

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Introduzione al modello cosmologico Lambda-CDM

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Gabriele Panebianco

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Il modello Λ -CDM è il modello della cosmologia attualmente utilizzato per la descrizione dell'universo e che meglio interpreta i dati osservativi disponibili. Questi dati sono utilizzati per capire quali siano gli elementi che compongono l'universo e in quale misura contribuiscano alla sua evoluzione; essi suggeriscono l'esistenza, oltre alla materia ordinaria e alla radiazione, della costante cosmologica Λ e della materia oscura (o CDM, *cold dark matter*) che forniscono il nome al modello. Stabiliti i parametri tipici delle componenti, il modello prevede l'andamento del fattore di scala, una grandezza in evoluzione temporale determinante nel calcolo delle distanze.

Lo scopo della presente trattazione è quello di esporre le principali caratteristiche del modello Λ -CDM. Verrà pertanto effettuata una introduzione alla relatività generale e alla cosmologia soffermandosi su quali principi si basino, quali siano le grandezze fisiche tipiche di queste teorie e quali equazioni utilizzino. In seguito verranno introdotte la costante cosmologica e la materia oscura: si capirà qual è il loro effetto nell'universo e quali sono le evidenze sperimentali che hanno condotto al loro utilizzo. Infine verranno presentati i più semplici modelli cosmologici con lo scopo di capire come le varie componenti dell'universo contribuiscano all'evoluzione dell'universo e interagiscano tra di loro; la trattazione culminerà nell'esposizione del modello Λ -CDM.

Indice

Introduzione	1
1 Relatività generale e cosmologia	2
1.1 Sulla relatività generale	2
1.2 Sulla cosmologia	6
1.2.1 Tre equazioni per i fluidi cosmici	10
Equazione dei fluidi	11
Equazione di stato	11
Equazione di Friedmann	12
1.2.2 Tre tipologie di fluidi cosmici	13
Polvere o materia	14
Radiazione	14
Energia oscura	14
1.3 Sul redshift cosmologico	15
2 Costante cosmologica e materia oscura	18
2.1 Sulla costante cosmologica	18
2.2 Sull'esistenza della materia oscura	22
2.2.1 Materia oscura nelle galassie	22
2.2.2 Materia oscura negli ammassi di galassie	24
2.2.3 Materia oscura e lensing gravitazionale	24
2.3 Sulla natura della materia oscura	25
3 Modelli cosmologici: l'evoluzione del fattore di scala	27
3.1 Sulla risoluzione dell'equazione di Friedmann	27
3.2 Modelli di universo a singola componente	28
3.2.1 Universo dominato dalla curvatura	28
3.2.2 Universo dominato dalla materia o dalla radiazione	30
Materia	33
Radiazione	34
3.2.3 Universo dominato dalla costante cosmologica	36

Indice

3.3	Modelli di universo a molteplici componenti	38
3.3.1	Universo con materia e curvatura	39
3.3.2	Universo con materia e costante cosmologica	42
3.3.3	Universo con materia, curvatura e costante cosmologica	45
3.3.4	Universo con materia e radiazione	46
3.4	Sul modello Λ -CDM della cosmologia	47
	Conclusioni	50
	Bibliografia	51

Introduzione

La relatività generale è la teoria formulata da Albert Einstein che descrive l'interazione gravitazionale tra masse e la struttura dello spaziotempo usufruendo del formalismo matematico della geometria differenziale. Esso identifica lo spaziotempo con una varietà differenziabile quadridimensionale su cui sono definiti dei campi tensoriali corrispondenti alle grandezze fisiche; le relazioni tra le grandezze fisiche sono espresse come equazioni tensoriali. La teoria si fonda sull'osservazione dell'intrinseca differenza tra la gravità e le altre interazioni fondamentali dell'universo: se le interazioni elettromagnetica, nucleare forte e debole possono essere descritte attraverso dei campi definiti sullo spaziotempo, la gravità è invece una manifestazione della sua curvatura.

Le equazioni principali della relatività generale sono note come equazioni di Einstein; la costruzione di modelli di relatività consiste proprio nella definizione di uno spaziotempo e nella risoluzione su questa varietà metrica delle equazioni di Einstein e di quelle da esse ricavabili. Esempi di ciò si hanno in cosmologia, la disciplina che studia l'universo nel suo insieme, ossia come varietà differenziabile unica. Essa mira alla risoluzione delle equazioni di Einstein e di equazioni da esse ottenute, quale l'equazione di Friedmann, in maniera consistente con la distribuzione che la materia assume su larga scala nell'universo.

Nel corso del capitolo 1 verrà fornita un'introduzione alla relatività generale e alla cosmologia, e verrà reso evidente come uno dei principali obiettivi per la costruzione di un modello cosmologico sia la risoluzione dell'equazione di Friedmann. Essa assumerà la forma di un'equazione differenziale in cui l'incognita è una funzione del tempo nota come *fattore di scala*, grandezza fondamentale per il calcolo delle distanze nell'universo. L'evoluzione temporale del fattore di scala descrive inoltre l'evoluzione dello spaziotempo stesso, e permette di effettuare previsioni sull'origine e il destino ultimo dell'universo. Il capitolo 3 è incentrato proprio sul calcolo del fattore di scala in "diversi universi", ossia nella costruzione di semplici modelli cosmologici in cui l'universo presenta una o più componenti differenti che influenzano in maniera diversa l'evoluzione del fattore di scala. Quali siano queste componenti è invece oggetto di analisi del capitolo 2, in cui sono riportate evidenze osservative a supporto dell'esistenza delle componenti dell'universo più "esotiche" e un tempo sconosciute: la costante cosmologica e la materia oscura.

Capitolo 1

Le basi teoriche della relatività generale e della cosmologia

In questo primo capitolo viene fornita una introduzione alla relatività generale e alla cosmologia. Saranno inizialmente esposte le motivazioni che hanno portato Einstein alla formulazione della relatività generale, i principi fondamentali su cui si basa e le equazioni di campo di Einstein, che sono le principali equazioni della teoria. Verrà in seguito introdotta la cosmologia partendo dai principi copernicano e cosmologico, che consentono di ottenere la metrica FLRW. Si ricaveranno l'equazione dei fluidi, le equazioni di Friedmann-Lemaître e saranno introdotti i concetti di fluido cosmico, redshift cosmologico, espansione dell'universo e verrà esposta la legge di Hubble. Il capitolo terminerà presentando la necessità dell'introduzione della costante cosmologica Λ ai fini della realizzazione dei modelli per descrivere l'espansione dell'Universo.

Prerequisito per una comprensione accurata delle argomentazioni riportate in questo capitolo è la conoscenza dei concetti basilari della geometria differenziale, quali varietà differenziabile, coordinate, campo tensoriale, metrica e curvatura intrinseca di una varietà. Semplici calcoli di che utilizzano questi concetti verranno eseguiti sino all'ottenimento delle equazioni in sezione 1.2.1. Una volta ricavate, non sarà più strettamente necessaria la conoscenza della geometria differenziale.

1.1 Sulla relatività generale

Albert Einstein pubblicò nel 1905 (vedi [5]) la teoria della relatività ristretta, in cui riformulava ed estendeva la meccanica, rendendola compatibile con l'elettromagnetismo descritto dalle equazioni di Maxwell e rivoluzionando i concetti di spazio e tempo.

Spazio e tempo persero infatti con Einstein le caratteristiche che avevano rivestito nella meccanica classica fino a quel momento, ossia domini di un insieme di coordinate (spaziali e temporali) oggettive, assolute e separate le une dalle altre. Essi vennero

sostituiti dallo *spaziotempo*, dominio di un insieme di coordinate relativo al sistema di riferimento adottato e non indipendenti nelle trasformazioni matematiche tra due sistemi di riferimento (le trasformazioni di Lorentz). La relatività ristretta descrive le leggi della meccanica sotto forma di equazioni tensoriali assumendo l'esistenza di peculiari sistemi di riferimento, detti *inerziali*. Data l'espressione tensoriale di una grandezza fisica in un sistema di riferimento inerziale, si può ottenere la sua espressione in un altro sistema inerziale effettuando una opportuna trasformazione del *gruppo di Poincaré*. Ad ogni sistema di riferimento inerziale si può inoltre associare un *osservatore*, ossia un apparato di misura capace di verificare le predizioni teoriche.

Già al tempo della sua prima formulazione la relatività ristretta presentava tuttavia dei problemi rilevanti. In primis non riusciva a giustificare una teoria le cui predizioni erano sempre state verificate: la teoria della gravitazione newtoniana. Essa si basava sull'ipotesi che la gravità agisse tramite una forza ad effetto istantaneo, descritta dalla *legge di gravitazione universale*; ciò era in contrasto con la relatività ristretta, secondo la quale un segnale non può propagarsi a velocità maggiori della velocità della luce nel vuoto c e non può pertanto avere effetto istantaneo. La relatività ristretta assumeva inoltre l'esistenza dei sistemi di riferimento inerziali senza definire cosa fossero con esattezza, e assumeva anche che avessero validità globale (ossia che ogni coordinata potesse essere definita su tutto \mathbb{R}), nonostante le misure di un osservatore siano sempre locali (effettuate con coordinate definite in un opportuno intorno del punto dello spaziotempo in cui l'osservatore effettua la misura); questo non permetteva una semplice associazione degli osservatori ai sistemi di riferimento inerziali.

Einstein risolse questi problemi pubblicando la teoria della relatività generale nel 1915 [5]. Essa si basa sul seguente principio:

Principio di relatività generale

Le leggi della fisica sono le stesse in ogni sistema di riferimento (per ogni osservatore).

Il principio permette di scrivere le leggi fisiche tramite equazioni tensoriali di geometria differenziale, che assumono la stessa forma in ogni sistema di riferimento. È chiarita ora la relazione tra osservatori e sistemi di riferimento: un osservatore è un apparato di misura che si muove lungo una curva nello spaziotempo (la sua *linea di universo*); all'osservatore può essere associato un set di coordinate locali che costituisce il sistema di riferimento.

I sistemi di riferimento inerziali possono essere definiti effettuando alcune considerazioni sulla peculiarità dell'interazione gravitazionale rispetto alle altre interazioni fondamentali della natura. Se infatti è teoricamente possibile ideare dei corpi, necessariamente puntiformi, neutri rispetto all'interazione elettromagnetica, debole e forte, non è possibile creare un corpo che non interagisca gravitazionalmente. La gravità è universale, interessa ogni corpo fisico. Questo è sancito dal principio di equivalenza debole.

Principio di equivalenza debole

La massa gravitazionale di qualsiasi oggetto fisico eguaglia la sua massa inerziale (se non nulla).

Questo principio, sempre corroborato dagli esperimenti, implica che un corpo su cui agisce solamente la gravità, detto *in caduta libera*, non può misurare alcuna accelerazione gravitazionale e il suo moto risulta essere indipendente dalle sue proprietà specifiche: la traiettoria nello spaziotempo dipenderà unicamente dalla gravità presente e dalle condizioni iniziali del corpo. La traiettoria di un corpo in caduta libera è detta essere una *traiettoria inerziale*, e il sistema di riferimento definito a partire da un suo punto tramite la geometria differenziale è detto *sistema di riferimento localmente inerziale*. I sistemi di riferimento inerziali sono locali in quanto validi solo in un opportuno intorno del punto a partire dal quale sono costruiti: su regioni sufficientemente ampie dello spaziotempo anche degli osservatori in caduta libera possono misurare delle forze di marea dovute alle disomogeneità del campo gravitazionale.

Il principio di equivalenza debole afferma una proprietà relativa al moto dei corpi, ossia alla loro dinamica; in relatività generale si assume tuttavia la validità di un principio analogo ma più generale, valido anche per le leggi fisiche non di tipo dinamico:

Principio di equivalenza di Einstein

In regioni sufficientemente piccole dello spaziotempo le leggi fisiche sono descritte dalla relatività ristretta. È impossibile rilevare l'esistenza di un campo gravitazionale tramite misure locali.

Da un punto di vista matematico, la relatività generale descrive lo spaziotempo assumendo che esso sia una varietà differenziabile metrica, e definendo su di esso le grandezze fisiche come campi tensoriali. Lo spaziotempo avrà quindi una sua particolare conformazione geometrica, presenterà una curvatura intrinseca e delle traiettorie geodetiche. Il principio di equivalenza di Einstein suggerisce di attribuire l'azione della gravità non ad un campo tensoriale definito sullo spaziotempo, ma alla curvatura dello spaziotempo stesso. Questo proprio a causa della peculiare natura della gravità rispetto alle altre interazioni fondamentali: il suo effetto non può essere eliminato e determina il moto di particelle in caduta libera indipendentemente dalle loro proprietà specifiche. Deve pertanto essere provocata dallo spaziotempo stesso e non da un campo tensoriale. Il principio sancisce inoltre la validità della relatività ristretta nei sistemi di riferimento inerziali.

È invece il *principio di covarianza generale* a definire la maniera in cui è possibile ottenere delle leggi fisiche valide in qualsiasi sistema di riferimento conoscendo le leggi fisiche valide nei sistemi di riferimento inerziali:

Principio di covarianza generale

Le leggi della fisica in un sistema di riferimento arbitrario sono ottenute sostituendo, nelle rispettive leggi della relatività ristretta, le grandezze tensoriali del gruppo di Poincaré con le corrispondenti grandezze tensoriali della varietà differenziabile spaziotempo.

Ciò significa essenzialmente che occorre sostituire il quadrivettore posizione con un set di coordinate locali, il tensore metrico di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ con un opportuno tensore metrico $g_{\mu\nu}$ di ugual segnatura, le derivate parziali ∂_μ con le derivate covarianti ∇_μ .

Una volta compresa la peculiarità dell'interazione gravitazionale, è lecito chiedersi quale sia il suo effetto su una particella di prova, quali siano le sorgenti della gravità e come esse modifichino la geometria dello spaziotempo. È possibile dimostrare (vedi [3]) che:

- Le particelle di prova in caduta libera si muovono lungo le geodetiche dello spaziotempo. Questo è valido anche per particelle non massive come i fotoni.
- Nel *limite Newtoniano*, ossia limite non relativistico, limite di campo debole (in cui la metrica è una perturbazione della metrica dello spaziotempo di Minkowski) e statico (indipendente dal tempo), le equazioni della relatività generale forniscono le leggi della gravitazione newtoniana.
- Le sorgenti della gravità risultano essere la massa-energia e l'impulso, rappresentati tramite il *tensore energia-impulso*. Il modo in cui la metrica risponde ad una certa distribuzione di energia e impulso è descritta dalle *equazioni di campo di Einstein*.

Ponendo la costante $c = 1$ le equazioni di campo di Einstein sono [2]:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Esse possono essere riscritte nella forma:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{T} g_{\mu\nu} \right). \quad (1.2)$$

Le grandezze tensoriali che appaiono nelle equazioni sono le seguenti:

- *Tensore metrico* $g_{\mu\nu}$. Tensore di tipo $(0, 2)$ simmetrico che consente di determinare la distanza tra due punti della varietà su cui è definito (e che viene pertanto detta varietà *metrica*). Si può definire anche il *tensore metrico inverso* come tensore simmetrico $(2, 0)$ $g^{\mu\nu}$ con la proprietà che $g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu$.
- *Tensore di Ricci-Curbastro* $\mathcal{R}_{\mu\nu}$. Tensore simmetrico $(0, 2)$ che esprime la curvatura dello spaziotempo. La sua traccia è chiamata *scalare di Ricci* o *di curvatura*:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^\mu_\mu = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

- *Tensore di Einstein* $\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}$. Tensore simmetrico (0, 2) che soddisfa l'identità di Bianchi: $\nabla_{\mu}\mathcal{G}^{\mu}_{\nu} = 0$.
- *Tensore energia-impulso* $\mathcal{T}_{\mu\nu}$. Tensore simmetrico (0, 2) che descrive la distribuzione della massa-energia e dell'impulso (dovuto a forze non gravitazionali) sulla varietà. La sua traccia è indicata con $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mu\nu}$.
- *Costante di gravitazione universale* G , il cui valore nel sistema internazionale risulta essere $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ [11]. Da un punto di vista dimensionale, dato che si è posto $c = 1$ la dimensione del tempo risulta essere uguale a quella della lunghezza: $[T] = [L]$. La costante risulta pertanto avere le dimensioni $[L] [M]^{-1}$.

Si può notare che la validità dell'identità di Bianchi assicura la validità di un'altra importante relazione, che esprime la legge di conservazione dell'energia:

$$\nabla_{\mu}\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Per curiosità, si riporta la forma che le equazioni di Einstein (1.1) assumono se non si pone $c = 1$:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathcal{T}_{\mu\nu}.$$

Termina qua l'introduzione ai concetti fondamentali della relatività generale. Una delle sue molteplici applicazioni è la cosmologia, in cui la varietà differenziabile spaziotempo considerata è l'intero universo, osservato su larga scala.

