

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Fisica

**IL MODELLO MOND,
UN'ALTERNATIVA ALLA
MATERIA OSCURA**

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Roberto Casadio

Presentata da:
Mattia Panzeri

Anno Accademico 2018/2019

*Perché tu possa essere
sempre
fiero di me.*

Sommario

In questo elaborato sono analizzate le prove che nel corso dell'ultimo secolo hanno portato all'introduzione del concetto di materia oscura, a partire dal lavoro di Fritz Zwicky. Ne viene poi stimata la densità nell'universo e vengono discusse le principali teorie riguardo alla sua composizione (Capitoli 1 e 2). In seguito (Capitolo 3) sono introdotte due prove che evidenziano una relazione tra materia oscura e materia barionica, quali la relazione di Tully Fisher e la correlazione tra l'accelerazione dovuta ai barioni e accelerazione totale osservata. Per giustificare queste viene dunque proposto un modello alternativo che non prevede la materia oscura (Capitolo 4). Questo modello, chiamato MOND, propone una modificazione della dinamica newtoniana (MODified Newtonian Dynamics) per accelerazioni inferiori ad un dato a_0 . Applicato alla teoria della gravitazione universale esso giustifica i risultati sperimentali sia del capitolo 2, che del capitolo 3. Infine (Capitolo 5) si cerca di dare supporto teorico a questo modello di natura empirica, rifacendosi all'interpretazione fluida del cosmo ed alla trattazione corpuscolare delle gravità.

Indice

1	Storia della scoperta della materia oscura	4
1.1	Il lavoro di Zwicky	4
1.2	Le prime indagini	6
2	La materia oscura	10
2.1	Altre prove dell'esistenza della materia oscura	10
2.1.1	Effetti dinamici per galassie non a spirale	10
2.1.2	Il lensing gravitazionale e gli ammassi di galassie	11
2.2	Quantità di materia oscura nell'universo	14
2.2.1	Densità di materia nell'universo	15
2.2.2	Densità di materia barionica nell'universo	16
2.3	WIMPs	16
3	La relazione tra massa barionica e materia oscura	18
3.1	La relazione di Tully-Fisher	18
3.2	L'accelerazione delle galassie	20
4	Il Modello MOND	24
4.1	La curva delle velocità	25
4.2	La relazione massa-velocità ed a_0	30
5	Base teorica per il modello MOND	32
5.1	Equazioni di Einstein	32
5.2	Energia Oscura	34
5.3	Derivazione dell'accelerazione di MOND	36
5.3.1	La forza oscura	37
5.3.2	L'origine della forza oscura	39

6	Conclusione	42
	Bibliografia	43

Capitolo 1

Storia della scoperta della materia oscura

"Quanto ci è utile la pedante accuratezza degli astronomi, che ero solito ridicolizzare"[1] diceva Einstein a Sommerfeld in una lettera del dicembre 1915 parlando della misurazioni sul perielio di Mercurio. Certo, non si riferiva alla materia oscura ma la sua affermazione si può facilmente adattare a questo contesto.

1.1 Il lavoro di Zwicky

Il primo di questi pedanti astronomi ad avere indizi sulla materia oscura fu Fritz Zwicky che in seguito all'applicazione del teorema del viriale al moto degli ammassi galattici (al tempo le galassie erano chiamate semplicemente nebulae) ed in particolare dell'ammasso della Chioma notò la presenza di un eccesso di massa, che non emetteva radiazioni, definita materia oscura.

Illustriamo ora il metodo di Zwicky, in quanto si tratta di una versione semplificata dei metodi di misurazione della materia oscura ancora oggi in uso. Il punto di partenza di questo metodo è semplicemente il secondo principio della dinamica di Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \quad (1.1)$$

Considerando ogni galassia nell'ammasso con posizione \vec{r}_i e massa M_i , scriviamo il momento polare di inerzia dell'ammasso come

$$\Theta \equiv \sum_i M_i(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = \sum_i M_i r_i^2 \quad (1.2)$$

e, definito il viriale, vediamo come questo è uguale all'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned} Vir &\equiv \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \\ &= \sum_{i=2}^N G_N M_i \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{M_j}{r_{ij}^2} (\hat{r}_i - \hat{r}_j) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right) \\ &= - \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} G_N \frac{M_i M_j}{r_{ij}} = U \end{aligned} \quad (1.3)$$

dove abbiamo posto la somma in j solo fino a $i - 1$ per evitare il doppio conteggio di F_{ij} e F_{ji} ed il caso di F_{ii} , ovviamente uguale a zero.

La derivata seconda del momento polare di inerzia sarà data da

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Theta}{dt^2} &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (M_i r_i^2) \right) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(2M_i \vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \\ &= \sum_i \left[2M_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 + 2M_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right] \\ &= 2 \left[2K_{\text{tot}} + \vec{r}_i \cdot \left(M_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove K_{tot} è l'energia cinetica totale dell'ammasso di galassie. Possiamo dunque dedurre dalle equazioni (1.1), (1.3) e (1.4) che

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\Theta}{dt^2} = Vir + 2K_{\text{tot}} . \quad (1.5)$$

Se l'ammasso è stazionario il momento d'inerzia fluttua attorno ad un valore, dunque la sua media nel tempo non varia, per cui la derivata rispetto al tempo della media del momento polare è nulla. Otteniamo così il teorema del viriale:

$$\overline{Vir} = -2\overline{K_{\text{tot}}} \quad (1.6)$$

che ricordando l'equazione (1.3) implica

$$-\bar{U} = 2\overline{K_{\text{tot}}} = \overline{\sum_i M_i v_i^2} = \sum_i M_i \overline{v_i^2}. \quad (1.7)$$

Se si suppone che la massa M_{tot} dell'ammasso di galassie sia distribuita uniformemente lungo una sfera di raggio R_{tot} si ha (calcolando il potenziale di un guscio sferico e integrandolo su tutto il volume):

$$\begin{aligned} U &= -G_N \int_0^{R_{\text{tot}}} \frac{m(r)4\pi r^2 M_{\text{tot}}/V_{\text{tot}}}{r} dr \\ &= -G_N \int_0^{R_{\text{tot}}} \frac{4/3\pi r^3 M_{\text{tot}}/V_{\text{tot}} 4\pi r^2 M_{\text{tot}}/V_{\text{tot}}}{r} dr \\ &= -G_N \frac{16M_{\text{tot}}^2}{3V_{\text{tot}}} \pi^2 \frac{R_{\text{tot}}^5}{5} \\ &= -G_N \frac{3M_{\text{tot}}^2}{5R_{\text{tot}}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dunque

$$\begin{aligned} -G_N \frac{3M_{\text{tot}}^2}{5R_{\text{tot}}} &= \sum_i M_i \overline{v_i^2} = M_{\text{tot}} \overline{v^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{\text{tot}} = \frac{5R_{\text{tot}} \overline{v^2}}{3G_N} \end{aligned} \quad (1.9)$$

e si può ottenere una stima per la massa, in quanto la velocità media dell'ammasso è data l'effetto doppler lungo la linea di vista, tenendo conto del fatto che $\overline{v_s^2} = \overline{v^2}/3$.

Zwicky confrontò questo dato della massa dell'ammasso di galassie con quello che si può ottenere dal rapporto massa-luminosità, notò che vi era un'enorme sproporzione e creò per questa massa mancante il termine "dunkel materie", ovvero materia oscura.

1.2 Le prime indagini

La scoperta di Zwicky risale agli anni '30 e parrebbe a noi oggi un evento meritevole di risonanza nella comunità scientifica. Tuttavia per molti anni questa scoperta passò in sordina e non si fecero ulteriori indagini sul tema

della materia oscura fino agli anni '70, quando, con la misurazione della velocità di rotazione di stelle e gas nelle galassie a spirale, si notò che la curva delle velocità (velocità di rotazione in funzione della distanza - raggio - galattocentrica) si discostava nettamente dal modello tradizionale kepleriano lasciando supporre un notevole eccesso di massa non visibile.

Per attuare questo metodo vediamo che per ottenere la velocità circolare è necessario sfruttare opportunamente l'effetto Doppler con due possibili strategie, le quali conducono ai medesimi risultati:

- la prima consiste nello sfruttare lo spostamento di alcune righe dello spettro di emissione (più intense di quelle di assorbimento) delle stelle nella regione con idrogeno ionizzato (HII) di tipo O e B (blu-azzurre)¹, tuttavia queste stelle sono poco comuni nelle regioni più esterne delle galassie; normalmente si incontrano fino a distanze di poco inferiori al R_{ott} ² e dunque si ottengono solo dati abbastanza limitati sull'andamento della velocità di rotazione con l'aumentare del raggio.
- l'altra opportunità trae vantaggio dalla presenza in notevole quantità di idrogeno atomico (HI) il quale possiede una netta riga di emissione nella banda radio a $\lambda_e \simeq 21 \text{ cm}$ ³, che non viene assorbita né dalla polvere interstellare né dall'idrogeno stesso. Questo metodo offre l'opportunità di avere informazioni fino a distanze di $2R_{\text{ott}}$, mostrando tuttavia problemi sia nella determinazione della posizione della nube che nell'effettivo moto che non sempre è quello circolare (eventuali scostamenti dalla simmetria assiale sono palesati da asimmetrie nel campo della velocità).

Per le galassie a spirale ovviamente a livello quantitativo le curve di rotazione differiscono l'una dall'altra, in quanto ogni galassia ha dimensioni, forma, massa e densità peculiari; tuttavia a livello qualitativo il pattern è lo stesso per tutte le galassie e può essere così descritto (vedi figura 1.1 - NCG 3198):

- una parte interna in cui la velocità rotazionale aumenta linearmente con il raggio, $v_{\text{rot}}(R) \sim R$, corrispondente con il nucleo galattico;

¹Si tratta di stelle con alta temperatura superficiale, superiore ai $2.5 \cdot 10^4 K$.

² Il raggio ottico (R_{ott}) è definito come la media geometrica degli assi di una opportuna curva con valore di brillantezza superficiale costante, detta isofota.

³Riga dovuta all'accoppiamento spin-orbita dell'atomo di idrogeno che fa emergere una coppia di livelli $\Delta E \simeq 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$ iperfini dal suo livello fondamentale.

- eventualmente una regione molto irregolare, corrispondente al bulge ed alla parte interna del disco (fino a distanze $R_b < R_{\text{ott}}/2$);
- al di sopra di queste distanze dal centro della galassia si ha un andamento molto regolare, stabilizzato su un valore v_∞ , dunque con un andamento piatto all'aumentare di R che prosegue fin dove è possibile effettuare misure. Quest'andamento piatto è tuttavia un'approssimazione perché vale solo per le galassie a spirale di media luminosità, mentre decresce lentamente per quelle poco luminose e cresce lentamente per quelle molto luminose.

