Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

INTRODUZIONE AL DETERMINISMO

Relatore:
Prof. Vincenzo Fano

Presentata da:
Luca Monaco

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

In questo lavoro di tesi ci si concentra sul problema del determinismo nel mondo della fisica. Il primo capitolo è dedicato a vari tentativi di definire il determinismo; si parte da definizioni puramente empiriche fino ad arrivare, in un graduale processo costitutivo, a quella coinvolgente il concetto di mondi possibili che risulta soddisfacente. Nel secondo capitolo si analizza il problema del determinismo nella fisica classica, introducendo brevemente lo spazio-temo classico e trattando poi diversi casi fisici di interesse. Nel terzo capitolo si discutono le implicazioni che la struttura dello spazio-tempo di Minkowski ha sul determinismo nel caso della relatività ristretta e si accennano alcune considerazioni sulla relatività generale. Nel quarto ed ultimo capitolo, infine, è trattato il problema del determinismo nel caso della meccanica quantistica, analizzando in particolare il significato di una misurazione e le implicazioni del collasso della funzione d'onda.

Indice

Introduzione

Il problema del determinismo è di grandissima importanza filosofica, scientifica e in generale culturale. Esso solleva fondamentali questioni tra cui spicca sicuramente quella del libero arbitrio, radicata profondamente e affrontata, nel corso dei secoli, da molteplici punti di vista. Come si può conciliare una visione deterministica del mondo, legata ad un Dio onnisciente o ad una scienza *esatta*, capace di prevedere con precisione ogni stato futuro e passato di un qualsiasi sistema, con la libertà del singolo? Ad un tale interrogativo si dedicarono grandi pensatori come Agostino, Dante e Cartesio fino ad arrivare a Hume, Kant e Schopenhauer, solo per citarne alcuni. Parallelamente la scienza, anche se spesso trasversalmente, affrontò il problema da un punto di vista metodologico; in quali condizioni è possibile effettuare una previsione? Quando le condizini iniziali di un sistema determinano univocamente il suo futuro, e qual è il significato profondo di una misurazione? In un primo momento le risposte a queste domande erano timide o abbozzate, data l'ostilità della Chiesa ad ogni forma d'intromissione in quello che definiva il dominio celeste (si pensi al fatto che per lungo tempo ogni discussione di carattere scientifico era etichettata dai suoi stessi ideatori come un mero *artifizio matematico*). Nella stagione positivista, con l'affermarsi della meccanica lagrangiana, la scienza sembrava ormai completa e tale era il suo potere predittivo da spingere molti a credere in una profonda forma di determinismo accessibile al dominio di predicibilità dell'uomo. L'avvento della fisica moderna mise infine in discussione tutto ciò, rendendo necessaria una profonda revisione non solo del concetto di determinismo, ma anche di quelli di predicibilità e addirittura di misura.

I percorsi della scienza e della filosofia, in un primo momento uniti, si differenziano gradualmente per le metodologie usate e per i differenti formalismi che, specie nel primo caso, diventano sempre più complessi. Ciò causa una separazione sempre più evidente, che non implica però l'assenza di punti di contatto tra le interpretazioni o un reciproco supporto delle stesse. Si sottolinea però come nella visione collettiva il problema sia rimasto essenzialmente filosofico, mentre il forte contributo scientifico è analizzato solo in pochi contesti vicini alla filosofia della scienza. Lo scopo di questa tesi, dunque, è proprio quello di evidenziare il contributo e le metodologie della fisica rispetta al problema del determinismo. Ciò risulta particolarmente importante se contestualizzato al tentativo di *messa in cultura* delle scienze, devitalizzate da una visione che spesso è puramente tecnica e che non rende giustizia alla profondità e all'*umanità* delle stesse. Il lavoro svolto è fortemente ispirato, specie nei primi capitoli, all'opera *A primer on determinism* di John Earman, filosofo della scienza che si è occupato a lungo delle questioni suddette. L'approccio, proprio per i fini del lavoro, non è particolarmente rigoroso e ci sono delle evidenti semplificazioni, necessarie a bilanciare da un lato la sua validità e dall'altro la sua fruibilità in contesti non necessariamente scientifici.

Capitolo 1

Definire il determinismo

Fissare una precisa definizione di determinismo è essenziale ai fini di uno studio mai equivoco e controverso dello stesso, e permette di tracciare le linee guida del percorso che s'intende affrontare. Già da un primo tentativo, tuttavia, ci si rende conto di quanto ciò sia in realtà non banale; è pertanto necessaria un'accurata analisi del problema, realizzabile a partire da una prima semplice definizione da arricchire o stravolgere opportunamente in un graduale processo costruttivo e, almeno all'inizio, storicamente orientato.

1.1 Il mondo classico e il binomio causa-effetto

L'idea di determinismo di William James, filosofo e psicologo statunitense, è completamente coerente con l'immagine classica del mondo e racchiude le caratteristiche essenziali che una definizione deve necessariamente inglobare. Egli afferma che il futuro è definito univocamente dallo stato di cose del presente, ed è quindi compatibile con una sola totalità. Lo spazio-tempo classico presuppone l'esistenza di una simultaneità assoluta, indipendente dal sistema di riferimento, quindi il mondo in un dato istante è a sua volta un invariante ed è identificato fissando l'intensità delle grandezze fisiche rilevanti. Esse non sono limitate da alcun tipo di materialismo e possono essere più o meno vicine all'esperienza; l'unico requisito che devono rispettare, insito nella loro fisicità, è che abbiano una rappresentazione spaziotemporale. La meccanica classica formalizza ciò attraverso lo spazio delle fasi, definito come lo spazio i cui punti rappresentano univocamente tutti e i soli stati possibili di un sistema avente n gradi di libertà. Esso ha dimensione $2n$ ed è caratterizzato da traiettorie che non s'incontrano mai e che pertanto identificano, a partire da un certo istante, tutta la storia passata e futura del sistema in analisi.

Una prima classica definizione di determinismo conciliabile con una simile realtà afferma che il mondo è deterministico solo nel caso in cui ogni evento ha una causa.

Nonostante l'apparente immediatezza e fruibilità, tale definizione ha delle profonde ed essenziali debolezze. Innanzitutto il legame con il mondo classico jamesiano non è esplicito, in quanto non si fa riferimento allo stato di cose in un dato istante e a come questo definisca la linea di mondo (rappresentazione del percorso dell'oggetto nello spazio-tempo). Si può allora provare ad ovviare a questo inconveniente interpretando lo stato di cose in un dato istante come la causa dello stato futuro. Tale definizione, però, non fa alcun riferimento all'unicità del passato e del futuro del sistema, ovvero all'univocità della sua linea di mondo. Bisogna quindi ricorrere ad una formulazione più precisa, che potrebbe ad esempio essere basata sul concetto di catena causale, un insieme di cause successive che conduce all'effetto considerato. Non è però scontato che questa identifichi univocamente la storia del sistema. Considerando ad esempio un sistema costituito da sfere che si muovono secondo traiettorie rettilinee a meno di urti, come si vede nel capitolo successivo la soluzione esiste ed è univoca solo per opportune condizioni molto restrittive.

Si può pensare di espandere nel modo seguente la definizione : il mondo è deterministico solo nel caso in cui ogni evento ha una causa e una stessa causa produce sempre lo stesso effetto. Così facendo si è risolto il problema dell'univocità ma sorge un dubbio: l'univocità dell'effetto discende direttamente della definizione di causa o dev'essere postulata? Ciò apre le porte ad un problema ancora più essenziale: si è definito il concetto di determinismo attraverso quello di causa senza però definire quest'ultimo, ed entrando quindi in un circolo vizioso. Tale definizione, infatti, è altrettanto oscura e problematica. Sarebbe quindi preferibile trovare una nuova definizione, che esuli dai concetti di causa ed effetto o che vi faccia riferimento il meno possibile.

1.2 Il demone di Laplace e il demone di Popper: il problema della predicibilità

La definizione di determinismo di Laplace, oltre ad essere la più classica e culturalmente rilevante, supera il problema emerso nella sezione precedente: sebbene in un primo momento si faccia riferimento ai concetti di causa ed effetto, successivamente vengono rimpiazzati da quello di predicibilità. Il riferimento ad una non meglio specificata Intelligenza, cui ci si riferisce in letteratura come ad un demone, va approfondito: diverse interpretazioni possono implicare forme di determinismo profondamente diverse. Se ad esempio questa intelligenza fosse una macchina di Turing universale, l'universo non sarebbe deterministico per gli stati iniziali non computabili. Se invece questa intelligenza fosse quella divina, il problema del determinismo sarebbe semplicemente aggirato, poiché ogni forma di predicibilità sarebbe legata alle sue capacità precognitive, e non ad una struttura deterministica del mondo.

A questo proposito è certamente più chiara la posizione di Popper, che vede il demone di Laplace come appartenente ed interagente con il sistema di cui intende determinare il futuro. Come egli afferma :

"Il demone, come uno scienziato, non è a conoscenza delle condizioni iniziali con precisione matematica assoluta; come uno scienziato ha a che fare con un finito grado di precisione".

Vale inoltre il principio di sommabilità, per il quale il grado di precisione delle condizioni iniziali è noto, quindi un'eventuale incongruenza tra i risultati sperimentali e quelli attesi non può essere giustificata assumendo che i dati iniziali non siano abbastanza accurati. Sulla base di ciò la visione di Popper è profondamente indeterminista; considerando sistemi fortemente instabili, per i quali una piccola perturbazione può determinare grandi cambiamenti nello stato futuro, l'incapacità di conoscere le condizioni iniziali con arbitraria precisione può implicare il crollo della predicibilità del sistema. Questa conclusione deriva dall'assunzione per cui un sistema è deterministico solo se è predicibile. Ciò è inadeguato, infatti è possibile che, sebbene esista un solo futuro possibile fissato dall'eternità, questo non sia comunque predicibile per l'assenza di dati sperimentali sufficientemente precisi.