1.2 Sulla cosmologia

Lo scopo principale della cosmologia è la descrizione dell'universo come oggetto unico e in evoluzione. In questa sezione verranno esposti i principi e le equazioni necessarie per l'ideazione dei più semplici modelli cosmologici. I modelli cosmologici contemporanei sono basati sui seguenti principi:

Principio copernicano

La Terra non si trova in una posizione privilegiata per l'osservazione dell'Universo.

Principio cosmologico

L'Universo è spazialmente omogeneo e isotropo.

Su scala locale questi principi non sono validi, tuttavia su ampia scala (lunghezze maggiori di 100 Mpc) le osservazioni (conteggio e distribuzione delle galassie, osservazione dei raggi X e γ diffusi, Radiazione Cosmica di Fondo, vedi [12]) corroborano questi principi, almeno come base su cui iniziare a costruire dei modelli di descrizione del cosmo.

L'universo viene pertanto descritto in cosmologia come una varietà metrica differenziabile a quattro dimensioni (una temporale e tre spaziali), in cui le galassie possono essere approssimate con oggetti puntiformi, e con proprietà di omogeneità e isotropia nelle tre dimensioni spaziali. Queste proprietà permettono di determinare la forma che la metrica deve assumere. Assumere l'isotropia e l'omogeneità dello spazio significa assumere l'esistenza di tre campi vettoriali di Killing di tipo spazio $\vec{K}_{\theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ generatori delle rotazioni attorno ai tre assi cartesiani ($i = 1, 2, 3$) e tre generatori delle traslazioni $\vec{K}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Questo permette di foliare lo spaziotempo in sottovarietà tridimensionali, che sono dette essere *massimamente simmetriche*, in quanto non esistono altre isometrie oltre quelle ottenute con l'isotropia e l'omogeneità. Lo spaziotempo può allora essere descritto come $\mathbb{R} \times \Sigma$, dove Σ è una varietà tridimensionale massimamente simmetrica e la coordinata unidimensionale, indicata con t , è di tipo tempo.

Sullo spaziotempo può allora essere definita una metrica espressa come:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\sigma^2. \quad (1.5)$$

La funzione $a(t)$ è detta *fattore di scala*, ed è responsabile dell'evoluzione temporale dell'universo e della sua *espansione*. L'espansione dell'universo è un fenomeno fisico che consiste nell'aumento delle distanze tra le galassie; è uno dei fenomeni principali che un modello cosmologico deve descrivere.

Il termine $d\sigma^2$ è la metrica di Σ . Dato che uno spazio massimamente simmetrico ha simmetria sferica, tale metrica può essere espressa come somma di un termine radiale e uno angolare del tipo:

$$d\sigma^2 = f(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 = f(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.6)$$

In virtù dell'omogeneità, è possibile assumere come origine delle coordinate spaziali un punto arbitrario dello spazio.

È possibile dimostrare (vedi [2]) che, affinché la metrica sia massimamente simmetrica, il termine $f(r)$ deve avere una forma precisa, che consente di determinare l'espressione definitiva della metrica dello spaziotempo, nota come *Metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (o semplicemente *FLRW*):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.7)$$

Le coordinate (r, θ, ϕ) sono le classiche coordinate polari sferiche, mentre t è detta *tempo cosmologico*: essa risulta essere il tempo proprio di un osservatore comovente con lo spazio (ossia a (r, θ, ϕ) costanti). Dato che in questa trattazione si considera $c = 1$, il tempo cosmologico ha le dimensioni di una lunghezza $[L]$. Le coordinate considerate sono talvolta note con il nome di *coordinate comoventi*. Il fattore κ è noto come *costante*

di curvatura. La convenzione adottata in questa trattazione assume che il fattore di scala sia adimensionale, la coordinata radiale abbia le dimensioni di una lunghezza $[L]$, θ e ϕ siano coordinate angolari (quindi adimensionali) e la costante di curvatura abbia dimensioni $[L]^{-2}$. Questa non è l'unica convenzione possibile: spesso vengono considerati un fattore di curvatura e una coordinata radiale adimensionali mentre il fattore di scala assume le dimensioni di una lunghezza.

Si riportano ora esplicitamente i coefficienti della metrica e della metrica inversa (adimensionali), ricordando che $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$ e che la corrispondenza tra coordinate e indici è: $0 \leftrightarrow t$, $1 \leftrightarrow \rho$, $2 \leftrightarrow \theta$, $3 \leftrightarrow \phi$.

$$g_{00} = -1 \quad g_{11} = \frac{a^2(t)}{1 - \kappa r^2} \quad g_{22} = a^2(t) r^2 \quad g_{33} = a^2(t) r^2 \sin^2 \theta \quad (1.8)$$

$$g^{00} = -1 \quad g^{11} = \frac{1 - \kappa r^2}{a^2(t)} \quad g^{22} = \frac{1}{a^2(t) r^2} \quad g^{33} = \frac{1}{a^2(t) r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.9)$$

È possibile trovare i simboli di Christoffel (vedi [3]) per questa metrica tramite la relazione:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (1.10)$$

Il calcolo esplicito, effettuato considerando che solo i termini diagonali della metrica sono diversi da zero, consente di determinare gli unici simboli non nulli:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa r^2} & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{11}^1 &= a \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2} & \Gamma_{22}^1 &= -r (1 - \kappa r^2) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta (1 - \kappa r^2) & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta & & \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & & \end{aligned} \quad (1.11)$$

È inoltre possibile calcolare i termini del *Tensore di Ricci-Curbastro* della metrica, le cui componenti non nulle sono le seguenti (vedi [2]):

$$\mathcal{R}_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.12)$$

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{R}_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \quad (1.14)$$

$$\mathcal{R}_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \quad (1.15)$$

Lo scalare di curvatura risulta essere:

$$\mathcal{R} = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \quad (1.16)$$

Una particolarità della metrica FLRW è la *non-staticità*. La distanza tra due punti $R(r_1, r_2, t)$, così come l'area di una superficie a r costante $A(r, t)$ dipendono dal fattore di scala, e variano pertanto nel tempo (vedi [3]):

$$R(r_1, r_2, t) = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{11}} dr = a(t) \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} dr, \quad (1.17)$$

$$A(r, t) = \int_0^{4\pi} d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2(t) r^2 \sin\theta d\phi d\theta = 4\pi a^2(t) r^2. \quad (1.18)$$

La varietà spaziotempo risulta inoltre avere caratteristiche differenti anche in funzione del valore della costante di curvatura. Si noti innanzitutto che, nonostante si sia assunto $\kappa \in \mathbb{R}$, in realtà è sempre possibile ridefinire la coordinata r in modo tale che risulti $\kappa = 0 \vee \kappa = 1 \vee \kappa = -1$, a meno di un fattore dimensionale. In maniera più propria, se si indica il fattore dimensionale della costante di curvatura come R_0 , essa può essere espressa come

$$\kappa = \frac{\bar{\kappa}}{R_0^2} \quad (1.19)$$

dove $\bar{\kappa}$ è adimensionale; è proprio $\bar{\kappa}$ che può essere normalizzato a 0, +1 o -1; a seconda di quale di questi tre valori $\bar{\kappa}$ assuma, si distinguono tre tipologie di universo:

- Se $\bar{\kappa} = 0$ si parla di *universo piatto* o a curvatura nulla. In tal caso le sottovarietà tridimensionali in cui lo spaziotempo può essere foliato sono spazi \mathbb{R}^3 (ossia lo spazio è euclideo). La metrica di questa varietà è allora, ponendo $\chi = \frac{r}{R_0}$:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = R_0^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2). \quad (1.20)$$

- Se $\bar{\kappa} = 1$ si parla di *universo chiuso* o a curvatura positiva. Affinché la segnatura dello spaziotempo risulti essere $(-, +, +, +)$ e non $(-, -, +, +)$, deve valere la condizione $|\frac{r}{R_0}| < 1$, ed è pertanto possibile porre $r = R_0 \sin(\chi)$ ed esprimere la metrica delle sottovarietà spaziali come:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - R_0^{-2} r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = R_0^2 [d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2]. \quad (1.21)$$

Si noti che le sottovarietà spaziali hanno geometria sferica. In un tale spazio, percorrendo idealmente una geodetica (a t costante) si tornerebbe al punto iniziale.

- Se $\bar{\kappa} = -1$ si parla di *universo aperto* o a curvatura negativa. Le sottovarietà spaziali risultano questa volta avere geometria iperbolica. Si può infatti porre $r = R_0 \sinh(\chi)$ e ottenere la metrica:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 + R_0^{-2} r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = R_0^2 [d\chi^2 + \sinh^2(\chi) d\Omega^2]. \quad (1.22)$$

La metrica su Σ può allora essere scritta come:

$$d\sigma^2 = R_0^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2], \quad (1.23)$$

con

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & \text{se } \bar{\kappa} = 1 \\ \chi & \text{se } \bar{\kappa} = 0 \\ \sinh(\chi) & \text{se } \bar{\kappa} = -1 \end{cases}. \quad (1.24)$$

Si può infine notare che con questo set di coordinate la distanza tra due punti diventa semplicemente:

$$R(\chi_1, \chi_2, t) = a(t) R_0 (\chi_2 - \chi_1). \quad (1.25)$$

1.2.1 Tre equazioni per i fluidi cosmici

Nell'universo descritto dai più semplici modelli cosmologici le galassie sono considerate puntiformi, dotate di massa e interagenti solo gravitazionalmente. Questo comportamento è simile a quello delle particelle di un gas; per questo motivo si considera lo spaziotempo come riempito da un “*fluido cosmico*” ideale di materia-energia, uniforme ed omogeneo. Il tensore energia-impulso (vedi [2]) di un tale fluido è:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (1.26)$$

dove ρ è la *densità di energia* e p è la *densità di momento* (o *pressione*, dato che $c = 1$) misurati nel sistema di riferimento comovente al fluido cosmico. Entrambe risultano essere, per l'omogeneità e isotropia dello spazio, funzioni unicamente del tempo. Risulta pertanto evidente che il tensore ha dimensioni $[M][L]^{-3}$, dato che la quadri-velocità del fluido u^μ è adimensionale. Si noti che, utilizzando la convenzione del fattore di scala adimensionale, le equazioni di Einstein (1.1) hanno membri di dimensione $[L]^{-2}$. Dato che il fluido, così come la metrica, è isotropo, risulta essere in quiete nel sistema di riferimento delle coordinate comoventi. La quadri-velocità non potrà che essere $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Alzando un indice, il tensore energia-impulso assume allora la forma diagonale:

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (1.27)$$

Le componenti del tensore non nulle possono essere esplicitate:

$$\mathcal{T}_{00} = \rho, \quad \mathcal{T}_{11} = p \frac{a^2}{1 - \kappa r^2}, \quad \mathcal{T}_{22} = p a^2 r^2, \quad \mathcal{T}_{33} = p a^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (1.28)$$

La sua traccia è:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^\mu{}_\mu = -\rho + 3p. \quad (1.29)$$

Introdotta il tensore energia-impulso, si possono adesso ricavare tre importanti equazioni della cosmologia, la cui soluzione permette di ricavare l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo. Esse sono l'equazione dei fluidi, l'equazione di Friedmann e l'equazione di stato dei fluidi cosmici.

Equazione dei fluidi

Si consideri la legge di conservazione dell'energia, espressa tramite la relazione (1.4). La componente temporale di questa equazione fornisce una relazione non banale:

$$0 = \nabla_{\mu} \mathcal{T}^{\mu}_0 = \partial_{\mathcal{T}0}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} \mathcal{T}^{\lambda}_0 - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} \mathcal{T}^{\mu}_{\lambda} = -\partial_t \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p). \quad (1.30)$$

Definendo il *Parametro di Hubble*, con dimensioni $[L]^{-1}$, come

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.31)$$

l'equazione (1.30) può essere riscritta in una forma detta *Equazione dei fluidi*

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.32)$$

Essa costituisce la prima delle equazioni che verranno in seguito utilizzate per calcolare l'evoluzione nel tempo del fattore di scala, della densità di energia e di momento.

È possibile definire la *Costante di Hubble* H_0 come il valore del parametro di Hubble al tempo presente. Recenti misure (vedi [9]) stimano un valore

$$H_0 = (72 \pm 3) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.33)$$

Il suo reciproco H_0^{-1} è noto come *tempo di Hubble* e permette di ottenere una stima dell'età dell'universo. Invece la *lunghezza di Hubble* è definita come $c H_0^{-1}$ e permette di stimare le dimensioni dell'universo (ma si ricordi che $c = 1$).

Il pedice 0 è utilizzato per indicare che una grandezza cosmologica è calcolata al tempo presente t_0 . Dato che, così come per il fattore di curvatura, è possibile ridefinire le coordinate comoventi in maniera tale da modificare il valore del fattore di scala, nella presente trattazione si utilizzerà la convenzione per cui il valore del fattore di scala al tempo presente vale $a(t_0) = a_0 = 1$.

Il parametro di Hubble fornisce, ad un dato istante, il tasso di variazione del fattore di scala nel tempo. Esso mostra se la distanza tra gli oggetti dell'universo è in aumento o in diminuzione a causa dell'evoluzione dello spaziotempo. Per questo motivo se $H_0 > 0$ si dice che l'universo è in *espansione*, mentre se $H_0 < 0$ è in *contrazione*. Come si vede dalla (1.33), il nostro universo è in espansione.

Equazione di stato

La seconda equazione da introdurre è una *equazione di stato*, che fornisce una relazione funzionale tra densità di energia e pressione; si assume che questa relazione sia lineare:

$$p = w\rho. \quad (1.34)$$

La costante w (adimensionale) è indipendente dal tempo. Il parametro

$$w = \frac{p}{\rho} \quad (1.35)$$

potrebbe essere definito anche se non fosse costante; in tal caso non si potrebbe però parlare di “stato” in senso proprio.

Equazione di Friedmann

Si considerino infine le equazioni di Einstein (1.2), e si sostituiscano in esse i valori delle componenti della metrica FLRW (1.8), del tensore energia-impulso (1.28) e del tensore di Ricci (1.12). Le uniche equazioni non nulle in entrambi i membri sono quelle per cui $\mu = \nu$; quando $\mu = 0$ si ottiene l'equazione

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p), \quad (1.36)$$

mentre quando $\mu = 1 \vee \mu = 2 \vee \mu = 3$ si ottiene (in virtù dell'isotropia) un'unica equazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.37)$$

Si può ora usare la (1.36) per eliminare il termine in \ddot{a} e ottenere così la coppia di equazioni note come *Equazioni di Friedmann-Lemaître*:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.39)$$

Generalmente, con il nome di *Equazione di Friedmann* ci si riferisce alla (1.38), mentre la (1.39) è talvolta nota come *Equazione dell'accelerazione*. Esse non sono indipendenti: derivando la (1.38) e usando la (1.32), si ottiene la (1.39).

La derivata seconda del fattore di scala introduce la possibilità che l'espansione dell'universo sia decelerata (se $\ddot{a} < 0$) o accelerata (se $\ddot{a} > 0$), come risulta essere al momento [10]. In generale le misure non forniscono il valore di \ddot{a} , ma del *parametro di decelerazione*

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (1.40)$$

il quale misura la variazione di velocità dell'espansione dell'Universo.

L'equazione di Friedmann può essere riformulata introducendo un nuovo parametro adimensionale, detto *parametro di densità*:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (1.41)$$

dove la *densità critica* è definita come:

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (1.42)$$

L'equazione (1.38) diventa allora:

$$\Omega - 1 = \frac{\kappa}{H^2 a^2}. \quad (1.43)$$

Questa forma esplicita la relazione tra il valore della costante di curvatura e la densità di energia dell'universo. Si possono infatti presentare tre casi:

$$\rho < \rho_{crit} \iff \Omega < 1 \iff \kappa < 0 \iff \text{universo aperto} \quad (1.44)$$

$$\rho = \rho_{crit} \iff \Omega = 1 \iff \kappa = 0 \iff \text{universo piatto} \quad (1.45)$$

$$\rho > \rho_{crit} \iff \Omega > 1 \iff \kappa > 0 \iff \text{universo chiuso} \quad (1.46)$$

Il parametro di densità determina la curvatura dell'universo. La sua stima è pertanto di cruciale importanza in cosmologia. Misurando infatti il parametro di densità al momento attuale Ω_0 , la costante di Hubble e ricordando che $a_0 = 1$ la costante di curvatura può essere ricavata come:

$$\kappa = H_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (1.47)$$

I dati osservativi [9] sembrano indicare un valore di $\Omega_0 = 1$.

