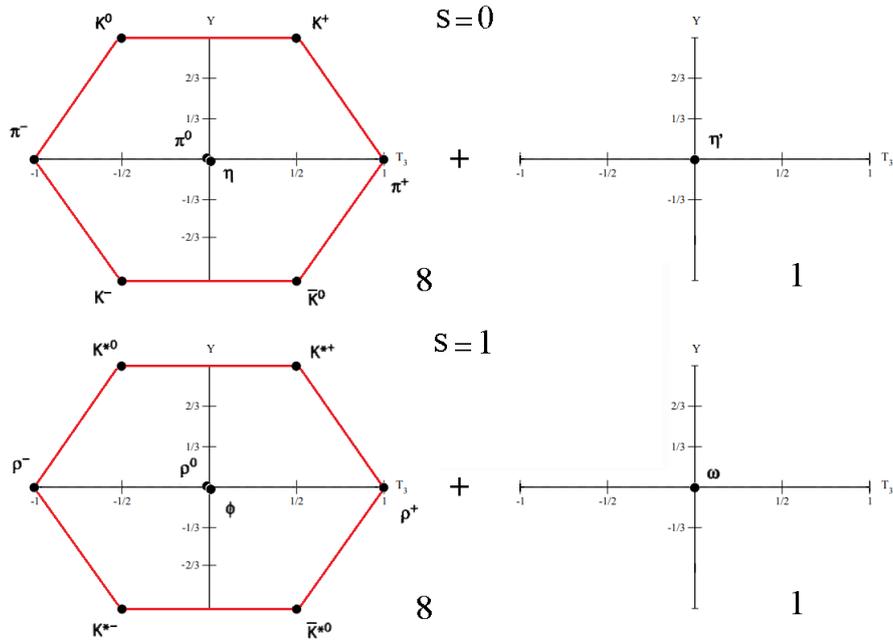


Figura 5.11: Sistemazione dei mesoni di spin  $s = 0$  (in alto) e spin  $s = 1$  (in basso) nel Modello di Sakata.

*di sapore* si ottenga grazie all'introduzione dell'operatore  $T^8$  (o equivalentemente  $Y$ ) e alla corrispondenza  $I^3 = T^3$ .

Con questa costruzione la relazione tra i numeri quantici e la carica elettrica risulta essere

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} ,$$

da cui

$$Y = B + S$$

che lega ipercarica, numero bosonico e stranezza.

Il Modello di Sakata descrive correttamente i mesoni ma non si cura della moltitudine di barioni (tra cui il protone ed il neutrone) rilevati negli esperimenti.

Questa nuova simmetria introdotta, detta  $SU(3)$  di sapore, è solo approssimata: i mesoni appartenenti alla stessa rappresentazione sono considerati stati diversi della stessa particella come nella simmetria  $SU(2)$  d'isospin ma, a differenza di quest'ultima, tali stati differiscono significativamente per la massa, in disaccordo con la teoria. Per i mesoni di spin 0 si avrà infatti

Mesone	$K^0$	$\bar{K}^0$	$K^+$	$K^-$	$\pi^0$	$\pi^+$	$\pi^-$	$\eta$
Massa (in MeV/c <sup>2</sup> )	498	498	494	494	140	140	140	548

mentre per i mesoni di spin 1

Mesone	$K^{*0}$	$\bar{K}^{*0}$	$K^{*+}$	$K^{*-}$	$\rho^0$	$\rho^+$	$\rho^-$	$\eta'$
Massa (in MeV/c <sup>2</sup> )	892	892	892	892	776	776	776	1019

La massa del protone (938 MeV) e del neutrone (940 MeV) differiscono invece per solo lo 0.2%, per questo la simmetria d'isospin rispetto alle interazioni forti è praticamente perfetta.

### La Via dell'Ottetto.

Furono Gell-Mann e Y. Ne'eman che, indipendentemente, giunsero al corretto assegnamento per i barioni di spin  $\frac{1}{2}$ : questo consisteva nella sistemazione del protone ed del neutrone (e di altre 6 particelle barioniche a quei tempi note) nella rappresentazione di ottetto generata dal prodotto diretto  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$  [2][12]. In forma grafica il tutto è riportato in Figura 5.12. Tutti i barioni in figura hanno per l'appunto spin  $\frac{1}{2}$  e differiscono per massa, carica e stranezza. Per quanto riguarda quest'ultima neutrone e protone non sono strani ( $S = 0$ ),  $\Lambda^0$  e le particelle  $\Sigma^{-,0,+}$  hanno una leggera stranezza ( $S = -1$ ) ed i barioni  $\Xi^{-,0}$  sono caratterizzati da una stranezza più marcata ( $S = -2$ ). Tutti questi barioni sono stabili rispetto all'interazione forte (il cui tempo di decadimento caratteristico è attorno ai  $10^{-24}$ ) ed eventualmente decadono nel neutrone per processi deboli o elettromagnetici. I valori delle masse di queste particelle sono