È a questo punto fondamentale una riflessione sul legame tra la predicibilità e il determinismo. Sia nella visione di Laplace che in quella di Popper il determinismo è definito a partire dalla predicibilità. Bisogna però notare che la descrizione del mondo deterministico di James è puramente ontologica, e la predicibilità è un metodo per accertare il determinismo di un sistema, ed ha pertanto carattere epistemologico. Non bisogna quindi confondere la natura ontologica dell'oggetto di studio con le conseguenze epistemologiche dello stesso; pertanto, come per il binomio causa-effetto, bisognerebbe prescindere anche dalla categoria di predicibilità per definire il determinismo.

La definizione di Russell, a differenza di quelle di Laplace e Popper, ha una natura puramente ontologica:

"Un sistema è deterministico quando, considerando i dati $e_1, e_2, e_3 \ldots$ *rispettivamente ai tempi* $t_1, t_2, t_3 \ldots$ *se* E_t *è lo stato del sistema in un generico tempo t, allora esiste una funzione* $E_t = f(e_1, e_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots)$ *rappresentante lo stato del sistema per ogni istante t. [...]Se l'universo, nella sua interezza, è un sistema di questo tipo, allora il determinismo vale, altrimenti no."*

Per evitare che la sua definizione diventi banale Russell richiede inoltre che la funzione sia semplice e che non dipenda esplicitamente dal tempo. La prima richiesta è immediatamente scartata poiché non esiste un legame esplicito tra semplicità e determinismo. La seconda è invece basata su quella che egli definisce l'uniformità della natura, e cioè l'indipendenza delle leggi scientifiche dal tempo assoluto, che può invece apparire solo in forma integrata. Anche in questo caso, tuttavia, non sembra esserci un legame esplicito e sostanziale con il determinismo, anzi, considerando ad esempio una generale legge del moto, dipendente esplicitamente dal tempo, sembra difficile che la funzione di Russell possa esserne indipendente.

Una definizione che mantiene il carattere puramente ontologico della precedente e che allo stesso tempo evita alcune delle questioni che essa solleva è basata sull'idea di mondo possibile. Considerando per mondo un sistema quadridimensionale nello spaziotempo, il mondo attuale è costituito da tutti gli eventi che sono successi, succedono e succederanno; un mondo possibile è invece definito come una collezione di possibili eventi che rappresentano alternative al mondo attuale. Indicando con $\boldsymbol{W}$ l'insieme di tutti i mondi fisicamente possibili, compatibili cioè con le leggi del mondo attuale, un mondo W appartenente a $\boldsymbol{W}$ è laplacianamente deterministico se per ogni $w^{'}$ appartenente a W e coincidente con w in almeno un punto dello spaziotempo, allora la coincidenza è verificata anche in tutti gli altri punti, passati e futuri. Si possono poi distinguere il determinismo storico e quello futuristico, per i quali i diversi mondi coincidono per ogni instante temporale fino a quello indicato o a partire da quello indicato. Sebbene tale definizione si presenti come una semplice formalizzazione della descrizione ontologica di James, non risulta affatto precisa e inequivocabile; tuttavia risponde ai requisiti minimi richiesti, e pertanto si pone come un ottimo punto di partenza.

Molte delle discussioni sul determinismo sono affrontate in termini di teorie linguisticamente strutturate; queste devono essere derivate a partire da assiomi corrispondenti alle leggi della natura, compatibili con la definizione di determinismo basata sul concetto di mondo possibile. Una teoria T è quindi deterministica se, considerata la descrizione dello stato iniziale $s(t_1)$, quella di $s(t_2)$ è deducibile da T. Passando da un'analisi sintattica ad un'analisi semantica, una teoria T è deterministica se l'esistenza di un'altra teoria coincidente con la prima in un dato istante implica la coincidenza delle due . Tale approccio non è comunque molto utile poiché, dato che la maggior parte delle leggi fisiche assume la forma di equazioni differenziali e richiede, nel rispetto del determinismo, le proprietà di esistenza e unicità delle soluzioni, queste possono essere trattate rigorosamente senza far ricorso a sistemi formali. Il semplice tentativo di formulare una definizione esauriente di determinismo ha aperto molteplici e profonde questioni di carattere fortemente culturale oltre che epistemologico. Risulta quindi chiaro che non è possibile comprendere il problema del determinismo prescindendo da una solida filosofia della scienza che completi e affianchi una ricerca puramente scientifica.

Capitolo 2

Il determinismo nella fisica classica

Il mondo classico è stato considerato per anni l'ambiente ideale per il determinismo. A partire dal concetto di mondo possibile, esso è caratterizzato da tre proprietà principali:

- tutti i mondi appartenenti all'insieme dei mondi possibili appartengono allo stesso spazio-tempo;
- Nello spazio-tempo quadrimensionale è possibile individuare delle ipersuperfici tridimensionali dette piani di assoluta simultaneità. Questi corrispondono allo sfondo spaziale in cui si verificano eventi nello stesso istante temporale;
- ad ogni punto dello spaziotempo è associato un set di grandezze fisiche.

Tale struttura è messa chiaramente in discussione dalla fisica moderna con l'avvento della relatività e della meccanica quantistica; un'accurata analisi, tuttavia, mostra che neppure per la fisica classica è garantito un assetto deterministico , e ciò è dimostrato da alcuni casi fisici che, se non negano, mettono fortemente in discussione il determinismo.

2.1 Dallo spazio-tempo di Leibniz alla meccanica newtoniana

L'interpretazione del mondo classico di Leibniz è basata su uno spazio tridimensionale di natura euclidea e sull'invarianza degli intervalli temporali, che fissano la distanza tra gruppi di eventi simultanei. Tali proprietà definiscono completamente lo spazio-tempo. Le trasformazioni di simmetria sono, in notazione tensoriale:

$$\begin{cases} x^{\alpha} \to x'^{\alpha} & = R^{\alpha}_{\beta}(t)x^{\beta}(t) + a^{\alpha}(t) \\ t \to t' & = t + b \end{cases} \tag{2.1}$$

Le trasformazioni simmetriche consentite sono quindi le traslazioni temporali e le rotazioni o traslazioni spaziali eventualmente dipendenti dal tempo. Si nota che è possibile avere trasformazioni non nulle a partire da un certo istante t. Ciò significa che se le simmetrie dello spazio-tempo sono anche simmetrie delle leggi fisiche, la storia passata di un sistema può essere fissata, mentre quella futura può variare in seguito a trasformazioni simmetriche. Di conseguenza crolla ogni forma di determinismo, non essendo garantita l'assenza di biforcazioni per la linea di mondo.

A questo punto è fondamentale far cenno alla concezione di spazio-tempo di Leibniz. Egli afferma che lo spazio è uniforme e, senza oggetti al suo interno, non è possibile individuare differenze tra un punto e l'altro. Se fosse dunque dotato di natura ontologica, non ci sarebbe alcun motivo per cui Dio avrebbe dovuto preferire una posizione per un certo oggetto rispetto ad un'altra, e ciò implicherebbe un crollo del suo principio di ragion sufficiente, per cui, come egli afferma: *"non accade mai niente senza che vi sia una ragione determinante, vale a dire qualcosa che possa servire a rendere ragione a priori del perché una data cosa è esistente"*. Egli scarta quindi l'ipotesi di sostanzialità dello spazio , e sostiene che esso sia definito semplicemente a partire dalle relazioni tra gli oggetti. Tali relazioni sono simmetriche sotto le precedenti trasformazioni, di conseguenza le due linee di mondo non rappresentano diverse possibilità fisiche per i sistemi analizzati, ma diversi punti di vista dell'osservatore.

La visione relazionista di Leibniz non prevede una differenza tra moto inerziale e moto non inerziale poichè ogni misura fa riferimento ad altri oggetti e ai loro movimenti. La meccanica classica è invece basata su questa differenza e fa uso di grandezze non relative. Introducendo il concetto di sistema di riferimento inerziale, alle trasformazioni simmetriche dello spazio si aggiunge un termine legato alle traslazioni dipendenti dalla velocità. Inoltre, quantità precedentemente non definite o considerate invarianti come l'accelerazione assumono un significato fisico completamente nuovo. Si ottengono quindi le trasformazioni galileiane:

$$\begin{cases} x^\alpha \to x'^\alpha & = R^\alpha_\beta x^\beta + v^\alpha t + c^\alpha \\ t \to t' & = t + b \end{cases} \tag{2.2}$$

Lo spaziotempo newtoniano, infine, completa quello galileiano assumendo l' esistenza di uno spazio assoluto, indipendente dall'osservatore. La sua introduzione implica un cambiamento nelle trasformazioni simmetriche dello spazio-tempo che, in notazione tensoriale, si riducono alle newtoniane:

$$\begin{cases} x^\alpha \to x'^\alpha & = R^\alpha_\beta x^\beta + c^\alpha \\ t \to t' & = t + b \end{cases} \tag{2.3}$$

Le trasformazioni derivanti, nel sistema galileiano, dalla relatività delle velocità, non sono più simmetriche poiché incompatibili con l'esistenza di uno spazio assoluto. L'introduzione di quest'ultimo risultava necessario con l'affermarsi dell'elettromagnetismo e dell'ottica, e Newton pensava di aver trovato una prova della sua esistenza nel celebre esperimento del secchio rotante. Come nel caso di Leibniz, essendo le simmetrie dello spazio-tempo anche simmetrie delle leggi, una trasformazione simmetrica deve generare una nuova soluzione. Considerando una trasformazione identica per $t = 0$ ma diversa per istanti successivi, si avranno due futuri differenti per lo stesso sistema avente le medesime condizioni iniziali e sembrerebbe essere violata l'unicità della soluzione. Anche considerazioni meno generali e più concrete mostrano la fragilità del determinismo nello spazio-tempo newtoniano. Considerando un sistema di corpi soggetti alla sola interazione gravitazionale, il loro comportamento sarà descritto dalla legge di gravitazione universale. Questà è applicabile per un qualsiasi numero di corpi in gioco e, note le condizioni iniziali, definisce un problema di Cauchy trattabile matematicamente. Nel caso particolare di due corpi è possibile risolvere il problema e trovare la soluzione corrispondente al futuro del sistema, ma già con tre corpi ciò risulta possibile solo per alcuni casi particolari: seppure è garantita l'esistenza di una soluzione unica essa non è ricavabile analiticamente, ma solo tramite metodi approssimativi, basati sulla teoria perturbativa, o tramite il calcolo numerico. Come evidenziato precedentemente, comunque, la mancata predicibilità, seppure di grande rilevanza, non implica il crollo del determinismo. Risulta dunque opportuno analizzare casi concreti in cui il determinismo è messo in discussione dalle stesse leggi fisiche.