Le equazioni (1.32), (1.38) e (1.34) costituiscono insieme un sistema di tre equazioni differenziali nelle tre incognite $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$, che può pertanto essere risolto per descrivere l'evoluzione temporale dell'universo.

1.2.2 Tre tipologie di fluidi cosmici

I fluidi cosmici rispettano l'equazione di stato e quella dei fluidi. In particolare, usando la (1.34) per eliminare la pressione nella (1.32), si ottiene:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.48)$$

Questa equazione può essere integrata direttamente:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{1}{\rho(t')} \frac{d\rho}{dt'} dt' &= -3(1+w) \int_t^{t_0} \frac{1}{a(t')} \frac{da}{dt'} dt' \implies \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{1}{\rho'} d\rho' = -3(1+w) \int_a^1 \frac{1}{a'} da' \implies \\ \implies \ln \frac{\rho_0}{\rho} &= \ln \left(\frac{1}{a} \right)^{-3(1+w)}, \end{aligned}$$

da cui

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (1.49)$$

Il pedice 0 indica che la grandezza è calcolata all'epoca corrente: t_0 rappresenta il tempo presente, ossia l'età dell'universo; ρ_0 è l'attuale densità di energia dell'universo; si è posto $a_0 = 1$. A seconda del valore di w si possono distinguere diverse tipologie di fluidi cosmici.

Polvere o materia

La *polvere* o *materia* è un insieme di particelle non relativistiche, a riposo nel sistema di riferimento delle coordinate comoventi e a pressione nulla. Esempi di polveri sono le stelle e le galassie, per le quali la pressione è trascurabile rispetto all'energia di riposo. In accordo con la (1.35) risulta $w = 0$, e $p(t) = 0$. La densità di energia risulta invece dipendere dal fattore di scala come $\rho \propto a^{-3}$.

Questo andamento è interpretato come una decrescita della concentrazione di particelle a causa dell'espansione dell'universo. La densità di energia è infatti proporzionale al numero di particelle contenute in un volume (una costante) e inversamente proporzionale al volume stesso. Il volume è proporzionale al cubo della distanza tra due punti dello spazio, la quale è direttamente proporzionale al fattore di scala.

Radiazione

La radiazione è un fluido cosmico composto da fotoni o particelle massive relativistiche. È possibile dimostrare che per i fotoni la traccia del tensore energia impulso deve essere nulla [3]. In accordo alla (1.29) allora si deve avere

$$p = \frac{1}{3}\rho, \quad (1.50)$$

ossia $w = \frac{1}{3}$. La densità di energia decresce più rapidamente che nel caso della polvere: per la radiazione $\rho \propto a^{-4}$. Questo in quanto un fotone che viaggia nell'universo perde energia a causa dell'espansione dell'universo (redshift cosmologico). Un fluido cosmico composto sia da materia che da radiazione avrà in generale $0 < w < \frac{1}{3}$; il valore specifico dipende da quanto una componente è dominante rispetto all'altra.

Energia oscura

Sia per la materia che per la radiazione, sostituendo p e w nell'equazione dell'accelerazione (1.39) si ottiene, dato che $\rho > 0$, $\frac{\ddot{a}}{a} < 0$. La materia e la radiazione tendono a decelerare l'espansione dell'universo. Se tuttavia un fluido cosmico ha $w < -\frac{1}{3}$ esso la accelererà. Si può definire *Energia Oscura* una componente dell'universo con $w < -\frac{1}{3}$ (vedi [12]).

Una forma di energia oscura rilevante è quella per cui $w = -1$. In questo caso il fluido cosmico, a cui ci si riferisce come componente dell'universo di *vuoto* o di *costante cosmologica*, ha pressione e densità di energia costanti: $\rho = -p = \rho_\Lambda$. Questi concetti verranno ripresi nel corso dei capitoli 2 e 3.

1.3 Sul redshift cosmologico

Storicamente le prime prove dell'espansione dell'universo risalgono agli anni '10 -'20, quando si iniziarono a osservare galassie diverse dalla Via Lattea. In particolare venivano osservati gli spettri delle loro stelle, che presentavano le tradizionali linee di assorbimento generate nelle atmosfere stellari. Tuttavia, le lunghezze d'onda a cui si trovavano le linee erano in generale diverse da quelle misurate in un laboratorio. La differenza relativa di lunghezza d'onda di una linea definisce il *redshift cosmologico* z :

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s}, \quad (1.51)$$

dove λ_o è la lunghezza d'onda della linea osservata e λ_s è la lunghezza d'onda che la linea doveva avere quando generata dalla sorgente, ossia la lunghezza d'onda misurata in laboratorio. Strettamente parlando, se $z < 0$ si parla di *blueshift*, in quanto la linea si è "spostata" verso la banda più "blu" dello spettro anziché verso la più "rossa" come accade se $z > 0$. La maggior parte delle galassie ha comunque $z > 0$.

Il fenomeno del redshift è spiegato considerando che la lunghezza d'onda di un fotone che si muove nell'universo non rimane costante in virtù della non-staticità della metrica. Si può ricavare infatti una relazione che lega z e $a(t)$. Supponiamo che una sorgente statica (a coordinate spaziali (r, θ, ϕ) costanti) posta a $r = 0$ emetta due segnali ad istanti t_1 e $t_1 + \delta t_1$. Supponiamo inoltre che tali segnali si muovano lungo una geodetica radiale di tipo luce (ossia si ponga nella (1.7) $ds = d\theta = d\phi = 0$), e che l'universo abbia curvatura nulla $\kappa = 0$. I segnali verranno ricevuti da un osservatore statico posto in $r = \bar{r}$ ad istanti di tempo t_2 e $t_2 + \delta t_2$. Sotto queste condizioni l'espressione della metrica (1.7) fornisce l'equazione:

$$dt^2 = a^2(t) dr^2,$$

da cui si ottiene, integrando:

$$\int_0^{\bar{r}} dr = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \frac{1}{a(t)} dt.$$

L'ultima eguaglianza sussiste in virtù del fatto che i due segnali stanno percorrendo la stessa traiettoria, ma ad istanti differenti; essa consente di scrivere:

$$0 = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{1}{a(t)} dt.$$

Si assuma adesso che δt_1 e δt_2 siano sufficientemente "piccoli" da poter assumere $a(t)$ costante in ognuno dei due intervalli di tempo, e pari al suo valore iniziale (rispettivamente $a(t_1)$ e $a(t_2)$). L'integrazione può allora essere effettuata direttamente e fornisce:

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_2}{a(t_2)}.$$

Dato che δt è l'intervallo di tempo tra due emissioni o assorbimenti consecutivi degli impulsi del segnale, ne costituisce il periodo; la lunghezza d'onda può essere espressa come $\lambda = c \delta t$. In particolare δt_1 è il periodo del segnale emesso dalla sorgente, di lunghezza d'onda λ_s , mentre δt_2 è il periodo del segnale osservato, di lunghezza d'onda λ_o . La precedente uguaglianza diventa:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_s} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}.$$

La definizione (1.51) può essere riscritta allora (ponendo $t_1 = t_s$ e $t_2 = t_o$) come segue:

$$z = \frac{a(t_o)}{a(t_s)} - 1. \quad (1.52)$$

Si noti che il valore specifico di $a(t)$ non ha un reale significato fisico, in quanto questo fattore può sempre essere riscalo. Tuttavia il rapporto del fattore di scala in due istanti diversi, e quindi il redshift, non varia e può essere utilizzato efficacemente per misurare la distanza delle galassie. Questo è il motivo per cui è lecito porre $a_0 = 1$.

Il redshift cosmologico può apparire simile ad un fenomeno fisico ben più noto e familiare: l'effetto Doppler, capace anch'esso di modificare la lunghezza d'onda dei segnali. Si tratta però di due fenomeni fisici differenti: mentre l'effetto Doppler è dovuto ad una velocità di movimento relativa tra sorgente e osservatore, il redshift è dovuto all'espansione dello spazio. Ciononostante, se si osservano galassie a distanze "piccole" rispetto alla lunghezza di Hubble e alle tipiche distanze cosmologiche ($\gtrsim 100$ Mpc, vedi [12]), l'espansione dell'universo risulta apparire come un allontanamento reciproco delle galassie, e il redshift come un effetto Doppler. Per questo motivo è possibile, in prima approssimazione, considerare il redshift come una velocità di recessione v tra le galassie, data precisamente da $v = cz$. Se si assume poi in questa approssimazione che le galassie siano comoventi e che la distanza tra di esse sia la distanza istantanea sulla metrica definita in (1.25), la velocità può essere ottenuta come derivata della distanza. Si ponga nella (1.25) $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = \chi$, la si derivi e si riutilizzi la stessa (1.25) per sostituire χ . Si ottiene:

$$v = \dot{R} = \dot{a} R_0 \chi = \frac{\dot{a}}{a} R = HR. \quad (1.53)$$

Questa relazione, valutata al tempo corrente, è nota come *Legge di Hubble*

$$v = H_0 R. \quad (1.54)$$

Essa afferma che la velocità di allontanamento delle galassie è proporzionale alla loro distanza, per galassie non troppo lontane (fino a qualche centinaio di Megaparsec). Pur essendo valida solo in prima approssimazione, è stata la prima evidenza sperimentale dell'espansione dell'Universo (1929). La figura 1.1, pubblicata originariamente nell'articolo [7], mostra una verifica sperimentale della legge di Hubble.

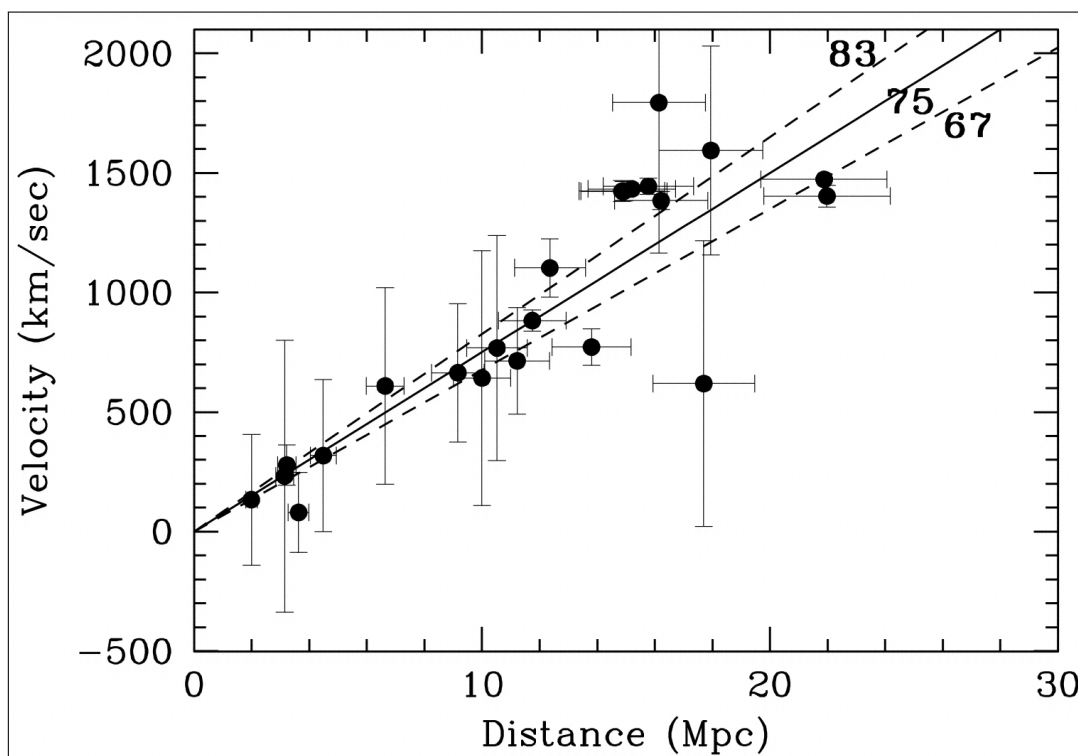


Figura 1.1: Il grafico mostra la velocità di allontanamento $v = cz$ di diverse galassie in funzione della loro distanza. Si nota la dipendenza lineare prevista dalla legge di Hubble; la pendenza della retta che interpola i dati fornisce la costante di Hubble. Il valore della costante ricavato da questa misura è $H_0 = 75 \pm 10 \text{ km s Mpc}^{-1}$.

Quando il redshift non è piccolo, invece, non si possono effettuare le approssimazioni utilizzate: esso non è più assimilabile ad una velocità di recessione e occorre definire accuratamente il concetto distanza. La distanza fisica istantanea non è infatti osservabile, dato che tutte le osservazioni riguardano eventi accaduti nel passato di un opportuno *cono luce* di un osservatore, e non eventi appartenenti al volume spaziale attuale. Si devono misurare altre grandezze (un esempio è la *distanza di luminosità*) indicative della lontananza delle galassie e considerare che l'universo è in espansione.

Nel 1998 la misura di diversi redshift di Supernovae di tipo Ia ha portato ad una misura di H_0 , a e \ddot{a} al tempo corrente tali da far risultare il parametro di decelerazione (1.40) misurato al tempo corrente $q_0 < 0$ [10]. Questo significa che l'espansione dell'universo è, al momento attuale, accelerata. Ciò non può essere spiegato, come già accennato a pagina 14, solo prevedendo l'esistenza di materia e radiazione nell'universo, ed ha comportato la necessità di (re)introdurre in cosmologia la costante cosmologica per la realizzazione dei modelli di evoluzione dell'universo.

Capitolo 2

Le componenti esotiche dell'universo: la costante cosmologica e la materia oscura

Nel corso del XX secolo lo sviluppo della cosmologia portò a diverse scoperte sull'universo. Si capì, ad esempio, che la radiazione osservata e la materia ordinaria che componeva le tradizionali stelle, galassie e gas interstellari non erano le uniche componenti dell'universo: esso contiene anche altri fluidi cosmici, dalle peculiari (e tutt'oggi non comprese) proprietà.

Queste componenti “esotiche” saranno presentate nel corso del capitolo. In primis verrà introdotta una forma di energia oscura, la costante cosmologica: si analizzeranno i motivi che hanno portato alla sua introduzione, poi alla sua eliminazione dai modelli, e infine al suo recupero durante il secolo precedente. In seguito si tratterà la materia oscura non barionica: verranno esposte le principali prove della sua esistenza e alcune considerazioni su quale potrebbe essere la sua natura fisica.

2.1 Sulla costante cosmologica

La costante cosmologica venne introdotta per la prima volta da Albert Einstein dopo la pubblicazione della teoria della relatività generale. In quel periodo storico non era stata ancora accertata l'esistenza di galassie diverse dalla nostra, né erano noti il redshift cosmologico e l'espansione dell'universo; gli spettri delle stelle all'interno della Galassia non mostravano né un allontanamento né un avvicinamento medio dalla Terra. In accordo con questi dati Einstein assunse che l'universo era statico e cercò di sviluppare un modello cosmologico compatibile con queste ipotesi [12]. Si considerino le equazioni di Friedmann-Lemaître (1.38) e (1.39); imponendo che il fattore di scala a sia costante (e pertanto $H = 0$ e $\ddot{a} = 0$) risulta:

$$\rho = -3p = \frac{3\kappa}{8\pi G a^2}. \quad (2.1)$$

2.1. Sulla costante cosmologica

Questo richiede tuttavia che o la densità di energia o la pressione siano negative, risultato non fisico per un universo composto da materia e radiazione.

Nel 1917 Einstein decise allora di modificare le equazioni di campo (1.1) alla base della relatività generale nella seguente versione:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

dove Λ è una costante nota come *costante cosmologica*, avente le dimensioni $[L]^{-2}$. Matematicamente la modifica delle equazioni di Einstein è ottenuta modificando una delle ipotesi su cui si basa il procedimento per ricavare le (1.1): *il tensore di Einstein $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ è composto solo da termini proporzionali a derivate di secondo ordine del tensore metrico $g_{\mu\nu}$* (come il tensore di Ricci-Curbastro e lo scalare di Ricci). Questa ipotesi è modificata in: *il tensore di Einstein $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ è composto solo da termini proporzionali a derivate di ordine ≤ 2 del tensore metrico $g_{\mu\nu}$* [13]. Le derivate prime del tensore metrico non forniscono alcun termine alle equazioni, mentre il termine di ordine 0, ossia il tensore metrico stesso, fornisce il termine con la costante cosmologica. Il valore della costante cosmologica deve tuttavia essere molto piccolo, così da poter essere trascurato nel limite newtoniano e ottenere ugualmente le leggi della gravitazione newtoniana. L'equazione di Friedmann (1.38) risulta anch'essa essere modificata nella seguente versione (vedi [10]):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.3)$$

mentre l'equazione dell'accelerazione (1.39) diventa:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.4)$$

Ora può essere imposta la condizione di staticità dell'Universo $\dot{a} = 0$ e ottenere una relazione che lega in maniera fisicamente accettabile densità di energia, pressione, curvatura e costante cosmologica:

$$\rho = -3p + \frac{\Lambda}{4\pi G} = \frac{3\kappa}{8\pi G a^2} - \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.5)$$

In teoria la costante cosmologica potrebbe essere sia positiva che negativa, ma praticamente vengono considerati solo i casi con $\Lambda > 0$; Einstein aveva infatti introdotto la costante come positiva proprio affinché sia p che ρ potessero essere positive. Come si vede dalla (2.4) una costante cosmologica positiva fornisce un contributo positivo all'accelerazione del fattore di scala, agendo come una forza repulsiva e contrastando l'attrazione gravitazionale della materia. Se il suo valore è sufficientemente elevato può anche superare il contributo attrattivo e fornire un universo in accelerazione. Questo è il motivo per cui, quando è stato misurato un parametro di decelerazione $q_0 < 0$, la costante cosmologica è stata reintrodotta nei modelli cosmologici in studio.