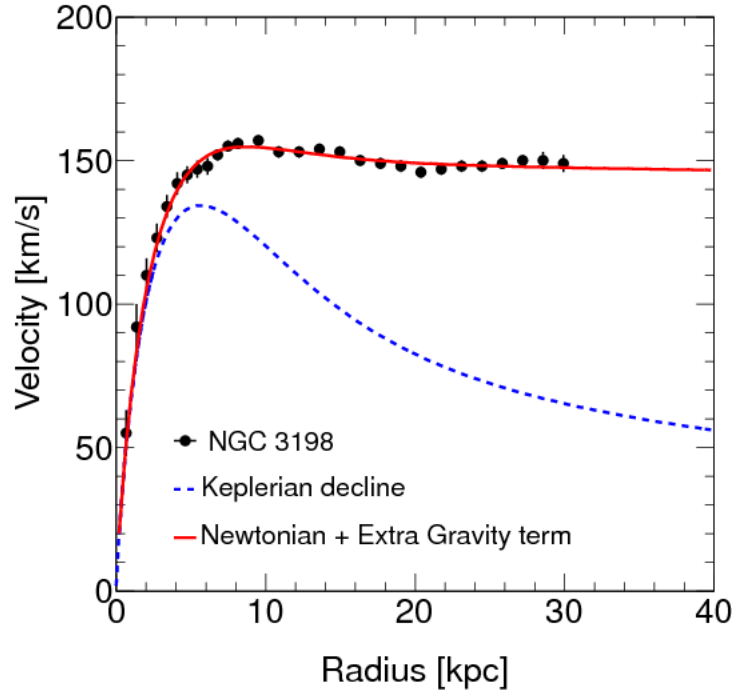


Figura 1.1: Andamento della curva di velocità nella galassia NGC 3198.

Questi dati sperimentali sono in contrasto con la teoria kepleriana in quanto, ricavando l'andamento della massa della galassia dal rapporto tra luminosità e massa, si può notare che la materia luminosa nelle galassie a spirale è concentrata nel nucleo e dunque la curva di rotazione dovrebbe seguire un andamento come quello mostrato nella figura 1.1 (Keplerian decline),

dato dall'equazione

$$v_{\text{rot}}^2(R) = \frac{G_{\text{N}}M(R)}{R} \Rightarrow v_{\text{rot}}(R) = \sqrt{\frac{G_{\text{N}}M(R)}{R}} . \quad (1.10)$$

Ipotizzando simmetria sferica e densità uniforme nel nucleo ($M(R) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$) mentre la densità del disco è approssimata a zero ($M(R) = M_{\text{tot}}$)⁴ otteniamo che

$$v_{\text{rot}}(R) \propto \begin{cases} R & R \leq R_{\text{b}} \\ \frac{1}{\sqrt{R}} & R > R_{\text{b}} \end{cases} . \quad (1.11)$$

I dati sperimentali quindi si discostano in maniera significativa man mano che ci allontaniamo dal centro della galassia (si può notare nella figura 1.1 come anche il picco di velocità massima nei dati osservati sia più elevato di quello teorico) dalla previsione fatta considerando che tutta la massa presente nella galassia sia quella derivante solo dalla materia di cui riceviamo emissione elettromagnetica.

Fu dunque da queste incongruenze sperimentali che negli anni '70 venne ripresa l'ipotesi della materia oscura: un'impresicata quantità di materia non barionica (sorsero anche ipotesi di materia oscura barionica, ma furono presto scartate) che non interagisce con la forza elettromagnetica e dunque non assorbe né emette radiazione, ma che, incurvando lo spazio-tempo, è sorgente di un campo gravitazionale.

⁴Questa approssimazione è molto forte ma semplifica enormemente il problema complicato della distribuzione della massa nelle galassie a spirale dandone una buona idea a livello qualitativo. Questo problema trattabile in maniera più approfondita tramite integrali ellittici, funzioni di Bessel o sovrapposizioni di sferoidi appiattiti [1].

Capitolo 2

La materia oscura

Queste furono dunque le prime due prove che diedero avvio alla speculazione scientifica sulla materia oscura, che è ad oggi, insieme all'energia oscura, uno dei più grandi problemi aperti della cosmologia e della fisica in generale. Concentriamoci ora su due aspetti importanti: analizzare altre prove dell'esistenza di materia oscura e gli altri effetti che vengono a questa attribuiti per poi cercare di stimare la quantità di materia oscura presente nell'universo.

2.1 Altre prove dell'esistenza della materia oscura

Oltre all'incidenza nelle curve di rotazione delle galassie a spirale discusse in precedenza e ad una discrepanza tra la quantità di materia nell'universo e la sua componente barionica, vi sono altri effetti attribuiti alla materia oscura che fanno ipotizzare una sua presenza nell'universo.

2.1.1 Effetti dinamici per galassie non a spirale

Mentre per la galassie a spirale, come abbiamo visto, verificare la discrepanza tra materia stimata e materia effettivamente presente risulta abbastanza lineare, per altre tipologie di galassie il discorso si complica notevolmente.

Prendendo ad esempio un altro tipo di galassie molto diffuso, quelle ellittiche, possiamo notare come in queste la componente stellare e gassosa ha un moto generalmente caotico: non è dunque possibile ricavare dalle loro curve

di rotazione alcuna informazione rispetto al campo gravitazionale. Si possono tuttavia ricavare informazioni ricostruendo i profili di brillantezza superficiale e notando che vi si trova un rapporto massa-luminosità di circa $\Upsilon \simeq 10-20\Upsilon_{\odot}$ ¹ per le regioni centrali (assimilate a delle sfere isoterme regolari) e di poco inferiore per le regioni esterne (stimato usando il teorema del viriale)[2]. Studi dimostrano che il centro delle galassie ellittiche è dominato da un buco nero supermassivo, il che spiega l'elevato rapporto massa-luminosità in queste regioni. Per le regioni esterne tuttavia ciò non basta e si suppone dunque che vi sia presenza anche qui, come già nelle regioni esterne delle galassie a spirale, di abbondanti quantità di materia oscura. Questo tuttavia non avviene in tutte le galassie ellittiche, ve ne sono alcune infatti per cui Υ misurato è consistente con quello predetto considerando la sola materia luminosa, non dando quindi segnali evidenti di presenza di materia oscura.

Vi sono poi le galassie nane, più piccole e con luminosità inferiore rispetto alle galassie ellittiche e a spirale, le quali presentano comportamenti differenti a seconda che siano sferoidali o irregolari. Le prime hanno caratteristiche comuni alle galassie ellittiche e, sia tramite il teorema del viriale, che tramite la similitudine con la regione centrale delle galassie ellittiche, otteniamo limiti inferiori sul rapporto *massa/luminosità* che ci fanno supporre che queste galassie nane sferoidali siano dominate dalla materia oscura ($\Upsilon \sim 65\Upsilon_{\odot}$). Le seconde invece sono più semplici da analizzare. Esse somigliano alle galassie a spirale del tipo Sc, poco luminose, per le quali è possibile studiare la curva di rotazione, data l'abbondanza di HI. L'andamento di v_{rot} trovato ha una crescita graduale con R seguita da una lenta decrescita, da cui si stima la presenza di abbondante materia oscura già nel disco ottico con $\Upsilon \simeq 100\Upsilon_{\odot}$.

2.1.2 Il lensing gravitazionale e gli ammassi di galassie

Trattazione geometrica del lensing gravitazionale

Il lensing gravitazionale è un metodo che si può applicare solo a determinate situazioni in quanto è necessario che l'oggetto cosmico di cui si vuole misurare la massa si trovi tra l'osservatore ed uno o più oggetti luminosi sullo sfondo.

Poiché la presenza di massa nell'universo distorce lo spazio-tempo, curvandolo, il passaggio di un raggio di luce (in moto lungo una geodetica) vicino ad un ammasso di materia, ossia attraverso un campo gravitazionale,

¹ Υ_{\odot} indica il rapporto tra massa e luminosità del sole.

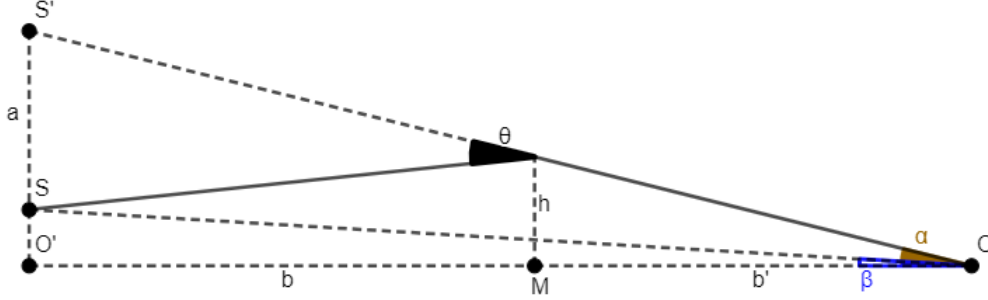


Figura 2.1: Trattazione geometrica della lente gravitazionale.

fa sì che questo devi con un angolo che è possibile ricavare dalla metrica di Schwarzschild, ed è dato da [3]

$$\theta = \frac{4G_N M_S}{c^2 r_{\min}} = 1,74'' \quad (2.1)$$

Il punto di vista di un osservatore sulla Terra è trattabile con l'ottica geometrica, nell'approssimazione per cui θ sia molto piccolo (immagine 2.1). In questa situazione possiamo infatti scrivere

$$\begin{cases} a = b\theta \\ a = (b + b')(\alpha - \beta) \end{cases} \quad (2.2)$$

e sostituendo θ con i risultati dell'equazione (2.1), in cui $r_{\min} = h \simeq b'\alpha$ otteniamo

$$\begin{aligned} b\theta &= (b + b')(\alpha - \beta) \\ b \frac{4G_N M_S}{c^2 \alpha} &= (b + b')(\alpha - \beta) \\ \beta &= \alpha - \frac{b}{b'} \frac{4G_N M_S}{c^2 \alpha} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Questa è un'equazione di secondo grado in α , e nel caso in cui $\beta = 0$, ovvero quando vi è un allineamento tra la fonte luminosa, la massa che genera il campo gravitazionale e l'osservatore, si ottiene un'immagine ad anello dovuta alla particolare simmetria del problema, detta Anello di Einstein con angolo