2.2 Il problema dell'infinito spaziale

Per garantire una forma di determinismo globale è necessario assumere l'illimitatezza spaziale dei mondi possibili considerati. Inoltre, se una velocità, misurata da un certo sistema di riferimento, risulta essere finita, esisterà sempre una altro sistema in cui essa può essere maggiore di una quantità arbitraria, essendo le velocità illimitate.

Considerando allora una particella di massa m che si muove in R soggetta al potenziale $V(x)$ lipschitziano (condizione che garantisce l'unicità della soluzione locale), se questo fosse tale da mandare la particella a $+\infty$ o $-\infty$ in un tempo finito t^* ci sarebbe una violazione del determinismo storico. Due soluzioni, infatti, potrebbero coincidere per $t \geq t^*$, quando non ci sono particelle nello spazio, ma essere distinte prima di quell'istante. Analogamente, considerando la soluzione temporalmente inversa, ovvero quella in cui una particella soggetta a $V(x)$ appare dall'infinito spaziale, ci sarebbe una violazione del determinismo futuro per considerazioni simili alle precedenti. Tale situazione è rappresentata in 2.1.

Il fatto che non si sia mai registrato un caso fisico del genere e che induttivamente ci si possa aspettare che mai si verificherà non mina in alcun modo quanto affermato: il determinismo poggia sulla definizione di mondi possibili e a questi fa riferimento, quindi, se corretta nel formalismo matematico considerato, nessuna considerazione può essere scartata facendo ricorso alla realtà fenomenologica.

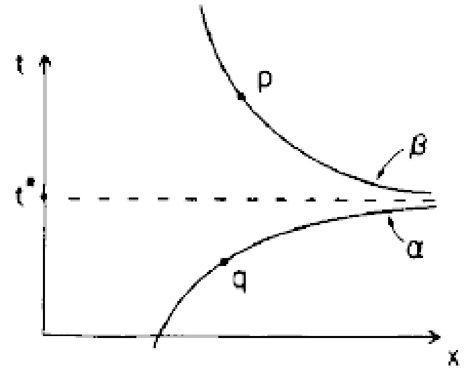

Figura 2.1: Particella che compare/scompare all'infinito

Un problema di questo tipo si presenta in uno studio di Mather e McGehee. Considerando nello spazio delle fasi un sistema di quattro corpi collineari m_1, m_2, m_3, m_4 soggetti alla sola forza gravitazionale e disposti in modo che $\mathbf{q}_1 \leqslant \mathbf{q}_2 \leqslant \mathbf{q}_3 \leqslant \mathbf{q}_4$, se vengono regolarizzate solo le collisioni tra due corpi, quelle tra tre corpi sono delle singolarità. Se in un istante t^* c'è una collisione tra tre corpi, dunque,i vettori $\mathbf{q}_i(t)$ sono definiti solo per $t < t^*$. Si dimostra che esistono dei valori delle masse per cui esistono soluzioni che diventano illimitate in un tempo finito. In particolare, il sistema si muove in modo che m_1 si allontana in direzione opposta a m_3 e m_4, mentre m_2 rimbalza tra i corpi ad esso adiacenti. Esiste allora un istante t_∞ per cui $\mathbf{q}_1 \to -\infty$, $\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 \to \infty$ e $\mathbf{q}_2$ continua a rimbalzare tra i due indefinitamente. La perdita di energia potenziale tra $\mathbf{q}_3$ e $\mathbf{q}_4$ fornisce l'energia cinetica necessaria affinchè la soluzione diventi illimitata in un tempo finito.

Data la portata di una simile conclusione è opportuno analizzare profondamente il problema a partire dalle premesse su cui poggia. Sembra innanzitutto violato il classico principio della conservazione della massa: all'istante t_∞, infatti, le particelle spariscono e di conseguenze il sistema perde la sua massa. Sembrerebbe quindi errata l'ipotesi iniziale, per cui si è assunto uno spazio infinito. Imporre dei limiti al sistema, però, non fa che rimuovere il futuro da un certo istante in poi, e ciò è ovviamente in contrasto con ogni forma di determinismo, basato sulla possibilità di conoscere la soluzione del sistema in ogni istante di tempo, passato e futuro, e quindi senza alcuna limitazione temporale. La linea di mondo che lo caratterizza, inoltre, è per definizione infinita, in quanto ne descrive l'intera storia, passata e futura, e quindi eterna. Il principio di conservazione della massa è direttamente collegato a questa, poichè si assume che in ogni punto della linea di mondo la massa del sistema sia costante; il problema non è quindi la violazione del principio di conservazione della massa, ma l'impossibilità di conoscere le caratteristiche della linea di mondo del sistema da un certo momento in poi, ed è ciò, elemento fondante dell'indeterminismo, a causare la perdita di informazioni sulla massa, la cui conservazione è garantita dall'esistenza stessa della linea di mondo.

Per quanto riguarda il principio di conservazione della quantità di moto, esso è dimostrato per sistemi chiusi, non per sistemi aperti, e non ha per definizione implicazioni su questi. L'approssimazione a punti materiali dei corpi, infine, è assolutamente lecita: è alla base delle principali dimostrazioni della fisica classica e anche della teorizzazione di determinismo di Laplace. Inoltre, anche nel caso di sistemi rigidi, il determinismo mostra la sua fragilità. A questo proposito si illustra uno studio pubblicato nel 1975 da Landford in cui egli mostra che, senza imporre condizioni di limitazione, un sistema di infinite particelle (intese come sfere rigide) può andare all'infinito secondo soluzioni delle equazioni del moto che non rispettano l'unicità.
Si consideri dunque un sistema costituito da sfere rigide,in un primo momento a riposo, che interagiscono solo attraverso urti elastici .

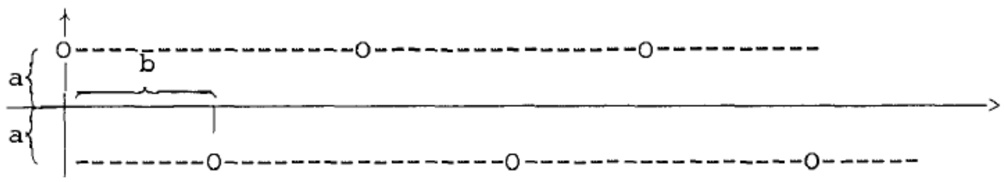

Figura 2.2: Sistema delle sfere di Landford

Esse sono distribuite come in 2.2 ed è possibile numerarle da sinistra verso destra come $1, 2, 3, ..$. La posizione dei loro centri è allora data da $(0, a), (b, -a), (2b, a), ...$. Si immagini che al tempo t_n sia fornita dell'energia all'n-esima sfera tale che, con velocità v_n, questa si muova in direzione della (n-1)-esima sfera. L'angolo direzionale della prima sfera, come mostrato in 2.3 è θ, mentre quello che descrive la direzione della seconda sfera dopo l'urto è θ' . Utilizzando il teorema del valore medio è possibile dimostare che se b/a è sufficientemente grande allora è possibile scegliere $\theta = \theta'$. Per la conservazione dell'energia si ha $v_{n-1} < v_n$. Si definisce $\alpha = v_{n-1}/v_n$. La sfera (n-1)-esima si muove allora verso la sfera (n-2)-esima che, in seguito all'urto, avrà $v_{n-2} = \alpha^2 v_n$.

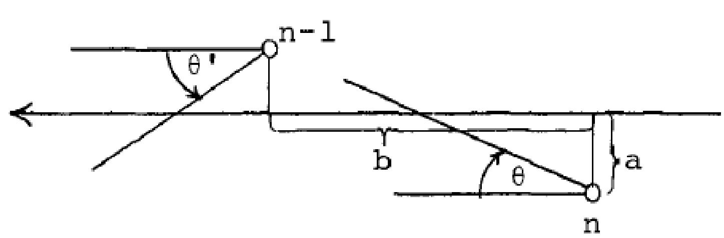

Figura 2.3: Urto tra sfere

Il processo si ripete in questo modo fino ad arrivare alla sfera 1-esima, che andrà verso l'infinito con velocità $v_1 = \alpha^{n-1}$ e ancora direzione θ . Scegliendo v_1 unitaria si ha $v_n = (1/\alpha)^{n-1}$, si fissa l'origine temporale del sistema di riferimento nell'istante dell'urto con la prima particella e si definisce $d = \sqrt{b^2 + 4a^2}$. Allora l'istante del primo urto è $t_n = -d/v_2 - d/v_3 - ... - d/v_n = -d \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$. Per $\lim n \to \infty$ le traiettorie nello spazio delle fasi $(q_j(t), p_j(t))_{j=1,2,...}$ sono le soluzioni delle equazioni del moto del sistema e non dipendono più da n . Considerando $t_\infty = -d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$, se $t \leq t_\infty$ tutte le sfere restano nel loro stato di quiete, ma se $t > t_\infty$ alcune di queste si muovono con una velocità che decresce esponenzialmente con il procedere degli urti. Ogni informazione sull'energia fornita alla prima sfera sparisce dalle soluzioni del sistema. Invertendo la linea temporale si studia un sistema tale che, in seguito ad urti successivi, la velocità delle sfere cresce esponenzialmente fino a divergere all'infinito. Tale comportamento non garantisce, ovviamente, l'unicità della soluzione, e porta ad un crollo del determinismo storico. Risulta quindi necessario ridurre il numero di sfere e limitare con opportune condizioni il comportamento all'infinito spaziale. Ciò appare in evidente contrasto con i requisiti dei mondi possibili considerati, definiti come sistemi aperti e quindi privi di limitazioni.