2.1. Sulla costante cosmologica

Nella realizzazione del suo modello di universo statico Einstein suppose che la densità di energia della materia fosse dominante rispetto a quella della radiazione, e si potesse porre pertanto $p = 0$. Questa ipotesi è corretta all'interno della nostra Galassia (che, si ricordi, al tempo si riteneva costituire tutto l'universo dato che non ne erano state ancora scoperte altre). Allora, in accordo con la (2.5) si ottengono per ρ e a i valori:

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} \quad (2.6)$$

$$a = \sqrt{\frac{\kappa}{\Lambda}}, \quad (2.7)$$

che implicano $\kappa > 0$ e $a \propto \Lambda^{-\frac{1}{2}}$. L'universo statico di Einstein aveva curvatura positiva, pressione trascurabile e densità di energia costante fissata dalle costanti fondamentali G e Λ . Esso presentava tuttavia un problema: l'equilibrio tra l'attrazione gravitazionale della materia e la repulsione della costante cosmologica è instabile. Se infatti l'universo pensato da Einstein venisse perturbato espandendosi, ρ_Λ rimarrebbe invariato, ma la densità di materia diminuirebbe. La repulsione non sarebbe più bilanciata, e l'universo continuerebbe a espandersi. Analogamente, una perturbazione che provocasse una piccola contrazione dell'universo porterebbe ad una sua contrazione ineluttabile. Quando, nel 1929, Hubble pubblicò il paper con la relazione redshift-distanza, venne provato che l'universo non era statico ma in espansione [8]. Einstein rinunciò subito al suo universo statico ed eliminò la costante cosmologica dai suoi modelli.

Ciononostante la comunità scientifica non abbandonò mai del tutto la costante cosmologica: già nel paper del 1929 Hubble sovrastimò il valore di H_0 ; questo portava ad una stima dell'età dell'universo inferiore all'età di alcune rocce presenti sulla Terra ottenuta tramite le tecniche di datazione radiometrica. L'introduzione della costante cosmologica nei modelli consentiva di aumentare le stime sull'età dell'universo: se infatti Λ è abbastanza grande da rendere $\ddot{a} > 0$, allora \dot{a} in passato era minore e l'universo doveva avere un'età superiore a H_0^{-1} . Oggi la costante cosmologica è utilizzata, spesso nei modelli di universo piatto, per spiegare l'accelerazione dell'Universo misurata.

In virtù del suo effetto nell'equazione di Friedmann (2.3), la costante cosmologica ammette una trattazione analoga a quella dei fluidi cosmici. L'effetto della costante cosmologica è infatti quello di fornire un termine in più, ossia $+\frac{\Lambda}{3}$, nell'equazione di Friedmann. Lo stesso risultato si otterrebbe se, al posto di avere una costante cosmologica, ci fosse nell'universo ci fosse un altro fluido cosmico con densità di energia ρ_Λ e parametro di densità Ω_Λ dati da

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.8)$$

$$\Omega_c = -\frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (2.9)$$

Si noti che, dato che ρ_Λ è costante si ha $\rho_\Lambda \propto a^0$, per cui è possibile attribuire al fluido cosmico fittizio relativo alla costante cosmologica parametro $w_\Lambda = -1$ in accordo con la (1.49). La pressione del fluido cosmologico è, secondo la (1.34) $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, ed è pertanto *negativa*. Ciò significa che se l'universo si espande, viene compiuto lavoro sul fluido della costante cosmologica; questo consente alla densità di energia di rimanere costante nonostante l'universo si espanda.

È lecito porsi a questo punto una domanda, che tuttavia ad oggi non ha ancora trovato una risposta certa: qual è la causa fisica della costante cosmologica? Per rispondere occorre determinare una componente dell'universo, rappresentata tramite un fluido cosmico, la cui densità di energia ρ_Λ rimane costante se l'universo si espande o si contrae.

Uno dei principali candidati che può ricoprire questo ruolo è, secondo le attuali teorie, l'*energia di vuoto*. Una peculiarità della relatività generale è che la sorgente del campo gravitazionale è rappresentata dal tensore energia-impulso. In fisica classica è possibile misurare la differenza di energia tra due stati, ma lo specifico valore energetico di uno stato è arbitrario e soggetto a scelte di normalizzazione arbitraria (si considerino ad esempio i potenziali classici: la scelta del loro zero è arbitraria). In relatività generale, invece, diversi valori dell'energia determinano diversi valori per il tensore energia-impulso; il valore dell'energia è rilevante. Questa considerazione apre il problema dell'energia di vuoto: determinare una densità di energia caratteristica dello spazio vuoto.

Una proprietà dell'energia di vuoto che si può imporre è che sia invariante per trasformazioni di Lorentz quando il relativo tensore energia-impulso è espresso in coordinate localmente inerziali. In un sistema di riferimento arbitrario si può dimostrare [2] che questa condizione si traduce nella proporzionalità del tensore energia-impulso del vuoto alla metrica:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(\text{vuoto})} = -\rho_{\text{vuoto}} g_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Il termine ρ_{vuoto} deve inoltre essere costante in quanto un gradiente non sarebbe invariante per trasformazioni di Lorentz. Con queste considerazioni è possibile riformulare le equazioni di campo di Einstein (1.1) separando il tensore energia-impulso in una componente relativa ai fluidi cosmici contenuti nell'universo $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(\text{FC})}$ e una relativa al vuoto:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(\text{FC})} - 8\pi G \rho_{\text{vuoto}} g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Confrontando questa equazione con la (2.2) si nota che l'introduzione della costante cosmologica è equivalente all'introduzione dell'energia di vuoto e $\rho_{\text{vuoto}} = \rho_\Lambda$.

Il problema dell'energia di vuoto sorge anche considerando la meccanica quantistica: il principio di indeterminazione di Heisenberg permette, nel vuoto, la creazione e l'annichilazione di coppie virtuali particella-antiparticella. Ad esse è associata un'energia ρ_{vuoto} che non dipende dall'espansione dell'universo e può essere stimata tramite i metodi di teoria dei campi quantizzati. Il problema è che le stime attuali [2] forniscono il valore $\rho_{\text{vuoto}} \sim 10^{112} \text{ erg cm}^{-3}$, mentre le osservazioni cosmologiche forniscono $\rho_\Lambda \lesssim 10^{-8} \text{ erg cm}^{-3}$. Il problema rimane tutt'oggi aperto.

La costante cosmologica costituisce il più semplice modello di energia oscura; la sua esistenza non è tuttavia ancora stata accertata del tutto e sono stati formulati modelli alternativi per spiegare l'accelerazione dell'universo. Anche questo problema rimane al momento aperto.

2.2 Sull'esistenza della materia oscura

Il termine *materia oscura* venne usato per la prima volta da Henri Poincaré nel 1906 mentre commentava un calcolo eseguito da Lord Kelvin nel 1884 [1]. Egli riteneva infatti che vi fossero nella Via Lattea stelle troppo deboli per poter essere osservate dalla Terra e altri corpi che non emettevano luce. Essi dovevano tuttavia gravitare insieme alle stelle visibili, ed influenzare pertanto la loro velocità. Dalle misure della velocità delle stelle, e trattando i corpi della Via Lattea come un gas di oggetti puntiformi, Lord Kelvin ottenne una stima della massa di materia non visibile che essa doveva contenere. Pertanto, la prima e più generica definizione di materia oscura è quella di una componente massiva dell'universo la cui luce emessa o riflessa è troppo fioca per poter essere rilevata.

Nel corso del tempo questa definizione è stata modificata, divenendo più stringente. Una definizione più moderna per la materia oscura è quella di una componente dell'universo che non assorbe, emette o riflette luce. Si però noti che i neutrini potrebbero rientrare in questa definizione. Oggi, quando si parla di materia oscura, ci si riferisce in generale alla materia oscura non barionica e non relativistica (*CDM, Cold Dark Matter*), una componente dell'Universo la cui natura non è stata ancora accertata, ma che si ritiene non sia formata dalle particelle del modello standard. Nonostante la sfuggevole natura della CDM, essa può essere rilevata osservando gli effetti sulla materia ordinaria causati dalla loro interazione gravitazionale.

2.2.1 Materia oscura nelle galassie

Uno dei modi più semplici di rilevare la materia oscura, riprendendo l'idea di Lord Kelvin, consiste nell'osservare il moto di diversi tipi di corpi celesti e valutare se l'attrazione gravitazionale dei corpi visibili è sufficiente per determinare il moto osservato. Se non lo è, allora deve esistere della massa non osservabile, la materia oscura, che fornisce il restante contributo all'interazione gravitazionale e permette di ottenere il moto osservato.

Una delle maggiori evidenze sperimentali dell'esistenza della materia oscura è data dalle curve di rotazione delle galassie a spirale. La curva di rotazione è un grafico che mostra l'andamento della velocità di stelle e gas nella galassia in funzione della loro distanza dal centro galattico. Nelle galassie a spirale le stelle orbitano infatti lungo traiettorie approssimativamente circolari intorno al centro della galassia, formando un disco di materia. La velocità di rotazione di una stella v può essere stimata anche tramite la gravitazione newtoniana, e risulta essere funzione della sua distanza dal centro della

galassia R . Eguagliando infatti accelerazione centripeta e gravitazionale si ha:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2}, \quad (2.12)$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \quad (2.13)$$

$M(R)$ è la massa contenuta all'interno del disco di raggio R ; per valori elevati di R essa può essere approssimata come costante, e pertanto $v \propto R^{-\frac{1}{2}}$.

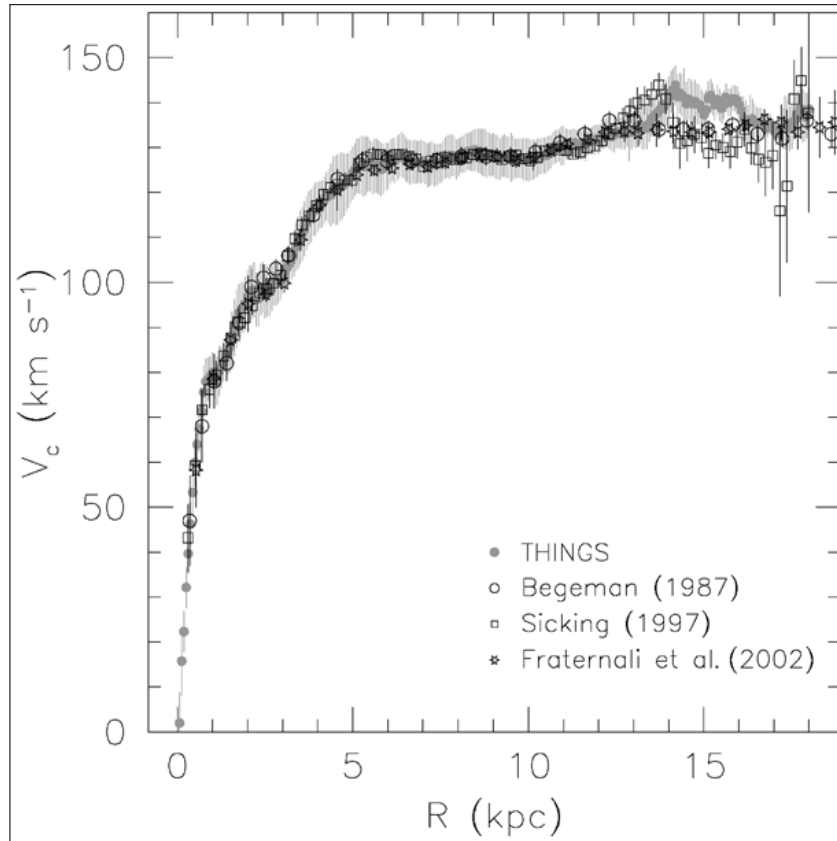


Figura 2.1: Curve di rotazione della galassia NGC 2403 misurate da diversi gruppi di ricerca. THINGS è un acronimo per *The HI Nearby Galaxy Survey*. Le misure di tutti i gruppi mostrano chiaramente che le curve di rotazione non presentano la decrescita newtoniana prevista, provando così l'esistenza di materia oscura nelle galassie.

I dati sperimentali contraddicono questo andamento: come si vede in figura 2.1, pubblicata originariamente nell'articolo [4], le velocità di rotazione non mostrano segno di una decrescita, ma rimangono pressoché costanti.

Affinché la materia con velocità così alte non sfugga all'attrazione della galassia è necessaria la presenza di altra materia, evidentemente non visibile, che fornisca l'attrazione gravitazionale necessaria a mantenere la materia ordinaria in orbita. In generale, dato che la velocità per grandi valori di R è circa tre volte maggiore della velocità prevista considerando solo la materia ordinaria, si stima che vi sia dieci volte più massa di quella osservata [10]. Si assume spesso che la materia oscura sia distribuita uniformemente intorno al centro della galassia, evada a costituire un *alone* intorno ad essa, in cui la galassia e gli ammassi globulari che la circondano sono immerse.

2.2.2 Materia oscura negli ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono le strutture gravitazionalmente legate più grandi dell'universo, e in quanto tali costituiscono un buon campione per analizzare diverse tipologie di materia. Gli ammassi contengono sia stelle, raggruppate nelle singole galassie che li compongono, sia gas che emette raggi X. La massa del gas è circa cinque-dieci volte quella delle stelle e costituisce pertanto la maggior componente di materia ordinaria degli ammassi di galassie; proprio grazie al gas si può stimare la massa di materia oscura presente all'interno dell'ammasso [10]. Avendo alte temperature, infatti, il gas gode di alti valori di pressione e tende ad espandersi. L'attrazione gravitazionale tra le particelle del gas stesso non è abbastanza intensa da contrastare la pressione e assicurare che il sistema risulti essere legato: l'attrazione gravitazionale che confina il gas nell'ammasso deve allora essere data dalla materia oscura. Se ciò accade, la massa di materia oscura deve essere circa dieci volte maggiore della massa del gas stesso.

Evidenza empirica dell'esistenza della materia oscura si ottiene anche osservando il moto relativo delle galassie. Le galassie presentano infatti un moto peculiare causato dall'attrazione gravitazionale dei corpi vicini, e dipendente pertanto dalla massa totale delle galassie, sia visibile sia oscura. Questa massa risulta essere maggiore della massa della materia barionica, ottenuta stimando la massa dei nuclei generatisi durante le prime fasi dell'universo (*Nucleosintesi*); ciò implica che la materia oscura deve essere non-barionica [10].

Infine, tutti gli attuali modelli sulla formazione delle strutture dell'universo quali ammassi di galassie, galassie e anisotropie della radiazione cosmica di fondo richiedono la presenza di materia oscura non barionica, che permetta la formazione delle strutture senza essere influenzata da effetti di pressione.

2.2.3 Materia oscura e lensing gravitazionale

Sono stati discussi finora i tradizionali metodi di rilevazione della materia oscura, basati tutti sull'osservazione della sua interazione gravitazionale con la materia ordinaria. Tuttavia la materia oscura, in virtù della sua massa, ha degli effetti gravitazionali anche sui fotoni, deflettendoli e agendo da lente gravitazionale.

Supponiamo che vi sia, nell'alone che circonda la Galassia, un corpo composto di materia oscura massivo e compatto (detto pertanto *MAssive Compact Halo Object*, MACHO). Supponiamo che un fotone passi “abbastanza vicino” a tale oggetto, ad un certo valore b di un opportuno *parametro d'impatto*; la curvatura locale dello spaziotempo farà deviare il fotone dalla sua traiettoria originaria di un angolo (vedi [12])

$$\alpha = \frac{4GM}{b}, \quad (2.14)$$

dove M è la massa del MACHO. Qualora esso si trovi esattamente sulla direzione tra l'osservatore e la sorgente, l'immagine della sorgente verrà distorta in un anello di raggio angolare θ_E , *Raggio di Einstein*, dato da:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{d} \frac{1-x}{x}}, \quad (2.15)$$

dove d rappresenta la distanza tra osservatore e sorgente e $x d$ la distanza tra osservatore e MACHO (con $0 < x < 1$). Se il MACHO non si trova perfettamente lungo la direzione di osservazione della sorgente, allora l'immagine sarà distorta non in un anello, ma in due o più archi luminosi.