α_E tra la linea di vista e l'immagine della fonte luminosa di

$$\alpha_E = \sqrt{\frac{b}{b'} \frac{4G_N M_S}{c^2}} . \quad (2.4)$$

La soluzione generale, invece, è doppia e si avranno delle immagini più deboli con angoli α di

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha_E^2} \right) . \quad (2.5)$$

La ricerca della materia oscura negli ammassi di galassie

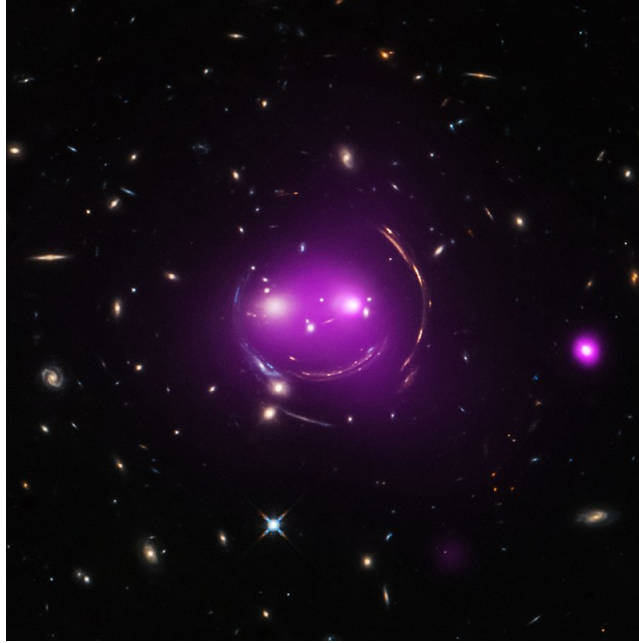


Figura 2.2: Ammasso SDSS J103842.59+484917.7, esempio di archi giganti e archetti.

Il lensing gravitazionale ha molte diverse applicazioni in astronomia, al fine di cercare dati su oggetti al di fuori del nostro sistema solare. Nel caso della ricerca sulla materia oscura, il lensing ci fornisce molte informazioni sulla materia presente negli ammassi di galassie, indipendentemente dalla loro dinamica, e sulla sua distribuzione sulla superficie perpendicolare alla direzione di osservazione.

Se si ha fortuna è possibile incontrare all'interno dell'ammasso analizzato dei cosiddetti archi giganti (fino a 100 kpc), che indicano la presenza di sorgenti luminose (di solito galassie) nelle vicinanze della caustica dell'ammasso in questione. Si tratta di segmenti di un Anello di Einstein i quali possono fornire un gran numero di informazioni sull'ammasso osservato. Tuttavia queste figure si possono trovare in ammassi regolari, ovvero quelli che possiedono un'approssimata simmetria sferica (assiale lungo la linea di vista), e non formano anelli di Einstein perfetti poiché per la creazione di questi è necessaria una perfetta sfericità.

In tutti gli ammassi (regolari e non) sono tuttavia sempre presenti dei cosiddetti archetti, più piccoli degli archi giganti, che sono il risultato di distorsioni di tutte le fonti luminose (specialmente galassie), presenti nella zona retrostante la cui luce viene deformata da un effetto di lensing debole. Anche da questi segnali meno intensi è possibile ricostruire la massa e il profilo di densità superficiale dell'ammasso che ha la funzione di lente. Vi sono però maggiori problematiche, la prima delle quali è la determinazione della distanza delle galassie sullo sfondo, soprattutto considerando che sono tutte differenti tra loro.

I risultati per gli ammassi galattici indicano una notevole presenza di materia oscura. D'altronde era già stata misurata da Zwicky per l'Ammasso della Chioma nel 1933 (Capitolo 1) basandosi su un metodo dinamico (teorema del viriale), ancora tutt'oggi usato e i cui risultati sono consistenti con il metodo ottico. Inoltre essendo stata dimostrata la presenza di questa massa mancante nelle galassie era scontato aspettarsela nei loro agglomerati. L'aspetto tuttavia più interessante è che la massa stimata per gli ammassi è notevolmente superiore alla somma delle masse galattiche, e dunque si suppone la presenza di materia oscura intergalattica, che unisce queste galassie a formare gli ammassi.

2.2 Quantità di materia oscura nell'universo

La determinazione della densità di materia oscura nell'universo si compone di tre passaggi:

1. determinare la densità di materia nell'universo;
2. determinare la densità di materia barionica nell'universo;

3. sottrarre 2 ad 1 per ottenere la densità di materia oscura non barionica.

Vediamo come ottenere nello specifico questi dati.

2.2.1 Densità di materia nell'universo

Nell'universo di De Sitter vi è un parametro definito come densità critica dell'universo che agisce da discriminante per poter prevedere l'evoluzione futura del cosmo. Infatti l'universo sarebbe chiuso, piatto, o aperto a seconda che la sua densità sia minore, uguale o maggiore di quella critica. La densità critica è stimata nell'ordine di $\rho_{\text{cr}} \sim 10^{-33} \text{g/cm}^3 \sim 10^{10} M_{\odot}/\text{Mpc}^3 \sim 10^{-6} \text{GeV/cm}^3$ espressa in diverse unità di misura², per dare un'idea migliore della sua dimensione (circa un protone per metro cubo).

Dalle conoscenze attuali ricaviamo che l'universo è essenzialmente piatto con un rapporto $\Omega = \rho/\rho_{\text{cr}} \simeq 1$, cerchiamo dunque di ricavare $\Omega_{\text{M}} = \rho_{\text{materia}}/\rho_{\text{cr}}$.

Vi sono varie tecniche per fare ciò. Per esempio si può determinare, la massa galattica dalle curve di velocità delle galassie a spirale e di conseguenza stimare il rapporto tra massa e luminosità dell'universo.

Un altro metodo è l'utilizzo del cosiddetto Matter Power Spectrum (MPS) che consiste nel misurare la funzione di correlazione tra due punti e farne la trasformata di Fourier, $P(k)$. Questa funzione (dipendente dal numero d'onda k) rappresenta il livello di struttura presente nell'universo ed è possibile ottenere dei dati sperimentali così da valutarne l'andamento. Fatto ciò possiamo creare dei modelli e delle simulazioni in cui possiamo variare la densità di materia nell'universo e vedere come questa si struttura, in base alla forza di gravità, per poi ricavarne la funzione di correlazione e valutare in quale caso viene riprodotto l'andamento sperimentale.

Altri modelli sono invece basati sul CMB (Cosmic Microwave Background) anche qui simulando tramite computer varie possibili radiazioni fondo e confrontandole con l'andamento sperimentale.

Ve ne sono ulteriori in aggiunta, ma, al di là della varietà di modi per ricavare questa informazione, ciò che più conta è che concordano tutti nello stimare $\Omega_{\text{M}} \simeq 0.3$.

² M_{\odot} sta per massa solare

2.2.2 Densità di materia barionica nell'universo

La misura della densità di materia barionica è calcolata con un metodo semplice e lineare. Mentre gli elementi pesanti sono originati nelle stelle e sono sparsi nell'universo quanto queste esplodono, tutti gli elementi leggeri sono stati prevalentemente prodotti nel Big Bang e la loro quantità nell'universo dipende da un solo parametro: la densità di materia barionica. In seguito a molte misurazioni di svariati elementi (per esempio ^4He oppure D - deuterio) si ricava un pattern coerente che porta a stimare $\Omega_B = \rho_{\text{bar}}/\rho_{\text{cr}} \simeq 0.045$.

Un'altra stima, coerente con questo valore è data sempre da simulazioni riguardanti la forma del CMB, oppure ancora dal MPS. Tutte questi metodi (ed altri ancora che ottengono direttamente il rapporto Ω_B/Ω_M) sono in accordo con il valore di Ω_B scritto sopra.

Otteniamo quindi che la percentuale di materia non barionica presente nell'universo è data da $\Omega_{\text{NB}} = \Omega_M - \Omega_B \simeq 0.25$.

2.3 WIMPs

Concentrandoci sulla natura di questa supposta materia oscura, soffermiamoci su cosa non sia e su cosa potrebbe essere.

Iniziamo dicendo che non è barionica, ed il perché l'abbiamo visto nel calcolo della densità della materia dell'universo. Ciò comporta che la materia oscura sia composta da particelle con numero barionico nullo, quindi non soggetto all'interazione forte.

Escludendo dunque i barioni, e poichè la vita media di tutti i bosoni (eccezione fatta per il fotone, che non avendo massa è ovviamente escluso) è infinitamente breve e si conclude con il decadimento in barioni e/o leptoni, concentriamoci su un'ipotesi leptonica della materia oscura. Vediamo che questa non è soggetta all'interazione elettromagnetica (motivo per cui è definita oscura), dunque non possiede carica elettrica ³. L'unica alternativa rimasta per la materia oscura all'interno del modello standard sono i neutrini. Vi è però un'argomentazione valida a negare questa tesi: il cosiddetto limite

³In realtà è possibile porre un limite superiore: $q \leq fe$, con e che rappresenta la carica elettronica ed $f \ll 1$.

di Gunn-Tremaine: supposta una materia oscura non relativistica ⁴ con una distribuzione del momento nell'alone galattico del tipo Maxwell-Boltzmann, ricaviamo dalla densità dei neutrini lo spazio medio tra questi ed otteniamo un limite inferiore $m_\nu \geq 50eV$ che può essere portato fino a $m_\nu \geq 300eV$, tramite a considerazioni sulle più dense galassie nane. Sappiamo tuttavia che la massa del neutrino elettronico è sicuramente (parlando con molta prudenza) inferiore a $m_\nu \leq 2,3eV$, con esperimenti che attestano come suo limite massimo quello di $m_\nu \leq 0,17eV$. Inoltre è possibile ricavare teoricamente la densità cosmologica dei neutrini risalenti al Big Bang calcolata come $\Omega_\nu h^2 \sim 0,1(m_\nu/10eV)$ e, considerando un neutrino con massa consistente con il limite di Gunn-Tremaine, otterremmo una densità circa 30 volte superiore a quella della massa nell'universo stesso ($\Omega_M h^2 = 0,134 \pm 0,006$).

Tra le altre caratteristiche tipiche della materia oscura c'è la scarsa auto-interazione. Ipotesi supportata sia da calcoli teorici, ma soprattutto da evidenze sperimentali, la più importante delle quali è l'osservazione del Bullet Cluster, in cui è stata analizzata, tramite effetti di lensing gravitazionale, l'unione di due galassie ed è stato visto che gli aloni di materia oscura non hanno interagito tra loro. Anche l'interazione con i barioni sarà molto debole, altrimenti si avrebbero galassie dove la parte barionica e l'alone di materia oscura sarebbero più mescolati tra loro, mentre l'evidenza sperimentale, come già detto è quella di una parte centrale a prevalenza barionica e un alone esterno di materia oscura.