2.3 Altri esempi fisici e conclusioni

Altri esempi che mostrano la fragilità del determinismo nel mondo classico sono reperibili nella stragrande maggioranza dei campi della fisica, e qui se ne sono approfonditi due, legati rispettivamente alla termodinamica, e all'elettromagnetismo . L'equazione del calore è un'equazione differenziale alle derivate parziali parabolica utilizzata per descrivere molteplici problemi fisici. Questa appare come:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u \tag{2.4}$$

che nel caso unidimensionale, e assumendo $\alpha = 1$ diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

L'interpretazione termodinamica di tale legge associa a $u(x,t)$ la temperatura di un conduttore termico (assumiamo che sia una barra di ferro unidimensionale) nella posizione x all'istante t e ad α la diffusività del corpo. Per verificare se tale problema è compatibile con il determinismo è necessario trovare una soluzione $u(x,t)$ che soddisfi le condizioni iniziali $u(x,0) = \phi(x)$ con $-\infty < x < \infty$ e che sia unica. L'unicità è dimostrabile per le sole funzioni limitate tali che $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T])$. Considerando infatti la funzione non limitata

$$\tau(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{2k!} x^{2k}; \tag{2.6}$$

dove

$$h(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & t > 0; \\ 0 & t = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Si dimostra che per $t > 0$ $\tau(x,t)$ soddisfa 2.5. Dunque, oltre alla soluzione banale $u(x,t) = 0$, anche $\tau(x,t)$ è soluzione con condizione iniziale nulla. Non è quindi valida, in generale, l'unicità della soluzione, ed è possibile trovare comportamenti simili anche con funzioni continue, di conseguenza il fallimento del determinismo non è additabile alla presenza di singolarità. L'unicità è garantita solo imponendo opportune condizioni di limitazione. Un'importante soluzione di 2.5 è data dalla funzione sorgente:

$$k(x,t) = \begin{cases} e^{-x^2/4t} & t > 0; \\ 0 & t = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Questa è tale che la quantità di calore totale in una barra infinita è $\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,t)\,dx = 1$. Fisicamente tale situazione s'interpreta assumendo che in $t = 0$ sia stata fornita una quantità di calore unitaria alla barra nell'origine spaziale (per questo motivo si parla di *sorgente*). Poichè $k(x,t) > 0$ per ogni $|x|, t > 0$, il calore si diffonde istantaneamente. Si nota inoltre che la quantità di calore che si propaga cala esponenzialmente allontanandosi dall'origine; ciò potrebbe quindi far supporre che le influenze provenienti dall'infinito non neghino l'unicità a meno che non siano infinitamente grandi; tale supposizione sarebbe concretizzata imponendo l'esistenza di due costanti C e a tali che $|u(x,t)| < Ce^{ax^2}$ con $-\infty < x < \infty, t > 0$. Si potrebbe pensare che tale condizione sia resa necessaria dal fatto che, in assenza di limitazioni, la barra possa scaldarsi fino alla vaporizzazione, ma esistono anche soluzioni che violano l'unicità senza perciò essere caratterizzate dal raggiungimeto di elevatissime temperature. Un altro argomento a favore dell'imposizione di limitazioni potrebbe essere dato dal fatto che la temperatura è definita positiva, pertanto $u(x,t) \geq 0$ sempre e ovunque. In questo caso è dimostrata l'unicità della soluzione. Ciò sarebbe assolutamente corretto se, posta tale limitazione iniziale, essa fosse poi mantenuta dal determinismo stesso, senza il bisogno di imporla a tutti i possibili stati.Risulta evidente che ciò non si verifica. Considerando infatti due soluzioni distinte $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ e definendo $u^{'}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ e $u^{''}(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ una delle due funzioni sarà sicuramente negativa in qualche punto.

Per evitare il problema della limitazione del dominio è possibile fissare una frontiera della quale si conosce completamente lo stato fisico; ciò significa che si misura, su una particolare delimitazione del sistema, la somma di tutte le influenze esterne, provenienti da un qualsiasi punto dell spazio. Assumendo di conoscere le condizioni iniziali del sistema sull'intera frontiera parabolica $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$, se la funzione è uniformemente continua è possibile utilizzare il teorema del massimo per dimostrare l'unicità della soluzione. Considerando una barra con $x \in [0,1]$, un termostato in ciascun estremo e la temperatura iniziale nota per $t = 0$ è possibile scegliere la temperatura $u(x,t)$ continua. L'uniforme continuità, invece, condizione necessaria al teorema del massimo e quindi all'unicità della soluzione, non è garantita se si considera che i due termostati operano indipendentemente tra loro e dalle condizioni iniziali della barra. Neppure questa via, dunque, è percorribile ai fini di legittimare il determinismo nella fisica classica. Si sottolinea che l'equazione del calore ha molteplici applicazioni e compare in diverse leggi empiriche nel mondo newtoniano, pertanto tutte le considerazioni precedenti sono estendibili a numerosi casi fisici.

Per quanto riguarda l'elettromagnetismo classico fondato sulle leggi di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

non essendo galileanamente invarianti è necessario fissare un sistema di riferimento. Classicamente esso era uno spazio materiale chiamato etere, ma ne fu dimostrata l'inesistenza con l'esperimento di Michelson-Morley. Si considera per semplicità di essere in un sistema detto spazio assoluto non costituito da materia. Dalle leggi di Maxwell si desume che la velocità di un'onda elettromagnetica nello psazio assoluto è c. Considerando un sistema di riferimento che si muove con velocità v rispetto al precedente, a seconda della sua direzione la velocità dell'onda misurata da questo risulta essere $c \pm v$. In assenza di sorgenti ciò non comporta alcun problema e le equazioni di Maxwell aderiscono al determinismo. In presenza di queste, invece, l'assetto deterministico è garantito fino a quando le particelle cariche hanno una velocità inferiore a quella della luce; se invece questa è superiore non è dimostrato che le particelle in questione non possano allontanarsi indefinitamente dallo spazio-tempo, rendendo eventualmente impossibile risalire alla soluzione del problema dalle condizioni iniziali. Il problema non si pone se si considerano delle limitazioni sulla velocità delle particelle, ma queste sono considerate nella teoria della relatività e prescindono quindi dall'ambito classico qui considerato.

Da quanto visto fino ad ora è possibile concludere che il mondo newtoniano non è favorevole al determinismo così come si pensa. I principali problemi derivano dall'assenza di limitazioni al dominio considerato, esposto così ad influenze che possono propagarsi con velocità arbitraria e di conseguenza difficilmente calcolabili. Da queste discende l'impossibilità di garantire l'unicità delle soluzioni dei problemi fisici considerati. Ciò non implica un crollo del determinismo ma apre le porte ad un altro fondamentale problema: è lecito aggiungere ulteriori condizioni per rendere un sistema deterministico? Nei casi analizzati è evidente che seppure a volte la risposte sia chiara dal contesto, in alcuni casi non è affatto semplice stabilirlo, e la linea di demarcazione tra giuste integrazioni e banali vie di fuga è sottilissima. Un altro punto molto importante è che gli esempi analizzati e i problemi riscontrati hanno natura puramente ontologica e non derivano da considerazioni epistemologiche che chiamano in causa il ruolo dello studioso ed il suo modo di procedere. In vista di tutto ciò è quindi possibili affermare che il dibattito sul determinismo nel mondo classico è ancora aperto e che la visione di un determinismo statico e consolidato è completamente errata.

Capitolo 3

Il determinismo e la teoria della relatività

In assenza di effetti gravitazionali il mondo relativistico, così come quello classico, è caratterizzato dalla presenza di un unico back-ground, che è lo spazio-tempo di Minkowski, e dal fatto che un sistema è fisicamente definito quando sono specificate le sue caratteristiche nello spazio-tempo. Viene invece meno la simultaneità, negata dall' esistenza di una velocità limite. Nonostante possa sembrare appropriato, l'avvento della teoria della relatività non è un effetto diretto della crisi del determinismo nella fisica newtoniana e non discende da un'analisi crtica elaborata a partire dalla stessa. Ciò può risultare in un primo momento sorprendente: la teoria della relatività ristretta, elaborata nel 1905 da Einstein, sembra rispondere a tutti i principali problemi caratterizzanti il determinismo nel mondo classico. Il fatto che invece non ci sia un legame esplicito, e che la natura apparentemente deterministica del nuovo mondo sia una conseguenza di studi non indirizzati in questo senso, porta a pensare che essa si presenti in quanto manifestazione del vero cui ci si avvicina gradualmente. Questa tesi, per quanto suggestiva, crolla sotto il peso dell'evidenza: l'elaborazione della teoria della relatività generale e della meccanica quantistica rimettono completamente in discussione il determinismo, in un modo sicuramente più radicale rispetto a quanto visto precedentemente. Neppure la relatività ristretta, inoltre, risulta in questo senso del tutto deterministica, a riprova della difficoltà insita nel dare una definizione di un sistema tanto stringente quanto è quella determinista.

3.1 Lo spazio-tempo relativistico

Agli inizi del 1900 le principali teorie fisiche erano la meccanica classica newtoniana e l'elettrodinamica classica, sintetizzata dalle equazioni di Maxwell. Queste non erano però compatibili, poichè non consistenti per le medesime trasformazioni di simmetria.

Con la teoria della relatività si rimarginò questa frattura e le trasformazioni di simmetria valide nell'elettrodinamica vennero estese a tutti i casi fisici.

La teoria della relatività ristretta è basata su due postulati fodamentali:

- Le leggi fisiche sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
- La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore o della sorgente.