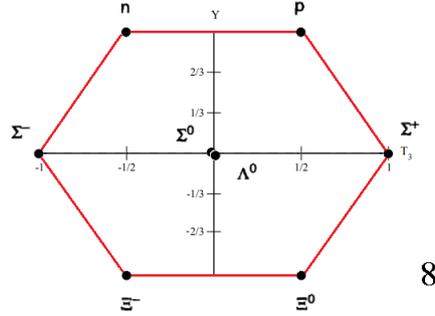


Figura 5.12: Sistemazione dei barioni di spin  $s = \frac{1}{2}$  nella rappresentazione di ottetto.

Barione	$n$	$p$	$\Xi^0$	$\Xi^-$	$\Sigma^0$	$\Sigma^+$	$\Sigma^-$	$\Lambda$
Massa (in MeV/c <sup>2</sup> )	940	938	1314	1321	1192	1197	1189	1116

Per tener conto di queste differenze di massa, si ipotizzò che l'Hamiltoniana governante le interazioni forti si componesse di due pezzi: il primo e più grande,  $H_0$ , doveva essere invariante per  $SU(3)$  ed avrebbe dato un contributo di massa identico ad ogni particella del multipletto (dal momento che  $H_0$  commuta coi generatori di  $SU(3)$ ); il secondo e più piccolo avrebbe originato le differenze di massa e, dal momento che l'interazione forte preserva sia l'isospin che la stranezza, doveva commutare coi generatori di  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ , ma non coi restanti generatori di  $SU(3)$ .

Seguendo questa ipotesi si arriva ad una forma dell'Hamiltoniana che a sua volta permette di ricavare le seguente relazione tra le masse delle particelle sistemate in una rappresentazione

$$M_N + M_{\Xi} = \frac{1}{2}(3M_{\Lambda} + M_{\Sigma})^{15} .$$

Applicata ai membri neutri della rappresentazione di ottetto sopra riportata fornisce come risultato  $2254 = 2270$ , accurato a meno del 1%.

Si può seguire lo stesso procedimento per i mesoni, arrivando alla formula di *mass shift* quadratico

$$M_K^2 + M_{\bar{K}}^2 = \frac{1}{2}(3M_{\eta}^2 + M_{\pi}^2) ,$$

<sup>15</sup> $N$  sta per nucleone, si indicano protoni e neutroni.

identica, a meno dei quadrati, a quella ricavata per i barioni (entrambe le costruzioni si riferiscono ad una rappresentazione di ottetto). Quest'ultima applicata ai membri neutri fornisce come risultato  $(498)^2 = (480)^2$ , buono anche se non così buono come quello ottenuto per i barioni.

Questo modello trova spazio anche per i barioni di spin  $\frac{3}{2}$ , che infatti vengono sistemati nella rappresentazione di decupletto **10**, generata sempre dalla decomposizione del prodotto di Kronecker  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$ . In forma grafica il tutto è riportato in Figura 5.13.

Il metodo di costruzione dell'Hamiltoniana rimane valido e grazie a questo

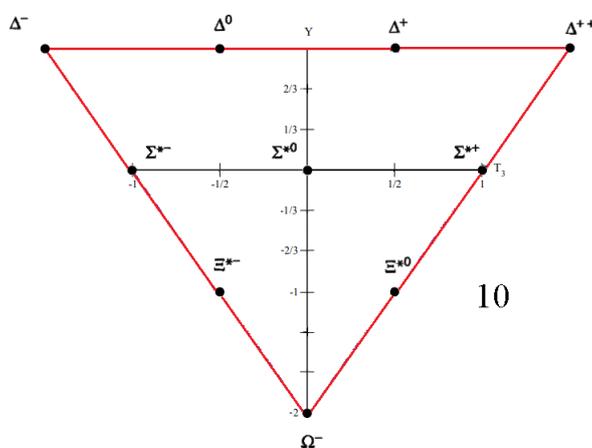


Figura 5.13: Sistemazione dei barioni di spin  $s = \frac{3}{2}$  nella rappresentazione di decupletto.

si ottengono le due seguenti relazioni di massa

$$M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Sigma^*} - M_{\Delta} .$$

Tenendo conto delle masse

Barione	$\Delta^-$	$\Delta^0$	$\Delta^+$	$\Delta^{++}$	$\Sigma^{*-}$	$\Sigma^{*0}$	$\Sigma^{*+}$	$\Xi^{*-}$	$\Xi^{*0}$	$\Omega^-$
Massa (in MeV/c <sup>2</sup> )	1232	1232	1232	1232	1385	1385	1385	1532	1532	1672

ed applicando le formule si arriva al risultato  $138 = 147 = 153$ , ancora in buon accordo con la teoria.