Ci troviamo quindi ad escludere ogni particella inclusa nel modello standard e dobbiamo cercare la materia oscura in quei modelli teorici denominati BSM (Beyond Standard Model). In questi modelli sono ipotizzate delle particelle dette WIMPs (Weak Interactive Massive Particles), ovvero particelle massive che interagiscono solo tramite interazione debole, con una lunga vita media, tale da poterle definire quasi stabili. Un esempio di queste sono il neutralino e l'assione. Negli anni sono stati sviluppati diversi esperimenti nel tentativo di rivelare la presenza di queste WIMPs, sia direttamente, ovvero attraverso interazioni con la materia ordinaria sulla Terra, che indirettamente, ovvero attraverso effetti secondari delle loro interazioni nello spazio, ma ad oggi non vi sono evidenze sperimentali che consentono di procedere in una specifica direzione tra quelle proposte dalle numerose e differenti teorie BSM.

⁴Supposizione giustificata dai modelli di formazione dell'attuale struttura dell'universo, che prevedono la materia oscura dominata dalla sua componente non relativistica.

Capitolo 3

La relazione tra massa barionica e materia oscura

Abbiamo dunque dato un'introduzione al modello tutt'ora più in voga per la descrizione del cosmo detto modello CDM (Cold Dark Matter), il quale tuttavia presenta una numerosa serie di problemi. Questi si concentrano, in modi diversi, su un aspetto fondamentale della discussione, ovvero l'apparente correlazione tra la presenza di materia barionica e la supposta presenza di materia oscura.

3.1 La relazione di Tully-Fisher

In astronomia è nota, ormai dagli anni settanta, la relazione di Tully-Fisher. Questa correla la luminosità delle galassie con la larghezza delle linee spettrali (principalmente dell'idrogeno molecolare HI) e, di conseguenza, con la velocità di rotazione delle galassie che influenza la larghezza delle linee spettrali tramite l'effetto Doppler e che come abbiamo visto tende ad essere costante con l'aumentare del raggio:

$$L \propto V^b \tag{3.1}$$

dove b dipende dall'elemento che stiamo considerando. Questa relazione è di fondamentale importanza in astronomia per la misura delle distanze intergalattiche. ma è anche possibile effettuare un ragionamento per quanto riguarda la materia nelle galassie

Secondo il modello CDM la velocità di rotazione delle galassie è dovuta anche al contributo della materia oscura. Abbiamo dunque una prima rela-

zione tra la luminosità di una galassia e la sua massa totale. Spingendoci più in là [4] è possibile supporre che esista una relazione tra massa e velocità rotazionale del tipo

$$M \propto V^b \quad (3.2)$$

e dunque, poiché tutta la luminosità è dovuta, in ottima approssimazione alla materia barionica nelle stelle, introdurre una formula così strutturata:

$$L = \Upsilon_*^{-1} f_* f_d f_b M_{\text{tot}} \quad (3.3)$$

dove

- f_b è la frazione di barioni nell'universo;
- f_d è la frazione di barioni della galassia che risiede nel disco (e non nell'alone);
- f_* è la frazione di barioni del disco che formano le stelle;
- Υ_* è il rapporto massa/luminosità delle stelle.

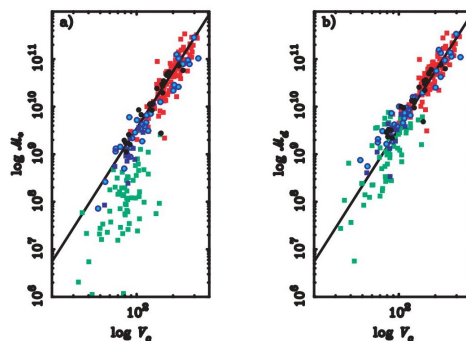


Figura 3.1: Il grafico mostra la relazione di Tully Fisher, nel caso a) considerando solo la massa stellare, nel caso b) anche quella del gas. Si possono facilmente notare le galassie nane, dominate dai gas

Andando infatti ad analizzare numerose galassie possiamo notare come la relazione di Tully-Fisher è verificata, a patto di includere anche la massa del gas nella massa barionica della galassia (figura 3.1), e siamo quindi indotti

a pensare che i termini introdotti nella relazione di Tully-Fisher, cosiddetta barionica, siano di fatto quasi costanti universali.

Possiamo dunque scrivere la relazione che lega massa e velocità come

$$M = \zeta V^b \quad (3.4)$$

ed ottenere con un fit il valore di $b \simeq 4$ per la riga del HI nella serie K'. Questo parametro è molto importante poiché il modello CDM prevede un andamento con $b = 3$, dove dunque il valore 4 si trova escluso per ben 8Ω .

Siccome Υ_* è un rapporto quasi costante per quanto riguarda le galassie, moltiplicandolo per il fattore f_* se ne riduce ulteriormente la variazione. Troviamo dunque che la massa del disco sarà

$$M_d = f_d f_b M_{\text{tot}} \quad (3.5)$$

dove f_b è a sua volta una costante, come anche ricavato in precedenza, mentre su f_d bisogna ragionare. Definiamola come

$$f_d = \frac{M_* + M_{\text{gas}}}{M_* + M_{\text{gas}} + M_{\text{altro}}} \quad (3.6)$$

nella quale M_{altro} indica tutta la massa barionica non presente nel disco galattico. Se M_{altro} fosse dello stesso ordine di grandezza della massa del disco, avremmo valori di f_d molto diversi tra le varie galassie a meno di una quantomai enigmatica costanza nel rapporto tra la massa del disco e quella dell'alone di una qualsiasi galassia. La soluzione più efficace sembra dunque essere quella di avere una $M_{\text{altro}} \ll M_d$ cosicché $f_d \simeq 1$.

Questi dati escludono la spiegazione alla materia oscura fornita dai MA-CHOs, oggetti presenti nell'alone galattico, di materia barionica, con bassa luminosità (pianeti, nane brune etc...), in quanto non sarebbero in quantità sufficiente per spiegare le discrepanze osservate.

3.2 L'accelerazione delle galassie

Un'importante prova della correlazione tra materia barionica e materia oscura può essere notata se si vanno ad analizzare le accelerazioni delle galassie a spirale. Possiamo stimare in due modi diversi e indipendenti l'accelerazione centripeta totale delle galassie e quella dovuta alla sola materia barionica.

La prima può essere derivata solamente dalla curva delle velocità come

$$g_{\text{obs}} = \frac{V^2(r)}{r} = \left| \frac{\partial \Phi_{\text{tot}}}{\partial r} \right| \quad (3.7)$$

ed è ricavata sperimentalmente per ogni singola galassia del campione considerato nell'articolo [5].

La seconda invece può essere derivata solo assumendo uno spessore piccolo ma consistente delle galassie così da avere un valore ρ_b per la densità barionica, che possiamo ricavare dalla luminosità della galassia. In questo modo, assumendo una simmetria cilindrica, è possibile risolvere l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi_b = 4\pi G \rho_b \quad (3.8)$$

ed ottenere il potenziale gravitazionale dovuto alla sola massa barionica, per usarlo poi per calcolare l'accelerazione barionica come¹:

$$g_{\text{bar}} = \left| \frac{\partial \Phi_b}{\partial r} \right|. \quad (3.9)$$

Da questa analisi si possono ottenere i grafici disegnati nella figura 3.2 per tre galassie diverse nella composizione e di conseguenza anche nell'andamento delle curve di velocità. Possiamo notare però che la relazione tra le due accelerazioni è molto simile nei tre casi. Questo è molto rilevante perché si tratta di pattern comuni, indipendenti dalla componente (materia oscura, materia barionica in forma stellare o materia barionica in forma di gas) che domina sia a piccoli che a grandi raggi.

Generalizzando l'analisi ad un esteso campione di galassie la relazione diventa ancora più evidente, com'è possibile osservare nella figura 3.3. Qui in particolare è possibile notare la mancanza di discontinuità tra galassie, ovvero il fatto che, sebbene alcune galassie abbiano solo regimi di alte accelerazioni ed altre di basse accelerazioni, l'andamento sia omogeneo e senza soluzione di continuità.

Possiamo estrapolare una funzione per fittare al meglio i dati, che abbia un andamento lineare ad alte accelerazioni ed un andamento $g_{\text{obs}} \propto \sqrt{g_{\text{bar}}}$ ad accelerazioni inferiori e questa sarà

$$g_{\text{obs}} = \frac{g_{\text{bar}}}{1 - e^{-\sqrt{g_{\text{bar}}/g_0}}} \quad (3.10)$$

¹Data la presenza in alcune galassie di un bulge centrale a simmetria sferica, una correzione a g_{bar} può essere apportata a queste galassie, ma solo a piccoli raggi galattici.

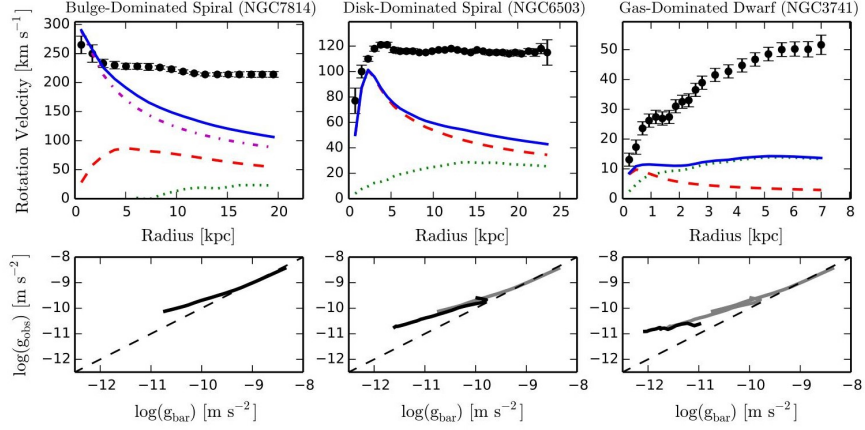


Figura 3.2: Confronto delle curve di velocità di tre galassie diverse (comprese gli andamenti dovuti alle due componenti barioniche - stelle e gas - sia singolarmente che sommate tra loro) e della rispettiva relazione tra g_{obs} e g_{bar} .

con l'unico parametro di fit g_0 che dipende dal valore assunto per il rapporto tra massa e luminosità delle galassie, e che può essere stimato come $g_0 = 1.20 \pm 0.02 \pm 0.24 * 10^{-10} m/s^2$, dove l'errore maggiore è dovuto all'incertezza sul rapporto M/L e alla sua variazione in base alla galassia presa in considerazione. Otteniamo dunque una forte correlazione tra l'accelerazione barionica e quella supposta dovuta alla materia oscura nel modello CDM, ovvero:

$$g_{\text{DM}} = g_{\text{obs}} - g_{\text{bar}} = \frac{g_{\text{bar}}}{e^{-\sqrt{g_{\text{bar}}/g_0}} - 1} . \quad (3.11)$$

Per spiegare questa evidenza sperimentale si hanno due soluzioni possibili: o apportano modifiche al modello della CDM in ordine da giustificare questa forte relazione tra materia barionica e oscura, magari riferendosi a particolari e non conosciuti modelli di formazione galattici; oppure si prende in considerazione l'idea che la materia barionica sia l'unica fonte di potenziale gravitazionale e quindi si nega l'esistenza, o almeno la grande prevalenza della materia oscura .