Da queste due proprietà, verificate sperimentalmente con grandissima precisione, è possibile ricavare le trasformazioni di Lorentz. Esse sono descritte nello spazio relativistico detto di Minkowski, e un quadrivettore posizione x'^{μ} identifica un evento dello spazio tempo, ovvero ciò che accade nel punto di coordinate spaziali $\mathbf{x}$ al tempo t . Esso è definito dalle componenti (ct, x, y, z).

Definendo la metrica di Minkowski come:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

si ricava la distanza minkowskiana:

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}. \tag{3.2}$$

Le trasformazioni di Lorentz sono definite come quelle che lasciano invariata la distanza minkowskiana, ovvero :

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \tag{3.3}$$

Si possono allora definire gli elementi di Λ^{μ}_{ν} come:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

in cui:

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{3.5}$$

Si può quindi scrivere una trasformazione di Lorentz semplicemente come:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \tag{3.6}$$

L'invarianza della distanza di Minkowski fa sì che sia indipendene dal sistema di riferimento considerato. Essa può essere di tipo tempo ($s^2 < 0$), di tipo luce ($s^2 = 0$) e di tipo spazio ($s^2 > 0$). Una possibile rappresentazione dello spazio-tempo è mostrata in 3.1. La parte superiore interna al cono descrive il futuro assoluto del punto (0,0,0,0), mentre la parte inferiore il suo passato. L'ipersuperficie che taglia il cono passando per l'origine rappresenta il presente, e l'origine l'osservatore.

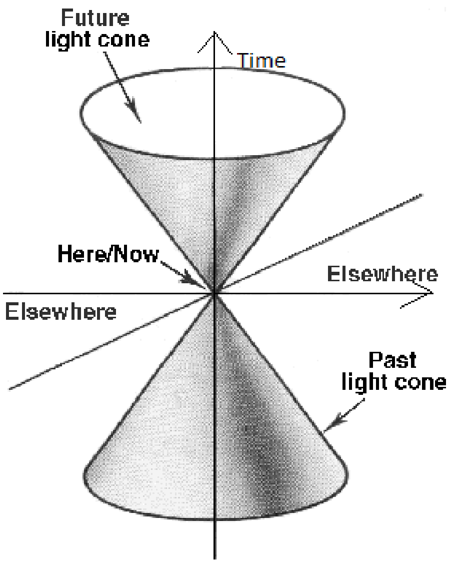

Figura 3.1: Spazio di Minkowski

La linea di universo della particella studiata deve indirizzarsi all'interno del cono di luce considerato, dato che quella della luce è una velocità limite. Se viaggiasse alla velocità della luce, giacererebbe sul cono stesso. Se due eventi avessero distanza di tipo spazio non potrebbero in alcun modo essere collegati da una linea di universo e quindi condizionarsi. L'insieme dei punti al di fuori del cono di luce è detto *altrove assoluto*.

Tra le immediate conseguenze delle trasformazioni di Lorentz ci sono la contrazione delle lunghezze, la dilatazione dei tempi e la composizione relativistica delle velocità. Considerando un oggetto unidimensionle di lunghezza L_0 disposto sull'asse x di un sistema di riferimento in quiete con lo stesso, se esso viene visto in moto con velocità v diretta lungo x da un altro sistema di riferimento, la lunghezza misurata dall'ultimo è:

$$L = \gamma^{-1} L_0, \tag{3.7}$$

ed essendo $\gamma > 1$ essa risulterà contratta. Analogamente, se il tempo che intercorre tra due eventi nello stesso punto del sistema di riferimento in quiete con l'oggetto è T_0, quello misurato nel sistema K definito come prima è

$$T = \gamma T_0. \tag{3.8}$$

In questo caso, quindi, si parla di dilatazione dei tempi. T_0 è definito tempo proprio ed è il tempo più breve per il fenomeno in questione. Considerando infine una particella in K che si muove lungo x con velocità V_x, se un sistema k' si allontana dal primo con una velocità v ancora diretta lungo x, la velocità della particella vista in K' risulta essere:

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}. \tag{3.9}$$

Le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto, infine, sono ancora valide e vengono formalizzate nella legge di conservazione del quadrimpulso, un quadrivettore definito come $p^\mu = (E/c, \vec{p})$. Il modulo quadro del quadrimpulso è $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$ e il quadrimpulso è conservato dalle interazioni relativistiche invarianti per traslazioni spaziali e temporali, ovvero:

$$P^\mu_{iniziale} = P^\mu_{finale}. \tag{3.10}$$

Si sottolinea che nel limite $c \to \infty$ tutte le formule precedenti tornano ad essere coerenti con quelle classiche.

3.2 Condizioni di validità del determinismo

Lo spazio di Minkowski, le cui trasformazioni simmetriche sono descritte dal gruppo di Poincaré e che pone il limite c alle velocità raggiungibili, è tale da rendere possibile la formulazione di leggi del moto o equazioni di campo per cui le simmetrie dello spazio sono simmetrie delle leggi e il quadrimpulso si propaga ad una velocità minore di quella della luce. Tutti i problemi di natura classica legati alla mancanza di limitazioni per la velocità vengono meno.

Si definisce curva causale una curva regolare che rappresenta una traiettoria dello spazio-tempo tale da rendere possibile un trasferimento di energia/quantità di moto. Essa passa quindi per dei punti giacenti dentro o sulla superficie del cono di luce (non di tipo spazio). Per ogni istante t, a differenza della meccanica classica, è possibile individuare delle superfici di Cauchy, superfici dello spazio-tempo di tipo spazio intersecate al massimo una volta dalle curve causali. Il dominio di una curva causale, quindi, diventa l'intero spazio-tempo, e note le condizioni iniziali su una superficie di Cauchy diventa possibile risolvere deterministicamente il sistema.

Non tutte le caratteristiche enunciate discendono direttamente dall'impostazione della relatività ristretta, ed è infatti necessario fare altre assunzioni. Il tensore energia-impulso T^{ab} descrive il flusso di energia e quantità di moto associate ad un campo ed è definito attraverso:

$$P^a = \alpha \int T^{ab} dS_b, \tag{3.11}$$

dove α è una costante e dS_b è un'ipersuperficie con coordinate x_k costanti. La legge di conservazione locale $\nabla_a T^{ab} = 0$ non garantisce che il flusso del quadrimomento misurato da un osservatore non sia mai di tipo spazio. Risulta anche necessario che per evento futuro di tipo tempo U^a, $-T^{ab}U_a$ non sia un punto di tipo spazio. Tali richieste sono sintetizzate nella condizione seguente:

$$T^{ab}U_aU_b \geq 0. \tag{3.12}$$

In questo modo è garantito inoltre che il campo che genera T^{ab} non possa avere una velocità maggiore di quella della luce.

A questo punto è possibile affermare che lo spazio di Minkowski sembra supportare una forma di determinismo per quanto riguarda le equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico lineari, diagonali e al secondo ordine. L'equazione di Klein Gordon è un primo tentativo di estendere l'equazione di Schrodinger alla relatività, pur trascurando fondamentali effetti quantistici. Nel caso di un campo scalare ϕ di massa $m > 0$:

$$\nabla^2\phi - m^2\phi = 0 \tag{3.13}$$

sono garantite l'esistenza e l'unicità di una soluzione globale note le condizioni iniziali: data una superficie di Cauchy Σ dello spazio tempo di Minkowski e definiti i valori di ϕ e della sua derivata su di essa, esiste una soluzione unica e globale di tipo C^∞ definita su tutto lo spazio-tempo. Si sottolinea che non è stata fatta alcuna limitazione al dominio e non si è ricorso ad alcun espediente volto a favorire il determinismo che in questo caso si manifesta in modo inequivocabile. Nel caso in cui siano note le condizioni iniziali su una superficie di tipo tempo, invece, il problema di Cauchy non è ben posto e non solo le soluzioni non dipendono in modo continuo dalle condizioni iniziali ma non ne è neppure garantita l'univocità. Questa asimmetria, più che entrare in conflitto con le considerazioni precedenti, sembra evidenziare la possibilità di distinguere la coordinata temporale da quelle spaziali.

Si sottolinea che le considerazioni precedenti valgono solo per una ristretta classe di equazioni differenziali alle derivate parziali. Il problema di ricondurre equazioni di campo ad una delle forme suddette, dunque, è di grande importanza nella fisica matematica. Come accennato nel capitolo precedente è possibile dimostrare che in assenza di sorgenti le equazioni di Maxwell scritte in termini dei potenziali soggetti ad opportune condizioni appartengono ad esse. La semplice assenza della linearità delle equazioni differenziali è invece tale da minare il carattere deterministico delle soluzioni.Aggiungendo ad esempio un termine costante all'equazione di Klein-Gordon:

$$\nabla^2\phi - m^2\phi = \lambda\phi^2 \tag{3.14}$$

la soluzione corrispondente a delle condizioni iniziali regolari può diventare infinita in un tempo finito.

3.3 Predicibilità nella teoria della relatività

Nonostante la struttura dello spazio di Minkowski renda possibili chiare forme di sistemi deterministici, non garantisce la predicibilità nel caso in cui l'osservatore non scelga a priori le condizioni iniziali del problema ma debba invece ricavarle interagendo direttamente con il sistema in questione.

Considerando un osservatore descritto da una linea di mondo γ e supponendo che trovandosi in p voglia determinare il suo stato nel punto p', ha bisogno di conoscere le condizioni iniziali su una superficie σ che taglia il cono di luce prima di p' (la storia passata di ciascun punto dello spazio q è identificata da $I^-(q)$). Si suppone allora che essa passi proprio per p (vedi 3.2) .