Il vero risultato straordinario di questo modello fu la previsione nel 1962 da parte di Gell-Mann di una particella mai osservata, da lui chiamata  $\Omega^-$ , di

spin  $\frac{3}{2}$ , stranezza  $-3$ , carica elettrica  $-1$  e massa all'incirca di  $1680 MeV/c^2$  che andasse a completare il decupletto. Una particella praticamente identica a quella ipotizzata venne poi rilevata due anni dopo in un acceleratore conferendo alla Via dell'Ottetto un successo trionfale.

La simmetria  $SU(3)$  di sapore non è dunque una simmetria esatta anche se una volta sviluppata porta a risultati in apprezzabile accordo coi dati. Tale teoria ha aperto la strada alla QCD (Cromodinamica Quantistica) che spiega l'interazione forte attraverso la simmetria  $SU(3)$  di colore introducendo i *quarks* come costituenti elementari di cui sono composti mesoni e barioni. In analogia con le teorie esposte, infatti, i mesoni nella QCD sono stati legati quark-antiquark (anziché essere stati legati nucleone-antinucleone) mentre i barioni sono stati legati quark-quark-quark (anziché essere stati legati nucleone-nucleone-nucleone).

Ancora una volta dunque la Teoria dei Gruppi è risultata fondamentale per la tassonomia nelle particelle elementari e per lo sviluppo della fisica ad esse collegata.

# Capitolo 6

## Conclusioni

L'utilizzo delle simmetrie per costruire teorie fisiche si spinge fino alle cosiddette teorie di gauge, teorie di campo basate sull'ipotesi che alcune simmetrie, viste stavolta come trasformazioni che lasciano invariata la Lagrangiana del sistema, siano tali non solo globalmente, ma anche *localmente*. Il concetto alla base delle teorie di gauge è dunque il postulato di simmetria locale della Lagrangiana, ovvero l'imposizione di un'invarianza di quest'ultima sotto una trasformazione applicata solamente in una particolare e limitata regione dello spaziotempo, senza interessare il resto dell'universo.

L'importanza delle teorie di gauge per la fisica nasce dall'enorme successo di questo formalismo matematico nel descrivere, in un solo quadro teorico unificato detto Modello Standard, le teorie di campo quantistico dell'elettromagnetismo, dell'interazione nucleare debole e dell'interazione nucleare forte. Tale modello descrive accuratamente i risultati sperimentali di queste tre delle quattro forze fondamentali della natura, ed il gruppo (detto *gruppo di gauge*) associativi è  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

L'interesse ancestrale verso le simmetrie cresce e si evolve, dunque, al punto tale da rendere queste le vere protagoniste della fisica moderna col successo del Modello Standard e, forse, la base da cui partire per costruire la Teoria del Tutto.

# Bibliografia

- [1] C. Bartocci, F. de Mari (2001), *Decomposizioni Classiche dei Gruppi di Lie Semisemplici*, Università di Genova.
- [2] P. Ramond (2010), *Group Theory*, Cambridge University Press.
- [3] G. Croce (2014), *Operatori di Casimir*, Università degli studi di Pavia.
- [4] D. Dominici (2001), *Elementi di Teoria dei Gruppi ed Applicazioni*, Università di Firenze.
- [5] L. Cimmino (2016), *Spin Isotopico – Ipercarica. Simmetrie interne:  $SU(2)$  e  $SU(3)$* ., Università di Napoli.
- [6] J. Bassi (2010), *Simmetrie Dinamiche e Degenerazioni Accidentali: Problema di Keplero in Meccanica Classica e Atomo d'Idrogeno in Fisica Quantistica*, Università degli studi di Roma Tre.
- [7] F. Giannone (2014), *Algebre di Lie Eccezionali realizzate come Algebre di Matrici*, Università di Bologna.
- [8] M. Vignoli (2013), *Sistemi di Radici per Superalgebre di Lie*, Università di Bologna.
- [9] M. Fantechi (2016), *Invarianti della Quartica di Klein*, Università di Firenze.

# Sitografia

[10] <http://www.roma1.infn.it>

[11] <http://www-th.bo.infn.it>

[12] <https://bamboo.eigenlab.org>