In generale i valori tipici dei raggi di Einstein sono troppo piccoli per permettere di risolvere gli anelli; inoltre la probabilità che un MACHO passi esattamente lungo la direzione di una stella visibile è molto piccola. Tuttavia, quando la distanza angolare tra MACHO e stella è circa uguale o minore del raggio di Einstein, è possibile rilevare un aumento del flusso luminoso di una stella dovuto al lensing gravitazionale. Essendo θ_E generalmente piccolo, è improbabile che ciò si verifichi; ciononostante, diversi lensing causati da MACHOs sono stati rilevati. Per far ciò sono stati osservati i flussi luminosi di molte stelle, ad esempio quelle della nube di Magellano, al fine di rilevare loro variazioni. Dato che i MACHOs e le stelle della galassia sono in continuo moto relativo, un tipico evento di lensing consiste nell'aumento temporaneo del flusso luminoso della stella quando la distanza angolare tra MACHO e stella diminuisce, seguito da una diminuzione quando la distanza aumenta. Il numero di eventi rilevati suggerisce che nell'alone della Galassia non vi è una significativa popolazione di nane brune o pianeti isolati, e che non più dell'otto per cento della massa oscura della galassia possa essere concentrata in MACHOs [12]. Il resto deve essere distribuita più o meno omogeneamente nell'alone.

2.3 Sulla natura della materia oscura

L'evidenza sperimentale porta quindi alla conclusione che la materia ordinaria (barionica) luminosa costituisca per meno dell'uno per cento alla densità di energia dell'Universo attuale; la maggior parte della materia barionica è data da gas freddo e non luminoso. La materia ordinaria contribuisce soltanto al 4% circa della densità di energia dell'Universo.

La costante cosmologica fornisce circa il 74%, e il restante 22% è fornito dalla materia oscura non barionica (come si vedrà in sezione 3.4).

Nonostante la CDM fornisca quasi un quarto della densità di energia dell'universo, non è chiaro cosa la componga. Una prima ipotesi è che sia composta da *neutrini*. I neutrini sono particelle che interagiscono solo tramite interazione debole con la materia; sono presenti nell'universo in numero simile a quello dei fotoni e la loro massa non è ancora stata stimata con precisione. Queste caratteristiche li rendono dei possibili candidati per un tipo di materia oscura (*Hot Dark Matter, HDM*) che si muove con velocità relativistiche; la HDM tuttavia non avrebbe potuto garantire la formazione delle grandi strutture dell'universo, e potrebbe costituire solo una frazione della materia oscura. Se i neutrini avessero massa simile a quella del protone potrebbero costituire della CDM, ma gli esperimenti di fisica delle particelle sembrano escludere questa ipotesi.

Altri possibili candidati per la materia oscura sono diverse tipologie di *particelle previste* da teorie quali la *supersimmetria*. Essa postula l'esistenza di nuove particelle: ad ogni bosone e fermione del modello standard corrispondono rispettivamente un fermione e un bosone di ugual massa. La più leggera particella supersimmetrica (LSP, lightest supersymmetric particle) è stabile e potrebbe essere un buon candidato per la composizione della CDM. A seconda del modello utilizzato essa potrebbe essere un fotino (partner supersimmetrico del fotone), un gravitino (partner supersimmetrico del gravitone) o un neutralino (dato dalla sovrapposizione quantistica dei gaugini elettrodeboli neutri). Spesso ci si riferisce a queste particelle come WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles).

Altri possibili candidati sono degli ipotetici *buchi neri primordiali*, formati prima della nucleosintesi e che potrebbero agire in maniera analoga alla CDM. Vi sono anche altre proposte di particelle che potrebbero costituire la CDM, sia estremamente pesanti che estremamente leggere: cercare di capire quali siano quelle esatte è un problema aperto.

Capitolo 3

L'evoluzione del fattore di scala nei più semplici modelli cosmologici

Dopo aver presentato la cosmologia nel capitolo 1 e aver capito quali siano le componenti dell'universo nel capitolo 2, il presente capitolo si occuperà di analizzare come le varie componenti dell'universo ne influenzino l'evoluzione. In particolare si procederà integrando l'equazione di Friedmann per ricavare l'andamento temporale del fattore di scala, della densità di energia e della pressione. Si noterà che, a seconda di quali componenti costituiscano l'universo del modello in esame, l'andamento di queste funzioni è molto diverso. Infine, una volta capito come le differenti componenti influenzino l'evoluzione dell'universo, si presenterà il modello Λ -CDM o *Benchmark*, che rappresenta il modello standard della cosmologia utilizzato attualmente per descrivere l'universo in cui viviamo.

3.1 Sulla risoluzione dell'equazione di Friedmann

Si consideri l'equazione di Friedmann (1.38) e la sua riscrittura nella forma (1.43), ivi riportate per comodità:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2},$$
$$\Omega - 1 = \frac{\kappa}{H^2 a^2}.$$

La densità di energia ρ è la densità di energia *totale* dell'universo (analoga è l'interpretazione del parametro di densità Ω); se nel modello considerato vi sono N fluidi cosmici, le relative densità di energia ρ_i (con $i = 1, \dots, N$) saranno grandezze additive, ossia $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$. Ogni fluido cosmico avrà un suo parametro dell'equazione di stato w_i , una sua pressione $p_i = w_i \rho_i$ e un suo parametro di densità Ω_i . Inoltre, anche il termine

di curvatura spaziale della (1.38), ossia $-\frac{\kappa}{a^2}$ può essere trattato come un fluido cosmico fittizio, con densità di energia ρ_c e parametro di densità Ω_c dati da:

$$\rho_c = -\frac{3\kappa}{8\pi G a^2}, \quad (3.1)$$

$$\Omega_c = -\frac{\kappa}{H^2 a^2}. \quad (3.2)$$

Si noti che $\rho_c \propto a^{-2}$, per cui è possibile attribuire al fluido cosmico fittizio relativo alla curvatura parametro $w_c = -\frac{1}{3}$ in accordo con la (1.49). Le equazioni (1.38) e (1.43) che rappresentano l'equazione di Friedmann possono essere riscritte rispettivamente come:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i(c)} \rho_i \quad (3.3)$$

$$1 = \sum_{i(c)} \Omega_i = \Omega + \Omega_c, \quad (3.4)$$

dove nella somma degli indici $i(c)$ è stato incluso anche il termine di curvatura. Si noti che, mentre per materia e radiazione la densità di energia deve essere positiva (poiché ha origine di tipo dinamico), questo non è necessariamente vero per la curvatura o altri possibili fluidi cosmici come la costante cosmologica.

Stabilite quali siano le componenti che compongono l'universo nel modello considerato l'equazione di Friedmann può essere risolta per ottenere l'evoluzione temporale del fattore di scala $a(t)$, e da essa l'evoluzione temporale della densità di energia $\rho(t)$ e della pressione $p(t)$. Questi tre andamenti permettono di descrivere l'evoluzione dell'universo, e di ciò si occuperanno le prossime sezioni.

3.2 Modelli di universo a singola componente

I modelli cosmologici più semplici sono quelli che prevedono una sola componente all'interno dell'universo. Le componenti che andremo a considerare sono quattro: curvatura, materia, radiazione, costante cosmologica.

3.2.1 Universo dominato dalla curvatura

Si consideri un universo in cui la densità di energia è completamente nulla. L'unico termine non nullo all'interno dell'equazione di Friedmann è allora quello dovuto alla curvatura dello spazio; l'equazione (1.38) diventa:

$$H^2 = -\frac{\kappa}{a^2} \quad \implies \quad \dot{a}^2 = -\kappa. \quad (3.5)$$

Una soluzione si ha se $\kappa = 0$, e in tal caso a è costante e pari a uno con la convenzione adottata per cui $a_0 = 1$; ρ e p sono costanti e pari a zero. Questo è uno spaziotempo di Minkowski vuoto.

L'equazione ammette soluzione non banale solo se $\kappa < 0$, ossia se, ricordando la (1.19) si pone $\bar{\kappa} = -1$ Effettuando la sostituzione ed estraendo la radice quadrata, l'equazione diventa:

$$\dot{a} = \frac{1}{R_0}. \quad (3.6)$$

Si può ora integrare la variabile temporale (si ricordi che $a_0 = 1$):

$$\int_t^{t_0} \dot{a} dt = \int_{a(t)}^1 da = \frac{1}{R_0} (t_0 - t), \quad (3.7)$$

da cui

$$a(t) = \frac{1}{R_0}t + 1 - \frac{t_0}{R_0}. \quad (3.8)$$

Questa espressione può essere semplificata se si assume che il fattore di scala debba evolvere come una potenza del tempo, ossia $a \propto t^q$. Imponendo questa condizione si trova che $t_0 = R_0$ e pertanto

$$a(t) = \frac{t}{t_0}. \quad (3.9)$$

L'andamento del fattore di scala è mostrato in figura 3.1. Questo spaziotempo è noto come *universo di Milne*, e si espande linearmente. Il parametro di decelerazione, calcolabile tramite la (1.40) è nullo. In esso il parametro di Hubble vale semplicemente $H = t^{-1}$, e pertanto l'età dell'universo è esattamente uguale al tempo di Hubble: $t_0 = H_0^{-1}$. L'universo di Milne può essere utilizzato come approssimazione valida se la densità di energia è molto minore rispetto al suo valore critico, ossia se $\Omega \ll 1$, e se la curvatura è negativa. La densità di energia del fluido cosmico di curvatura si può trovare sostituendo il fattore di scala nella (3.1):

$$\rho_c(t) = \frac{3t_0}{8\pi G t^2}. \quad (3.10)$$

Ipotizziamo di osservare, in un universo di Milne, al tempo corrente t_0 un segnale luminoso proveniente da una galassia con redshift z , emesso ad un tempo t_e . Misurando il redshift e noto il valore della costante di Hubble si può risalire immediatamente al valore di t_e . Infatti, in accordo con la (1.52), si ottiene:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e} = \frac{H_0^{-1}}{t_e}, \quad (3.11)$$

da cui

$$t_e = \frac{H_0^{-1}}{1 + z}. \quad (3.12)$$

La distanza propria della sorgente dall'osservatore ad un dato istante di tempo t è fornita dalla (1.25):

$$D(\chi, t) = a(t) R_0 \chi, \quad (3.13)$$

in cui si è posta per comodità la sorgente nell'origine e l'osservatore a coordinata χ (la stessa introdotta a pagina 9). Il valore di χ può essere calcolato considerando che il segnale si muove lungo una geodetica di tipo luce radiale, la cui equazione può essere ottenuta a partire dall'espressione della metrica ponendo $ds = 0$ e $d\Omega = 0$. Si ottiene allora l'espressione:

$$0 = -dt^2 + R_0^2 a^2(t) d\chi^2, \quad (3.14)$$

che integrata consente di ottenere

$$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{R_0 a(t)} dt = \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{t_0}{t_e}\right) = \ln(1+z). \quad (3.15)$$

Si noti che per $t_e \rightarrow 0$ l'integrale diverge e $\chi \rightarrow \infty$. Questo significa che la *distanza di orizzonte*, un concetto che sarà propriamente introdotto nella sezione 3.2.2, è infinita per l'universo di Milne. Considerando che $R_0 = t_0 = H_0^{-1}$ la distanza della sorgente (3.13) è allora:

$$D(t) = t \ln\left(\frac{t_0}{t_e}\right) = t \ln(1+z). \quad (3.16)$$

Essa è funzione del tempo a causa dell'espansione dell'universo. Questa distanza all'epoca corrente $t = t_0$ vale:

$$D(t_0) = H_0^{-1} \ln(1+z), \quad (3.17)$$

mentre all'istante $t = t_e$ in cui il segnale è stato emesso valeva:

$$D(t_e) = \frac{H_0^{-1}}{1+z} \ln(1+z). \quad (3.18)$$

3.2.2 Universo dominato dalla materia o dalla radiazione

Si consideri adesso un universo a curvatura nulla $\kappa = 0$, e composto solo da una componente. Allora, in accordo con la (1.45), $\Omega = 1$; pertanto l'equazione di Friedmann (1.38) può essere riscritta come:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.19)$$

Inoltre, sostituendo ρ tramite la (1.49) si ottiene l'equazione

$$a^{1+3w} \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0, \quad (3.20)$$

che può essere integrata come segue ($a_0 = 1$):

$$\int_a^1 \tilde{a}^{\frac{1+3w}{2}} d\tilde{a} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 \right)^{\frac{1}{2}} (t_0 - t). \quad (3.21)$$

Supponiamo che risulti $w \neq -1$; in tal caso integrando può essere ricavata l'espressione di $a(t)$:

$$a(t) = \left[\frac{(6\pi G \rho_0)^{\frac{1}{2}}}{1+w} t - \frac{(6\pi G \rho_0)^{\frac{1}{2}}}{1+w} t_0 + 1 \right]. \quad (3.22)$$

Questa espressione può essere semplificata se si assume che il fattore di scala debba evolvere come una potenza del tempo, ossia $a \propto t^q$. Imponendo questa condizione si trova un'espressione che esprime l'età dell'Universo in funzione della densità di energia presente:

$$t_0 = \frac{1+w}{(6\pi G \rho_0)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.23)$$

Il fattore di scala risulta essere:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (3.24)$$

La costante di Hubble diventa:

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+w)} t_0^{-1}. \quad (3.25)$$

Ciò permette di esprimere l'età dell'Universo in funzione del tempo di Hubble H_0^{-1} . Si nota che, in un universo spazialmente piatto, se $w > -\frac{1}{3}$, l'età dell'Universo è minore del tempo di Hubble (e viceversa se $w < -\frac{1}{3}$):

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} H_0^{-1}. \quad (3.26)$$

Si può ora trovare facilmente l'evoluzione della densità di energia: basta sostituire la (3.24) nella (1.49). La sostituzione diretta fornisce:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}. \quad (3.27)$$

Grazie alla (1.34) si può ricavare anche la pressione:

$$p(t) = w \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}. \quad (3.28)$$

Gli universi di questa tipologia presentano tutti una singolarità $a = 0$ al tempo $t = 0$, in cui la densità di energia ρ diverge. Questa singolarità è nota come *Big Bang* e descrive la creazione dell'universo a partire da uno stato singolare (e non un'esplosione improvvisa di materia in uno spaziotempo preesistente). Il fatto che la densità di energia diverga è un risultato non fisico, ed è dovuto al fatto che su scale di tempo molto piccole (circa pari al tempo di Planck $t_{\text{Planck}} = 5.391 \cdot 10^{-44}$ s) gli effetti di meccanica quantistica non sono più trascurabili e la relatività generale non riesce più a descrivere efficacemente la realtà. Per risolvere questo problema servirebbe una teoria di gravità quantistica; è, ad oggi, un problema aperto.

Si può calcolare il parametro di decelerazione secondo la (1.40), che fornisce:

$$q = \frac{1 + 3w}{2}. \quad (3.29)$$

Ipotizziamo di osservare, in un universo piatto a singola componente (con $w \neq -1$), al tempo corrente t_0 un segnale luminoso proveniente da una galassia con redshift z , emesso ad un tempo t_e . Misurando il redshift e noto il valore della costante di Hubble si può risalire immediatamente al valore di t_e . Infatti, in accordo con la (1.52), si ottiene:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (3.30)$$

da cui

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{\frac{3}{2}(1+w)}} = \frac{2}{3H_0(1+w)(1+z)^{\frac{3}{2}(1+w)}}. \quad (3.31)$$

Si ipotizzi ora che la sorgente del segnale sia posta nell'origine, e l'osservatore a coordinata radiale r . In accordo con la (1.17), la distanza propria della sorgente è:

$$D(r, t) = a(t) r. \quad (3.32)$$

In analogia con la (3.15) il segnale ha percorso un tratto di geodetica radiale di tipo luce in cui la differenza di coordinata radiale è data (supponiamo anche $w \neq -\frac{1}{3}$) da:

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = t_0^{\frac{2}{3(1+w)}} \int_{t_e}^{t_0} t^{-\frac{2}{3(1+w)}} dt, \quad (3.33)$$

che può essere integrato come

$$r = \frac{2 H_0^{-1}}{1 + 3w} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} \right] = \frac{2 H_0^{-1}}{1 + 3w} \left[1 - (1+z)^{-\frac{1+3w}{2}} \right]. \quad (3.34)$$

La distanza della sorgente dall'osservatore ad un dato istante t è data allora da:

$$D(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \frac{2 H_0^{-1}}{1 + 3w} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} \right]. \quad (3.35)$$

Calcolata all'istante di emissione essa rappresenta la distanza propria percorsa dal segnale; può essere espressa come:

$$D(t_e) = \frac{1}{1+z} \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} \left[1 - (1+z)^{-\frac{1+3w}{2}} \right]. \quad (3.36)$$

Invece, quando è calcolata all'epoca attuale $t = t_0$ essa risulta essere uguale alla (3.34) dato che $a_0 = 1$.