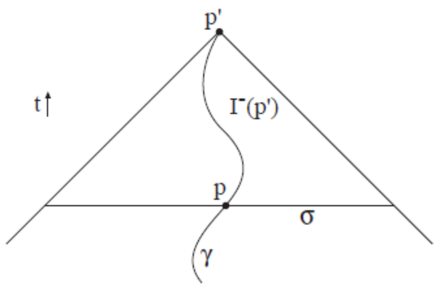

Figura 3.2: Osservatore in p

Affinchè possa conoscere le condizioni iniziali sull'intera superficie σ, è necessario che l'osservatore sia raggiunto dalla luce che parte da ciascun punto che la caratterizza. Tale percorso, di tipo luce, descrive delle traiettorie con la stessa inclinazione della superficie del cono; è quindi chiaro che l'osservatore possa conoscere completamente le condizioni in σ solo trovandosi esattamente in $p^{'}$. Tali considerazioni non dipendono in alcun modo dalla scelta della superficie, la cui ovvia limitazione è che sia presa prima dell'istante che si intende studiare. La struttura dello spazio-tempo di Minkowski, quindi, fa sì che un osservatore, nel caso in cui voglia prevedere uno stato futuro del sistema da cui è descritto, non sia in grado di ricavare direttamente le condizioni iniziali necessarie. Si può quindi affermare che il dominio di predicibilità nello spazio di Minkowski è nullo per un qualsiasi punto q. Dalle pecedenti considerazioni Popper concluderebbe che neppure per la relatività ristretta si può affermare una valida forma di determinismo, ma come visto precedentemente questa conclusione non è necessariamente vera.

Le condizioni di predicibilità possono essere formalizzate così da risultare maggiormente fruibili. Dato un punto q, il suo passato causale $J^-(q)$ è l'insieme dei punti p per i quali esiste una curva causale diretta verso il passato che li collega a q, e rappresenta quindi la regione dello spazio-tempo le cui informazioni possono raggiungere q. Per una superficie S di tipo tempo di Cauchy , il dominio di dipendenza futuro $D^+(S)$ (passato

$D^-(S)$) è l'insieme dei punti tali che ogni curva causale inestendibile diretta verso il passato (futuro) intersechi S. Il dominio di dipendenza totale è quindi $D = D^-(S) \cup D^+(S)$. Si definisce allora il dominio di predicibilità di q l'insieme $P(q)$ dei punti p dello spazio-tempo tali che $p \notin J^-(q)$ ed esista una superficie $S \in J^-(q)$ tale che $p \in D(S)$. La prima condizione garantisce che ogni previsione riguardi effettivamente il futuro, non il passato, mentre la seconda afferma che ogni influenza che subisce il punto p dev'essere registrata su una superficie di Cauchy $S \in J^-(q)$. Lo spazio-tempo di Minkowski non è deterministico poichè il suo passato causale non contiene superfici di Cauchy, di conseguenza $P(q) = \emptyset$.

Un esempio di spazio-tempo in cui è possibile la predicibilità è realizzato modificando lo spazio di Minkowski in modo che esso sia compattato in un cilindro (vedi 3.3).

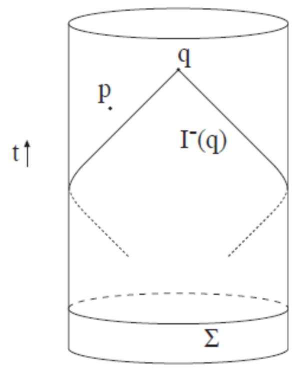

Figura 3.3: Spazio di Minkowski modificato per garantire la predicibilità

In questo caso risulta evidentemente possibile fare delle corrette previsioni poichè $J^-(q)$ contiene superfici di Cauchy (in figura Σ).

Si definisce Il futuro (passato) cronologico $I^+(q)$ ($I^-(q)$) di una particella q l'insieme di punti p tale che esista una curva di tipo tempo diretta verso il futuro (passato) da q a ciascun p . Si può allora considerare un interessante sottoinsieme del dominio di predicibilità che è il dominio di predicibilità direttamente verificabile, determinato da $P(q) \cap I^+(q)$. Esso rappresenta gli eventi del futuro che sono predicibili. Si può dimostare un teorema per cui, considerando uno spazio-tempo (M, g) in cui g è la metrica , se esistono dei punti $p, q \in M$ e se $p \in P(q) \cap I^+(q)$ allora M ammette una superficie di Cauchy. Assumendo quindi che un osservatore abbia una superficie di Cauchy nel suo passato causale, è possibile chiedersi se questi ne sia consapevole. Considerando una spazio-tempo (M, η), $p \in M$ e un secondo spazio-tempo $(M', \eta_{M'})$ tale che $M' = M - \{p\}$, se $q \in M$ con $p \notin J^-(q)$, $p \in P(q)$ per definizione, è possibile per un osservatore in q fare una previsione esatta su p? Un altro punto fondamentale è capire se e come l'osservatore possa essere certo di trovarsi in M e non in M', in cui p è assente dallo spazio-tempo. Anche richiedendo l'inestendibilità dello spazio-tempo è possibile trovare in letteratura esempi di questo tipo. In termini ancora più generali, il problema è se sia possibile fare una previsione autentica.

Considerando (M, g), (M', g'), Si può definire il dominio di predicibilità autentica $P_A(q)$ l'insieme dei punti $p \in P(q)$ per cui, per tutti gli sapzi inestendibili (M', g'), se esiste un'isometria $\phi : J^-(q) \to M'$, allora esiste un'isometria $\phi' : J^-(q) \cup J^-(p) \to M'$ per cui $\phi = \phi' \restriction_{J^-(q)}$. Da questa definizione si conclude che una previsione autentica è fisicamente impossibile. Si dimostra infatti che per qualsiasi spazio-tempo $(M, g), q \in M$, allora $P_A \subseteq \partial J^-(q)$. Sembra quindi impossibile fare delle previsioni a meno di trovarsi sulla frontiera $\partial J^-(q)$, nel cui caso esse sarebbero catturate nell'atto di rivolgersi al passato, diventando quindi delle *retrodizioni*.

Si noti che le precedenti considerazioni valgono per uno spazio-tempo generico, e sono quindi applicabili sia alla relatività ristretta che a quella generale.

3.4 Conclusioni sulla teoria della relatività

Le condizioni di esistenza globale e univocità delle soluzioni risultano essere molto stringenti per la relatività ristretta, il cui assetto non garantisce quindi la validità del determinismo se non in alcuni semplici casi. Una situaziona ancora meno favorevole si presenta nella teoria della relatività generale, la cui trattazione risulta essere molto complessa per essere discussa in queste sede.

Si è dato molto spazio al problema della predicibilità, di grande importanza epistemologica, che se anche non ha implicazioni sul carattere deterministico di un sistema lo caratterizza fortemente. Si è visto non è affatto garantito per un osservatore prevedere uno stato futuro a meno che non conosca a priori le condizioni iniziali che altrimenti dovrebbe sperimentalmente ricavare. Come nel caso della meccanica classica, dunque, seppure non ci siano conclusioni definitive sul problema, si è mostrata in piccola parte la complessità dello stesso, in forte contrapposizione con l'idea di un determinismo evidentemente affermato.

Capitolo 4

Il determinismo in meccanica quantistica

La meccanica quanistica è generalmente riconosciuta come il campo della fisica maggiormente ostile al determinismo: è sufficiente pensare al celeberrimo principio di indeterminazine di Heisenberg, profondamente radicato culturalmente; esso pone grandi limitazioni alle misure effettuabili, rendendendo impossibile la conoscenza di uno stato iniziale in tutti i suoi dettagli . Ovviamente, per avere un'idea effettiva del problema, è necessario entrare nel vivo della teoria quantisica. Facendo ciò si evidenzia come anche in quest' ultimo caso la visione dominante risulta essere grossolana e insufficiente, poichè esclude casi di grande interesse in cui invece la realtà quanistica sembra essere più deterministica di quella classica, e non tocca profondamente le questioni sollevate.

Mentre nei precedenti capitoli il problema del determinismo era affrontato, almeno nel mondo fisico, trasversalmente allo sviluppo delle teorie , in questo caso assume un ruolo centrale. Una prova è data dalla profonda diatriba seguita alla nascita della meccanica quantistica e riguardante l'accettazione della stessa. Tra i più grandi oppositori ad essa ci fu Einstein, che in una lettera a Born scriveva:

"Le nostre prospettive scientifiche sono ormai agli antipodi. Tu ritieni che Dio giochi a dadi col mondo; io credo invece che tutto ubbidisca a una legge, in un mondo di realtà obiettive che cerco di cogliere per via furiosamente speculativa. Lo credo fermamente, ma spero che qualcuno scopra una strada più realistica – o meglio un fondamento più tangibile – di quanto non abbia saputo fare io."

Tale perplessità era provocata dall'interpretazione statistica della funzione d'onda della particella descritta che, come si vedrà, introduce dell'indeterminazione. Queste semplici considerazioni danno un'idea della portata del problema, al quale, come nei casi precedenti, non è possibile dare una risposta definitiva.

4.1 Introduzione alla meccanica quantistica

Agli inizi del Novecento alcuni importanti esperimenti evidenziarono un duplice comportamento, ondulatorio e corpuscolare, sia della materia che della radiazione elettromagnetica. Questo fu formalizzato dalla meccanica quantistica tramite l'introduzione di una funzione d'onda, capace di descrivere sia la luce che le particelle. Venne poi affermato il principio di complementarità, per il quale il duplice aspetto non può essere osservato contemporaneamente durante lo stesso esperimento.