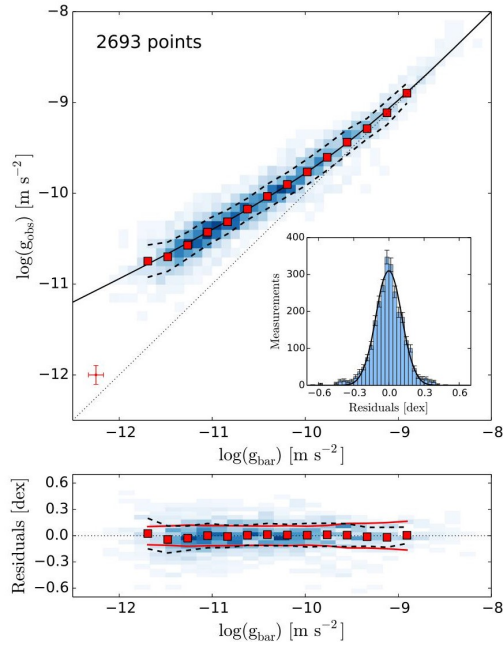


Figura 3.3: È graficata la relazione tra g_{obs} e g_{bar} di più punti di 153 galassie diverse, con la l'incertezza media su ogni singolo punto riportata nell'angolo in basso a sx. Inoltre sono aggiunte la linea (continua) di fit dell'equazione (3.10), due linee tratteggiate che delimitano l'andamento della relazione, l'istogramma di tutti i residui, fittato con una gaussiana con $\sigma = 0.11dex$ e infine l'andamento dei residui in funzione di g_{bar} , che mostra l'assenza di errori intrinseci nei dati.

Capitolo 4

Il Modello MOND

Come la storia della fisica insegna vi sono due modi per agire, quando un modello teorico incontra problemi: o lo si migliora, o si cerca una nuova teoria. Nel corso degli anni si sono di conseguenza sviluppati una serie di soluzioni alternative, e tra queste c'è il modello MOND (Modified Newtonian Dynamics) proposto già nel 1982 da M. Milgrom. Si tratta di una modificazione della dinamica newtoniana, usata per descrivere il moto dei corpi nei campi gravitazionali galattici, supponendo l'assenza di ogni tipo di materia oscura, o quantomeno la sua irrilevanza [6]. Questo modello conduce ad una serie di risultati teorici, che possono essere riscontrati nei dati empirici, per esempio la riproduzione delle curve di rotazione delle galassie.

La base di questo modello è che a basse accelerazioni ci si trovi in una dinamica non newtoniana, con la transizione alla dinamica classica che avviene quando l'accelerazione è dell'ordine di a_0 . Milgrom stesso lascia molta libertà su cosa vada effettivamente modificato nella dinamica newtoniana e trae le sue conclusioni solo a partire dalle suddette basi.

La dinamica modificata nel campo gravitazionale sarà del tipo:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = \vec{g}_n \quad (4.1)$$

dove

- \vec{g}_n è l'accelerazione gravitazionale, che dipende dalla sorgente di gravità,
- \vec{a} è l'accelerazione della particella come vista da un sistema di riferimento, in cui \vec{g}_n può essere considerato come un campo statico.

- μ è una funzione che tende a 1 per $a/a_0 \gg 1$ e ad a/a_0 per $a/a_0 \ll 1$

Vediamo ora le principali previsioni che questo metodo ci consente di fare.

4.1 La curva delle velocità

Il primo obiettivo è controllare se il modello MOND riproduce correttamente l'andamento delle curve di rotazione delle galassie.

Prendiamo, per un raggio galattico elevato $g_n \simeq MG_N r^{-2}$, con M che rappresenta la massa totale della galassia; l'accelerazione centripeta sarà $a = V^2/r$, otteniamo così, considerandoci nel regime di basse accelerazioni:

$$V^4(r) \simeq MG_N a_0 \quad (4.2)$$

dunque avremo una velocità rotazionale costante, indipendente da r ed inoltre vediamo come questa formula giustifica il termine $b = 4$ che si ricava sperimentalmente per l'equazione (3.4).

Questo primo riscontro può essere rafforzato usando il modello MOND per costruire una curva delle velocità per un'ipotetica galassia ideale. Supponiamo la galassia come un disco piatto, di moto circolare puro e massa M_d , con un nucleo sferico di massa M_s ($M = M_d + M_s$). La velocità rotazionale di equilibrio sarà data da (considerando un'accelerazione centripeta):

$$\frac{V^2(r)}{r} \mu\left(\frac{V^2(r)}{ra_0}\right) = g_n(r) \quad (4.3)$$

Si introducano poi:

- h , scala di lunghezza caratteristica della galassia
- $s \equiv r/h$
- $V_\infty = (MG_N a_0)^{1/4}$
- $v \equiv V(r)/V_\infty$
- γ funzione che dipende dalla distribuzione di massa con $\gamma(s \rightarrow \infty) \rightarrow 1$
- $t_1 \dots t_n$ parametri adimensionali che caratterizzano la galassia.

- $\xi \equiv (MG_N/(a_0h^2))^{1/2} = V_\infty^2/(a_0h)$, che per come è definito è un parametro che misura l'accelerazione tipica (a distanza h) di una galassia in relazione ad a_0 , e dunque che, se si suppone un collegamento tra luminosità e massa, definisce la media della luminosità superficiale di una galassia.

Di conseguenza si può scrivere l'accelerazione gravitazionale come

$$g_n(r) = \frac{MG_N}{r^2} \gamma(s, t_1, \dots, t_n) \quad (4.4)$$

e riscrivere l'equazione (4.3) in modo da avere la sua parte sinistra nella forma $x\mu(x)$, come:

$$\frac{\xi v^2}{s} \mu\left(\frac{\xi v^2}{s}\right) = \frac{\xi}{s^2} \gamma(s, t_1, \dots, t_n) \quad (4.5)$$

Risolvendo l'equazione otteniamo dunque per una data γ una famiglia di curve adimensionali di velocità relativa v , che variano in funzione dei parametri ξ ed s

Analizziamo dunque i comportamenti tipici di questa famiglia di curve in seguito a varie considerazioni sulle componenti dell'equazione (4.5). Dal comportamento di μ a piccoli valori della sua variabile deduciamo che per $\xi \ll 1$ ed $s \gg 1$

$$v(s, \xi) \simeq [\gamma(s, t_1, \dots, t_n)]^{1/4} \quad (4.6)$$

diventando indipendente da ξ e quindi $v(s \rightarrow \infty) \rightarrow 1$.

Per studiare dunque più approfonditamente la questione vanno stimate le funzioni γ e μ . Per quanto riguarda μ l'autore del modello MOND opta per una funzione del tipo

$$\mu = x(1 + x^2)^{1/2} \quad (4.7)$$

comparandola in alcuni casi con la funzione

$$\mu = 1 - e^{-x} . \quad (4.8)$$

Per quanto riguarda invece la funzione γ , il discorso è più complesso e bisogna tener conto delle due componenti della galassia modello presa in considerazione, in quanto hanno due diverse densità. Basandoci sull'assunzione di questa teoria per cui l'andamento della luminosità rispecchi la distribuzione

della massa e sulle distribuzioni di materia luminosa previste da vari modelli galattici, possiamo scrivere la funzione come

$$\gamma(s) = \alpha_d \gamma_d(s) + (1 - \alpha_d) \gamma_a \quad (4.9)$$

dove con α_d è indicata la frazione della massa totale presente nel disco e γ_d è una complicata espressione analitica riguardante sempre la distribuzione della massa nel disco (ottenibile dall'articolo di Freeman [7]).

Consideriamo dunque tre diverse situazioni. Nella prima consideriamo una galassia formata solo dalla parte del disco, dunque avremo

$$\gamma(s) = \gamma_d(s) \quad (4.10)$$

e dall'immagine 4.1 possiamo vedere i diversi comportamenti in base ai diversi valori di ξ :

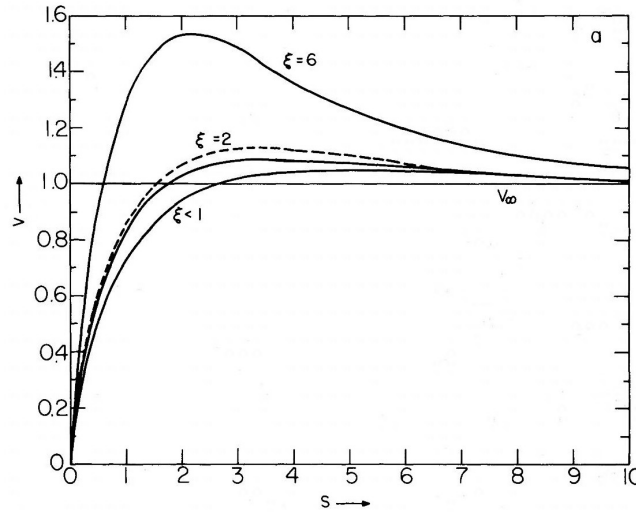


Figura 4.1: Il grafico illustra i diversi andamenti di $v(s)$ al variare di ξ , nel caso di una galassia formata solo dal disco; per $\xi = 2$ è graficato, con linea tratteggiata anche l'andamento che si ha con $\mu = 1 - e^{-x}$.

- per $\xi < 1$, la curva è molto vicina alla curva limite per $\xi = 0$, $v(s) = \gamma_d(s)$;
- per $\xi = 2$ vediamo come la curva inizia ad appiattirsi per $s=2$;

- per $\xi > 3$ la deviazione da una curva piatta si fa più evidente.