La sorgente più lontana che può essere osservata al tempo corrente è quella per cui $t_e = 0$. La corrispondente distanza, sempre calcolata al tempo corrente, è nota come *distanza di orizzonte di particella* (in inglese *particle horizon distance*) e definisce un *orizzonte cosmologico* che determina il limite dell'universo osservabile: segnali provenienti da sorgenti più lontane non sono ancora giunti sulla Terra e non possono essere osservati. L'universo osservabile risulta allora essere composto da tutti i punti dello spaziotempo che hanno avuto tempo sufficiente per inviare un segnale all'osservatore, ossia da tutti i punti dello spaziotempo in contatto causale con l'osservatore. La distanza di orizzonte è quindi data da:

$$D_{hor}(t_0) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt. \quad (3.37)$$

L'integrale, se il fattore di scala è dato da (3.24), non è finito se $w \leq -\frac{1}{3}$. In tal caso tutti i punti dello spaziotempo risultano essere in contatto causale con qualsiasi osservatore; un esempio è il caso osservato in sezione 3.2.1. Se invece $w > -\frac{1}{3}$ la distanza di orizzonte è finita, l'universo osservabile è limitato e la distanza di orizzonte (che aumenta linearmente con il tempo) risulta essere data da:

$$D_{hor}(t_0) = \frac{3(1+w)}{1+3w} t_0 = \frac{2}{H_0(1+3w)}. \quad (3.38)$$

Materia

Un primo esempio di universo piatto con le caratteristiche analizzate finora si ha se il fluido cosmico considerato è la materia, con $w = 0$. In un tale universo il fattore di scala (mostrato in figura 3.1) evolve, ponendo $w = 0$ nella (3.24), secondo la relazione

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.39)$$

dove t_0 è dato da

$$t_0 = \frac{1}{(6\pi G\rho_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \quad (3.40)$$

3.2. Modelli di universo a singola componente

La densità di energia evolve sempre in accordo con la (3.27), mentre $p = 0$. Il parametro di decelerazione vale $q = \frac{1}{2}$. Il redshift può essere ricavato dalla (3.30):

$$1 + z = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.41)$$

Il tempo di emissione di un segnale con redshift z è invece dato da:

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3H_0(1+z)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.42)$$

La distanza propria della sorgente che ha emesso un tale segnale è ricavabile dalla (3.35) e vale, rispettivamente a t_0 e t_e :

$$D(t_0) = \frac{2}{H_0} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right] = \frac{2}{H_0} \left[1 - (1+z)^{-\frac{1}{2}} \right], \quad (3.43)$$

$$D(t_e) = \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{2}{H_0} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right] = \frac{2}{H_0} \frac{\left[1 - (1+z)^{-\frac{1}{2}} \right]}{1+z}. \quad (3.44)$$

Infine in un tale universo la distanza di orizzonte è finita e vale:

$$D_{hor}(t_0) = \frac{2}{H_0} = 3t_0. \quad (3.45)$$

Radiazione

Un altro esempio di universo piatto a singola componente è quello dominato dalla radiazione, per cui $w = \frac{1}{3}$. Il fattore di scala (mostrato in figura 3.1) risulta essere:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.46)$$

dove t_0 è dato da

$$t_0 = \frac{4}{3(6\pi G\rho_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}H_0^{-1}. \quad (3.47)$$

La densità di energia evolve seconda la (3.27); la pressione, in accordo con la (3.28), diventa:

$$p(t) = \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}. \quad (3.48)$$

Il parametro di decelerazione vale $q = 1$. Il redshift è dato da:

$$1 + z = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.49)$$

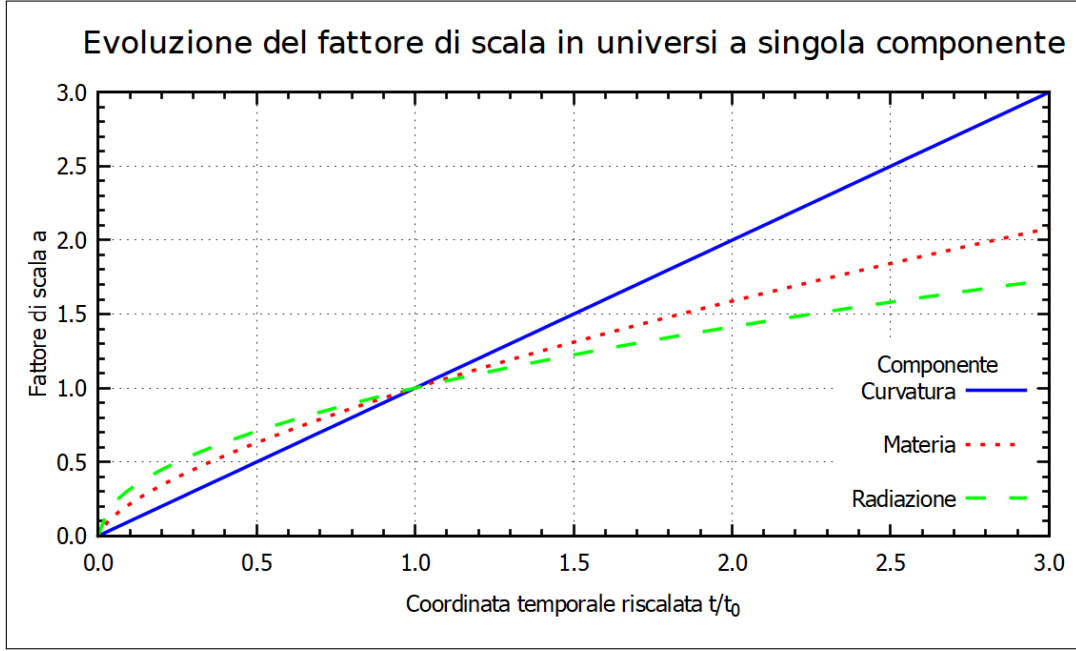


Figura 3.1: Evoluzione del fattore di scala per universi a singola componente dominati da curvatura, materia o radiazione.

Il tempo di emissione di un segnale con redshift z è

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^2} = \frac{1}{2H_0(1+z)^2}. \quad (3.50)$$

La distanza propria della sorgente che ha emesso il segnale vale, rispettivamente a t_0 e t_e :

$$D(t_0) = \frac{1}{H_0} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{H_0} \frac{z}{1+z} \quad (3.51)$$

$$D(t_e) = \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{H_0} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{H_0} \frac{z}{(1+z)^2}. \quad (3.52)$$

In un tale universo la distanza di orizzonte è finita e pari alla distanza di Hubble:

$$D_{hor}(t_0) = \frac{1}{H_0} = 2t_0. \quad (3.53)$$

Quando si ha un gas di fotoni, analogo al fluido cosmico considerato, è possibile considerare la seguente relazione ricavata dal modello della radiazione di corpo nero (vedi [6]), che esprime la densità di energia del gas in funzione della sua temperatura T (si è posto $c = 1$):

$$\rho = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3} T^4, \quad (3.54)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e \hbar la costante di Planck ridotta. Esprimendo ρ tramite la (3.27) si può ricavare la temperatura:

$$T = \left(\frac{15\rho_0 \hbar^3}{\pi^2 k_B^4} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.55)$$

Si noti che per $t \rightarrow 0$ la temperatura diverge: più ci si avvicina al Big Bang più la temperatura dell'universo aumenta. Al contrario, per $t \rightarrow \infty$ si ha che $T \rightarrow 0$. Inoltre, sia nell'universo dominato da materia che in quello dominato da radiazione, in questo limite $a \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$. L'universo tende ad espandersi, rarefarsi e raffreddarsi sempre di più; si dice che esso termina in un *Big Chill*.

3.2.3 Universo dominato dalla costante cosmologica

Si consideri un universo il cui unico contributo alla densità di energia è dato dalla costante cosmologica Λ , con $w = -1$, noto come il nome di universo di *de Sitter*. L'equazione di Friedmann (1.38) diventa allora:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda. \quad (3.56)$$

L'integrazione dell'equazione può essere eseguita direttamente:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{\dot{a}}{a} dt &= \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} (t_0 - t) \Rightarrow \int_a^1 \frac{1}{\tilde{a}} d\tilde{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} (t_0 - t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} (t_0 - t), \end{aligned}$$

da cui

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}}(t-t_0)}. \quad (3.57)$$

Il parametro di Hubble risulta essere costante e di valore

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} = H_0, \quad (3.58)$$

per cui il fattore di scala può essere riscritto come

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (3.59)$$

Si noti che un universo piatto in cui è presente solo la costante cosmologica si espande esponenzialmente; inoltre né per $t = 0$ né per qualsiasi altro valore finito di t si ha uno stato di singolarità: l'universo ha sempre un fattore di scala non nullo. Per questo motivo è possibile “traslare a piacere” l'origine non solo delle coordinate spaziali, ma anche della

3.2. Modelli di universo a singola componente

coordinata temporale e porre $t_0 = 0$. Matematicamente questa scelta è giustificata dal fatto che l'universo di de Sitter è una varietà massimamente simmetrica e le coordinate comoventi usate ne coprono solo una parte [2]. Il dominio della coordinata temporale è pertanto l'intero \mathbb{R} : l'universo di de Sitter è infinitamente vecchio. Il fattore di scala (mostrato in figura 3.2) può essere infine semplificato in:

$$a(t) = e^{H_0 t}. \quad (3.60)$$

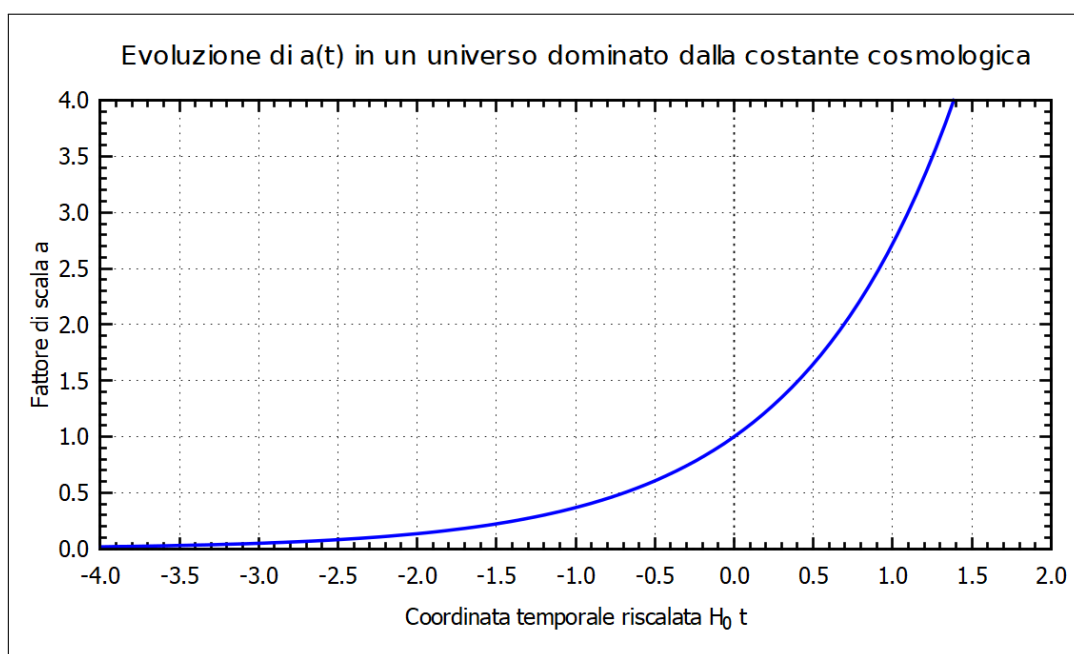


Figura 3.2: Evoluzione del fattore di scala per un universo dominato da costante cosmologica.

La densità di energia rimane costante e con valore dato dalla (2.8); se la costante cosmologica è causata dall'energia di vuoto il valore ρ_Λ rimane costante in virtù della continua creazione e annichilazione di coppie particella-antiparticella. Il parametro di decelerazione risulta essere secondo la (1.40) $q = -1$: l'universo dominato dalla costante cosmologica è accelerato, a differenza degli altri analizzati finora. Il redshift è:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 = e^{-H_0 t_e} - 1. \quad (3.61)$$

Supponiamo che una sorgente (posta nell'origine delle coordinate) emetta un segnale al tempo $t_e < 0$, rilevato sulla Terra al tempo corrente $t_0 = 0$, a coordinata radiale r e con redshift z . La differenza di coordinata radiale percorsa dal segnale lungo una geodetica

di tipo luce è data da:

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_e}^0 e^{-H_0 t} dt = \frac{e^{-H_0 t_e} - 1}{H_0} = \frac{z}{H_0}. \quad (3.62)$$

La distanza a un generico istante di tempo t della sorgente è:

$$D(t) = a(t) r = \frac{e^{H_0(t-t_e)} - e^{H_0 t}}{H_0} = e^{H_0 t} \frac{z}{H_0}. \quad (3.63)$$

Essa può essere calcolata al tempo corrente t_0 e al tempo di emissione del segnale t_e :

$$D(t_0) = \frac{e^{-H_0 t_e} - 1}{H_0} = \frac{1}{H_0} z, \quad (3.64)$$

$$D(t_e) = \frac{1 - e^{H_0 t_e}}{H_0} = \frac{1}{H_0} \frac{z}{1+z}. \quad (3.65)$$

Si può notare che in un universo di de Sitter il redshift è sempre proporzionale alla distanza e non solo nel limite $z \ll 1$, come accade invece negli altri. Si noti inoltre che, nel limite $t_e \rightarrow -\infty$ la (3.65) converge al valore della lunghezza di Hubble, che in questo modello è costante; tale valore può essere assunto come distanza dell'orizzonte cosmologico in un universo di de Sitter.

3.3 Modelli di universo a molteplici componenti

Nei modelli cosmologici analizzati finora l'universo, se in espansione al tempo $t = t_0$, continua a espandersi indefinitamente. Considerando invece dei modelli a più componenti si possono ottenere funzioni più complesse per l'evoluzione del fattore di scala e che possono prevedere anche fasi di contrazione e collasso anziché di espansione. L'equazione di Friedmann (2.3) può essere riscritta esplicitando le diverse componenti della densità di energia:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \frac{8\pi G}{3} \rho_r + \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.66)$$

Inoltre, esplicitando κ tramite la (1.47) e ricordando che le densità di energia soddisfano la (1.49), l'equazione diventa:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0} a^{-3} + \frac{8\pi G}{3} \rho_{r,0} a^{-4} + \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda + (1 - \Omega_0) H_0^2 a^{-2}. \quad (3.67)$$

Ricordando la definizione del parametro di densità (1.41) e dividendo per H_0^2 si ottiene infine:

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0) a^{-2}. \quad (3.68)$$

In teoria questa equazione può essere integrata per ottenere l'andamento del fattore di scala; occorre prima moltiplicare entrambi i membri per a^2 ed estrarre la radice quadrata, ottenendo

$$H_0^{-1} \dot{a} = \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0)} \quad (3.69)$$

ed integrando sulla variabile temporale dall'istante $t = 0$ ad un generico istante di tempo cosmologico t . Si ottiene:

$$\int_{a(0)}^{a(t)} [\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0)]^{-\frac{1}{2}} da = H_0 t. \quad (3.70)$$

Fissati dei valori per i parametri, questo integrale può essere risolto numericamente. Se, in alcune epoche dell'universo (e pertanto per un opportuno intervallo di valori di a) una componente energetica risultava essere dominante rispetto alle altre, allora gli altri termini possono essere trascurati e l'universo può essere considerato come composto da una singola componente. In tal caso è possibile determinare una soluzione analitica, come visto nella sezione 3.2. Tuttavia, in alcune epoche dell'universo non vi era una componente dominante rispetto alle altre, e pertanto risulta necessaria una trattazione a componenti multiple. Nel resto della sezione si analizzeranno alcuni universi a più componenti.

3.3.1 Universo con materia e curvatura

Intorno alla metà del XX secolo, in un periodo in cui la costante cosmologica non era molto utilizzata, i cosmologi si concentrarono sullo studio di universi curvi dominati dalla materia.