Lo stato di un sistema è descritto completamente dalla sua funzione d'onda, da cui è possibile ricavare delle grandezze, note come *osservabili*, attraverso l'uso di opportuni operatori. Le funzioni d'onda soddisfano le proprietà dei vettori, mentre gli operatori agiscono su di essi come trasformazioni lineari. Per rappresentare uno stato fisicamente possibile la funzione dev'essere normalizzata, ovvero:

$$\int |\psi|^2 dx = 1 \tag{4.1}$$

L'insieme di tutte le funzioni quadrato integrabili su un intervallo $[a, b]$, ovvero:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \tag{4.2}$$

definisce lo spazio di Hilbert $L_2[a, b]$, in cui giacciono le funzioni d'onda. Il prodotto interno di due funzioni $f, g \in L_2[a, b]$ è dato da:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) dx, \tag{4.3}$$

La cui esistenza è garantita dalla diseguaglianza di Schwarz. Il prodotto interno di una funzione con sè stessa è:

$$\langle f \mid f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \tag{4.4}$$

ed è nullo solo se f è nulla. Se il prodotto interno di due funzioni distinte è nullo esse sono *normalizzate*. Un insieme di funzioni $\{f_n\}$ è *ortonormale* se esse sono normalizzate e mutuamente ortogonali e completo se ogni $f \in L_2[a, b]$ è esprimibile come combinazione lineare delle $\mathrm{f}_n, ovvero$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{4.5}$$

Come visto precedentemente, ad ogni osservabile $Q(x, p)$ è associato un operatore $\hat{Q}$. Il valore di aspettazione di una variabile può essere espresso come:

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi dx =< \psi|\hat{Q}\psi >=< \hat{Q}\psi|\psi > . \tag{4.6}$$

L'ultima uguaglianza discende dal fatto che, essendo le osservabili reali, gli operatori devono essere *autoaggiunti*, ovvero $\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$.

Risolvere un sistema formato da una particella soggetta al potenziale $V(x,t)$ significa infine risolvere l' equazione di Schrodinger associata alla sua funzione d'onda $\boldsymbol{\psi}(x,t)$, che nel caso unidimensionale risulta essere:

$$i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}(x,t)}{\partial x^2} + V\boldsymbol{\psi}(x,t). \tag{4.7}$$

Nel caso in cui il potenziale non dipenda dal tempo e applicando il metodo di separazione delle variabili, si risolve prima l'equazione di Schrodinger non dipendente dal tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\boldsymbol{\psi}}{dx^2} + V\boldsymbol{\psi} = E\boldsymbol{\psi}. \tag{4.8}$$

Si ricava così un insieme infinito di soluzioni separabili, nella forma:

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}. \tag{4.9}$$

Esse rappresentano stati stazionari la cui densità di probabilità non dipende dal tempo e la misura dell'energia totale fornisce con certezza il valore di E_n. A questo punto è possibile scrivere il risultato generale di 4.7 come:

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_i(x)e^{-iE_i t/\hbar}. \tag{4.10}$$

Tale risultato è noto come *Principio di sovrapposizione.* Risulta sorprendente il fatto che sia sempre possibile costruire una soluzione generale dell'equazione di Schrodinger come combinazione lineare delle soluzioni separabili tramite una scelta appropriata delle c_n. Mentre negli stati stazionari il modulo quadro e i valori di aspettazione non si modificano nel tempo, ciò non è più vero per $\boldsymbol{\psi}$.

Il significato fisico della funzione d'onda è fornito dall'interpretazione statistica di Born: il modulo quadro $|\boldsymbol{\psi}|^2 dx$ fornisce la probabilità di trovare la particella nell'intervallo $[x, x+dx]$ al tempo t. La meccanica quantistica è quindi in grado di offrire un'informazione solo statistica sui possibili stati del sistema. Non è possibile, conoscendo la funzione d'onda di una particella, prevedere con certezza dove essa si troverà in un determinato istante. La funzione d'onda, infatti, non possiede proprietà che prescindono dall'osservazione, in quanto esse si manifestano solo in seguito a misurazioni.

Si introduce quindi l'interpretazione statistica generalizzata. Essa prevede che una misura dell'osservabile Q su una particella nello stato $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ fornisca con certezza uno degli autvalori dell'operatore autoaggiunto $\hat{Q}$. Per il teorema spettrale un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert ha una rappresentazione spettrale e i suoi autostati formano quindi una base ortonormale completa. Ogni misura, dunque, resituirà un autovalore q_n associato all'autofunzione normalizzata $f_n(x)$, e per la completezza è possibile scrivere la funzione d'onda della particella come:

$$\boldsymbol{\psi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{4.11}$$

La probabilità di ottenere un particolare autovalore q_n è quindi :

$$|c_n|^2, \quad dove \quad c_n =_n |\boldsymbol{\psi}\rangle. \tag{4.12}$$

Si noti che questa non è la probabilità che la particella *si trovi* nello stato f_n : prima della misura la particella è e resta nello stato $\boldsymbol{\psi}$. Il valore di aspettazione di Q, infine, risulta:

$$< Q >= \sum_{n=0}^{\infty} q_n |c_n|^2. \tag{4.13}$$

Dalle precedenti considerazioni discende infine il principio di indeterminazione generalizzato. Considerando una coppia di osservabili A e B i cui operatori non commutano (incompatibili), e considerando:

$$\sigma_A^2 = \langle (A- < A >)\boldsymbol{\psi} \mid (A- < A >)\boldsymbol{\psi} \rangle, \tag{4.14}$$

si definisce σ_B^2 analogamente. A partire da ciò è possibile dimostrare il principio di indeterminazione:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq (\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle)^2, \tag{4.15}$$

che applicato alle osservabili x, p risulta essere:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{4.16}$$

Qualitativamente, l'atto della misura della posizione della particella fa collassare $\boldsymbol{\psi}$ in un picco molto stretto, che comporta un ampio intervallo di lunghezze d'onda, e quindi di momenti. Solo se $\boldsymbol{\psi}$ è autostato simultaneo di entrambe le osservabili è possibile una misura simultanea senza che una misura disturbi l'altra, ma ciò è possibile solo per osservabili compatibili.

4.2 Il collasso della funzione d'onda

L'impostazione formale della meccanica quantistica sembra comportare che, almeno ad una prima occhiata, essa sia anche più deterministica della meccanica classica. Nel caso di una particella libera, l'equazione di Schrodinger diventa:

$$i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \boldsymbol{\psi}}{dx^2}; \tag{4.17}$$

questa ha una certa somiglianza con l'equazione del calore 2.5, e un punto di contatto fondamentale è che entrambe sono equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo parabolico, e ammettono dunque una velocità di propagazione infinita per le perturbazioni. Nel caso del calore questa caratteristica, come visto, creava dei problemi, poichè rendeva possibile che giungessero eventuali perturbazioni dall'infinito tali da rendere il sistema imprevedibile. Nel caso di $\boldsymbol{\psi}$ invece, l'interpretazionie statistica della funzione d'onda, che giace in $L^2(\mathbb{R})$, impone immediatamente la condizione 4.2. Questa garantisce l'unicità della soluzione per ogni tempo, passato e futuro. Si conserva inoltre la norma della funzione d'onda, ovvero $||\boldsymbol{\psi}(x,0)|| = ||\boldsymbol{\psi}(x,t)||$, e ciò conferisce stabilità al sistema. In meccanica classica, invece, spesso si ha a che fare con sistemi dipendenti sensibilmente dalle condizioni iniziali e quindi fortemente instabili; in essi effettuare una previsione a partire da condizioni iniziali approssimate risultava impossibile.

Il problema, come accennato sopra, nasce dall'interpretazione statistica della funzione d'onda: Supponendo di effettuare una misura e di trovare la particella in un punto q, si pone il problema di stabilire dove essa fosse appena prima. Si distinguono, in base alla risposta, tre scuole di pensiero: quella realista (Einstein), quella ortodossa (interpretazione di Copenaghen) e quella agnostica (Pauli). Per i realisti la particella si trovava in q anche prima della misura, ed essendo la meccanica quantistica incapace di dirlo risulta incompleta. Per gli ortodossi l'atto della misura implica la definizione di una posizione della particella, che prima di quel momento non era in alcun luogo. Per gli agnostici, infine, il problema di cosa accadesse prima di effettuare la misura è puramente metafisico; per confermare delle supposizioni sarebbe infatti necessario fare un esperimento, ma ciò darebbe ancora informazioni sullo stato successivo alla misura, non su quello precedente.

Secondo l'interpretazione di Copenaghen, quella della misura è un'operazione *reificatrice*: solo nel momento in cui questa viene effettuata l'osservabile è definita. Da 4.11 la funzione d'onda risulta essere una sovrapposizione di tutti gli stati possibili. Considerando ad esempio l'operatore posizione $\hat{Q}$, e assumendo che le f_n di 4.11 siano autostati dell'operatore stesso, $\boldsymbol{\psi}$ risulta essere sovrapposizione di tutti gli autostati dell'operatore posizione, e di conseguenza essa non è localizzabile, essendo in un certo senso in tutte le posizioni possibili. Tale interpretazione conduce dunque all'impossibilità di individuare delle grandezze fisiche caratterizzanti il sistema prima della misura, che implica il collasso della funzione in uno dei possibili autostati dell'operatore associato.

Un grande oppositore di questa posizione fu Schrodinger, che cercò di mostrarne la fragilità tramite il suo celeberrimo paradosso. Egli considera una scatola chiusa contenente un contatore Geiger ed una piccolissima quantità di sostanza radioattiva tale che, nell'arco di un'ora, ci sia la stessa probabilità per un solo atomo di decadere oppure no. Il sistema è costruito in modo che, nel caso in cui l'atomo decada, allora si rompe una fialetta di cianuro. Assumendo che nella scatola ci sia un gatto, dunque, alla fine dell'ora c'è la stessa probabilità che il gatto sia vivo o morto. Il principio di sovrapposizione prevede quindi che prima di guardare nella scatola il gatto sia caratterizzato da una

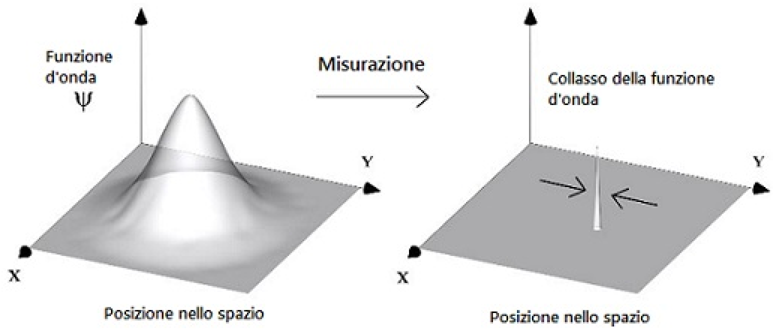

Figura 4.1: Collasso della funzione d'onda nell'autostato associato alla posizione della particella

funzione d'onda del tipo:

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{vivo} + \psi_{morto}). \tag{4.18}$$

Il gatto non è nè vivo nè morto, ma si trova in una sovrapposizione dei due stati; è solo l'atto di guardare nella scatola ad implicare il collasso della funzione d'onda, e quindi a decidere della vita o della morte del gatto.