Nella seconda situazione consideriamo una galassia con solo componente di bulge, sostituendo h nella definizione di ξ con r_e , parametro della distribuzione di densità della sfera. Anche qui (figura 4.2) è possibile apprezzare

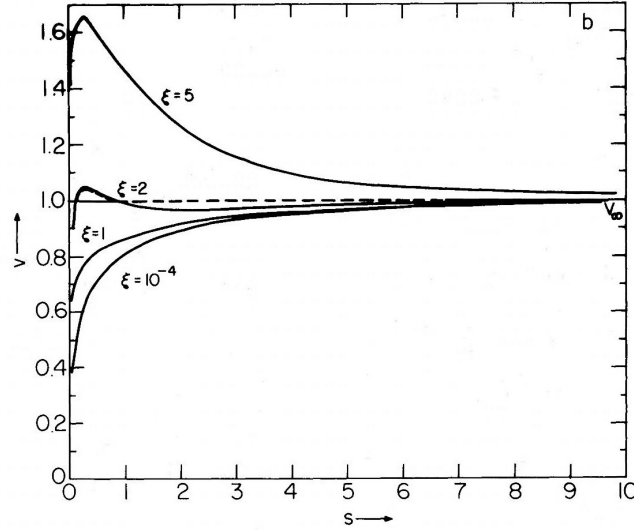


Figura 4.2: Il grafico illustra i diversi andamenti di $v(s)$ al variare di ξ , nel caso di una galassia formata solo da un bulge

l'appiattimento che si ottiene per valori di $\xi \simeq 2$.

Il terzo caso è più complicato e si ottiene combinando le due situazioni. In questa simulazione è importante il fattore α_d che, come detto, ci dà la quantità di massa nel disco. Per definire i vari andamenti è necessario definire un ulteriore parametro ovvero $s_e \equiv r_e/h$. Possiamo dunque graficare la velocità relativa $v(s)$ per $\alpha_d = 0.25, 0.5, 0.75$ e per $s_e = 0.25, 0.5, 1$.

Otteniamo curve piatte già a raggi piccoli per diverse combinazioni dei tre parametri α_e, s_e, ξ (figure 4.3, 4.4 e 4.5) ma in tutti i casi il valore di ξ , non è mai troppo distante da 1. Con questi parametri dunque le curve di velocità così teorizzate rispecchiano le effettive curve di velocità delle galassie.

Si può anche fare una prima, rudimentale stima dell'importante parametro $a_0 \sim (0.7 - 3.0) \cdot 10^{-8} P \cdot \text{cm/s}^2$ dove P è il rapporto tra massa e luminosità delle galassie, che varia tra 1 e 4 (in unità solari) in base alla galassia considerata.

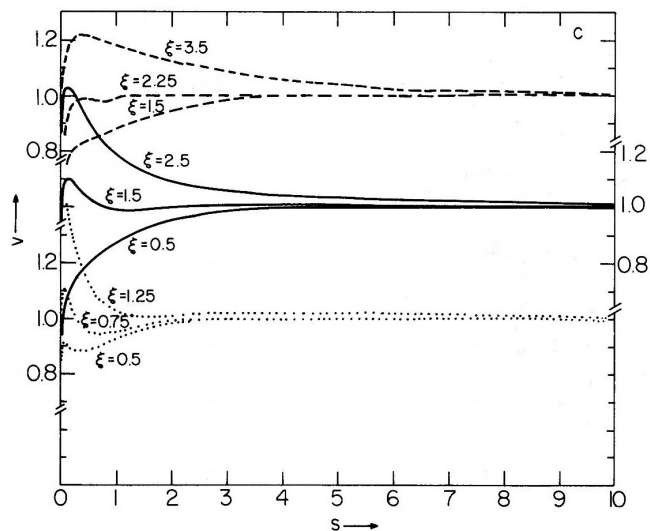


Figura 4.3: Il grafico illustra i diversi andamenti di $v(s)$ al variare di ξ , nel caso di una galassia dove il 25% della massa è situata nel disco; le tre diverse bande corrispondono ai tre diversi valori di s_e , in ordine crescente; per ogni banda è mostrato l'andamento di $v(s)$ più vicino ad una curva piatta, e altri due andamenti, con valore di ξ di poco maggiore e di poco minore.

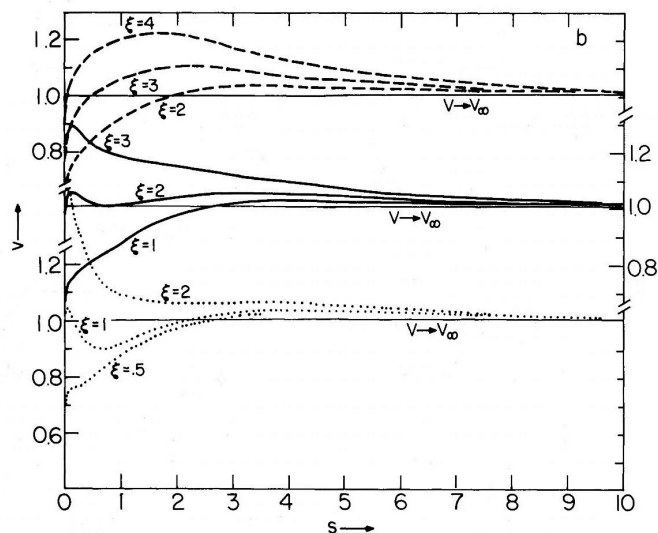


Figura 4.4: Come figura 4.3 ma con $\alpha_e = 0.5$.

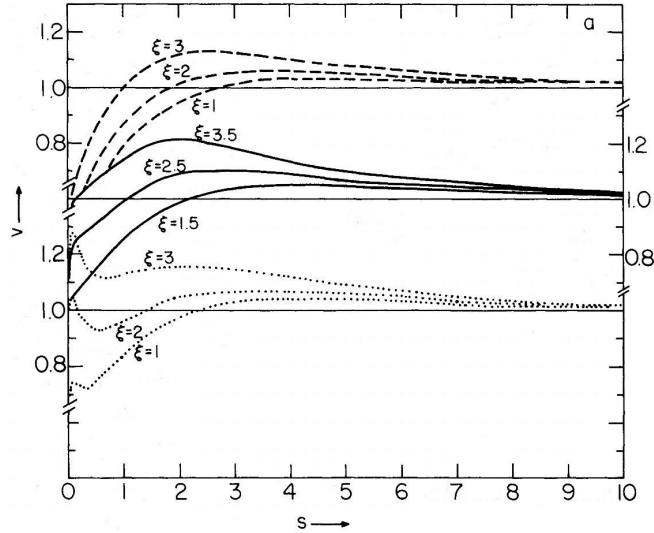


Figura 4.5: Come figura 4.3 ma con $\alpha_e = 0.75$.

4.2 La relazione massa-velocità ed a_0

Come discusso nel paragrafo 3.1 dalla relazione di Tully Fisher è possibile risalire all'equazione (3.4) che è dunque confermata dal modello MOND, equazione (4.2).

Anche da questa relazione è possibile stimare un valore di a_0 che avrà il vantaggio di essere indipendente dalla scelta dell'espressione per $\mu(x)$ e dall'incertezza sulla distribuzione della massa nella galassia, ma lo svantaggio, a differenza del metodo precedente, di essere dipendente dalla velocità asintotica e dalla velocità totale, ed è quindi legata alla corretta determinazione della costante di Hubble H_0 .

Prendendo i dati usati nell'articolo [6] si ottiene $a_0 \sim (1, 0 - 2, 5) \cdot 10^{-8} h_{50}^2 \text{ cm/s}^2$ (dove $h_{50} = H_0/50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) in coerenza con quanto ottenuto, indipendentemente, dal metodo precedentemente usato. Ad oggi il valore della costante a_0 è previsto essere $a_0 \simeq (1.2 \pm 0.2) \cdot 10^{-8} \text{ cm/s}^2$, in accordo con il valore ricavato per g_0 nel capitolo precedente.

È inoltre importante notare come si hanno le seguenti uguaglianze numeriche:

$$\bar{a}_0 = 2\pi a_0 \sim cH_0 . \quad (4.11)$$

Al di là del suo valore si sottolinea che la relazione che a_0 stabilisce tra a_{MOND} (l' a_{obs} del capitolo precedente) e a_{New} (data dalla dinamica newtoniana classica) per valori di r abbastanza grandi, ovvero per accelerazioni piccole, come possiamo vedere dal grafico 3.3 si scriverà:

$$a_{\text{MOND}}(r) = \sqrt{a_0 a_{\text{New}}(r)} = \sqrt{\frac{cH_0 a_{\text{New}}(r)}{2\pi}} = \sqrt{\frac{a_{\text{New}}(r)}{6L}} \quad (4.12)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $L = H^{-1}$, $c = 1$ e approssimato $2\pi \sim 6$.

Capitolo 5

Base teorica per il modello MOND

Abbiamo visto che è possibile costruire una teoria alternativa al modello CDM che spieghi, senza introdurre particelle al di fuori del Modello Standard, le curve di velocità delle galassie e anche le relazioni tra la massa barionica e la supposta massa oscura che emergono dai dati sperimentali.

La debolezza principale del modello MOND è tuttavia una sua base teorica che giustifichi la presenza del parametro a_0 e della sua relazione numerica con la costante di Hubble, in quanto fino a qui abbiamo questi dati come puramente empirici. Ora dunque si cercherà di dare fondamenta a questo modello a partire da tre pilastri importanti, ossia Relatività Generale, Energia Oscura e trattazione fluido-quantistica dell'universo.

5.1 Equazioni di Einstein

Non si può trattare di cosmologia senza parlare della Teoria della Relatività Generale di Einstein. Evitando di fare un'introduzione troppo lunga su questo sterminato argomento ci si concentrerà solo sulla parte più attinente al prosieguo del discorso.

In relatività generale le particelle in assenza di campo gravitazionale si muovono percorrendo linee, dette geodetiche, di minima lunghezza tra due punti su una varietà. L'equazione di una geodetica può essere così sintetizzata

[8]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0 \quad (5.1)$$

dove $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$ è il cosiddetto simbolo di Chrystoffel che dipende dalla metrica usata per descrivere la varietà. In caso di presenza di campo gravitazionale si avrà un termine destro diverso da zero, coincidente con la quadri-accelerazione, ovvero:

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = a^\mu . \quad (5.2)$$

Si introduca inoltre l'equazione di campo di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di curvatura di Ricci ed R è la sua traccia, mentre $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-momento, generato dalla combinazione di pressione e densità della sorgente del campo gravitazionale.