Un universo piatto dominato dalla materia è stato analizzato nella sezione 3.2.2. Secondo la relazione (3.39) un tale universo si espande indefinitamente, con la densità di energia che decresce e, con essa, anche la temperatura: l'universo termina in un big chill. L'evoluzione del fattore di scala è mostrata in figura 3.3. Inoltre, derivando due volte la (3.39) si può notare come $\ddot{a} < 0$: l'espansione dell'universo è *decelerata*.

Se tuttavia l'universo non è piatto, il destino dell'universo risulta essere legato al parametro di densità $\Omega_{m,0} = \Omega_0$. L'equazione di Friedmann diventa:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_0 a^{-3} + (1 - \Omega_0) a^{-2}. \quad (3.71)$$

Supponiamo di essere in un universo attualmente in espansione, ossia $H_0 > 0$. È possibile che l'espansione si arresti? Affinché ciò si verifichi occorre imporre che, ad un dato istante di tempo $t = \bar{t}$ si verifichi $H(\bar{t}) = 0$; in quell'istante il fattore di scala avrà raggiunto un valore massimo \bar{a} . L'equazione di Friedmann in questo istante è

$$0 = \Omega_0 \bar{a}^{-3} + (1 - \Omega_0) \bar{a}^{-2}, \quad (3.72)$$

da cui

$$\bar{a} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}. \quad (3.73)$$

In virtù della positività del fattore di scala e del parametro di densità si deve verificare $\Omega_0 > 1$: l'espansione di un universo dominato da materia si può arrestare solo se la curvatura è positiva. Le seguenti soluzioni parametriche risolvono l'equazione (3.71):

$$a(\tau) = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos \tau) \quad (3.74)$$

$$t(\tau) = \frac{\Omega_0}{2H_0 (\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} (\tau - \sin \tau) \quad (3.75)$$

dove $\tau \in [0, 2\pi]$. L'evoluzione del fattore di scala è mostrata in figura 3.3, mentre l'evoluzione del tempo in funzione del parametro τ è mostrata in figura 3.4.

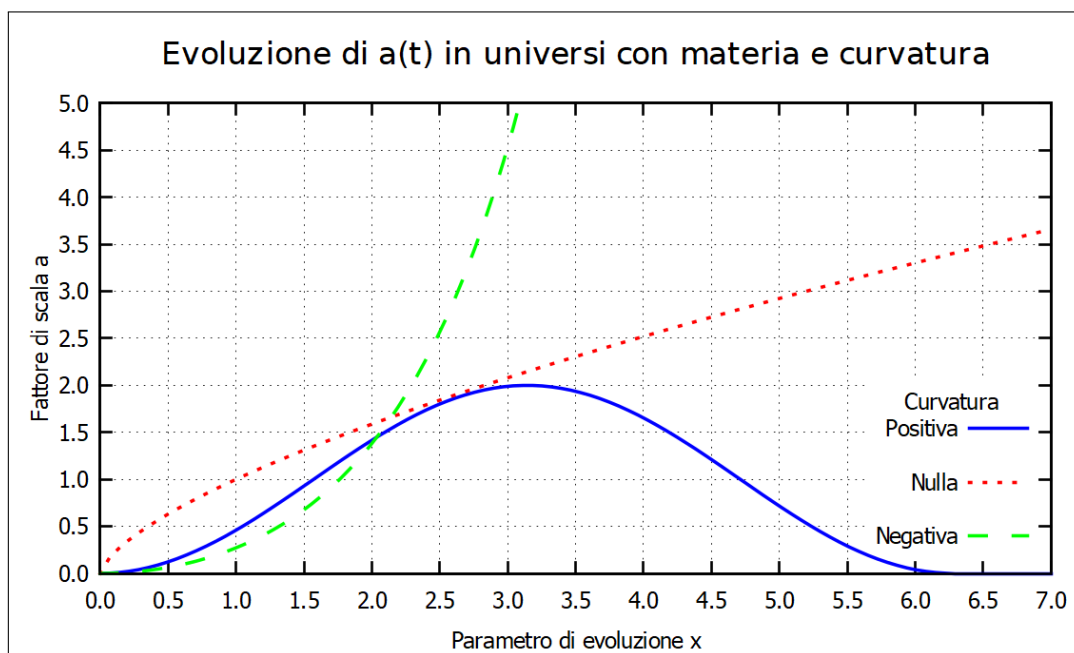


Figura 3.3: Evoluzione del fattore di scala per un universo dominato da materia piatto, a curvatura positiva (con $\Omega_0 = 2$) e a curvatura negativa (con $\Omega_0 = \frac{1}{2}$) in funzione di x . La variabile x è pari a $\frac{t}{t_0}$ nel primo caso (vedi relazione (3.39)); è il parametro τ utilizzato nella (3.74) nel secondo caso; è il parametro η utilizzato nella (3.76) nel terzo caso. I valori di Ω_0 per gli universi a curvatura non nulla sono stati scelti in modo arbitrario per ottenere una chiara resa grafica dell'andamento delle funzioni mostrate.

Le equazioni mostrano che un tale universo inizia da uno stato di singolarità $a(0) = 0$, e presenta un andamento simmetrico intorno al suo valore di massimo \bar{a} , che si verifica

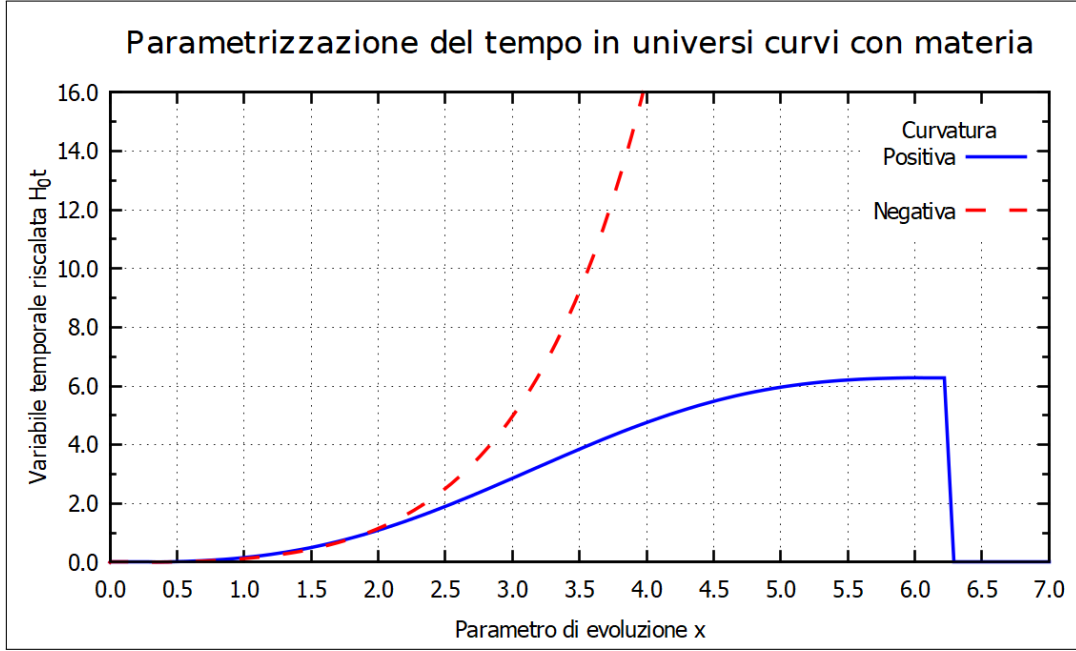


Figura 3.4: Evoluzione del termine $H_0 t$ in funzione del parametro x nel caso di universi con materia e curvatura. Nel caso di curvatura positiva x è il parametro $\tau \in [0; 2\pi]$ utilizzato nella (3.75) e si è posto $\Omega_0 = 2$; nel caso di curvatura negativa x è il parametro η utilizzato nella (3.77) e si è posto $\Omega_0 = \frac{1}{2}$. I valori di Ω_0 sono stati scelti in modo arbitrario per ottenere una chiara resa grafica dell'andamento delle funzioni mostrate.

per $\tau = \pi$ ad un istante di tempo $\bar{t} = \frac{\Omega_0 \pi}{2H_0 (\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}$. In seguito, alla fase di espansione dell'universo ne segue una di contrazione che termina in $a = 0$ per $\tau = 2\pi$ ad un valore finito del tempo $t_{crunch} = \frac{\Omega_0 \pi}{H_0 (\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}$. Questa fine dell'universo è nota come *Big Crunch*.

La fase di collasso è una perfetta inversione temporale della fase di espansione; ciò è conseguenza del principio di omogeneità e isotropia dell'universo. Naturalmente, in un universo reale, i processi che aumentano l'entropia dell'universo non potrebbero essere invertiti.

Consideriamo infine cosa accadrebbe se un universo dominato da materia avesse curvatura negativa $\kappa < 0$. In tal caso entrambi i termini del lato destro dell'equazione (3.71) sarebbero positivi. Il parametro di Hubble non potrebbe mai azzerarsi, e pertanto l'espansione dell'universo non potrebbe mai arrestarsi. Inoltre, per valori "grandi" di a il termine dovuto alla materia diventerebbe trascurabile e l'universo si comporterebbe come l'universo di Milne analizzato in sezione 3.2.1: continuerebbe a espandersi linearmente,

terminando in un big chill. La soluzione analitica della (3.71) è data da:

$$a(\eta) = \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)} (\cosh \eta - 1) \quad (3.76)$$

$$t(\eta) = \frac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \eta - \eta) \quad (3.77)$$

dove $\eta \in [0, \infty[$.

L'evoluzione del fattore di scala è mostrata in figura 3.3, mentre l'evoluzione del tempo in funzione del parametro τ è mostrata in figura 3.4. In questa tipologia di universo, il destino dell'universo è strettamente legato alla sua densità.

3.3.2 Universo con materia e costante cosmologica

Consideriamo adesso un universo piatto contenente materia e una costante cosmologica (che, in generale, può essere positiva o negativa). I parametri di densità saranno legati allora dalla relazione

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1, \quad (3.78)$$

che consente di scrivere la (3.68) come

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{m,0} a^{-3} + (1 - \Omega_{m,0}). \quad (3.79)$$

Se la costante cosmologica è positiva allora $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e $\Omega_{m,0} < 1$; il contributo all'equazione di Friedmann è positivo e la costante cosmologica tende ad accelerare l'espansione dell'universo. Se l'universo è in espansione al momento attuale allora esso continuerà ad espandersi, terminando con un Big Chill.

Se la costante cosmologica è negativa allora $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ e $\Omega_{m,0} > 1$; il contributo all'equazione di Friedmann è negativo e la costante cosmologica fornisce una forza attrattiva. In maniera analoga al caso dell'universo chiuso dominato da materia della sezione 3.3.1 l'espansione dell'universo verrà arrestata ad un massimo valore del fattore di scala

$$\bar{a} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.80)$$

Si può dimostrare (vedi [12]) che soluzione analitica della (3.79) è:

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \arcsin \left[\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (3.81)$$

da cui:

$$a(t) = \bar{a} \left[\sin \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}{2} t \right) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (3.82)$$

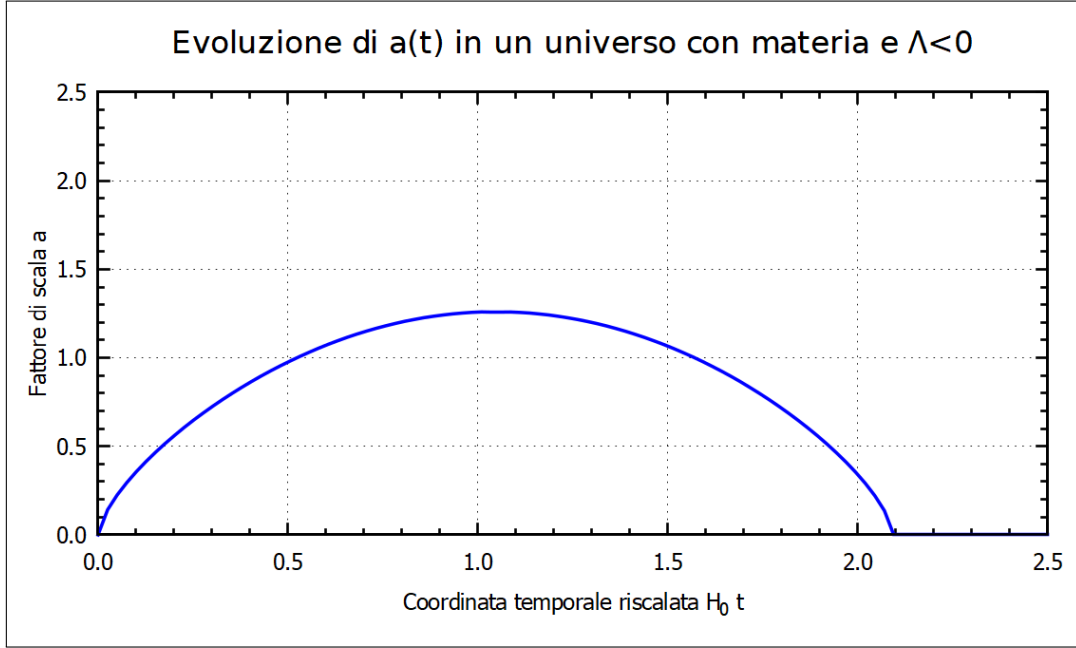


Figura 3.5: Andamento del fattore di scala in funzione di $H_0 t$ in un universo con materia e costante cosmologica negativa, espresso dalla relazione (3.82). Si è posto $\Omega_{m,0} = 2$ per una chiara resa grafica. Si nota il momento in cui il fattore di scala raggiunge il suo massimo (per $H_0 t = \frac{\pi}{3}$) e il momento del big crunch (per $H_0 t = \frac{2\pi}{3}$).

Come si nota in figura 3.5, l'espansione si arresta quando $a = \bar{a}$, ad un istante di tempo $\bar{t} = \frac{\pi}{3H_0\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}$. In seguito inizia una fase di contrazione simmetrica all'espansione fino al big crunch ($a = 0$), all'istante $t_{crunch} = \frac{2\pi}{3H_0\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}$, che rappresenta anche il valore massimo della coordinata temporale. Si noti che maggiore è la densità di materia attuale, minore è la durata di un tale universo. Il confronto diretto tra i due t_{crunch} mostra che, a parità di $\Omega_{m,0}$ la durata di questo universo è minore della durata di un universo chiuso dominato da materia.

Nonostante la teoria non vieti $\Lambda < 0$, le osservazioni suggeriscono che l'universo contenga una costante cosmologica positiva. L'equazione di Friedmann può essere integrata [12] e fornire (vedi figura 3.6):

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left[\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^3} \right], \quad (3.83)$$

dove $a_{m\Lambda}$ è il valore che il fattore di scala assume al momento in cui i contributi energetici

della materia e della costante cosmologica sono uguali, ossia quando vale 1 il rapporto

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_m} = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{m,0}} a^3 = \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} a^3, \quad (3.84)$$

da cui

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.85)$$

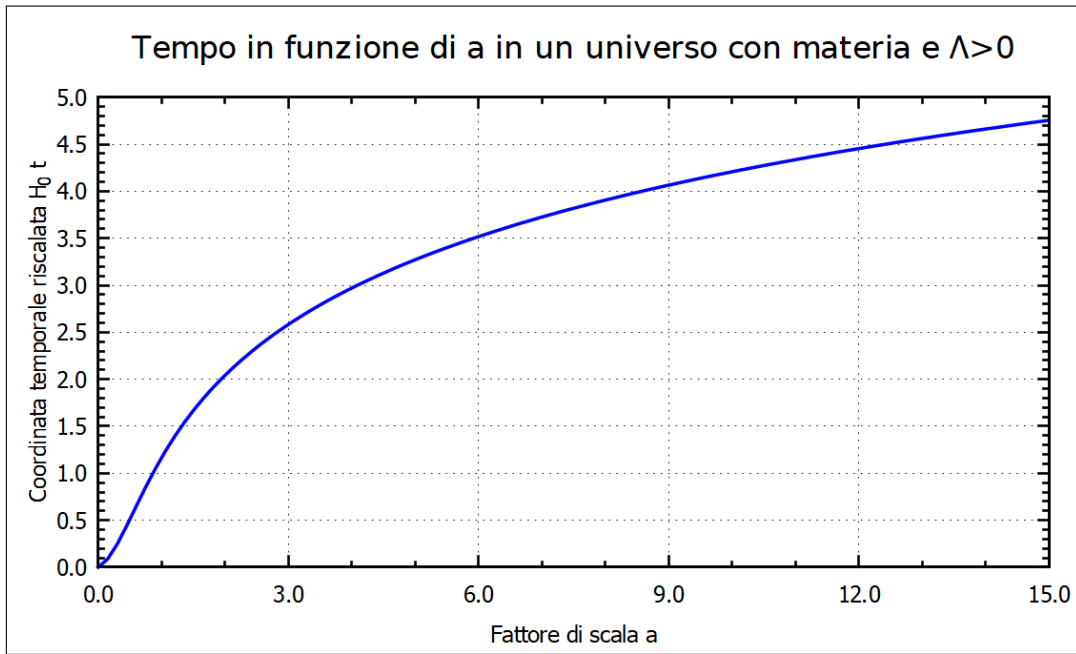


Figura 3.6: Andamento del termine $H_0 t$ in funzione del fattore di scala in un universo con materia e costante cosmologica positiva, espresso dalla relazione (3.83). Si è posto $\Omega_{m,0} = 0.26$, approssimazione del valore indicato dalle osservazioni, come sarà mostrato in sezione 3.4.