La risposta a questo paradosso generalmente accettata verte su due nuclei principali: innanzitutto è il contatore Geiger ad effettuare la misura, e non l'intervento dell'osservatore umano. Si ha una misura nel momento in cui il sistema microscopico interagisce con un sistema macroscopico che ne rimane segnato. La funzione d'onda del gatto, inoltre, dovrebbe essere definita dalla sovrapposizione di tutte le particelle elementari che lo compongono, generando una funzione totale molto complessa. La teoria della decoerenza, che impedirebbe l'osservazione di una sovrapposizione di stati macroscopici, interpretando in questo caso il collasso della funzione d'onda come indipendente dalla misurazione. Un'altra via è invece quella delle teorie delle variabili nascoste, che cercano di definire una realtà quantistica indipendente dalla misura ma che non saranno approfondite in questa sede.

4.3 Teoria della decoerenza quantistica e conclusioni

La teoria della decoerenza quantistica cerca di recuperare il legame tra mondo microscopico e mondo macroscopico, che appariva spezzato dalla meccanica quantistica. Essa è basata sugli effetti dell'interazione dei sistemi considerati con l'ambiente circostante, costituito da numerosissimi e quindi incontrollabili gradi di libertà. Si supera l'approssimazione di sistema isolato (resta valida solo per sistemi microscopici come atomi o piccole molecole), che risultava essere grossolana e inadeguata a spiegare il passaggio dal mondo quantistico a quello classico. Le principali implicazioni dell'interazione della particella con l'ambiente sono due: la decoerenza , consistente nella soppressione delle interferenze degli stati costituenti un sistema e determinanti la loro sovrapposizone, e una *superselezione* di stati favoriti. Questi, noti in letteratura come *pointer states*, mantengono la loro correlazione a lungo e corrispondono agli stati classici che si osservano nel mondo macroscopico.

La decoerenza deriva dall'applicazione del formalismo quantistico alla descrizione dell'interazione ambiente-sistema, e non necessita di alcuna rivisitazione della teoria. Tale interazione è associata al fenomeno dell'*entanglement*, che definisce una correlazione a distanza tra sistemi spazialmente separati. Se si considerasse l'universo nella sua interezza esso evolverebbe deterministicamente secondo l'equazione di Schrodinger. Il problema si pone nel momento in cui si effettua una misurazione, atto che implica la separazione di tre sistemi: quello che s'intende studiare, che si identifica con S, l'apparato di misura A e l'ambiente esterno E. S è descritto da una base $\{|s_n\rangle\}$ nello spazio di Hilbert H_S , A da $\{|a_n\rangle\}$ in H_A ed E da $\{|e_n\rangle\}$ in H_E.

Per il principio di sovrapposizione vale $S = \sum_n c_n|s_n\rangle$. Se A è nello stato iniziale $|a_r\rangle$, il sistema costituito da S e da A giace in $H_S \otimes H_A$ ed evolve nel tempo t come:

$$(\sum_n c_n|s_n\rangle)|a_r\rangle \to \sum_n c_n|s_n\rangle|a_n\rangle. \tag{4.19}$$

Si noti che un cambio di base implicherebbe una nuova definizione dell'osservabile misurata, e ciò è in evidente contraddizione con i principi di commutatività degli operatori: sarebbe ad esempio possibile misurare la proiezione dello spin su due differenti assi semplicemente attraverso un cambio di base sebbene gli operatori associati non siano compatibili. Sembrerebbe quindi che la meccanica quantistica non sia in grado di distinguere un'osservabile da un'altra, ma ciò è assurdo considerando che gli strumenti di misura sono costruiti per misurare specifiche quantità. Introducendo l'interazione con l'ambiente esterno, il sistema sarà definito in $H_S \otimes H_A \otimes H_E$ come:

$$(\sum_n c_n|s_n\rangle)|a_r\rangle|e_0\rangle \to \sum_n c_n|s_n\rangle|a_n\rangle|e_n\rangle. \tag{4.20}$$

In questo caso è possibile dimostrare l'unicità dell'espansione; l'introduzione dell'ambiente esterno elimina quindi il problema dell'equivocità della definizione del sistema SA. A causa dell'enorme numero di particelle costituenti l'ambiente esterno, ciascun $|e_n\rangle = |\epsilon_0\rangle|\epsilon_1\rangle|\epsilon_2\rangle$...; i ket $|\epsilon_i\rangle$ tendono inoltre a diventare rapidamente ortogonali, ovvero :

$$\langle\epsilon_n|\epsilon_m\rangle \to \delta_n, m. \tag{4.21}$$

Si è quindi stabilita una correlazione non separabile e, dato il numero elevatissimo di particelle descritte, irreversibile tra gli stati SA ed E. L'operatore densità di un tale sistema, interpretabile come l'analogo quantistico della distribuzione di probabilità dello spazio delle fasi classico, risulta essere:

$$\hat{\rho}_{SA} = \sum_{m,n} c_m c_n^*|s_m\rangle|a_m\rangle\langle s_n|\langle a_n|\langle e_n|e_m\rangle. \tag{4.22}$$

Questa contiene i caratteristici termini d'interferenza, ma per 4.22 evolve come:

$$\hat{\rho}_{SA} \rightarrow \sum_n c_n c_n^* |s_n\rangle|a_n\rangle\langle s_n|\langle a_n|, = \sum_n |c_n|^2 \hat{P}_n^{(S)} \otimes \hat{P}_n^{(A)}. \tag{4.23}$$

L'operatore densità è quindi approssimativamente uguale a quello di stati misti, di conseguenza si è persa localmente la coerenza. Ciò fa sì che l' equazione di evoluzione della matrice densità ridotta associata non sia in generale unitaria, a differenza di quanto accade nei sistemi chiusi. In termini più formali, per ottenere la matrice densità ridotta si è fatto uso di operazioni non unitarie e la matrice sarà quindi in generale non unitaria. Le conseguenze di questa conclusione sono di grande importanza. L'equazione di Schrodinger risultava deterministica proprio perchè unitaria, ed il fatto che questa non lo sia implica l'impossibilità di prevedere l'evoluzione del sistema e quindi il carattere indeterministico dello stesso.

La decoerenza riesce comunque a spiegare come e perchè certi oggetti si comportano "classicamente" per un osservatore "locale". Si sottolinea ancora che tale comportamento discende dall'interazione dell'oggetto in analisi con l'ambiente in cui è immerso, e non è una sua proprietà innata. Un' altra caratteristica della decoerenza è che è un processo continuo, ma avvenendo in tempi brevissimi viene percepito come discreto. Ciò rende possibile effettuare delle misure, altrimenti impossibili. Infine,il processo di decoerenza è di natura irreversibile, e ciò risulta quindi alla base della distinguibilità tra mondo classico e quantistico.

Una trattazione completa e rigorosa del problema del determinismo nella meccanica quantistica richiederebbe molto più spazio e di certo non potrebbe esaurirsi nelle poche considerazioni precedenti. Si mette però in evidenza il fatto che tutte le questioni sollevate sono problemi centrali nell'avvento della meccanica quantistica: per la prima volta i problemi della teoria risultano strettamente intrecciati a quelli del determinismo, e questo sottolinea l'importanza e la portata di certi interrogativi. Anche se non è chiaro quali siano le implicazioni sul determinismo, è evidente che esse siano estremamente profonde. Neppure in questo caso, infine, si giunge ad una conclusione definitiva sul problema, che anzi risulta essere sempre più ingarbugliato e complesso. Allo stesso tempo però fornisce anche delle indicazioni alla ricerca scientifica, sollevando punti critici da affrontare e quindi le possibili vie attraverso cui procedere. Si può infatti affermare senza ombra di dubbio che quello del determinismo non è solo un grande problema filosofico ma anche scientifico, e i due approcci al problema, se non complementari, sono di grande reciproco aiuto, e rimarginano in modo evidente quella frattura tra scienza e cultura che molto spesso vorrebbe ridurre la prima ad un qualcosa di puramente tecnico.

Bibliografia

[1] J. Earman. *A primer on determinism.* D.Reidel Publishing Company, 1986.

[2] J. Earman. *Ascpects of Determinism in Modern Physics.* [Philosophy of Physics. A volume in Handbook of the Philosophy of Science]. Elsevier B.V. , 2007.

[3] J. Moser *Dynamical system, Theory and Applications.*[Lecture Notes in Physics]. Springer-Verlag, 1975 .

[4] P. Buttà *Note sul corso di fisica matematica*
`http://www1.mat.uniroma1.it/∼ butta/didattica/note−FM.pdf`

[5] F. Bastianelli *Appunti per Fisica Nucleare e Subnucleare - Mod 1A.A. 2018/19*

[6] J. B. Manchak *Is Prediction Possible in General Relativity?*[Foundation of Physics, Volume 38]. Springer US, 2008.

[7] D. J. Griffiths *Introduzione alla meccanica quantistica.* C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana, 2009.

[8] M. Schlosshauer *Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics*
`https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0312059v4.pdf`, 2004.

[9] C. Kiefer, E. Joos. *Decoherence- Concepts and Examples* [Quantum Future From Volta and Como to the Present and Beyond]. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

[10] M. Schlosshauer *Decoherence and the quantum to classical transition.* Springer, 2007.