Una soluzione a questa equazione in caso di sorgente di gravità con simmetria sferica, al di fuori di tale fonte, è data dalla metrica di Schwarzschild, ovvero da

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega \quad (5.4)$$

dove $f(r)$ può essere fissata tenendo conto della sorgente del campo gravitazionale.

Vediamo che usando la definizione cosmologica di universo come fluido, possiamo scrivere il tensore energia-momento per un fluido perfetto come

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (5.5)$$

dove ρ è la densità, p la pressione e u^μ la quadri-velocità, con $u^\mu u_\mu = -1$. E, nel sistema di riferimento comovente con il fluido diventa

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) . \quad (5.6)$$

Dalla conservazione dell'energia si può derivare un'importante proprietà dei fluidi, ovvero l'equazione di continuità

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{p} = 0 \quad (5.7)$$

che in un sistema di riferimento generale si legge come la conservazione covariante del tensore energia-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (5.8)$$

5.2 Energia Oscura

Poiché il discorso successivo abbia chiarezza è necessario fare una veloce introduzione di un'altra componente dell'universo, ovvero l'energia oscura.

Come detto sopra in cosmologia l'universo (detto di de Sitter) è descritto da un fluido omogeneo e isotropico e la metrica usata per descriverlo è quella di Friedmann, Robertson e Walker (FRW) [8]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) + \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (5.9)$$

dove l'origine è arbitraria e t è il tempo proprio di un corpo comovente con il fluido cosmico. Definiamo anche $a(t)$ come il fattore di scala e k come la costante di curvatura.

Il redshift cosmologico sui segnali che riceviamo dalle fonti da noi più distanti ed altre prove empiriche ci fanno supporre che l'universo si stia espandendo e che lo faccia tanto più velocemente quanto più lontano guardiamo, con le galassie che si distanziano tra loro, mentre al loro interno sono mantenute stabili dalla gravitazione. Questo fenomeno è descritto dalla legge di Hubble:

$$d_L = \frac{z}{H_0} . \quad (5.10)$$

dove d_L è il raggio della sfera in metrica FRW che ci separa dal punto osservato, z è il redshift cosmologico (proporzionale alla velocità di recessione) e H_0 è la costante di Hubble (comunque positiva).

Sempre dall'analisi degli spettri di emissione in redshift, negli anni '90 Perlmutter accertò anche che l'universo si sta espandendo in maniera accelerata:

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} > 0 . \quad (5.11)$$

In aggiunta a tutto ciò, possiamo vedere come nella sezione 2.2 abbiamo stimato $\Omega_M \simeq 0,3$, mentre dai dati sperimentali si ricava $\Omega \simeq 1$ per quanto riguarda l'intero cosmo.

Risolvendo l'equazione di Einstein per la metrica di FRW andiamo a definire una pressione

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N} \quad (5.12)$$

detta pressione critica dell'universo. Avremo quindi i tre seguenti scenari:

- $\rho < \rho_{\text{crit}} \iff k = -1 \iff$ universo aperto;
- $\rho = \rho_{\text{crit}} \iff k = 0 \iff$ universo piatto;
- $\rho > \rho_{\text{crit}} \iff k = 1 \iff$ universo chiuso;

Dai dati sperimentale si nota che k è molto vicino a zero e dunque $\rho = \rho_{\text{crit}}$.

Solo un universo piatto, dominato da un energia positiva del vuoto, può rispecchiare l'andamento del fattore di scala $a(t)$ nel tempo. Questa energia (o pressione negativa del vuoto) è dunque definita come energia oscura, costituisce una parte consistente della densità dell'universo, si suppone sia la causa dell'effetto antigravitazionale di espansione accelerata dell'universo e viene identificata dal simbolo Λ detta costante cosmologica (che da il nome al modello Λ CDM - Λ Cold Dark Matter -, la rappresentazione standard del cosmo). Essendo $\Lambda = 3H_0^2$, otteniamo l'equazione di stato dell'energia oscura come

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G_N} . \quad (5.13)$$

Oltre alla Relatività Generale, l'altra attrice protagonista della fisica moderna è la teoria quantistica. Da questa si può supporre che così come le altre forze, anche la forza gravitazionale sia mediata da particelle, dette gravitoni. Il campo gravitazionale di un oggetto isolato di massa m è considerato come uno stato quantico coerente con numero di occupazione [9]

$$N \sim \frac{m^2}{m_p^2} \quad (5.14)$$

dove m_p è la massa di Planck. Immettendo nel sistema una particella di prova a distanza r dalla sorgente del campo i gravitoni interagiscono con questa con energia $\omega(r) = \hbar/r$. Dunque l'accelerazione newtoniana dovuta alla massa barionica può essere espressa come

$$a(r) = \frac{G_N m}{r^2} \sim \frac{\omega^2(r)}{m_p^2 l_p} \sqrt{N_{\text{eff}}} \quad (5.15)$$

dove l_p è la lunghezza di Planck e sia la costante di Planck che la costante gravitazionale sono espresse in termini di lunghezza e massa di Planck, ovvero: $\hbar = l_p m_p$ e $G_N = l_p/m_p$. Ovviamente dentro una galassia si ha che la massa che da origine al campo gravitazionale dipende dalla distanza dal

centro galattico, ovvero da r . Dunque i gravitoni che contribuiranno all'accelerazione gravitazionali sono solo quelli legati alla massa all'interno del raggio: $N_{\text{eff}} \sim m^2(r)/m_{\text{p}}^2$.

Questa discussione, sebbene condotta per gravitoni in stato non condensato, che generano l'accelerazione newtoniana, può essere estesa per i gravitoni in stato condensato. Difatti il fluido, definito come energia oscura dell'universo di de Sitter può essere descritto nell'ambito corpuscolare come un condensato di BE di gravitoni [10]. Questo condensato di N gravitoni (virtuali) avrà un energia di $\omega = \hbar H$ per gravitone, mentre l'energia totale dentro l'orizzonte di de Sitter (di raggio $1/H$) è data da

$$m_{\text{H}} = \frac{1}{2G_{\text{N}}H} = N\omega \quad (5.16)$$

e possiamo quindi riscrivere il numero di gravitoni come

$$N_{\text{tot}} \sim \frac{m_{\text{H}}^2}{m_{\text{p}}^2} \sim \frac{1}{l_{\text{p}}^2 H^2} . \quad (5.17)$$

Se si suppone di avere una particella di prova situata a distanza r , questa sentirà l'accelerazione generata dall'energia oscura, e dunque non si muoverà lungo una geodetica. È importante sottolineare che si considera che i gravitoni scalino in relazione alla distanza con un andamento olografico, ovvero come r^2 , e che la particella, se è posta all'orizzonte, sente l'influenza di tutti i gravitoni ritrovando dunque l'equazione per N_{tot} . Possiamo quindi scrivere

$$N_{\text{eff}}(r) \sim \frac{r^2}{l_{\text{p}}^2} \quad (5.18)$$

e, considerando che l'energia di un condensato è costante, possiamo riscrivere l'equazione (5.15), per ricavare l'accelerazione dovuta all'energia oscura come

$$|a_{\text{DE}}| \sim \frac{\omega^2}{m_{\text{p}}^2 l_{\text{p}}^2} \sqrt{N_{\text{eff}}} \sim \frac{\hbar^2 H^2 r}{m_{\text{p}}^2 l_{\text{p}}^2} \sim H^2 r \quad (5.19)$$

5.3 Derivazione dell'accelerazione di MOND

Cerchiamo dunque di derivare l'equazione dell'accelerazione secondo il modello MOND (4.12), partendo dalle basi teoriche espresse nei punti precedenti, e assumendo $c = 1$.

5.3.1 La forza oscura

Iniziamo considerando uno sistema relativistico a simmetria sferica, per cui possiamo usare una metrica simile a quella di Schwarzschild ovvero [11]:

$$ds^2 = -f(r)e^{\gamma(r)}dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (5.20)$$

Questa è una soluzione all'equazione di Einstein con tensore energia-momento di un fluido con pressione anisotropica del tipo

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p_{\perp})u^{\mu}u^{\nu} + p_{\perp}g^{\mu\nu} - (p_{\perp} - p_{\parallel})v^{\mu}v^{\nu} . \quad (5.21)$$

dove le due pressioni sono rispettivamente una la parallela e l'altra la perpendicolare al vettore di tipo spazio v^{μ} . La conservazione del tensore energia-momento, equazione (5.8) impone condizioni di restrizione su questi termini, e dalla risoluzione dell'equazione di Einstein (5.3) possiamo ricavare:

$$f(r) = 1 - \frac{2G_{\text{N}}m(r)}{r} \quad (5.22)$$

$$\frac{d\gamma(r)}{dt} = \frac{8\pi G_{\text{N}}r}{f(r)}(\rho + p_{\parallel}) \quad (5.23)$$

dove la funzione $m(r)$ è la funzione di Misner-Sharp che rappresenta l'energia totale dentro una sfera di raggio r [11].

Dalla conservazione del tensore energia-momento possiamo poi derivare la condizione sulla pressione perpendicolare a v^{μ} , ovvero:

$$p_{\perp} = p_{\parallel} + \frac{r}{2} \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(\epsilon + p_{\parallel}) \left(\frac{df}{dr} \frac{1}{f} + \frac{d\gamma}{dr} \right) \right] . \quad (5.24)$$

Considerando una particella comovente con il fluido, la sua quadri-velocità sarà u^{μ} , e la quadri-accelerazione necessaria per tenerla ad un raggio fisso sarà data dall'equazione (5.2) e sarà solo lungo la direzione radiale, ottenendo:

$$a = \frac{1}{2} \left(f \frac{d\gamma}{dr} + \frac{df}{dr} \right) = \frac{G_{\text{N}}m(r)}{r^2} + 4\pi G_{\text{N}}r p_{\parallel}(r) . \quad (5.25)$$

Vediamo dunque come questa accelerazione è composta da due termini. Il primo è un termine newtoniano classico, mentre il secondo è un termine nuovo, che può essere interpretato come l'accelerazione derivante dalla pressione radiale.

Ricordando l'equazione di stato dell'energia oscura (5.13) e che, essendo l'universo di de Sitter isotropico, abbiamo $p_{\parallel DE} = p_{\perp DE} = p_{DE}$, possiamo riscrivere (5.22) e (5.23) come

$$f(r) = 1 - H^2 r^2 \quad (5.26)$$

$$\gamma = 0 \quad (5.27)$$

ed otteniamo quindi l'accelerazione che descrive l'espansione dell'universo:

$$a_{DE} = -H^2 r \quad (5.28)$$

formulazione coerente con la trattazione corpuscolare sviluppata precedentemente, equazione (5.19).

È poi possibile aggiungere a questa descrizione anche la materia barionica (che ha $p \simeq 0$), avendo quindi $\rho = \rho_{DE} + \rho_B$. Di conseguenza introdurremo un termine all'equazione (5.26) che diventerà

$$f(r) = 1 - H^2 r^2 - \frac{2G_N m_B(r)}{r} . \quad (5.29)$$

Il termine aggiunto genera un'accelerazione dovuta alla massa barionica, del tipo newtoniano, ovvero:

$$a_B(r) = \frac{G_N m(r)}{r^2} . \quad (5.30)$$

La teoria MOND che stiamo analizzando, come detto, non prevede la presenza di ulteriore materia oscura ma per giustificare l'accelerazione nell'equazione (5.25) includiamo una cosiddetta forza oscura, la cui origine sarà l'argomento del prosieguo della discussione.

Scriviamo quindi l'accelerazione totale come

$$a = a_{DE} + a_{DF} + a_B . \quad (5.31)$$

La nostra analisi si concentra a livelli galattici, dove la pressione (e quindi l'accelerazione) dovuta all'espansione dell'universo è, come risulta nettamente dai dati empirici, ininfluente: la pressione per una galassia può essere approssimata da $p_{\parallel} \simeq p_{\parallel DF}$.

Ci troviamo dunque nella situazione in cui

$$a_{\text{DF}} + a_{\text{B}} \simeq \frac{G_{\text{N}}m(r)}{r^2} + 4\pi G_{\text{N}}r p_{\parallel\text{DF}}(r) \quad (5.32)$$

con il primo termine del lato destro dell'equazione che è esattamente a_{B} , come si vede dall'equazione (5.30). Per cui

$$a_{\text{DF}} \simeq 4\pi G_{\text{N}}r p_{\parallel\text{DF}}(r) . \quad (5.33)$$

5.3.2 L'origine della forza oscura

Riprendiamo ora la trattazione corpuscolare dell'universo di de Sitter e vediamo che quando introduciamo nello spazio cosmico, un ammasso relativamente piccolo di materia barionica ($m_{\text{B}} \ll m_{\text{h}}$) si crea una competizione in termini di spazio tra i gravitoni legati a quest'ultima ed i gravitoni del condensato.

Entrando nel dettaglio, supponiamo che questo ammasso sia posto ad un raggio R_{B} e consideriamo gli effetti che si hanno ad un raggio $r > R_{\text{B}}$, in modo da poter applicare la metrica (5.20), con la funzione $f(r)$ valutata come in (5.29). In questo caso il raggio dell'orizzonte L (definito in uno spazio vuoto come $L = 1/H$) risponderà alla condizione $f(L) = 0$, con la massa dello spazio tempo definita dalla funzione di Misner-Sharp come $m(L) = L/(2G_{\text{N}})$, ottenendo quindi

$$\begin{aligned} 1 - H^2 L^2 - \frac{2G_{\text{N}}m_{\text{b}}}{L} &= 0 \\ \Rightarrow H^2 L^2 &= 1 - \frac{m_{\text{B}}}{m(L)} \\ \Rightarrow m(L) - m_{\text{B}} &= H^2 L^2 m(L) . \end{aligned} \quad (5.34)$$

La reazione del condensato alla presenza della massa barionica può quantificarsi in una piccola perdita di energia, $\omega \sim \hbar/L$, ed il numero di gravitoni nel condensato diventerà, considerando le equazioni (5.14) e (5.34):

$$N_{\text{DE}} \sim \frac{[m(L) - m_{\text{B}}]^2}{m_{\text{p}}^2} \sim \frac{H^4 L^4 m(L)^2}{m_{\text{p}}^2} \sim \frac{H^4 L^6}{l_{\text{p}}^2} . \quad (5.35)$$

Tuttavia, sempre per l'equazione (5.14) questo non coincide con il numero di gravitoni totali. Si avrà quindi una differenza data da

$$\begin{aligned}
N - N_{\text{DE}} &\sim \frac{m(L)^2 - [m(L) - m_{\text{B}}]^2}{m_{\text{p}}^2} \\
&\sim \frac{2m(L)m_{\text{B}} - m_{\text{B}}^2}{m_{\text{p}}^2}, \text{ con } m_{\text{p}} = \frac{l_{\text{p}}}{G_{\text{N}}} \\
&\sim \frac{Lm_{\text{B}}}{l_{\text{p}}m_{\text{p}}} - \frac{m_{\text{B}}^2}{m_{\text{p}}^2}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Vi sono inoltre anche i gravitoni legati all'ammasso di materia barionica il cui numero è dato dall'equazione

$$N_{\text{B}} \sim \frac{m_{\text{B}}^2}{m_{\text{p}}^2} \tag{5.37}$$

ed il cui contributo all'accelerazione è dato dal termine newtoniano dell'equazione (5.30).

I rimanenti gravitoni

$$N_{\text{DF}} \sim \frac{Lm_{\text{B}}}{\hbar} \tag{5.38}$$

saranno i mediatori dell'interazione tra la materia barionica ed il condensato di gravitoni dell'energia oscura, andando quindi a causare (e vedremo come) quella che abbiamo chiamato forza oscura. Infatti, da quanto dimostrato qui sopra, possiamo dedurre che immergendo un ammasso di barioni nel fluido di energia oscura, otteniamo tre diversi gruppi di gravitoni:

- i gravitoni che rimangono imperturbati nel condensato di BE che forma l'energia oscura $\Rightarrow a_{\text{DE}}$;
- i gravitoni, non condensati legati alla materia barionica e responsabili dell'accelerazione gravitazionale $\Rightarrow a_{\text{B}}$;
- i gravitoni che sono fuoriusciti dal condensato a causa dell'interazione tra materia barionica ed energia oscura $\Rightarrow a_{\text{DF}}$.

Questi tre elementi sono gli stessi che ritroviamo nell'equazione (5.31).

Rimane solo da stimare il numero di gravitoni che contribuiscono all'accelerazione dovuta alla forza oscura. Questo numero dipende da r in due

diversi modi. Innanzitutto ricordiamo che il numero di gravitoni scala olograficamente (come r^2), ma dobbiamo aggiungere il fatto che questo numero di gravitoni dipende dalla massa barionica inclusa in r . Si ha quindi:

$$N_{\text{eff,DF}}(r) \sim \frac{r^2 m_{\text{B}}(r)}{\hbar L} \quad (5.39)$$

così da ricondurci all'equazione (5.38) per $r = L$. Inoltre, siccome siamo fuori dal condensato di gravitoni, l'energia di questi sarà $\omega(r) = \hbar/r$.

Riprendendo dunque l'equazione (5.15) possiamo scrivere l'accelerazione dovuta alla forza oscura come

$$\begin{aligned} |a_{\text{DF}}| &\sim \frac{\omega^2(r)}{m_{\text{p}}^2 l_{\text{p}}} \sqrt{N_{\text{eff}}(r)} \\ &\sim \frac{\hbar^2}{r^2 \hbar m_{\text{p}}} \sqrt{\frac{r^2 m_{\text{B}}(r)}{\hbar L}} \\ &\sim \sqrt{\frac{\hbar m_{\text{B}}(r)}{r^2 m_{\text{p}}^2 L}} \\ &\sim \sqrt{\frac{G_{\text{N}} m_{\text{B}}(r)}{r^2 L}} \sim \sqrt{\frac{a_{\text{B}}(r)}{L}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

e ritroviamo che, al di là di un fattore numerico, $a_{\text{DF}} \sim a_{\text{MOND}}$ dove a_{MOND} è quella calcolata nell'equazione (4.12).

È anche possibile scrivere la pressione $p_{\parallel\text{DF}}$ dell'equazione (5.33) come

$$p_{\parallel\text{DF}} \sim \frac{a_{\text{DF}}}{4\pi G_{\text{N}} r} \sim \frac{1}{4\pi r^2} \sqrt{\frac{m_{\text{B}}(r)}{G_{\text{N}} L}}. \quad (5.41)$$

Capitolo 6

Conclusione

Siamo dunque giunti, tramite questo approccio corpuscolare alla gravità e alla visione fluida dell'universo di de Sitter, tipica della cosmologia, a giustificare ciò che il modello MOND aveva cercato di dedurre empiricamente; ovvero che è possibile spiegare la causa principale dell'introduzione della materia oscura senza doverla includere. Inoltre questo modello spiega con linearità ed eleganza alcune storture del modello Λ CDM, specialmente il legame che si trova tra materia barionica e materia oscura.

Questa teoria si afferma dunque come una possibile alternativa da confermare o smentire sperimentalmente, così da rafforzare o ricostruire le nostre convinzioni sull'universo in cui viviamo.

Per il prosieguo della teoria è importante inquadrare in questo contesto le altre evidenze sperimentali riconducibili alla materia oscura, specialmente il lensing gravitazionale e gli scontri tra galassie, e cercare altri effetti che questa particolare trattazione della gravità dovrebbe portare sui sistemi galattici. Infine sarà importante individuare situazioni in cui le due teorie prevedano conseguenze il più possibile divergenti, così da poter valutare quale delle due descrive meglio la realtà.

Bibliografia

- [1] Stefano Profumo. *An introduction to Particle Dark Matter*. Advanced Textbook in Physics. World Scientific, 2017. ISBN: 9781786340016.
- [2] Marco Roncadelli. *Aspetti astrofisici della materia oscura*. Quaderni di fisica teorica. Bibliopolis, 2004. ISBN: 9788870884678.
- [3] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Oxford master series in particle physics, astrophysics and cosmology. Oxford University Press, 2006. ISBN: 9780198529576.
- [4] «The mass discrepancy-acceleration: disk mass and dark matter distribution». In: *The Astrophysical Journal* 609 (2004), pp. 652–666.
- [5] «Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies». In: *Physical Review Letters* 117 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.201101.
- [6] «A modification of the Newtonian dynamics:implication for galaxies». In: *The astrophysical journal* 270 (1983), pp. 371–383.
- [7] «On the Disks of Spiral and S0 Galaxies». In: *Astrophysical journal* 160 (1970), p. 811. DOI: 1970ApJ...160..811F.
- [8] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004. ISBN: 0805387323.
- [9] «On the number of soft quanta in classical field configurations». In: *Canadian Journal of Physics* 92 (2014), pp. 973–975. DOI: <https://doi.org/10.1139/cjp-2013-0712>.
- [10] «Quantum compositeness of gravity: black holes, AdS and inflation». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2014 (2014). DOI: 10.1088/1475-7516/2014/01/023.

- [11] «Effective fluid description of the dark universe». In: *Physics Letters B* 776 (2018), pp. 242–248. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.11.058>.