L'andamento del fattore di scala per $a \ll a_{m\Lambda}$ può essere approssimato [12] con la relazione:

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.86)$$

fornendo l'andamento $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ richiesto per un universo dominato dalla materia. Se invece $a \gg a_{m\Lambda}$ l'unità sotto radice quadrata può essere trascurata e si può ottenere l'andamento:

$$a(t) \approx a_{m\Lambda} e^{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t}, \quad (3.87)$$

che fornisce l'andamento esponenziale richiesto per un universo dominato dalla costante cosmologica. L'età dell'Universo può essere ricavata ponendo $t = t_0$ e $a = a_0 = 1$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left(\frac{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right). \quad (3.88)$$

Invece, l'istante di tempo in cui i contributi energetici di materia e costante cosmologica si equivalevano vale:

$$t_{m\Lambda} = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right). \quad (3.89)$$

3.3.3 Universo con materia, curvatura e costante cosmologica

L'introduzione della costante cosmologica nei modelli di universo curvo con materia ha ampliato lo spettro dei possibili comportamenti che l'universo può assumere, e che dipende dai possibili valori che i parametri $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ e κ possono assumere.

In un universo curvo contenente materia e una costante cosmologica l'equazione (3.68) diventa:

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{m,0}) a^{-2}. \quad (3.90)$$

Supponiamo che $\Omega_{m,0} > 0$, $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$; l'universo ha curvatura positiva e il suo termine nell'equazione di Friedmann (3.90) è negativo. Allora, a seconda del valore dei parametri $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$, H^2 risulterà essere positivo per valori di a piccoli (quando domina il termine di materia) e grandi (quando domina il termine di costante cosmologica); tuttavia, per un opportuno intervallo di valori intermedi sarà negativo, e pertanto non fisico: ci sarà un intervallo di valori proibiti per il fattore di scala. In un tale universo si può supporre $a \gg 1$ e $H < 0$ a $t = 0$. Ciò significa che l'inizio dell'universo non è un evento singolare come il big bang ma una fase di contrazione, che deve terminare per un certo valore minimo $a = a_{min}$ del fattore di scala, e in seguito a cui si ha una fase di espansione: questo evento è noto come *Big Bounce*.

Un'altra possibilità è l'universo di Lemaître (o *loitering universe*, [12]), in cui i parametri $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ sono tali da far iniziare l'espansione dell'universo come se fosse dominato dalla materia, con $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, ma da fargli attraversare in seguito una fase (*loitering stage*) in cui il fattore di scala è pressoché costante. Questo universo si comporta in maniera simile all'universo statico di Einstein visto in sezione 2.1. Infine, quando il termine di costante cosmologica diventa dominante, l'universo inizia un'espansione esponenziale.

Allora, a seconda dei valori che i parametri nella (3.90) assumono, l'universo può avere un big crunch, un big chill, un big bounce o un loitering stage; l'espansione dell'universo può inoltre essere accelerata o decelerata.

3.3.4 Universo con materia e radiazione

Supponiamo adesso di avere un universo piatto in cui sono presenti materia e radiazione. L'equazione (3.68) diventa:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4}. \quad (3.91)$$

Essa può essere risolta analiticamente. A tal proposito introduciamo il valore a_{rm} che il fattore di scala assume quando vale 1 il rapporto

$$\frac{\rho_m}{\rho_r} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{r,0}} a, \quad (3.92)$$

da cui

$$a_{rm} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}. \quad (3.93)$$

Il parametro $\Omega_{m,0}$ può allora essere eliminato dall'equazione di Friedmann, che può essere riscritta come:

$$a \left(1 + \frac{a}{a_{rm}}\right)^{-\frac{1}{2}} \dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}}. \quad (3.94)$$

L'integrazione da $t = 0$ ad un generico istante t fornisce:

$$\int_0^{a(t)} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{a_{rm}}}} da = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} t. \quad (3.95)$$

L'integrazione per parti consente infine di ottenere (vedi figura 3.7):

$$H_0 t = \frac{4a_{rm}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}}\right) \left(1 + \frac{a}{a_{rm}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (3.96)$$

Questa equazione soddisfa l'andamento del fattore di scala aspettato. Infatti, quando $a \ll a_{rm}$ il contributo della radiazione è dominante rispetto a quello della materia, e il fattore di scala può essere approssimato (tramite uno sviluppo di Taylor del fattore elevato a $\frac{1}{2}$) a

$$a(t) = \left(3H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} t\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.97)$$

in maniera coerente a quanto visto in sezione 3.2.2. Analogamente quando $a \gg a_{rm}$ si ottiene l'andamento tipico dell'universo dominato da materia. Infatti, trascurando gli addendi 1 nella parentesi quadra si ottiene direttamente:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2a_{rm}^{\frac{1}{2}}} H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} t\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.98)$$

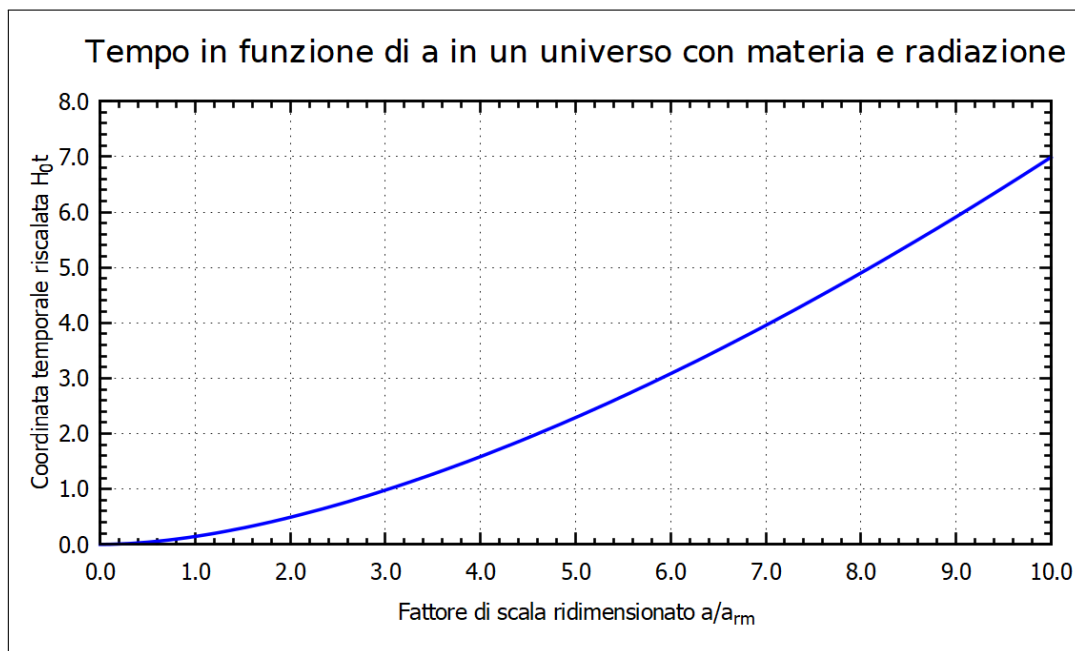


Figura 3.7: Andamento del termine $H_0 t$ in funzione di $\frac{a}{a_{rm}}$ in un universo contenente materia e radiazione, espresso dalla relazione (3.96). Sono stati fissati i valori $\Omega_{r,0} = 0.06$ e $\Omega_{m,0} = 0.20$ per una chiara resa grafica della funzione.

L'uguaglianza dei contributi di materia ed energia si è verificata al tempo:

$$t_{rm} = \frac{2(2 - \sqrt{2}) a_{rm}^2}{3H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}}}. \quad (3.99)$$

3.4 Sul modello Λ -CDM della cosmologia

Il *modello Λ -CDM* o *modello benchmark* o *modello standard della cosmologia* è il modello cosmologico adottato al momento per descrivere l'universo in cui viviamo e che meglio interpola i dati osservati disponibili.

Secondo questo modello l'universo è spazialmente piatto, contiene materia, radiazione e una costante cosmologica positiva che funge da energia oscura. Il valore esatto della costante di Hubble è ancora oggetto di controversie, tanto che esso viene parametrizzato nella seguente maniera:

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.100)$$

La radiazione del modello Benchmark presenta due componenti: fotoni e neutrini. Si assume che i fotoni siano forniti unicamente dalla radiazione cosmica di fondo di temperatura corrente $T_0 = 2.7255 \text{ K}$ [12]. Anche i neutrini sono forniti da una radiazione

3.4. Sul modello Λ -CDM della cosmologia

Tabella 3.1: Valori dei parametri del modello Λ -CDM.

Parametro	Simbolo	Valore
Costante di Hubble	h	0.72 ± 0.03
Densità totale della materia	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{m,0} h^2 = 0.133 \pm 0.006$
Densità della materia barionica	$\Omega_{bm,0}$	$\Omega_{bm,0} h^2 = 0.0227 \pm 0.0006$
Densità totale della radiazione	$\Omega_{r,0}$	$\Omega_{r,0} h^2 = 2.47 \cdot 10^{-5}$
Densità dei neutrini	$\Omega_{\nu,0}$	vedi (3.101)
Densità della costante cosmologica	$\Omega_{\Lambda,0}$	0.74 ± 0.03

di fondo (cosmic neutrino background radiation); il loro parametro di densità è fornito (vedi [9]) dalla relazione:

$$\Omega_{\nu} h^2 = \frac{\sum m_{\nu}}{93 \text{ eV}}, \quad (3.101)$$

in cui la somma è estesa alle famiglie di neutrini con massa m_{ν} che appartenga all'intervallo da $5 \cdot 10^{-4}$ eV a 1 MeV. Questo valore è ancora incerto a causa delle incertezze sulla misura della massa dei neutrini.

Anche la materia del modello Benchmark è formata da due componenti: la materia barionica e la *cold dark matter*, materia oscura non-barionica e non-relativistica.

Si riportano in tabella 3.1 i valori dei parametri tipici del modello [9]. Da questi valori è possibile dedurre che la somma dei parametri di densità delle diverse componenti dell'universo risulta essere consistente con $\Omega_0 = 1$: l'universo sembra essere piatto e non curvo. Il maggior contributo al parametro di densità è quello dell'energia oscura, descritta con la costante cosmologica: essa ne fornisce il 74%. Il contributo della radiazione è trascurabile, mentre quello della materia barionica è del 4%; il restante 22% è fornito dalla cold dark matter. La materia dell'universo è pertanto al 17% materia ordinaria, mentre il restante 83% è materia oscura.

Per quanto riguarda altri parametri tipici del modello (vedi [12]), l'età dell'universo è stimata essere $t_0 = 13.7$ Gyr. L'uguaglianza dei contributi energetici tra materia e radiazione è avvenuta quando l'universo aveva un'età di $t_{rm} = 0.050$ Myr e il fattore di scala valeva $a_{rm} = 2.9 \cdot 10^{-4}$ (assumendo che all'epoca corrente valga $a_0 = 1$). L'uguaglianza dei contributi tra materia e costante cosmologica è invece più recente: è avvenuta quando l'universo aveva $t_{m\Lambda} = 10.2$ Gyr e il fattore di scala valeva $a_{m\Lambda} = 0.77$.

Noti i valori dei parametri del modello è possibile risolvere l'equazione di Friedmann (3.68). L'universo descritto dal modello Benchmark è iniziato tramite un Big Bang, e ha continuato ad espandersi senza mai avere fasi di contrazione. Quando il fattore di scala aveva valori $a \ll a_{rm}$ l'universo era dominato dalla radiazione, e presentava caratteristiche

3.4. *Sul modello Λ -CDM della cosmologia*

affini all'universo analizzato in sezione 3.2.2. In seguito, quando $a \sim a_{rm}$ l'andamento del fattore di scala poteva essere approssimato con quello ricavato in sezione 3.3.4. Nella successiva fase il fattore di scala ha avuto un andamento simile all'universo dominato dalla materia della sezione 3.2.2, fino a quando $a \sim a_{m\Lambda}$, in cui l'andamento poteva essere descritto con il fattore di scala della sezione 3.3.2. L'uguaglianza tra i contributi energetici di materia e costante cosmologica si è verificata circa 3.5 miliardi di anni fa. Attualmente viviamo in un universo dominato dalla costante cosmologica, in cui il fattore di scala assumerà nel tempo un andamento sempre più simile a quello analizzato in sezione 3.2.3. Secondo questo modello pertanto l'universo continuerà ad espandersi terminando in un big chill.

Conclusioni

La trattazione effettuata ha mostrato come le componenti che si ritiene compongano l'universo siano la materia ordinaria, la radiazione, la materia oscura e dell'energia oscura fornita dalla costante cosmologica. Ognuna di essa contribuisce nelle percentuali descritte in sezione 3.4 alla densità di energia dell'universo, in maniera tale che esso è iniziato con un Big Bang, si è sempre espanso e terminerà con un Big Chill.

In realtà sono ancora ad oggi molti i punti non chiari del modello: non si sa cosa sia la materia oscura né quale sia la causa fisica della costante cosmologica. Inoltre, l'attuale modello Λ -CDM è ben più complesso di quanto analizzato in questa trattazione e presenta diversi problemi parzialmente insoluti. Tra di essi si ricorda il *problema della piattezza*: nel corso del tempo, se $\Omega \neq 1$, le deviazioni da questo valore devono aumentare; com'è allora possibile che risulti ad oggi $\Omega_0 \sim 1$? È lecito ipotizzare che Ω_0 sia *matematicamente* uguale a 1? Un altro è il problema dell'orizzonte, derivante dal fatto che la radiazione cosmica di fondo è isotropa: per osservare una tale isotropia si deve supporre che punti distanti dell'universo siano stati un tempo in contatto causale, ma ciò non è previsto dal modello Λ -CDM. Una soluzione di questo problema è offerta dalla *teoria dell'inflazione*.

La cosmologia è quindi ancora oggi un campo ricco di problemi insoluti, sia teorici che sperimentali; offre costantemente nuove domande dagli orizzonti sempre più ampi e ambiziosi, a cui forse un giorno verrà fornita una risposta.

Bibliografia

- [1] G. Bertone and D. Hooper, “History of dark matter,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, p. 045002, Oct 2018. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.045002>
- [2] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry - An introduction to general relativity*. Pearson.
- [3] R. Casadio, “Elements of general relativity.”
- [4] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S. H. Oh, and J. Kennicutt, R. C., “High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS,” *Astronomical Journal*, vol. 136, no. 6, pp. 2648–2719, Dec 2008, provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. [Online]. Available: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008AJ....136.2648D>
- [5] A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Minkowski, and H. Weyl, *The Principle of Relativity*. Dover publications.
- [6] L. Ferrari, “Elementi di termodinamica statistica.”
- [7] W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, L. Ferrarese, D. D. Kelson, S. Sakai, J. R. Mould, J. Kennicutt, Robert C., H. C. Ford, J. A. Graham, J. P. Huchra, S. M. G. Hughes, G. D. Illingworth, L. M. Macri, and P. B. Stetson, “Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant,” *Astrophysical Journal*, vol. 553, no. 1, pp. 47–72, May 2001, provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. [Online]. Available: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...553...47F>
- [8] E. Hubble, “A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae,” *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, Mar 1929, provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. [Online]. Available: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1929PNAS...15..168H>

Bibliografia

- [9] O. Lahav and A. R. Liddle, “The Cosmological Parameters 2010,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:1002.3488, Feb 2010, provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. [Online]. Available: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1002.3488L>
- [10] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology - Second Edition*. Wiley.
- [11] T. N. R. on Constants Units and Uncertainty. Fundamental physics constants - newtonian constant of gravitation. [Online]. Available: https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg|search_for=Newtonian+constant+of+gravitation
- [12] B. Ryden, *Introduction to cosmology - Second Edition*. Cambridge University Press.
- [13] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley.