Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Nova stereometria doliorum vinariorum. Nuovi metodi infinitesimali per il calcolo dei volumi nell'opera di Johannes Kepler

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MARIA GIULIA LUGARESI

Presentata da:
SARA DE MARCHI

III Sessione
Anno Accademico 2018/2019

"Posso ben aspettare cento anni un lettore che comprenda ciò che ho scoperto, se Dio ha aspettato seimila anni qualcuno che sapesse meditare la sua creazione!"

Johannes Kepler

"Ho fede nelle buche dove sono inciampato
Nelle mie ginocchia rotte e nei giorni che ho sbagliato
Perché oggi non mi spezzo e non abbasso mai lo sguardo
E se sono così forte lo devo solo al mio passato."

Fabrizio Moro

A Luca, Agnese
e ai miei genitori

Introduzione

Accade spesso nella storia della scienza che un fatto banale sia fonte d'ispirazione per eccellenti scoperte scientifiche: è questo il caso dell'opera che andremo a trattare nel seguente elaborato, la *Nova stereometria doliorum vinariorum.* Recatosi ad acquistare il vino per il suo secondo matrimonio Keplero, stupito dalla tecnica utilizzata dal proprietario dell'osteria per determinare il volume delle botti, decise di trovare un fondamento matematico a questo artificio tramandato dai vinai austriaci.
L'opera che ci accingiamo a tradurre contiene proprio questo percorso di conoscenza, ma anche importanti legami col passato, tramite i forti richiami ad Archimede contenuti nel trattato: inoltre, quest'opera si proietta anche nel futuro, gettando le basi per il lavoro di Bonaventura Cavalieri che condurrà alla formalizzazione del calcolo infinitesimale.
In questo elaborato, dopo una breve biografia del matematico contenente i momenti più salienti della sua vita, si passa al secondo capitolo in cui si evidenziano i maggiori contributi matematici di Keplero, contenuti nelle numerose opere a cui l'astronomo ha dato vita. Il capitolo principale è però certamente il terzo, che presenta la prima traduzione italiana dei teoremi della *Nova stereometria doliorum vinariorum*, opera per tanti anni oscurata dalla fama delle tre leggi sul moto dei pianeti, forse anche a causa della prolissità di Keplero e degli errori contenuti nel trattato. Sempre in questo capitolo, si evidenziano i suddetti legami con le opere del passato, in particolare i lavori di Archimede, e con quelle immediatamente successive, ovvero la *Geometria indivisibilibus* di Cavalieri.
Ciò che intendiamo fare è quindi restituire la giusta attenzione a quest'opera, pietra miliare dello sviluppo del calcolo infinitesimale, per favorire anche lavori successivi che indaghino più a fondo i legami fra queste opere per giungere a una comprensione più profonda della storia della matematica.

Indice

Capitolo 1

Biografia

In questo primo capitolo cercheremo di delineare gli eventi principali che hanno caratterizzato la vita di Johannes Kepler, in Italia meglio conosciuto come Giovanni Keplero: analizzeremo la sua infanzia, le scuole che lo hanno formato e gli scienziati con cui ha condiviso le proprie ricerche e scoperte.
Astronomo e matematico di fama mondiale, egli è in realtà poco tradotto e conosciuto, se non per le sue tre notissime leggi, forse a causa dell'eccessiva diversità dei suoi interessi o della sua abitudine di trasformare ogni sua opera in un prolisso diario della propria vita e dei propri ragionamenti scientifici.

1.1 Infanzia e giovinezza

Il 27 dicembre del 1571 nacque il primo figlio di Heinrich Kepler e sua moglie Katharina Guldenmann, nella città di Weil, oggi conosciuta come Weil der Stadt, piccola cittadina alle porte di Stoccarda che si trova nell'attuale Baden-Württemberg, verdissima regione del sud-ovest della Germania. Il bambino venne chiamato Johannes, in onore del santo ricordato in quel giorno, San Giovanni Apostolo.

Nonostante entrambi i nonni di Keplero ricoprissero il prestigioso ruolo di sindaco di Weil e della vicina cittadina di Eltingen, la famiglia dell'astronomo tedesco era tutt'altro che tranquilla e tradizionale, essendo popolata da personaggi decisamente stravaganti, a partire dagli stessi genitori di Johannes. Abbiamo una loro descrizione molto dettagliata redatta proprio dallo stesso Keplero, contenuta in un'appendice sull'oroscopo natale dei propri parenti: la madre Katharina, allevata a intrugli d'erbe da una zia poi bruciata per stregoneria, viene descritta come una donna piccola, esile, litigiosa e generalmente sgradevole. Anche il padre Heinrich viene presentato come un individuo immorale, duro e un soldato litigioso. Egli infatti si allontanava spesso dalla famiglia partendo come mercenario, e nei brevi momenti che trascorreva in famiglia trattava duramente la moglie e la metteva incinta prima di allontanarsi nuovamente per mesi.

Si intuisce quindi che il contesto in cui Keplero trascorse i primi anni di vita era piuttosto squallido: lo stesso astronomo ricorda i suoi primi anni con una vena cupa, anche se non mancano, tra tanti guai, alcuni ricordi felici, chiaramente legati a fenomeni celesti. Si può leggere infatti di quando la madre, all'età di sei anni, lo portò in un luogo alto per osservare meglio una cometa, o di quando, il 31 gennaio 1580, il padre gli mostrò la sua prima eclissi di Luna. Sembra che il giovane Keplero, ancora ignaro del proprio futuro, fosse già portato a ricercare nelle meraviglie dell'universo un aiuto per affrontare le difficoltà della sua infanzia.

1.2 Il contesto scolastico

Un'altra cosa che lo aiutò molto a distrarsi dai suoi tormenti interiori fu certamente la scuola: fu una vera fortuna per lui che, nel Württemberg, l'istruzione fosse ben sviluppata. Dopo l'introduzione della Riforma e della Controriforma, i duchi del Württemberg provvidero ad istituire in tutte le piccole città delle scuole di latino, oltre a quelle di tedesco già presenti. Si era infatti riaccesa l'attenzione sull'importanza della formazione di un buon esercito intellettuale, in grado di difendere e diffondere l'una o l'altra confes-

sione religiosa. Fu lo stesso Martin Lutero ad esprimere la necessità della realizzazione, in ogni Stato, di un primo ciclo scolastico, gratuito e obbligatorio, che permettesse a ciascuno di leggere e comprendere la Bibbia tradotta in lingua volgare.
Seguendo queste indicazioni, il duca del Württemberg, Christoph, introdusse un sistema alquanto efficace per selezionare e formare soldati per la causa di Dio. Venne così data a tutti i piccoli del ducato la possibilità di frequentare gratuitamente un primo triennio di istruzione: una volta terminato quest'ultimo, essi potevano frequentare le scuole di latino, sempre gratuite, che il duca aveva disposto in ogni piccola città. Era prevista una severa selezione tra tutti coloro che intraprendevano gli studi, con un sistema a imbuto che al termine di ogni ciclo di due o tre anni mandava avanti solo i ragazzi più brillanti.
Il genio di Keplero non sfuggì neanche a questo controllo così severo: il 17 maggio del 1583 venne promosso al triennio di scuola tedesca e il 16 ottobre 1584 venne accettato al Seminario inferiore di Adelberg. Nel 1586 venne trasferito al Seminario superiore di Maulbronn, tra le cui mura, oltre a Keplero, studiarono altri importanti personaggi, come Friedrich Hölderlin ed Hermann Hesse.
Nel settembre del 1588 Keplero superò l'esame di baccalaureato, il primo dei tre gradi di laurea nei paesi Anglosassoni, e l'anno successivo venne accettato allo Stift, il monastero di Tubinga, dove l'astronomo rimase per quattro anni e mezzo, dedicandosi a studi di filosofia, matematica e teologia. Nei suoi racconti autobiografici, Keplero ci permette di ricostruire anche la sua vita all'interno di questi templi del sapere, e di scorgere alcuni aspetti che accompagneranno in modo costante la vita dell'astronomo, come la debolezza fisica e l'ipocondria, cose che per fortuna non lo fermarono nel raggiungimento dei suoi obiettivi.
Nell'agosto 1591 infatti superò gli esami, e la sua intelligenza non passò affatto inosservata, tanto che nella lettera di referenze, allegata alla domanda di rinnovo della borsa di studio, i suoi professori scrissero: ≪Poiché il suddetto Keplero ha una mente tanto superiore ed eccelsa che ci si deve attendere da lui qualcosa di speciale≫.
Tra le materie in cui Keplero eccelleva troviamo anche l'astronomia: in anni così cruciali per il rapporto tra scienza e religione, la Chiesa, sia cattolica che protestante, riteneva infatti comunque importante che i propri ministri sapessero entrare nel merito delle discipline scientifiche. Fu così che anche una laurea in teologia, apparentemente tanto

lontana dai futuri interessi di Keplero, gli permise invece di frequentare corsi di matematica, geometria e astronomia di altissimo livello. L'intento principale del seminario era quello di rendere ogni teologo capace di criticare con cognizione di causa chi si allontanava dalla interpretazione geocentrica del cosmo; peccato che, nel caso di Keplero, l'effetto fu quello di fornirgli tutti gli strumenti necessari a dimostrare errata tale ipotesi.
Tuttavia, nonostante tutte queste attività e questi sforzi, Keplero non prese subito coscienza della chiamata verso l'astronomia, ma la sua inclinazione e il suo talento non avrebbero tardato ad essere notati da qualcuno. Fu il suo professore di matematica e astronomia, il Maestro Michael Maestlin, l'unico capace di risvegliare le sue passioni, di guidare i suoi primi passi e di piantare nel terreno già pronto quel seme che a tempo debito sarebbe cresciuto magnificamente. Questo professore viene annoverato tra le poche persone, oltre a Keplero e Galileo, che realmente lessero e compresero il *De revolutionibus* di Copernico. Non sono in molti infatti coloro che, oltre a conoscere il contenuto essenziale dell'opera, si sono effettivamente cimentati nell'impresa di leggerla, controllandone i calcoli matematici. Il contributo di Maestlin alla formazione di Keplero fu determinante proprio perché fu lui a spronarlo a immaginare i fenomeni celesti sotto diversi punti di vista, quello tolemaico come pure quello copernicano. Ancor più straordinario va considerato il suo insegnamento, se lo si pensa compiuto all'interno di un'istituzione che certo mal tollerava l'opera di Copernico e difendeva ancora il modello tolemaico.
Proprio a causa di questo clima molto teso, l'opera *De revolutionibus orbium coelestium* di Copernico venne pubblicata nel 1543 con una breve introduzione anonima, aggiunta dall'editore Andreas Osiander a insaputa dell'autore, in cui si asseriva che il modello di Copernico non fosse effettivamente una descrizione del sistema solare, bensì uno strumento per semplificare i calcoli. Apparve da subito evidente come in realtà i calcoli non risultassero affatto semplificati, e lo stesso Keplero, sin dai tempi dell'università, si sentì chiamato a scoprire cosa implicasse, in concreto, l'utilizzo di questo nuovo ≪metodo di calcolo≫. Già da studente egli, che considerava la matematica come un potente strumento per avvicinarsi a Dio, decise di difendere il sistema copernicano, nonostante aspirasse alla carriera religiosa e ritenesse che il suo traguardo fosse l'ormai prossima consacrazione a pastore luterano.

1.3 L'inaspettata chiamata a Graz

Pochi mesi prima di terminare gli studi teologici e di coronare il suo sogno, Keplero ricevette una notizia sconvolgente. Nei primi mesi del 1594, infatti, morì Georg Stadius, l'insegnante di matematica al Seminario Protestante di Graz, capitale della provincia austriaca della Stiria. Venne quindi inoltrata una richiesta per trovare un successore all'Università di Tubinga, nonostante la grande distanza tra le due sedi; la scelta ricadde su questa università perché essa costituiva uno dei centri principali dell'attività della Riforma. Il senato accademico decise di affidare il compito a Keplero, il quale rimase assolutamente sconcertato dalla proposta: da una parte lo tratteneva l'ormai imminente conclusione degli studi teologici, dall'altra invece lo spingevano il senso del dovere e la riconoscenza verso coloro che lo avevano mantenuto e istruito per tanti anni.
Nonostante la considerasse di gran lunga di minore importanza rispetto a quella di pastore di anime, Keplero accettò infine di partire per intraprendere la carriera di professore di matematica, con la promessa di poter poi terminare i suoi studi in un secondo momento. Il 23 marzo 1594 Keplero lasciò la sua amata università, senza immaginare che non sarebbe più tornato nel Württemberg, se non di passaggio; arrivò a Graz l'11 aprile, dopo il primo lungo viaggio della sua vita, e l'accoglienza non fu certo delle migliori: il salario era minore di quello del suo predecessore, e l'assunzione prevedeva un periodo di prova di alcuni mesi. All'inizio faticò anche a integrarsi: alle sue lezioni partecipavano pochi studenti il primo anno, e nessuno il secondo. Anche nei suoi appunti e racconti emerge la sensazione di essere eccessivamente schietto e risultare inviso ai superiori, cose che però non vengono confermate dai vari scritti conservati, come le lettere scambiate col primo rettore Papius, dove Keplero viene anzi difeso e anche la mancanza di allievi non viene imputata a lui bensì all'osticità della materia. La situazione cambiò radicalmente con l'insediamento del successore di Papius, Johannes Regius, il quale lo costrinse ad insegnare anche materie in apparenza lontane dal proprio ruolo di docente di matematica, quali il latino e la retorica. Questo svilì notevolmente la professionalità di Keplero: eppure, proprio in questo vuoto e in questa noia, egli ebbe finalmente il tempo e la possibilità di far riemergere quella passione per i misteri del cielo che già lo aveva consolato nei peggiori momenti dell'infanzia.
È in questo contesto che Keplero pubblicò, nel 1596, il suo primo libro, *Mysterium co-*

smographicum, ovvero *Il mistero della forma del cosmo.* Si tratta di un'opera che non contiene nessuna delle leggi per cui Keplero è divenuto famoso, ma che non va considerata di minore importanza e che riprenderemo nel prossimo paragrafo.
Capiamo quindi come, anche dopo un avvio incerto, la quotazione di Keplero salì presto alle stelle, anche grazie alla stesura di un calendario per l'anno 1595 che risultò molto affidabile. Quest'ultimo conteneva anche un oroscopo, molto importante in un periodo storico caratterizzato dalla convinzione che il destino futuro potesse essere predetto a partire dalle traiettorie dei corpi celesti. Keplero non credeva nelle previsioni degli oroscopi, anzi disprezzava profondamente coloro che tentavano di ridurre il fascino dello studio dei cieli a cercare la risposta a questioni meschine. D'altra parte, era anche convinto che l'anima potesse cogliere un'armonia del cosmo e che quindi una parte molto profonda di noi fosse influenzata da questa musica astronomica.

1.4 Il *Mysterium cosmographicum* e l'incontro con Tycho Brahe

Nel *Mysterium cosmographicum* Keplero immagina un sistema solare ≪a incastro≫, in cui le sfere che rappresentano le orbite dei pianeti siano alternate a solidi ideali, a ciascuno dei quali risulti tangente, all'interno, la sfera relativa a un pianeta e, all'esterno, la sfera relativa al pianeta successivo, nell'ordine di distanza dal Sole. Keplero era entusiasta del proprio modello, tanto da studiare il modo di favorirne la massima diffusione possibile. Oltre a progettare un modellino da costruire per il duca del Württemberg, egli inviò diverse copie del *Mysterium* ai maggiori scienziati dell'epoca, nel tentativo di instaurare preziosi rapporti epistolari e di ricevere i primi commenti, positivi o negativi che fossero. Tra i destinatari figurava anche Galileo Galilei, che ne ricevette due copie e si dichiarò entusiasta del lavoro, richiedendone subito altre copie. Egli ammirava Keplero soprattutto perchè ebbe il coraggio di schierarsi apertamente a favore del sistema copernicano, ma non rispose mai alla richiesta di una lunga lettera di commento.
L'impegno di Keplero nel voler dare massima diffusione al *Mysterium* non fu comunque sprecato, poiché il libro diventò presto oggetto di dibattito tra gli astronomi del tempo. In particolare, grazie alla sua opera, il giovane Keplero venne notato dal grande

astronomo Tycho Brahe, allora potente matematico imperiale a Praga. Questo fatto risultò determinante per il futuro di Keplero, il quale, per le sempre maggiori intolleranze religiose che era costretto a subire a Graz, stava in quel momento cercando un nuovo impiego. La prospettiva di diventare assistente di Tycho era per Keplero incredibilmente allettante, poiché sapeva bene che Tycho custodiva l'immenso tesoro dei dati più accurati disponibili all'epoca, grazie a enormi e preziosi quadranti e a una squadriglia di tenaci assistenti. In una lettera scritta nel 1599 al proprio maestro Maestlin, Keplero osserva:

> Ecco cosa penso riguardo a Tycho: abbonda di ricchezze, ma non sa usarle nel giusto modo, come succede alla maggior parte dei ricchi. La cosa da farsi è quindi cercare di sottrargli le sue ricchezze [...] come mendicando, chiaramente, così che le sue osservazioni siano divulgate in maniera semplice e completa.

Molti fattori hanno tramato per farli incontrare, prima di tutto, come già accennato, il crescere delle tensioni religiose. Nell'estate del 1598, infatti, i luterani iniziarono a subire restrizioni dal governo cattolico e l'arciduca Ferdinando II, futuro imperatore, fece chiudere la scuola protestante di Graz. Keplero quindi, oltre a ritrovarsi improvvisamente senza lavoro, si ritrovò costretto ad andare in esilio. In realtà questa condizione non durò tanto, grazie ai vari appoggi su cui poteva contare, ma la precarietà della sua situazione gli fece capire che i suoi giorni a Graz erano ormai contati e il suo pensiero si rivolse alla proposta di Tycho Brahe. Quest'ultimo, intanto, cacciato dall'isola di Hven per il suo comportamento arrogante, aveva trovato un nuovo impiego presso la corte di Rodolfo II, a Benatek, subito fuori Praga. Egli, che cercava da tempo il modo di convincere Keplero a lavorare con lui, decise di inviargli una lettera: lettera che però l'astronomo non avrebbe ricevuto, dato che aveva già chiesto un passaggio ad un conoscente, tale Barone Hoffmann, il quale doveva recarsi proprio a Praga.

Nel gennaio del 1600 Keplero giunse a Benatek, alla periferia di Praga, e il 4 febbraio si unì alla squadra degli assistenti di Brahe. I due astronomi si aspettavano entrambi una svolta decisiva da questa collaborazione: come già detto, l'astronomo tedesco non vedeva l'ora di mettere le mani su dati più precisi con cui mettere alla prova il modello proposto nel *Mysterium*, mentre Brahe intravedeva nel genio e nella tenacia di Keplero gli strumenti per avvalorare la propria immagine del cosmo. L'incontro tra queste due personalità, seppur molto breve dal momento che Tycho sarebbe morto solo venti mesi dopo, si rivelò esplosivo dal punto di vista umano, ma estremamente felice dal punto di vista scientifico, e permise la disintegrazione di alcuni punti di riferimento che perdurano da secoli, dando origine a un nuovo capolavoro: l'*Astronomia Nova*. Il libro, la cui stesura richiese più di cinque anni, è celebre perché contiene le prime due leggi di Keplero, e per la prima volta è il Sole ad essere considerato come centro del sistema solare e come causa del movimento della Terra e degli altri pianeti. Al tempo purtroppo l'opera non riscosse grande entusiasmo tra i colleghi: lo stesso Maestlin, maestro e amico di Keplero, condannò questo approccio all'astronomia, e Galileo, sebbene a conoscenza delle due leggi, continuò a preferire orbite circolari nelle sue opere successive.

1.5 Anni difficili per Keplero

Gli anni precedenti la pubblicazione dell'*Harmonices mundi* erano stati turbati da una serie di eventi che avevano segnato pesantemente la vita di Keplero. Sembravano lontanissimi i momenti più sereni, trascorsi come matematico imperiale alla corte di Praga. Nel 1611 Keplero era stato colpito dalla morte della prima moglie, Barbara, e del figlio Friedrich, di appena sette anni. Inoltre, a partire dal 1615, aveva dovuto impegnare buona parte delle proprie energie per strappare la madre dalla condanna a morte per stregoneria.
Ella era stata accusata da una certa Ursula Reinbold, un tempo amica della madre dell'astronomo, la quale però, in seguito ad uno stupido episodio, covò risentimento per lei e di lì a poco, dopo aver bevuto qualcosa a casa della signora Keplero, sostenne di sentirsi male e cominciò a far circolare la diceria che una qualche pozione magica l'avesse avvelenata. Questa calunnia iniziale gridata ai quattro venti si trasformò presto in un uragano che travolse la madre di Keplero, costringendo l'astronomo ad intervenire. Dopo essere stato informato da una lettera della sorella Margarete, il 2 gennaio del 1616 inviò al cancelliere di Leonberg una vibrante protesta contro la stupidità e la superstizione di chi aveva intentato un processo sulla base di semplici calunnie. La missiva ebbe però l'effetto contrario a quello voluto, finendo per scatenare una reazione ancora più dura. Dopo molte peripezie, fughe e processi, la donna venne assolta il 28 settembre del 1621,

soprattutto grazie all'apporto di Keplero. Il duca infatti decise di spedire la relazione della difesa, presentata dall'astronomo, a Tubinga, dove fu giudicata da uomini più obiettivi, meno coinvolti nelle passionali vicende di Leonberg, ma comunque ben influenzati dalla notorietà di Keplero. Una volta liberata, ella non potè purtroppo godersi a lungo la ritrovata libertà: morì pochi mesi dopo, il 13 aprile del 1622, nella vicina Heumaden, come leggiamo in una lettera scritta da Giovanni all'amico Peter Crüger. La terribile esperienza lasciò senz'altro indelebili tracce nel carattere di Keplero, ma ci furono anche evidenti conseguenze economiche: l'astronomo era infatti stato costretto a pagare vitto e riscaldamento alla madre detenuta, mentre le entrate erano inevitabilmente diminuite da quando era stato marchiato come ≪figlio della strega≫.

L'unico avvenimento che in quegli anni portò una ventata di brio nella vita di Keplero fu il suo secondo matrimonio, celebrato nel 1613 con Susanna Reuttinger. Sebbene fosse rimasto traumatizzato dal primo matrimonio con Barbara Müller, officiato sotto un ≪calamitoso coelo≫, alla morte della moglie Keplero avvertì il vuoto di una simile perdita e il bisogno ≪di sostituire con un nuovo amore la perdita recentissima≫. Fu così che, all'età di quarantun anni, Keplero decise di risposarsi per provvedere alle esigenze dei figli e della casa. Vista la prima esperienza, egli decise di adottare un metodo quasi scientifico per la scelta della seconda moglie tra undici candidate: alla fine la scelta ricadde su Susanna, un'orfana di ventiquattro anni.

A questo lieto evento è collegato un simpatico aneddoto che diede lo spunto a Keplero per l'opera che tratteremo in questo scritto. Nelle settimane antecedenti al matrimonio, celebrato il 30 ottobre, Keplero si dispose a scegliere il vino per il banchetto e si procurò una serie di barilotti con l'intenzione di farli riempire di vino da un venditore locale. Nell'osservare il venditore al lavoro, Keplero era rimasto esterrefatto dalla semplicità della procedura utilizzata: il giovane aveva posto un'asta graduata all'interno del barilotto, in diagonale, e direttamente ne aveva dedotto la capacità. Keplero era abituato a un protocollo assai più laborioso, in cui la capacità di un contenitore si determinava continuando a versare quantità di liquido da anfore utilizzate come unità di misura, fino a riempirlo. Lo stupore di Keplero non aveva sorpreso il venditore, che aveva rivelato di aver utilizzato un segreto del commercio austriaco. Keplero allora si era riproposto di dare una giustificazione matematica alla pratica austriaca, dando vita al trattato *Nova* *stereometria doliorum vinariorum*, o *Geometria solida delle botti*, che divenne una pietra miliare sia del calcolo infinitesimale, sia dello studio dei problemi di massimo e minimo.

1.6 Le opere della maturità

Abbiamo già parlato di come questi anni misero duramente alla prova Keplero, e tutto ciò è testimoniato anche dalle opere di questi anni, come l'*Epitome astronomiae copernicanae* (ovvero *Compendio dell'astronomia copernicana*), che vide la luce in maniera molto particolare. I primi tre Libri furono infatti pubblicati nel 1618, prima dell'*Harmonices mundi*, mentre il quarto Libro apparve solo nel 1620, e i Libri dal V al VII nel 1621.
In questo libro non ci si trova di fronte a un semplice riassunto, come ci si potrebbe aspettare dal titolo, ma a un vero e proprio lavoro di sintesi del lungo percorso scientifico compiuto dall'astronomo tedesco. Per la prima volta furono raccolte e affrontate tutte le argomentazioni contro i moti del nostro pianeta, con una modernità che avrebbe anticipato persino Galileo Galilei. Non dobbiamo però immaginare che Keplero, ormai maturo e soddisfatto della propria fisica celeste, avesse accantonato quella cornice metafisica in cui da sempre immergeva il proprio lavoro. Non a caso, uno spazio notevole era ancora riservato al modello del *Mysterium*, che era stato dato di nuovo alle stampe per decisione dell'autore solo l'anno precedente, nel 1621, a venticinque anni di distanza dalla prima edizione.
In quest'opera, Keplero si liberò definitivamente degli epicicli e pose finalmente al centro dell'universo il Sole fisico che, con la sua forza, interagendo con le caratteristiche dei singoli pianeti, li muoveva lungo orbite ellittiche, delle quali occupava uno dei due fuochi: ecco perché questo trattato costituisce oggi il vero e proprio manuale dell'astronomia kepleriana, nonostante il suo valore non sia stato riconosciuto nella storia dell'astronomia, forse a causa del titolo, troppo modesto a detta di Caspar.
Tuttavia, la capacità dell'*Epitome* di diffondere la nuova astronomia non passò del tutto inosservata: il 10 maggio del 1619 l'*Epitome* venne messa all'indice dal Sant'Uffizio, come era già accaduto pochi anni prima a Copernico. Keplero, preoccupato per ciò che potesse comportare un tale provvedimento, venne però subito rincuorato dal veneziano Vincenzo Bianchi, il quale asseriva che la condanna avrebbe invece acceso la curiosità

dei lettori attorno all'opera.
A testimoniare l'incredibile operosità di Keplero, agli stessi anni risale un altro capolavoro, le *Tavole rudolfine*, concepite inizialmente da Tycho già nel 1600, ma date alla luce solo nel 1622. In esse si trovano le coordinate delle 777 stelle catalogate da Tycho, numero accresciuto poi da Keplero fino a un totale di 1005. Con questi dati a disposizione era possibile calcolare le effemeridi, ovvero le future o passate posizioni di un certo oggetto celeste in una particolare data. Molto più precise delle tavole precedenti, quelle redatte da Keplero permisero un vero e proprio salto di qualità. Il loro straordinario livello di precisione, frutto del lavoro di Tycho e dei suoi collaboratori, ne fece per oltre un secolo il testo di riferimento per astronomi e astrologi, ma anche per naviganti ed esploratori.
Una volta che Keplero ne ebbe terminato la stesura, iniziò il consueto calvario per la stampa dell'opera. A Linz era arrivata la guerra, durante la quale era andata distrutta la stamperia. Keplero aveva così ottenuto il permesso di recarsi a Ulm per poter stampare i suoi lavori. Dopo una prima tappa a Ratisbona, egli proseguì il suo difficoltoso viaggio verso Ulm, dove gli era stato segnalato un ottimo stampatore che riuscì infine a portare alla luce le *Tavole*.
La notizia della presenza di Keplero in città si diffuse molto velocemente e arrivò anche alle orecchie del magistrato cittadino, il quale era a conoscenza di come l'astronomo avesse già dato prova in passato, ne *L'arte della misura di Archimede* o nella *Stereometria doliorum*, di sapersi destreggiare nella confusione di un commercio che utilizzava unità di misura differenti in ogni singola regione. Proprio per questo gli chiese di stabilire delle unità di misura convenienti per l'intera città di Ulm, i cui modelli di riferimento sono tutt'ora conservati nella stessa città.
Nel settembre del 1627 le *Tavole* erano finalmente pronte. Dato che Keplero aveva dovuto sostenere le intere spese di stampa, egli si recò a Francoforte, dove contava di trovare un buon numero di acquirenti per via della fiera d'autunno. Purtroppo, trattenuto dalle trattative sul prezzo con gli eredi di Tycho, riuscì a vendere ben poche copie e non recuperò quindi i soldi anticipati. Inoltre sorsero nuovi problemi con gli eredi, che richiesero ben due ristampe dell'opera per essere finalmente risolti con un accordo.

1.7 Una fine in esilio

La serenità era tuttavia assente dalla vita di Keplero. Nell'estate del 1627 era stato emanato un decreto secondo il quale gli incarichi imperiali assegnati a non cattolici dovevano considerarsi immediatamente revocati. Keplero diede per scontato che anche il suo incarico di matematico imperiale fosse stato cancellato. Tornato da Francoforte l'astronomo, preoccupato per il futuro, aveva chiesto consiglio all'amico Matthias Bernegger: desiderava ottenere una cattedra attraverso cui poter mostrare l'uso corretto delle *Tavole Rudolfine*, da lui pubblicate nel 1627, ma purtroppo l'amico fu solamente in grado di offrirgli ospitalità in casa sua. Egli gli suggerì che a Strasburgo sarebbe stato di certo bene accolto, ma Keplero, che era alla ricerca di un posto di lavoro, rifiutò l'offerta dell'amico e si rivolse al langravio Filippo di Hesse: Giovanni era infatti rimasto molto colpito dagli strumenti e dall'assetto dell'osservatorio del principe a Butzbach. Da parte sua, il langravio Filippo mostrò piena comprensione per l'angoscia dell'astronomo e cercò di esercitare la propria influenza sul nipote, il langravio regnante Georg, il quale promise a Keplero una casa e i mezzi di sostegno necessari. Keplero lasciò quindi Ulm il 25 novembre del 1627, fermandosi il 29 novembre per una prima tappa a Ratisbona per poter riabbracciare la propria famiglia.
Qui, durante la sua visita a Dillingen, venne a sapere di una lettera in cui il padre gesuita Johannes Terrentius richiedeva, dalle sue lontane missioni in Cina, informazioni riguardo ai più recenti risultati di ricerca in astronomia. Keplero compose per lui un breve trattato, e si diresse a Praga con l'intenzione di stamparlo. Arrivò nella capitale boema il 29 dicembre e, quando si recò a corte per presentare le sue tavole all'imperatore, lo trovò in festa a causa dell'arrivo del generale Albrecht Wallenstein, colui che era riuscito vittoriosamente a ricacciare gli invasori danesi fuori dai confini dell'Impero. Con sua grande sorpresa, egli venne ricevuto gentilmente e, contro tutte le aspettative, scoprì di avere ancora ammiratori a corte, ma soprattutto che il suo incarico di matematico di corte non era mai decaduto. Probabilmente, a causa della distanza, egli aveva mal interpretato la situazione a corte. Con tipica generosità imperiale, gli venne immediatamente offerta la considerevole somma di 4000 fiorini. Questo importo, unito all'accoglienza estremamente amichevole che gli era stata riservata, convinse Keplero ad abbandonare gli accordi presi con il langravio di Hesse.

Sembrava che tutto andasse per il meglio, ma a Keplero venne chiesto nuovamente di diventare cattolico: ancora una volta si trovò di fronte alla decisione tra l'abbandonare la propria coscienza per benefici esterni o conservare la libertà morale e sacrificarsi per essa. Avendo ormai capito il personaggio a cui siamo di fronte, è facile immaginare come si comportò Keplero: egli rimase fedele a se stesso, in un periodo in cui migliaia di persone, per interessi e vantaggi personali, cambiavano confessione religiosa a seconda del desiderio del proprio principe.
Dopo un tale rifiuto, come poteva sperare di rimanere in servizio presso l'imperatore? In queste circostanze, fu una fortuna che l'uomo più potente della corte imperiale, proprio quel Wallenstein che era appena giunto a Praga vittoriosamente, fosse libero da pregiudizi religiosi. L'eroe aveva già conosciuto Keplero oltre vent'anni prima, quando anonimamente con l'aiuto di un intermediario si era fatto fare un oroscopo, della cui acutezza era rimasto particolarmente impressionato. A Praga i due ebbero ora l'occasione di incontrarsi di persona, e non passarono molti mesi prima che Keplero venisse invitato a risiedere presso il ducato di Sagan, appena donato a Wallenstein. L'astronomo non considerava neppure Sagan un porto sicuro, consapevole di come la fortuna del proprio protettore fosse legata all'esito delle vicende belliche. Quella, tuttavia, era la migliore delle offerte disponibili e, dopo averla accettata, cercò di sistemare tutti gli affari in sospeso. Si diresse dapprima verso Ratisbona, dove si fermò a salutare la famiglia, poi si volse verso Linz, per rescindere formalmente il proprio incarico di matematico. Infine tornò di nuovo a Praga, dove già lo attendeva la famiglia, e con essa si trasferì a Sagan nel luglio del 1628. A dimostrazione di quanto considerasse poco definitiva questa sistemazione, si può notare come avesse lasciato a Ratisbona libri, globi e strumenti, temporaneamente depositati presso amici. In effetti, anche a Sagan arrivò presto la Controriforma e venne richiesto ai cittadini di scegliere: convertirsi o lasciare la città. Keplero fu esentato dall'ultimatum, ma rimase pressoché isolato. Si buttò allora a capofitto nel lavoro, pensando, prima di tutto, a realizzare in casa propria una stamperia, visto che in quella città non ve n'erano. Dei due anni di permanenza a Sagan, diciotto mesi furono dedicati ai viaggi per procurarsi il materiale per la stamperia.
Fu proprio in uno di questi viaggi che Keplero si ammalò gravemente. Il suo corpo si era indebolito a causa delle troppe notti di studio, delle costanti preoccupazioni, e anche del

lungo viaggio compiuto in un brutto periodo dell'anno. All'inizio non diede molto peso a questa malattia: aveva già sofferto di attacchi di febbre, ma presto cominciò a perdere coscienza e a delirare. Il 15 novembre del 1630, a mezzogiorno, Keplero esalò il suo ultimo respiro: quella sera, il giovane Jacob Bartsch, che lo aveva aiutato ad effettuare i calcoli per le effemeridi, registrò un'eclissi di Luna.

Capitolo 2

Le opere matematiche di Keplero

2.1 Le opere di Keplero

Mostriamo ora una lista completa delle opere di Keplero, non solo quelle matematiche che verranno trattate tra poco, rifacendoci alla *Bibliographia Kepleriana* stilata da Max Caspar, autore della biografia più accreditata su Keplero.
Tra parentesi è indicato il luogo di pubblicazione di ogni opera.

1590 ELEGIA de Nuptiis Joannis Huldenrici. - Tubingae, apud Alexandrum Hockium. Anno Domini M.D.XC. (Tubinga)

1592 LESSUS in funere D. M. Ulrici Holpii. - Tubingae, apud Georgium Gruppenbachium. Anno 1592. (Tubinga)

1592 DIALOGISMUS de funere Heilandi.
Oratio de Vita et Morte clarissimi Viri, eximia pietate, multiplici doctrina, et omni excellenti virtute ornatissimi Dn. M. Samuelis Heilandi, Basiliensis, Ethices in Academia Tubingensi Professoris celeberrimi, et Ducalis ibidem Stipendii Magistri Domus, ad annos 36. vigilantissimi; Anno Domini M.D.XCII. pridie Pentecostes, pie in Christo defuncti: habita à M. Erhardo Cellio, poet. et histor. ibidem Professore. Tubingae, apud Georgium Gruppenbachium. Anno M.D.XCII.
Dialogismus de funere eiusdem M.S.H. etc.

Perpetuae gratitudinis ergò, à M. Joh. Keplero, Theol. Studioso, Discipulo. (Tubinga)

[1594] CALENDARIUM und PROGNOSTICUM auf das Jahr 1595. (Graz)

[1595] CALENDARIUM und PROGNOSTICUM auf das Jahr 1596. (Graz)

1596 PRODROMUS Dissertationum cosmographicarum, continens MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM. - Tubinga, excudebat Georgius Gruppenbachius. Anno M.D. XCVI.
De Libris Revolutionum eruditissimi Viri et Mathematici excellentiss. reverendi D. Doctoris Nicolai Copernici Torunnaei Canonici Vuarmaciensis, Narratio Prima ad clariss. Virum D. Joan. Schonerum, per M. Georgium Joachimum Rheticum, una cum Encomio Borussiae scripta. - Anno M.D.XCVI.
De dimensionibus Orbium et Sphaerarum coelestium iuxta Tabulas Prutenicas, ex sententia Nicolai Copernici. Appendix M. Michaelis Maestlini Mathematum in Tubingensi Academia Professoris. (Tubinga)

[1596] SCHREIB CALENDER auff das Jahr nach des Herrn Christi vnsers Erlösers Geburt M.D.XCVII.
PRACTICA auff die vier Zeitten, auch andere Bedeuttungen der Planeten vnd Finsternussen. Gestellet auff das Jar nach Christi Geburt M.D.XCVII. - Gedruckt zu Grätz in Steyr, bey Georg Widmanstetter. (Graz)

1597 BRIEF an Nicolaus Raimarus Ursus.
Nicolai Raimari Ursi Dithmarsi de astronomicis Hypothesibus, seu Systemate mundano, Tractatus astronomicus et cosmographicus. - Pragae Bohemorum, apud Autorem. Anno M.D.XCVII. (Praga)

[1597] SCHREIB CALENDER auff das Jahr nach deßHerren Christi vnsers Erlösers Geburt M.D.XCVIII.
PRACTICA auff die vier zeiten, auch andere Bedeutungen der Planeten vnd Finsternussen. Gestelt auff das Jahr nach Christi Geburt M.D.XCVIII. - Gedruckt zu Grätz in Steyer, durch Hansen Schmidt. (Graz)

[1598] SCHREIB CALENDER auff das Jahr nach des Herren Christi vnsers Erlösers Geburt M.D.XCIX.
PRACTICA auff die bedeuttungen der siben Planeten vnd Irer Aspekten. Gestelt auff das Jahr nach Christi Geburt M.D.I.C. - Gedruckt zu Grätz in Steyer, durch Hansen Schmidt. (Graz)

[1599] CALENDARIUM und PROGNOSTICUM auf das Jahr 1600. (Graz)

1601 MELOS in primas Nuptias Gregorii Glareani.
Tres publici Actus: I. De Magisterio: II. De primis Nuptiis: III. De secund. Nuptiis. In honorem Reverendi pietate, et doctrina solidâ praestantis: Viri Dn. M. Gregor. Glareani, Stutgardiensis, nunc temporis Ecclesiae Vrbachensis in praefecturâ Schorndorffianâ Pastoris vigilantissimi, etc. tempore, more, loco, ac ritu solenni (vti sequetur) publicè habiti et amicorum ellogiis pulchrè celebrati. Tubingae, Typis Cellianis. Anno 1601.
In actum secundum Nuptiarum integerrimi, doctissimique Viri, D. M. Gregorii Glareani Stutgardiensis, Diaconi in Gruibingen, Mathematici haudquaquam postremi, cum pudicissimâ virgine Anna, honesti viri, Fabiani Kommerelli, ciuis, et quondam Senatoris Tubingensis F.Tubingae 10. Cal. Quintil. Anno 1591, celebratarum: Melos Hymeneium Pindaricum.
A Joanne Kepplero Villano, Tubingae 1591. (Tubinga)

1601 ELEGIA in obitum Tychonis Brahe.
De Vita, et Morte illustris et generosi Viri, Domini Tychonis Brahei, Equitis Dani, Domini in Knudstrup, Huenae Hellesponti Insulae Praefecti, Astronomorum hoc seculo Principis, die 24.Octobris, Anno M.DC.I. Pragae desiderati, Oratio Funebris Johan. Jesseniia Jessen. Pragae, Typis Georgii Nigrini, anno M.DC.I. 1601. (Praga)

[1601] DE FUNDAMENTIS ASTROLOGIAE CERTIORIBUS. Pragae Boemorum, Typis Schumanianis.
Der vierseitige Titelbogen liegt in 2 Fassungen vor, die sich im wesentlichen nur in der Anrede der Widmung unterscheiden. In der 1. Fassung heißt es: "Petro Wok

de Rosenbergk” etc., in der 2.: “Petro Wok Ursino, Domus Rosembergicae Gubernatori” etc. Allem nach ist dies die Reihenfolge der Drucke. Die Titel stimmen genau überein. Faksimiliert ist die 1. Fassung. (Praga)

1602 APPENDIX und INDEX zu den Progymnasmata von Tycho Brahe.
Tychonis Brahe Astronomiae instauratae Progymnasmata. Pars I. Typis inchoata Vraniburgi Daniae, absoluta Pragae Bohemiae, 1602. (Praga)

[1602] CALENDARIUM und PROGNOSTICUM auf das Jahr 1603. (Graz)

[1603] PROGNOSTICUM auff das Jahr nach Christi vnsers Heylandes geburt 1604. - Gedruckt zu Prag, in Schumans Druckerey. (Praga)

1604 AD VITELLIONEM PARALIPOMENA, quibus ASTRONOMIAE PARS OPTICA tradituR. - Francofurti, apud Claudium Marnium et Haeredes Joannis Aubrii. Anno M.DC.IV. (Francoforte)

[1604] Gründtlicher BERICHT von einem vngewohnlichen NEWEN STERN. - Gedruckt in der alten Stat Prag, in Schumans Druckerey. (Praga)

1604 Gründtlicher BERICHT von einem vngewohnlichen NEWEN STERN. - Gedruckt zu Straßburg bey Johann Carolo. Anno MDCIIII. (Strasburgo)

[1604] Gründlicher BERICHT von einem vngewöhnlichen NEWEN STERN. - Erstlich gedruckt in der alten Stad Prag, in Schumans Druckerey. (Praga)

[1604] PROGNOSTICUM auff das Jahr 1605. - Sampt einem gründtlichen Bericht von erscheinung eines vngewohnlichen Newen Sternens. - Gedruckt zu Prag, in Schumans Druckerey. Anno M.DC.V.

1605 Gründtlicher BERICHT von einem vngewöhnlichen NEWEN sehr grossen hellen gläntzenden STERN. - Erstlich gedruckt in der alten Stadt Prag, in Schumans Druckerey. Anno M.DC.V. (Praga)

1605 Gründlicher BERICHT vnd BEDENCKEN von einem vngewöhnlichen NEWEN STERN. - Nachgedruckt zu Amberg, bey Michael Forstern. MDCV. (Amberg)

[1605] DE SOLIS DELIQUIO Epistola. - Pragae, e Typographio Schumaniano. (Praga)

[1605] CALENDARIUM und PROGNOSTICUM auf das Jahr 1606. (Graz)

1606 DE STELLA NOVA. In den Titelnder der einzelnen Exemplare ist die Angabe über die Druckerei, die das Buch hergestellt hat, verschieden gefaßt. Auf dem faksimilierten Titel heißt es:
Ex Officina calcographica Pauli Sessii. Anno M.DC.VI.

I. De Stella Nova in Pede Serpentarii, et . . . Trigono igneo. - Pragae, ex Officina calcographica Pauli Sessii. Anno M.DC.VI. (Praga)

II. De Stella tertii honoris in Cygno. - Prage, ex Typographia Pauli Sessii. Anno M.DCVI. (Praga)

III. De Stella Nova in Pede Serpentarii, Pars Altera. - Francofurti, Anno M.DC.VI. (Francoforte)

IV. De Jesu Christi Servatoris nostri vero Anno natalitio. - Francofurti, in Officina Typographica Wolfgangi Richteri. M.DC.VI. (Francoforte)

1608 IDYLLION (in Nuptias Casparis Dornavii).
Casparis Dornavii et Elisabethae Glyciae Sacrum Nuptiale, Gorlicii VII. Eid. Januarii A. MDC.IIX amicorum votivo plausu honoratum. Gorlicii, Typis Jani Rhambavii.

Idyllion,

Amici fato laetus, gratulationis ergo pepigit Joann. Kepplerus Mathematicus. (Gorlice)

1608 Außführlicher BERICHT von dem newlich im Monat Septembri vnd Octobri diß1607. Jahrs erschienenen HAARSTERN oder Cometen, vnd seinen Bedeutungen. - Gedruckt zu Hall in Sachsen, durch Erasmum Hynitzsch. 1608. (Halle)

1609 PHAENOMENON SINGULARE seu Mercurius in Sole. - Lipsiae, Impensis Thomae Schureri Bibliopolae. 1609. (Lipsia)

1609 ASTRONOMIA NOVA, seu Physica Coelestis, tradita commentariis de Motibus Stellae Martis. - Anno aerae Dionysianae MDCIX. (Heidelberg)

1609 ANTWORT AUFF RÖSLINI DISCURS von heutiger zeit beschaffenheit. - Gedruckt zu Prag bey Pauln Sesse. Im Jahr 1609. (Praga)

1610 TERTIUS INTERVENIENS, das ist, Warnung an etliche Theologos, Medicos vnd Philosophos. - Gedruckt zu Franckfurt am Mayn. In Verlegung Godtfriedt Tampachs. Im Jahr 1610. (Tambach)

1610 DISSERTATIO CUM NUNCIO SIDEREO nuper ad mortales misso a Galilaeo Galilaeo. - Pragae, Typis Danielis Sedesani. Anno Domini M.DC.X. (Praga)

1610 DISSERTATIO CUM NUNCIO SIDEREO. - Huic accessit Phaenomenon singulare de Mercurio ab eodem Keplero in Sole deprehenso. - Florentiae, Apud Jo. Antonium Canaeum. 1610. (Firenze)

1610 GEDICHT.
Auf einem von Ägidius Sadeler angefertigten Stich von Tobias Scultetus aus dem Jahr 1610

Johannes Keplerus S.C.M. Mathematicus L.M.F.

1611 NARRATIO de observatis quatuor Jouis satellitibus. - Francofurti, sumptibus Zachariae Palthenii D. - M.DC.XI. (Francoforte)

1611 DISSERTATIO CUM NUNCIO SIDEREO. - Francofurti, apud D. Zachariam Palthenium. Anno M.DC.XI. (Francoforte)

1611 NARRATIO de observatis quatuor Jouis satellitibus. - Florentiae. Apud Cosmum Junctam. 1611. (Firenze)

1611 STRENA seu de Nive Sexangula. - Francofurti ad Moenum, apud Godefridum Tampach. Anno M.DC.XI.

1611 DIOPTRICE seu Demonstratio eorum quae visui et visibilibus propter Conspicilla non ita pridem inventa accidunt. - Augistae Vindelicorum, typis Davidis Franci. M.DC.XI. (Praga)

1612 NYCHTHEMERON AUGUSTALE. - Excusum Pragae, Typis Caspari Kargesii. Anno Domini M.DC.XII. (Praga)

1613 Votum gratulatorium.
Bernhard Praetorius, Corona Imperialis: hoc est, Vota et Congratulationes diversorum Auctorum, in Electionem et Coronationem Sereniss. Potentiss. et Invictiss. Pr. ac D. D. Matthiae, Rom. Imp. semper Augusti etc. Nurembergae, typis et impensis Georgii Leopoldi Fuhrmanni. Anno 1613. (Norimberga)

1613 BERICHT VOM GEBURTSJAHR CHRISTI. - Getruckt zu Straßburg, bey Carolo Kieffer. In verlegung Pauli Ledertz. Im Jahr 1613.

1614 DE VERO ANNO quo aeternus Dei Filius humanam naturam in utero benedictae Virginis Mariae assumpsit. Francofurti, Typis ac sumptibus Joannis Bringeri. M.DC.XIV. (Francoforte)

1614 Ad Epistolam Sethi Caluisij Chronologi RESPONSIO. - Francofurti, Apud Godofredum Tampachium, Typis Erasmi Kempfferi. Anno M.DC.XIV. (Francoforte)

1614 Vier BRIEFE Keplers an J. A. Magini in Bologna.
Supplementum Ephemeridum ac Tabularum Secundorum Mobilium, Jo. Antonii Magini Patavini Mathematicarum in almo Bononiensi Gymnasio Professoris, in quo habentur Ratio, et methodus perfacilis promptissime supputandi verum motum Solis, Lunae, et Martis ex nouis Tabulis secundum Tychonicas obseruationes, nunc primum accurate constructis. - Venetiis, apud Haeredem Damiani Zenarii M.DC.XIV. Nachdruck: Francofurti ad Moenum, Typis Wolfgangi Richteri, Sumptibus Joan. Theobald. Schönwetteri M.DC.XV. (Francoforte)

1615 ECLOGAE CHRONICAE ex Epistolis doctissimorum aliquot Virorum, et suis mutuis. Francofurti, Typis Joannis Bringeri, Impensis vero Godefridi Tampachii. M.DC.XV. (Francoforte)

1615 , NOVA STEREOMETRIA DOLIORUM VINARIORUM. Anno M.DC.XV. Lincii. (Linz)

1616 Außzug außder Vralten MESSEKUNST ARCHIMEDIS. - Vom Authore verlegt, vnnd gedruckt zu Lintz durch Hansen Blancken. Anno M.DC.XVI.

1616 FUNERA DOMESTICA duo luctuosissima. - Lincij, Excudit Johannes Plancus. Anno M.DC.XVI. (Linz)

1616 CALENDARIUM und PROGNOSTICUM auf das Jahr 1617. (Linz)

1617/19 EPHEMERIDES NOVAE Motuum Coelestium, ab anno vulgaris aerae M.DC.XVII. - Lincij Austriae, sumptibus Authoris. Excudebat Johannes Plancus. (Linz)

[1617] New vnnd Alter SCHREIB CALENDER sambt dem Lauff vnd Aspecten der Planeten, auch dannenhero verursachter Witterung Auff das Jahr Christi M.DC.XVIII. PROGNOSTICUM Astrologicum auff das Jahr M.DC.XVIII. Von Natürlicher Influentz der Sternen in diese Nidere Welt. Gedruckt zu Lintz, bey Johann Blancken. M.DC.XVIII. (Linz)

[1617] VNTERRICHT VOM H. SACRAMENT des Leibs vnd Bluts Jesu Christi vnsers Erlösers.

1618 EPITOME ASTRONOMIAE COPERNICANAE, Lin. I., II., III., de Doctrina Sphaerica. - Lentijs ad Danubium, excudebat Johannes Plancus. Anno M.DC.XVIII. (Lentijs ad Danubium)

1618 BERICHT über Tycho Brahes letzte Krankheit.
Coeli et siderum in eo errantium Observationes Hassiacae Illustrissimi Principis Wilhelmi Hassiae Lantgravii auspiciis quondam institutae. Et Spicilegium biennale ex Observationibus Bohemicis V. N. Tychonis Brahe. Nunc primum publicante Willebrordo Snellio. Lugduni Batavorum, apud Justum Colsterum. (Lione)

[1618] PROGNOSTICON, von aller handt bedraulichen Vorbotten künfftigen Vbelstands auff das 1618. vnd 1619. Jahr. Gedruckt im Jahr M.DC.XIX.

1619 HARMONICES MUNDI LIBRI V. - Lincii Austriae, sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. excudebat Joannes Plancus. Anno M.DC.XIX. (Linz)

1619 ADMONITIO AD BIBLIOPOLAS exteros, praesertim Italos de Opere Harmonico.

1619/20 DE COMETIS LIBELLI TRES. - Augustae Vindelicorum, Typis Andreae Apergeri, Sumptibus Sebastiani Mylii Bibliopolae Augustani, M.DC.XIX. (Augusta)

1619 STRENA seu de Nive Sexangula.
Caspar Dornavius, Amphitheatrum sapientiae socraticae jocoseriae h. e. encomia et commentaria autorum, qua veterum qua recentiorum prope omnium: quibus res aut pro vilibus vulgo aut damnosis habitae styli patrocinio vindicantur, exornantur. Hanoviae 1619. (Hannover)

[1619] PROGNOSTICUM auff das Jahr M.DC.XX. Von Natürlicher Influentz deßGestirns in diese Nidere Welt. - Gedruckt zu Lintz bey Johann Blancken. (Linz)

1620 EPITOMES ASTRONOMIAE COPERNICANAE Lib. IV., Physica Coelestis. - Lentiis ad Danubium, excudebat Johannes Plancus. Anno M.DC.XX. (Lentiis ad Danubium)

1620 KANONES PUERILES, id est Chronologia von Adam bißauff dißjetz lauffende Jahr Christi 1620. Author Kleopas Herennius, alias Phalaris von Nee-sek. - Gedruckt zu Vlm durch Johann Medern. Im Jahr von Erschaffung der Welt 5612. Im Jahr Christi M.DC.XX. (Ulma)

1621 ASTRONOMISCHER BERICHT von zweyen im Abgelauffenen 1620. Jahr gesehenen grossen vnd seltzamen Mondsfinsternussen. - Gedruckt zu Vlm, durch Johan Medern, im Jahr Christi M.DC.XXI. (Ulma)

1621 GEDICHT.
Johanni Leonhardo Breitschwert, Viro Praeclarissimo, supremos in utroque iure honores, ipsi VIII. Kal. Maii, Anno Christiano M.DC.XXI. meritissimo Collatos, Animitus gratulantur amici. Tubingae, Typis Johan-Alexandri Cellii. Anno M.DC.XXI. (Tubinga)

1621 GEDICHT.
Fati mathematici, hoc est quod actiones humanae, eventusque sublunares ad vim siderum et posituram stellarum necessario nectantur, defensio. Tubingae M.DC.XXI. (Tubinga)

1621 EPITOMES ASTRONOMIAE COPERNICANAE Lib. V., VI., VII., Doctrina Theorica. - Francofurti, Sumptibus Godefridi Tampachij. Anno M.DC.XXI. (Francoforte)

1621 PRODROMUS Dissertationum cosmographicarum, continens MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM. - Francofurti, Recusus Typis Erasmi Kempferi, sumptibus Godefridi Tampachii. Anno M.DC.XXI. (Francoforte)

1622 Pro suo Opere Harmonices Mundi APOLOGIA. - Francofurti, Sumptibus Godefridi Tampachii. Anno M.DC.XXII. (Francoforte)

1622 EPITOMES ASTRONOMIAE COPERNICANAE Lib. IV.

1623 SCHREIBKALENDER sampt dem Lauff vnnd Aspecten der Planeten auff das Jahr Christi M.DC.XXIII.
DISCURS von der Grossen Conjunction im Monat Julio deßM.DC.XXIII. Jahrs. Sambt beygefügtem gewohnlichen PROGNOSTICO. Gedruckt zu Lintz, durch Johann Blancken. M.DC.XXIII. (Linz)

1623 DISCURS von der Grossen Conjunktion im fewrigen Zeichen deßLöwen. - Nürnberg, bey Johann Friderich Sartorio (Norimberga)

1623 GLAUBENSBEKANDTNUS vnd Ableinung allerhand desthalben entstandener vngütlichen Nachreden. - M.DC.XXIII.

[1623] PROGNOSTICUM METEOROLOGICUM, Auff das Jahr M.DC.XXIV. - Gedruckt durch Abraham Wagenmann.

1624 BRIEF an Ludwig Hohenfelder.
Weiterer Bericht von der Fliegenden Liecht-Kugel, welche den 7.Novembris, Jüngsthin, am hellen Himmel erschienen. Verfertigt durch Wilhelm Schickhardten, der

Heiligen Sprach Professorn zu Tübingen. Bey Johann Alexandri Cellii Wittib. Im Jahr 1624.

1624 CHILIAS LOGARITHMORUM. - Marpurgi, Excusa Typis 1624 Casparis Chemlini. MDCXXIV. (Marburgo)

1625 SUPPLEMENTUM CHILIADIS LOGARITHMORUM. - Marpurgi, Ex officina Typographica Casparis Chemlini. MDCXXV. (Marburgo)

1625 Tychonis Brahei Dani HYPERASPISTES, adversus Scipionis Claramontii Anti-Tychonem. - Francofurti, Apud Godefridum Tampachium. M.DC.XXV. (Francoforte)

[1625] NOTAE ad Epistolam D.D. Matthiae Hafenrefferi.

1625 Des fürtrefflichen Weltweisen Römers, Cornelii TACITI HISTORISCHER BESCHREIBUNG das Erste Buch. - In verständtlicher HochTeutscher Sprach in Druck geben. Durch Ludovicum Kepplerum, Johannis Keppleri, Sac. Caes. M^{tis} Mathematici Filium. Anno M.DC.XXV.

1627 TABULAE RUDOLPHINAE. - Ulmae, Anno M.DC.XXVII. (Ulma)
1. SPORTULA Genethliacis missa de Tabularum Rudolphi usu in computationibus astrologicis: cum modo dirigendi novo et naturali.
2. WELTKARTE.

1629 AD EPISTOLAM JACOBI BARTSCHII RESPONSIO: De Computatione et Editione Ephemeridum. Typis Saganensibus. Anno M.DC.XXIX.

1629 DE RARIS MIRISQUE ANNI 1631. PHAENOMENIS Admonitio ad Astronomos. - Lipsiae, Joan-Albertus Minzelius excudebat. Anno M.DC.XXIX. (Lipsia)

1630 R. P. Joannis Terrentii Epistolium cum COMMENTATIUNCULA Joannis Keppleri. - Sagani Silesiae, Excuderunt Petrus Cobius et Johannes Wiske. Anno M.DC.XXX. (Żagań)

1630 Admonitio ad Astronomos DE RARIS MIRISQUE ANNI 1631. PHAENOMENIS. - Francofurti Apud Godefridum Tampachium. Anno M.DC.XXX. (Francoforte)

1630 Tomi primi EPHEMERIDUM Pars II. ab anno M.DC.XXI. ad M.DC.XXVIII. Pars III. a M.DC.XXIX. in M.DC.XXXVI. - Impressae Sagani Silesiorum, in Typographeio Ducali, sumptibus Authoris. Anno M.DC.XXX. (Zagań)

1631 Joan. Kepleri Logarithmorum Logisticorum HEPTACOSIAS quintuplicata, sive TRICHIL-HEXACOSIAS Jac. Bartschii.

1634 SOMNIUM seu Opus Posthumum de Astronomia Lunari. Divulgatum a M. Ludovico Kepplero Filio. Impressum partim Sagani Silesiorum, absolutum Francofurti, sumptibus haeredum authoris. Anno M.DC.XXXIV. (Ulma)

2.2 I contributi di Keplero alla matematica

Molto spesso nella storia della matematica, a differenza di come accade per le altre scienze, è difficile ricostruire i collegamenti che intercorrono tra le scoperte e il contesto storico in cui esse sono avvenute.[1] Questo comporta sicuramente anche una complessità didattica non indifferente, in quanto i risultati rischiano di essere presentati come appartenenti ad uno stesso momento storico non ben precisato, senza alcun criterio cronologico e di significato. Questo può chiaramente generare confusione e non far apprezzare a pieno le motivazioni per cui si sia potuti arrivare a una determinata scoperta.
Fortunatamente non è questo il caso di Keplero: il carattere delle sue scoperte infatti, non solo nell'astronomia ma anche in matematica, è tipico del periodo storico in cui ha vissuto[2], come abbiamo potuto evincere anche dalla biografia del capitolo precedente. Un'indagine approfondita sul background intellettuale del sedicesimo secolo può essere pertanto potenzialmente feconda non solo per una migliore comprensione del suo lavoro, ma anche per apprezzare le origini del pensiero dell'illuminismo.[3]
Studiare i risultati di Keplero ci fa quindi immergere nel contesto storico e comprendere quali problemi fisici e matematici caratterizzassero quell'epoca. Vediamolo più approfonditamente nella prossima sottosezione.

[1]Struik, p. 39.
[2]Ibidem, p. 40.
[3]Methuen.

2.2.1 La matematica nelle scoperte astronomiche

È certamente ben risaputo come le sue scoperte astronomiche, prima fra tutte la sua teoria sul sistema solare, nascano in un'epoca in cui la battaglia per le concezioni cosmologiche era nel suo apogeo e oggetto di controversie fra le nazioni.[4] Keplero, uomo profondamente religioso, non poteva sottrarsi a tale disputa, la quale vedeva da una parte la Chiesa, che rivendicava la centralità dell'uomo, e quindi della Terra, nell'universo, e dall'altra la teoria copernicana, che ribaltava la visione astronomica riconosciuta fino ad allora. Questo sconvolgimento fu reso possibile anche dall'elevato numero di innovazioni tecnologiche e invenzioni che caratterizzarono quel periodo: le stesse osservazioni di Brahe, sul quale si innestò e si fondò il lavoro di Keplero, furono rese possibili grazie al perfezionamento degli strumenti di osservazione dell'epoca. Questo rappresentava un'occasione unica per l'astronomo tedesco, che ormai aveva come unico obiettivo trovare una soluzione al grande quesito sulla struttura del cosmo.

Il discorso non cambia riguardo all'aspetto più matematico dell'opera di Keplero: anche in questo ambito i suoi sforzi si indirizzavano unicamente verso uno scopo chiaro e ben preciso, ovvero cercare di interpretare il cosmo e restituire un'immagine definitiva dell'universo. Tutto della sua opera, della sua persona, era teso e rivolto ad un unico scopo: anche quando era intento ad approssimare forme con poligoni regolari o a misurare il volume di una botte di vino, come vedremo più approfonditamente nel prossimo capitolo, o quando cercava di stimare il valore di un integrale ellittico o sommergeva il lettore con un'infinità di conti, dietro tutto questo c'era sempre Keplero intento a studiare le leggi dell'universo.

Ma come si collega tutto ciò alla matematica? Come abbiamo già richiamato più volte, egli era alla continua ricerca di una profonda armonia alla base dell'universo, e da questo punto di vista il primo e l'ultimo dei libri "matematici" di Keplero risultano i più caratteristici: sia il *Mysterium cosmographicum*, pubblicato quando aveva solo 25 anni, che il suo *Harmonices mundi*, che apparve quando aveva 48 anni, sono esemplari di una continua ricerca di simmetrie da parte dell'astronomo.

Il materiale principale su cui Keplero si concentra in queste opere è infatti costituito da solidi e poligoni regolari, combinazioni di essi in modelli, i numeri figurati, armonie

[4] Struik, p. 40.

musicali e altre semplici relazioni numeriche, i quali vengono combinati con perspicacia. Queste non sono le uniche opere con contenuti matematici dell'astronomo. Anche il trattato *Astronomia nova*, più comunemente nota perché contenente le prime due leggi di Keplero, racchiude in realtà una grande abbondanza di risultati matematici, come la frequente introduzione di infinitesimi e di somme infinite, ovvero ciò che oggi chiamiamo comunemente integrali.[5] Si capisce quindi come quest'opera assuma una fondamentale importanza per l'invenzione del calcolo, nonostante qualcuno rimproveri a Keplero la mancanza di rigore, come accade per la *Nova stereometria doliorum vinariorum*: quest'opera infatti divide i lettori tra chi la considera un capolavoro accuratamente progettato e chi la vede come una sorta di diario in cui lo scienziato accumula successi e sconfitte. Nonostante sia Galileo sia Cartesio, i due maggiori uomini di scienza della sua epoca, abbiano praticamente ignorato l'*Astronomia Nova*, nessuno dai tempi di Archimede aveva usato gli infinitesimi così liberamente e con tanta efficacia e, nonostante le critiche, i risultati rimangono ben saldi, tanto da venire ripresi successivamente come base per scoperte successive. L'*Astronomia nova* infatti porta con sé anche nuovi metodi matematici, come ad esempio l'equazione di Keplero, una delle prime equazioni trascendentali che collega x e sin x[6]:

$$x = e \sin x + M; e, M costanti. \tag{2.1}$$

Keplero la risolse solo in un caso particolare utilizzando valori speciali. Poco più tardi Snellius avrebbe affrontato un simile problema trascendentale: questo ci fa capire la continuità di intenti che accomunava gli scienziati dell'epoca.

In questa opera troviamo anche un'approssimazione per il perimetro dell'ellisse, indispensabile nel calcolo del moto dei pianeti dopo aver determinato che i corpi celesti percorrevano orbite ellittiche, ma anche diverse integrazioni, trovate durante i suoi numerosi tentativi per trovare una spiegazione soddisfacente al moto delle stelle. Troviamo infatti un calcolo equivalente al risultato

$$\int_0^{\phi} \sin\phi \, d\phi = 1 - \cos\phi \tag{2.2}$$

[5] Ibidem, pp. 40-42.

[6] Ibidem, p. 43.

Keplero la trovò in maniera empirica, sommando seni di angoli crescenti via via di 1° ($\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + ...$). Poco più tardi, studiando Pappo, avrebbe trovato anche un'esatta verifica geometrica, pubblicata poi nelle *Epitomes Astronomiae* (1619).[7]
Oltre a tutti questi nuovi contributi, l'opera rappresenta anche una vera e propria rivendicazione della teoria delle sezioni coniche di Apollonio, la quale venne trasformata da Keplero in uno dei primi strumenti dello scienziato applicato.[8]

2.2.2 La *Nova stereometria doliorum vinariorium*

Apollonio non è l'unico "maestro" greco da cui l'astronomo tedesco rimase affascinato: Keplero era infatti un profondo conoscitore e studioso dei lavori di Archimede, e non poteva quindi esimersi dal riprendere e sviluppare i suoi metodi.[9] L'occasione gli venne offerta da un episodio insolito: recandosi a comprare il vino per il suo secondo matrimonio, si era infatti reso conto che il venditore utilizzava uno stratagemma molto più veloce dei metodi antiquati per calcolare il contenuto delle botti: il giovane aveva posto un'asta graduata all'interno del barilotto, in diagonale, e direttamente ne aveva dedotto la capacità, senza alcuna ulteriore misura. Keplero allora si era riproposto di dare una giustificazione matematica alla pratica austriaca: il calcolo esatto del volume di queste botti sembrava un campo perfetto per poter applicare i teoremi di Archimede riguardanti sferoidi e conoidi.[10]
Mentre Archimede si era limitato allo studio di volumi di solidi generati dalla rotazione di una sezione conica attorno al suo asse principale, Keplero generalizzò questo discorso ruotandole attorno a una retta qualunque. Fu così che l'astronomo sviluppò una nuova teoria sugli ellissoidi e altre figure di rotazione, altro decisivo passo verso l'invenzione del calcolo.[11] Anche se i procedimenti con cui Keplero arrivò alle sue conclusioni sono considerati un importante momento della storia del calcolo infinitesimale e dello studio dei problemi di massimo e minimo, egli non era conscio dei contributi che stava apportando allo sviluppo della matematica ma, ancora una volta, riteneva di sfruttare semplicemente

[7]Ibidem, pp. 46-47.
[8]Ibidem, p. 43.
[9]Idem.
[10]Lombardi, p. 152.
[11]Struik, pp. 43-44.

l'eredità di Archimede. L'omaggio al grande matematico siracusano è anche in questo caso esplicito, tanto che l'opera contiene un lungo supplemento intitolato *Calcolo dei volumi a partire dall'opera di Archimede.*[12]

All'interno di questa sua teoria, l'astronomo potè distinguere 93 differenti solidi di rivoluzione (come ad esempio il toro) di cui calcolò il volume, come aveva fatto Archimede, ma con metodi totalmente diversi dal matematico greco. Keplero rifiutò infatti il "metodo di esaustione", pensando di poter ottenere gli stessi risultati di Archimede in maniera meno complicata: egli scelse infatti un approccio più diretto, tipico dell'analisi moderna, che ricorda il ragionamento insito nella geometria differenziale.[13] Keplero partì dalla considerazione che, per consentire un sistema tanto semplice di misura, tutti i barili utilizzati in Austria dovevano condividere una proprietà geometrica. Impostò quindi la ricerca del barile che, a parità di diagonale, avesse la massima capacità. Dopo numerose prove, si rese conto che il volume ottimale si otteneva quando la lunghezza delle doghe incurvate verticali era pari a 3/2 il diametro della base e che, per determinare la capacità di un barile austriaco, era sufficiente scrivere, a fianco di ciascuna tacca dell'asta graduata, il cubo del numero progressivo corrispondente a quella tacca.[14]

Nonostante la sua modernità, questo metodo fu attaccato per mancanza di rigore da Paul Guldin, astronomo contemporaneo di Keplero: tuttavia, il tempo ha mostrato la fecondità di questo sistema e rivendicato il suo rigore.

Come spesso accade per le scoperte di Keplero, anche in questo caso una ricerca scientifica partita da un problema di vita comune, o anche da qualcosa che semplicemente lo affascinava, portò con sé risultati di importanza ben più grandi. Keplero non si fermò infatti al solo calcolo dei volumi, ma si avventurò nei problemi di massimo e minimo riguardanti i cilindri, i coni e le botti di vino. Fu così che scoprì che la variazione di una funzione è molto piccola nelle vicinanze di un valore estremo, risultato che avrebbe influenzato i successivi lavori di Fermat e Leibniz sullo stesso tema.[15]

[12]Lombardi, p. 153.
[13]Struik, p. 46.
[14]Lombardi, pp. 152-153.
[15]Struik, p. 44.

2.2.3 I contributi di Keplero alla teoria delle figure regolari

Le figure regolari nel piano e nello spazio offrirono più di un problema geometrico a Keplero. La profonda convinzione della possibilità di spiegare la natura tramite semplici simmetrie lo condussero a molti schemi e ad importanti contributi alla geometria.
Il primo risultato di Keplero fu la scoperta di due poliedri a stella regolari. Per secoli lo studio dei poligoni a stella era stato limitato al piano: tra coloro che li studiarono ricordiamo in particolare Thomas Bradwardine (Chichester, 1290 - Lambeth, 1349), il quale aveva ampiamente approfondito l'argomento nel suo libro *Geometria speculativa*. Keplero fu il primo ad estendere questa nozione allo spazio: al giorno d'oggi conosciamo quattro poliedri regolari a stella, solitamente attribuiti a Poinsot che li scoprì nel 1809, ma in realtà due di essi furono scoperti e riportati da Keplero già nel libro II dell'*Harmonices Mundi* (1619). Si tratta del dodecaedro del terzo e del settimo tipo. Questa scoperte in realtà furono precedute da risultati simili sui poligoni a stella, contenuti sempre nell'*Harmonices Mundi*.
Tuttavia, già nel precedente *Mysterium cosmographicum* compare un poligono regolare di 40 lati (Fig. 2.1), del tredicesimo tipo: Keplero lo ottenne il 19 luglio 1595 durante una lezione al collegio di Graz, disegnando una struttura costituita da una successione di apparenti triangoli equilateri inscritti in una circonferenza.[16] In realtà i triangoli non si chiudevano mai perfettamente, in quanto gli angoli non erano proprio di $60°$, ma di $58°30'$. Così, dopo due vertici, la linea spezzata non tornava nel punto di partenza, ma solo accanto a quello, dando il via a un nuovo triangolo. In questo modo, Keplero ottenne una circonferenza circoscritta ed una inscritta ai triangoli.[17] Ma come si collegava questo all'astronomia e allo studio del cosmo, principale obiettivo di Keplero? Il rapporto dei raggi di queste circonferenze doveva essere utilizzato nel confronto dei raggi delle orbite dei pianeti. Ma Keplero non si fermò qui, arrivando così al cuore del *Mysterium cosmographicum*: un altro tentativo di esprimere questo rapporto, questa volta coi raggi delle sfere inscritte e circoscritte, lo portò ad immaginare il sistema solare come un'alternanza di poliedri regolari e sfere ad essi circoscritte. Egli inscrive quindi un cubo in una sfera, un tetraedro nella sfera inscritta nel cubo, un dodecaedro nella sfera inscritta nel tetrae-

[16] Ibidem, pp. 49-50.
[17] Lombardi, pp. 26-27.

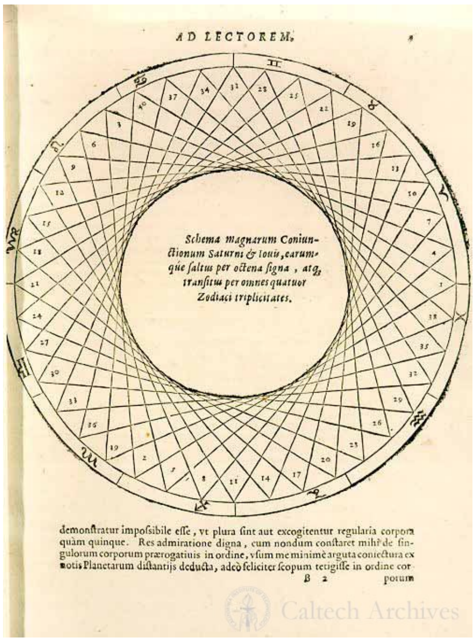

Figura 2.1: Poligono regolare di 40 lati.

dro e così via.[18]
Questo modello di sistema solare gli fu ispirato dalla profonda esigenza di ricercare una profonda armonia nell'universo, impronta indelebile del suo creatore. L'idea di un mondo che manifestasse armonia in ogni sua parte era uno dei cardini del pensiero di Keplero, e ricorre infatti costantemente in ogni sua opera. La fiducia nella possibilità di mettere in luce queste regolarità era il segreto della tenacia di Keplero nella ricerca di leggi di natura. Proprio lo studio di questa armonia lo condusse ad una ulteriore tematica di ricerca, quella di riempire il piano e lo spazio tramite figure regolari. Egli risolse completamente il problema per il piano nell'*Harmonices mundi*, tenendo anche in considerazione i poligoni a stella per la tassellazione.
Questo problema non era certo una novità: molti autori si erano confrontati con esso, spesso cadendo, come Aristotele e Bradwardine, nell'erronea convinzione che lo spazio potesse essere riempito con tetraedri regolari.
Un altro aspetto indagato da Keplero, nel suo trattato sulla forma dei fiocchi di neve (*Strena seu de nive sexangula* - Il dono ovvero Sulla neve esagonale), è il modo in cui

[18]Struik, pp. 50-51.

possono essere disposte le circonferenze nel piano e le sfere nello spazio, l'argomento preferito di Lord Kelvin nelle sue congetture sulla struttura dell'atomo.[19] Prima di studiare il caso specifico della neve infatti, Keplero generalizzò il discorso al tema delle forme naturali simmetriche, esaminando in dettaglio l'architettura degli alveari e la disposizione dei semi all'interno delle melagrane. Le sfere inizialmente rappresentano proprio l'astrazione dei semi di melagrana, ma presto si trasformano in oggetti astratti, detti *sferule* o *globuli*, in grado di fungere da modello per una generica sostanza, immaginata come un insieme discontinuo di piccole parti identiche.

Egli mostra come, in generale, esistono due disposizioni tridimensionali che consentono di sistemare in maniera efficiente un insieme di sfere nello spazio. La prima, in cui ogni fila di sfere è posizionata esattamente sopra l'altra, ha lo svantaggio di non ottimizzare l'occupazione dello spazio. Si dimostra più efficiente la disposizione in cui ciascuna fila è leggermente traslata rispetto alla precedente, in maniera tale che ogni sfera vada a cadere nell'interstizio tra due sfere consecutive della stessa fila. Viene così enunciata la celebre *congettura di Keplero*, con la quale egli sosteneva che non esistesse alcun modo di sistemare delle sfere nello spazio con densità media superiore a quella dell'impacchettamento cubico a facce centrate.

Potrebbe sembrare un'osservazione quasi banale, visto che lo stesso Keplero ammise che la configurazione più densa fosse la stessa disposizione con cui l'ortolano dispone le arance in un negozio di frutta, come quella rappresentata in Fig. 2.2.[20] Per quanto sia di facile comprensione, questa congettura si è dimostrata di assai difficile dimostrazione ed ha angustiato i matematici per i secoli successivi. Fu Carl F. Gauss a dare una prima dimostrazione parziale della congettura nel 1831, ma tuttavia mancava ancora una dimostrazione generale. Proprio per questo motivo, Hilbert la pose al numero 18 della sua famosa lista dei 23 problemi non risolti della matematica, che venne presentata l'8 agosto del 1900 al Congresso internazionale dei matematici di Parigi.[21] Essa è stata dimostrata solo nel 2005 da Thomas Hales della University of Pittsburgh, in Pennsylvania.

[19] Idem.

[20] Lombardi, pp. 147-148.

[21] Ibidem, pp. 148-149.

Figura 2.2: Thomas Hales illustra la congettura di Keplero.

2.2.4 I contributi alla semplificazione del calcolo

Leggendo le opere di Keplero, ci si rende conto dell'incredibile quantità di calcoli che l'astronomo ha dovuto affrontare durante la sua intera carriera. Si può perciò comprendere come Keplero fosse uno dei maggiori promotori della novizia arte del calcolo e dell'uso dei logaritmi. Prima che i lavori di Napier (meglio conosciuto come Nepero) e Bürgi fossero conosciuti, era solo questione di applicare le quattro forme conosciute con pazienza. Keplero utilizzava anche scorciatoie nelle formule, riducendo le moltiplicazioni alle ben più semplici addizioni, ad esempio attraverso le formule di prostaferesi, ma questo non era soddisfacente. Un esempio delle formule di prostaferesi di quel tempo, con cui un prodotto di funzioni trigonometriche poteva essere trasformato in una somma, è dato da

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \tag{2.3}$$

Nel 1619, quando entrò in possesso di una copia del libro di Napier, ne rimase profondamente colpito, tanto da scrivere una lettera allo stesso Napier nel 1620: purtroppo, Keplero non sapeva della sua morte, avvenuta nel 1617. Poco dopo, pubblicò la propria teoria e le proprie tabelle dei logaritmi all'interno del suo trattato *Chilias logarithmorum*: i logaritmi di Keplero differivano da quelli di Napier, ma erano comunque legati da una relazione. Se infatti consideriamo $\log_K a$ il logaritmo kepleriano e $\log_N a$ il logaritmo neperiano di un numero a, allora

$$\log_N a = 10^7 nat \log \frac{10^7}{a} \tag{2.4}$$

$$\log_K a = nd, a = 10(1-d)^n \tag{2.5}$$

con n grande (a grande potenza di 2).
Oltre a Napier, anche Jost Bürgi ebbe una considerevole influenza nella scoperta dei logaritmi, in parte attraverso la sua influenza su Keplero. Bürgi lo influenzò anche nell'adozione di un'altra semplificazione nei calcoli, il punto decimale, semplificazione che utilizzò ma di cui lasciò la pubblicazione a Keplero.
La grande importanza dell'introduzione del punto decimale non risiedeva tanto nella pura innovazione formale, ma fu un passo decisivo per sostituire le frazioni sessagesimali con quelle decimali. Purtroppo le tavole kepleriane, che contenevano ancora le frazioni sessagesimali per la misura degli angoli, non ebbero vita lunga, in quanto poco dopo vennero pubblicate completamente le tavole di logaritmi di Briggs tra il 1628 e il 1629. Ciò nonostante, Keplero usò i propri logaritmi nelle *Tavole rudolfine* del 1627: si trattava del primo libro astronomico contenente anche tavole di logaritmi.[22]

2.3 Ulteriori contributi alla matematica

Abbiamo visto nelle sezioni precedenti come Keplero abbia profondamente cambiato i metodi di calcolo dei volumi: i procedimenti rigorosi giunti a lui dagli antichi erano infatti troppo limitati, e questo lo spinse a trovarne di più moderni.[23] Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, è proprio questa modernità a metterlo al centro della scena matematica e a rendere i suoi risultati trampolino di lancio per teorie di grande rilievo. Accade qualcosa di molto simile anche nei suoi lavori di tema più geometrico: approfondendo antichi testi di riferimento, egli aggiunge sempre uno sguardo moderno e originale. Analizzando gli studi su *Le coniche* di Apollonio, egli si rese conto, studiando le differenti sezioni di un cono nel suo *Dioptrice*, della transizione dall'ellisse all'iperbole passando per la parabola, come si può osservare in Fig. 2.3. In particolare, egli sottolineò il fatto che uno dei fuochi dell'ellisse andava all'infinito quando si passava dall'ellisse alla parabola. Questo piccolo riconoscimento darà il via a una catena di idee che, alcuni decenni dopo, sfocerà nel lavoro di Desargues, uno dei padri della geometria proiettiva.

[22]Struik, pp. 52-54.
[23]Ibidem, p. 55.

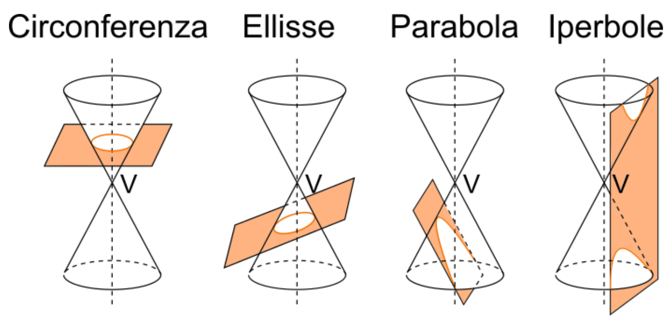

Figura 2.3: Sezioni coniche.

Christian Frisch sottolinea inoltre che nel *Paralipomena in Vitellionem* (1604) Keplero, all'interno di un problema di ottica geometrica, parla già di circonferenza osculatrice, più di 75 anni prima di Leibniz. Tuttavia, va precisato che in realtà questa circonferenza osculatrice veniva trattata come punto di una parabola, come se fosse una cosa ben nota. Questi fattori fanno pensare che in realtà Keplero abbia solamente proposto una riformulazione personale del teorema di Apollonio.

Anche l'illustre Cantor rivolse la propria attenzione alle scoperte di Keplero, in particolare al Teorema 27 del "Supplementum" alla *Stereometria Doliorum*. In questo teorema, Keplero mostrò come si potesse determinare se una sezione conica era una parabola, un'ellisse o una circonferenza, conoscendo solamente un vertice, l'asse passante per esso e una tangente arbitraria.

Questo, secondo Cantor, rappresentava il primo problema di inversa della tangente. Tuttavia, bisogna essere cauti dal momento che la soluzione del problema non coinvolge alcun infinitesimale, e pertanto non può essere considerato come primo esempio di differenziale o calcolo integrale.

Infine, dobbiamo ricordare che Keplero non modificò la matematica solo dal punto di vista dei contenuti, ma diede il suo contributo personale anche introducendo traduzioni adeguate in tedesco per i termini matematici latini. Questo assume una particolare importanza soprattutto considerando il periodo storico in cui Keplero si inserì, durante il quale la lingua degli studenti tedeschi versava in terribili condizioni. Per agevolarli, nel 1611 l'astronomo si dedicò anche ad una traduzione di Euclide, *Auch ich bin mit Ähnlichem beschäftigt, doch als schönstes Ziel schwebt mir vor, auch die Fachausdrücke deutsch wiederzugeben.* Questa venne riportata nell'edizione tedesca della *Stereometria*

Doliorum, insieme ad una lista dei nuovi termini tedeschi.
Anche se alcuni di questi vocaboli sono caduti in disuso, molti sono invece diventati parte integrante del vocabolario tedesco. Keplero non fu il primo a cimentarsi con una tale impresa: già Dürer, prima di lui, si era confrontato con questo problema. Contemporaneamente a Keplero, anche Stevino stava compiendo lo stesso lavoro con la lingua olandese: questo evidenzia una grande necessità di parole nuove e più vicine alle persone, fruibili da tutti per parlare di matematica.

Capitolo 3

Nova stereometria doliorum vinariorum

In questo capitolo presenteremo la prima traduzione italiana dell'opera di Keplero. Il punto di partenza del nostro lavoro è stata la lettura dell'edizione inglese della monografia di Keplero, recentemente pubblicata dallo storico della scienza Eberhard Knobloch.[1] L'opera si divide in tre parti:

- PARTE I, LA GEOMETRIA SOLIDA DEI CORPI CURVI E REGOLARI: essa contiene trenta teoremi ed anche il lungo supplemento ad Archimede sulla geometria solida delle figure che sono più simili a conoidi e sferoidi;
- PARTE II, LA GEOMETRIA SOLIDA DELLA BOTTE AUSTRIACA, IN PARTICOLARE A QUALE TIPO DI FIGURE TRATTATE PRECEDENTEMENTE APPARTIENE LA FORMA DEL BARILE? Questa seconda parte contiene ventinove teoremi.
- PARTE III, L'USO DELL'INTERO LIBRO SULLE BOTTI.

Queste parti sono precedute da un'introduzione, contenente la dedica al mecenate ed un breve preambolo, che andiamo ora a tradurre.

[1] Kepler.

AL SIGNORE PIÙ ILLUSTRE
SIGNORE MASSIMILIANO,

Signore DEL LIECHTENSTEIN e Nickelspurg, Signore a Ravensburg, a Hohenau, Butschaviz, a Poseritz e Neograd, al consigliere, ciambellano e supervisore della stalla e così via della Santa Maestà Imperiale,

e inoltre
AL SIGNORE ILLUSTRE E GENEROSO SIGNORE HELMHARD JÖRGER,

a Tollet, Keppach, Grebing e Hernals, Signore a Steireck ed Erlach, barone di Creuspach; ereditario, capo di palazzo provinciale dell'Arciducato d'Austria sopra Enns; consigliere della Santa Maestà Imperiale alla tesoreria del tribunale; e Superiore temporaneo tra i baroni della provincia menzionata;

Ai miei più gentili signori

Quando ho sposato la mia nuova sposa lo scorso novembre, Signore illustrissimo, barone illustre e generoso, Signori gentilissimi, in un momento in cui dopo un'abbondante e altrettanto nobile vendemmia l'Austria spedì moltissime navi da trasporto sul fiume Danubio e condivise le sue ricchezze con la nostra Baviera superiore e inferiore, l'intera banca di Linz è stata vista essere ostruita da barili di vino che potevano essere comprati ad un prezzo accettabile. Stava diventando conveniente per il dovere di un marito e buon padre di famiglia di procurarsi le bevande necessarie per la mia casa. Pertanto alcuni recipienti furono portati a casa e conservati in una cantina.
Dopo quattro giorni giunse il venditore con un'asta di misura. Con questa stessa asta egli esplorò indiscriminatamente ed indifferentemente tutti i barili di vino senza prestare attenzione alla forma, e senza raziocinio o calcolo. Egli mise diagonalmente la punta dell'asta nell'apertura di riempimento dell'intero barile di vino giù fino al punto più profondo di entrambe le coperture circolari di legno che spesso chiamiamo comunemente fondi. Dopo che questa lunghezza dal punto più alto della pancia al più basso di entrambi i bordi circolari apparve uguale su entrambi i lati egli annunciò il numero di secchi che i barili di vino contenevano, in base al segno numerico che era inciso sull'asta in quel punto dove la sua lunghezza finiva. Il prezzo fu calcolato in base a questo numero.

Fui sorpreso che la linea obliqua disegnata attraverso il volume di metà di un barile potesse essere una caratteristica della capacità. Dubitai anche dell'affidabilità di questa misurazione perché un barile di vino molto basso tra due coperture circolari e altre due potrebbe avere la stessa lunghezza dall'apertura di riempimento al punto più basso di una delle coperture circolari se i fondi circolari fossero solo un po' più ampi e quindi i barili di vino di capacità davvero piccola. Mi venne in mente la laboriosa misurazione usata nel Rhine, dove riempivano i barili di vino e procedevano numerando i singoli secchi di liquido con un disgustoso consumo di tempo. E bruciavano i segni della capacità nei recipienti esplorati. O laddove tuttavia essi misurino molto i diametri delle piastre rotonde e la lunghezza delle doghe curvate anche se usano aste di misura. Essi li moltiplicano l'uno per l'altro e applicano varie precauzioni riguardo alla misura relativa delle piastre rotonde tra loro stesse, riguardo all'ampiezza della pancia, alla curvatura delle doghe. Ed essi non si soddisfano l'un l'altro. Alcuni addirittura accusano gli altri di un errore.
Quindi quando ho imparato che qui questo utilizzo dell'asta diagonale era stata stabilita dall'autorità pubblica, e che i misuratori avevano prestato giuramento ad esso, sembrò non essere sconveniente per un nuovo marito esplorare, in base a leggi geometriche, un nuovo fondamento per la certezza matematica di questa misurazione abbreviata, davvero necessaria per il patrimonio, e per portare alla luce i suoi fondamenti, se ce ne fossero.
Quando questa supposizione ebbe successo, con qualche piacevole diversivo, negli ultimi tre giorni, in modo che qualcosa di certo potesse essere annunciato, e avevo già affilato la matita di ardesia per annotare ed elaborare questa dimostrazione - poiché era già compresa dalla mia mente - non ho avuto molto tempo per cercare coloro a cui avrei dovuto rivolgermi attraverso la dedica all'inizio del libretto. Chi uguaglierebbe l'astuzia delle dimostrazioni tramite la rettitudine del genio e chi onorerebbe la loro bellezza col solo desiderio? Infatti il vostro fisico scozzese Dr. John Wodderborn, illustrissimo Signore del Liechtenstein mi ha elogiato voi come una tale persona, un uomo espertissimo nelle arti matematiche e quindi mio ottimo amico che semplicemente intervenendo rinnovò il mio ricordo di voi tramite la sua presenza. Come una tale persona conosco anche voi, illustre e generoso barone Jörger, grazie ad una lunga conoscenza. Siete così uguale in questo elogio da far sembrare che io, un protetto di entrambi, faccia a uno di voi un'ingiustizia

se ho menzionato solo uno di voi.
E cosa mi impedisce di chiamarvi colleghi qui? In un'occupazione dove in effetti non è più questione dell'emulazione di nobiltà, dignità, virtù politiche, o qualsiasi cosa che il matematico vede usualmente, ma solo di genialità, e se posso aggiungere, della mia protezione.
Quindi ho deciso senza alcuna esitazione di preparare un regalo di nuovo anno, Vostra Generosità, per il primo giorno di gennaio che si avvicina di soppiatto, sulla base della mia congettura tramite la quale verrebbe ricordata ad entrambi la gratitudine a Dio; per questi e gli altri favori dell'anno passato, e voi mecenati, a causa della dedizione di una cosa piacevole, e io autore, a causa dei lettori e dei giudizi intelligenti, godremmo altrettanto piacere reciproco; e in modo che questo onorevole risultato della nostra Austria, o uomini più celebri specialmente della nobiltà austriaca, e il metodo di misurazione del vino, o proprietari dei più grandi vigneti che dovrebbero avere vino a portata di mano fino alla munificenza, abbiano dei mecenati.
Addio, nobili aristocratici, e godetevi questa bellissima ipotesi, il vostro solito piacere, e trascorrete allegri e felici l'anno che si avvicina di soppiatto con tutti i tipi di beni, e provvedete a me con il vostro mecenatismo nel futuro come anche voi eravate soliti fare.
Linz, 17 dicembre dell'anno 1613 dei cristiani occidentali.
Alla vostra Generosità illustrissima.
Il matematico più umile dell'Imperatore Imperiale Mattia e delle sue proprietà leali dell'Austria su Enns

Johannes Kepler

GEOMETRIA SOLIDA DELLE BOTTI
PREAMBOLO SUL CALCOLO DELLA FIGURA DI UN BARILE DI VINO

Ogni dimensione artistica e vantaggiosa dello spazio richiede una forma regolare poiché i recipienti senza una forma certa, regolare disprezzano l'intelletto e si aspettano solo la mano e numerazioni successive del liquido versato.
Costretti dalla materia, dalla struttura e dall'utilizzo, i recipienti di vino hanno ricevuto una forma circolare che è relazionata a una (forma) conica e cilindrica. Infatti il liquido che viene conservato troppo a lungo in recipienti metallici viene corrotto dalla ruggine. I recipienti di vetro e in laterizio non sono disponibili in un numero sufficientemente grande e non sono sicuri; quelli fatti di pietra non sono idonei a causa del peso. Pertanto non abbiamo alternativa se non riempire e conservare il vino in recipienti di legno. Ma nuovamente i contenitori non possono essere ottenuti facilmente da una singola stecca, a grandi linee, o nella quantità necessaria; e se anche lo potessero, essi avrebbero delle fessure. Quindi le botti devono essere costruite con molte doghe unite insieme. Ma le giunture tra le assi non possono essere protette dalla fuoriuscita del fluido con nessuna sostanza, con nessuna arte, se non legandole con cerchi. Ma dato che i cerchi sono fatti di materiale flessibile come di betulla o di quercia o simili, per mezzo del quale la massa solubile delle cose preme ciò che esse legano con una certa violenza, espandono loro stesse nella circonferenza più capiente di tutte. Quindi i costruttori di botti sono ricondotti ai cerchi per la più importante ragione che non creano un bizzarro, fragile recipiente in cui la pancia della caraffa, come è stato detto, approssima un'ampiezza circolare e costruiscono un'altra figura nei confini esterni. Lo si può vedere nelle fiaschette con cui portano il vino italiano oltre le Alpi in Germania. Dato che sono di forma compressa, come richiesto dal loro uso - in modo che possano essere appesi sui lati dei muli e trasportati senza impedimenti attraverso la ristrettezza delle strade e non sporgano ulteriormente dai lati dei muli e appesantiscano le bestie più verso il basso allo stesso modo delle bilance e rendano un urto più violento - esse sono più piatte su quel lato su cui sostengono più debolmente un impulso e si rompono più facilmente.
In aggiunta a quello c'è anche il vantaggio della figura circolare o cilindrica che i carichi contengano il massimo del vino e il minimo legno poiché i vini devono essere trasportati dai carri attraverso le terre. Se quindi una sfera potesse essere tenuta insieme da tavole

di legno i recipienti sarebbero molto probabilmente sferici. Ma poiché una sfera non può essere tenuta insieme da vincoli il cilindro ha rimpiazzato la sfera. Ciononostante questo non può essere un cilindro puro, genuino perché i legami allentati diventerebbero subito inutili. Essi non potrebbero essere tirati più stretti se il barile non fosse in qualche modo limitato dalla figura conica su entrambi i lati della metà della pancia. Questa forma è anche adatta per rotolare in direzione diritta (per quella ragione il cilindro ha ottenuto il suo nome) e per il trasporto nei carri, composta da una doppia base così che in un certo modo vi sia una somiglianza a se stessa che è la più adatta per una posizione orizzontale e bella da vedere.

Nella misura in cui i barili di vino coinvolgono cerchio, cono, e cilindro, figure regolari, essi sono adatte per dimensioni geometriche. È utile fondare i loro principi nell'esordio di questa congettura come sono stati investigati da Archimede, almeno quel tanto da lui che sarà sufficiente a compiacere una mente che ami la geometria, dato che le dimostrazioni assolute e perfette sotto ogni aspetto devono essere prese dai libretti archimedei stessi se non si è scoraggiati dal loro percorso spinoso.

Tuttavia è permesso soffermarsi un po' su alcune materie che Archimede non ha toccato in modo che i più eruditi trovino anche qualcosa che li aggradi e in cui si dilettino.

3.1 Parte I: La geometria solida dei corpi curvi e regolari

In primo luogo è necessario conoscere il rapporto tra circonferenza e diametro. E Archimede[2] insegna:

Teorema 1. *Il rapporto della circonferenza al diametro è circa 22:7.*

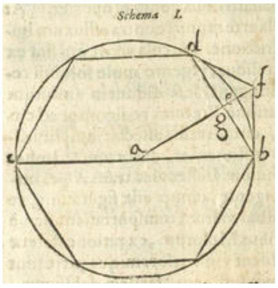

Figura 3.1: Teorema 1, parte I.

Per provarlo egli usò figure inscritte e circoscritte alla circonferenza. Dal momento che sono infinite, useremo, per comodità, degli esagoni. Sia perciò inscritto in un cerchio un esagono regolare CBD i cui angoli sono C, D, B, e il cui lato è DB, e due rette siano tangenti al cerchio in D e B e si intersechino reciprocamente nel punto comune di intersezione F; uniamo il centro A ad F col segmento AF che intersecherà la retta DB in G, e l'arco DB in E. Ma dato che DGB è un segmento, cioé la linea più corta disegnata da D a B, mentre DEB è un arco, cioé non il segmento più corto disegnato da D a B, DEB è più lungo di DGB.
Poiché d'altra parte la retta BF è tangente al cerchio, tutte le parti dell'arco EB sono tra FB e GB. E se EB fosse una retta sarebbe del tutto più corto di FB. Perciò gli angoli AEB, FEB sono equivalenti ad un angolo retto perché EFB è un angolo acuto. Quindi EB, prolungato al di sotto dell'angolo più piccolo EFB, è più piccolo di FB perché è prolungato al di sotto del più largo. Tuttavia si potrebbe discutere riguardo a EB come riguardo ad una retta perché il fulcro della dimostrazione è tagliare il cerchio in archi sempre più piccoli che vengono equiparati a rette.

[2]Archimede, *Dimensio circuli*, vol. I, prop. 3.

Tuttavia, si può percepire tra le cose di senso comune il fatto che l'arco DEB all'interno del triangolo DBF sia piuù piccolo dei segmenti DF, FB, poiché esso si piega verso l'angolo DFB, ma non ha neanche una piccola parte fuori dalle rette DF, FB. Ma il tutto, secondo il senso comune, è maggiore della parte. Ciò sarebbe differente se l'arco DEB fosse sinuoso ed irregolare.
Dato che DB è un lato dell'esagono inscritto, e DF, FB sono due metà di un lato dell'esagono circoscritto, l'arco DEB deve essere un sesto del cerchio. Ma era più lungo di DB, più corto di DF, FB. Quindi i sei segmenti DB sono più corti della circonferenza del cerchio e i dodici segmenti DF o FB sono più lunghi della circonferenza.
Ma il lato DB dell'esagono regolare è uguale al raggio AB. Pertanto i sei raggi AB, cioé i tre diametri CB o (se il diametro è diviso in sette parti uguali) sette delle ventuno parti sono più corti della circonferenza.
E nuovamente poiché DG, GB sono uguali, GB sarà la metà di AB. Ma il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AG e GB ed è il quadruplo del quadrato di GB. Pertanto il quadrato di AG è tre volte il quadrato di GB. Dunque il rapporto dei quadrati di AB e AG è 4 : 3, e quindi il rapporto dei segmenti AB e AG è la radice quadrata di 4:3, cioè il rapporto tra i numeri 100 000 e 86 603. Ma giacché AG : AB = GB : BF, allora anche BF:GB è la radice quadrata di 4:3 così che BF ha approssimativamente 57 737 di tali piccole parti mentre GB è metà di AB, ossia 50 000.
Quindi quel numero preso dodici volte sarà maggiore della circonferenza del cerchio. Il numero calcolato è 692 844, il diametro ha 200 000 di queste (piccole parti). E in BF preso dodici volte ci sono 24 meno un decimo di quelle (piccole parti) di cui il diametro ne ha sette, Quindi questo numero è maggiore della circonferenza stessa, ma il numero 21 era minore dello stesso. Ed è ovvio che l'arco BC è più vicino a BG che al segmento BF. La circonferenza è dunque più vicina al numero 21 che al numero 24 meno un decimo. Si presume quindi che differisca da 21 di 1, ma dall'altro di 2 meno un decimo così che essa sia in effetti 22. Archimede, tuttavia, dimostra questo molto più accuratamente tramite figure con molti lati come ad esempio figure di 12, 24, 48 lati. Diventa lì evidente anche come sia piccola la differenza della circonferenza da 22. Adriaen van Roomen dimostrò con lo stesso metodo che quando il diametro viene tagliato in 20 000 000 000 000 000 parti

allora circa 62 831 853 071 795 862 di queste parti sono nella circonferenza.[3]

Segue una breve osservazione aggiuntiva prima del teorema II.

Teorema 2. *L'area del cerchio paragonata all'area del quadrato (costruito sul diametro) ha circa il rapporto di 11 : 14.*

Archimede usa una dimostrazione per assurdo che conduce all'impossibile. Tanti hanno scritto molto su questo. Per me il significato sembra essere questo.

La circonferenza del cerchio BG ha tante parti quanti punti, cioè infinite. Ognuna di

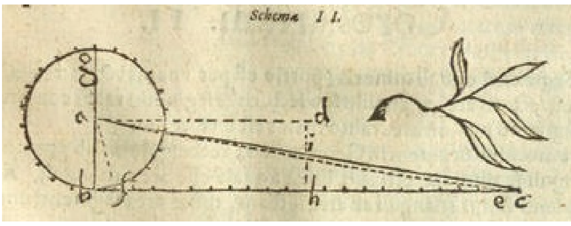

Figura 3.2: Teorema 2, parte I.

queste è considerata come la base di un qualsiasi triangolo isoscele coi lati uguali ad AB, così che ci sono infiniti triangoli nell'area del cerchio. Essi convergono tutti coi loro vertici al centro A. Ora si raddrizzi la circonferenza del cerchio BG in un segmento BC e sia AB perpendicolare ad essa. Le basi di questi infiniti triangoli o settori dovrebbero quindi essere sul segmento BC, disposte una accanto all'altra. Sia BF una tale base arbitrariamente piccola e sia CE uguale ad essa. Ma siano i punti F, E, C connessi ad A. Dal momento che ci sono tanti triangoli ABF, AEC sul segmento BC quanti sono i settori nell'area del cerchio e le basi BF, EC sono uguali ad essi, e hanno tutti l'altezza comune AB che è anche la stessa dei settori, i triangoli EAC, BAF saranno equivalenti ed ognuno sarà uguale ad un settore della circonferenza. Poiché hanno tutti la propria base sul segmento BC, il triangolo BAC, composto da tutti quei triangoli, sarà equivalente a tutti i settori del cerchio, cioè all'area del cerchio composto da tutti loro. Questo è il significato della conclusione di Archimede che egli ha raggiunto tramite la riduzione ad un assurdo.

[3]Kepler, pp. 64-66.

Quindi se BC è diviso a metà da H, sia ABHD un parallelogramma tale che DH intersechi AC in I. Questo parallelogramma rettangolare sarà equivalente all'area del cerchio. Infatti, CB sta alla sua metà CH come AB (cioè l'intero DH) sta alla sua metà IH. Pertanto HI = ID e HC = DA (cioè HB). E gli angoli in I sono uguali, ma in D e in H sono retti. Quindi il triangolo ICH, che è fuori dal parallelogramma, è equivalente al triangolo IAD attraverso il quale il parallelogramma supera il trapezoide AIHB.
Se ora si suppone che il diametro GB sia composto di sette parti, allora il quadrato del diametro sarà 49. E dal momento che ce ne sono 22 di tali parti nella circonferenza, cioè in BC, la sua metà BH avrà 11 di esse, un po' meno, come sopra. Moltiplicando 11 per il semidiametro 3 $\frac{1}{2}$, cioè per AB, otterremo per il rettangolo AH 38 $\frac{1}{2}$.
Pertanto, se il quadrato del diametro ha 49 di tali parti, l'area del cerchio inscritto ha 38 $\frac{1}{2}$ di queste parti. Il doppio di 49 è uguale a 98, il doppio di 38 $\frac{1}{2}$ è uguale a 77. Se (questi numeri sono) divisi per 7 danno 14 e 11, rispettivamente. Questo doveva essere dimostrato.[4]

Seguono a questo teorema due corollari e tre osservazioni aggiuntive, i quali preludono al Teorema 3.

Teorema 3. *In verità, il rapporto tra il cilindro e il parallelepipedo a colonna rettangolare di uguale altezza che il cilindro tocca nelle sue basi quadrate e nelle facce laterali è lo stesso che c'è tra il cerchio e il quadrato circoscritto, ovvero 11 : 14.*

Come la base CD del cilindro sta al quadrato circoscritto AB, così il volume CF del cilindro sta al volume AE del parallelepipedo rettangolare o colonna. Archimede[5], *Della sfera e del cilindro*.
Il cilindro e la colonna di uguale altezza sono qui per così dire certi piani solidificati. Quindi lo stesso avviene ad essi come ai piani.[6]

[4]Ibidem, pp. 68-70.

[5]Il trattato di Archimede *Della sfera e del cilindro* non contiene una tale affermazione come ricorda Guldino nel *De centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae* (1635-1641), libro IV.

[6]Ibidem, pp. 72-74.

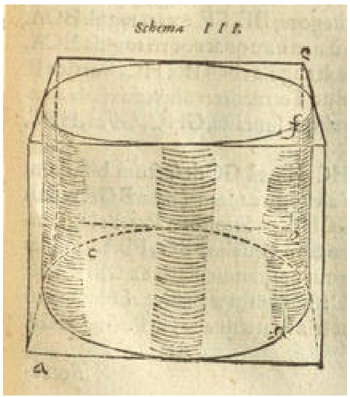

Figura 3.3: Teorema 3, parte I.

Teorema 4. *Se una colonna dritta con basi parallele ha la stessa base e la stessa altezza di una piramide, se un cilindro ha la stessa base e la stessa altezza di un cono, esso sarà tre volte più grande di quest'ultimo.*

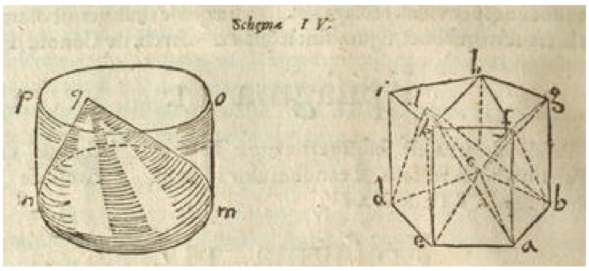

Figura 3.4: Teorema 4, parte I.

Sicché ogni colonna, come la BI che abbiamo qui di base pentagonale con le basi parallele ABCDE e FGHIK, e BAF, AEK e gli altri angoli che sono angoli retti, viene scomposto nei suoi pentaedri o prismi come qui quello pentagonale viene diviso nei tre GHF, FHK, KHI, che sono chiusi ognuno da tre parallelogrammi e da due triangoli opposti.

	Del primo	Del secondo	Del terzo
Triangoli	GHF	FHK	KHI
	BCA	ACE	ECD
	GHCB	HCAF	KECH
Parallelogrammi	HCAF	FAEK	HCDI
	FABG	KECH	IDEK

Ma il pentaedro viene scomposto in tre tetraedri di cui i due che dividono un parallelogramma piano in parti uguali hanno la stessa altezza.
Per esempio, il primo sia il prisma sopra i triangoli GHF, BCA. Disegniamo le diagonali BF, CF nei parallelogrammi a partire dagli angoli B, C del triangolo BCA. Il tetraedro che possiede questi quattro triangoli BCA, BFC, BFA, AFC è diviso da essi. Il resto è una piramide quadrangolare con base BGHC e vertice F. Quindi la diagonale disegnata GC la taglia in due tetraedri. I quattro triangoli del primo sono BGC, GFB, GFC, CFB e quelli dell'altro sono GHC, GFH, HFC, CFG.
Siccome il parallelogramma GHCB è diviso a metà dal segmento GC e i triangoli GCH, GCB sono equivalenti e GF sono alla stessa altezza (perché (l'angolo) BGF è retto), i tetraedri GCBF, GCHF saranno equivalenti. In maniera simile il parallelogramma GFAB è diviso a metà dal segmento BF e negli equivalenti (triangoli) FGB, FBA. E il piano BCA è perpendicolare al piano GA. Pertanto la verticale da C su BA è l'altezza del tetraedro GBFC e ABFC. Dunque essi sono equivalenti. Ma GCFH era equivalente a GBFC. Quindi tutti e tre sono equivalenti e il prisma HGA possiede tre tetraedri equivalenti.
Ora prendiamo il punto L nella base superiore FGHIK che dovrebbe essere collegato agli angoli della base inferiore ABCDE così che si crea una piramide pentagonale. Asserisco che essa sia un terzo della colonna GAD. Sicché la base ABCDE è divisa in tre triangoli come prima dai segmenti AC, EC. Ci sono tre pentaedri e tre parti della piramide, ossia ABCL, ACEL, ECDL su di essi e la perpendicolare tracciata da L sul piano BD è uguale ai lati retti KE, FA e agli altri. Quindi i tetraedri ABCF, ABCL hanno la stessa altezza, perciò sono equivalenti. Ma ABCF è un terzo del prisma ABCFGH. Quindi anche

ABCL è un terzo dello stesso prisma. Ma in maniera simile la seconda parte ACEL e la terza parte ECDL sono un terzo del secondo prisma e del terzo prisma, rispettivamente. Dunque l'intera piramide è un terzo dell'intera colonna e questa colonna è il triplo di quella piramide.
Ancora, allo stesso modo anche il cilindro MNOP le cui basi parallele sono MN e OP è equivalente ai tre coni MNQ che raggiungono col loro vertice Q il piano della base superiore e hanno la stessa base MN. Sicché la dimostrazione può essere analogicamente applicata allo stesso modo se uno considera diligentemente che il cerchio che è la base del cilindro e che il cono viene diviso dal centro in infiniti triangoli sui quali proprio come tanti prismi e proprio come tante parti del basamento del cono, con i primi che si incontrano sull'asse del cilindro, gli ultimi sull'asse del cono.[7]

Teorema 5. *La superficie curva (superficie laterale) di un cono retto inscritto in un emisfero è la radice quadrata di due volte la base o del più grande cerchio nella sfera e la base dello stesso cono è metà della base del cono retto circoscritto all'emisfero.*

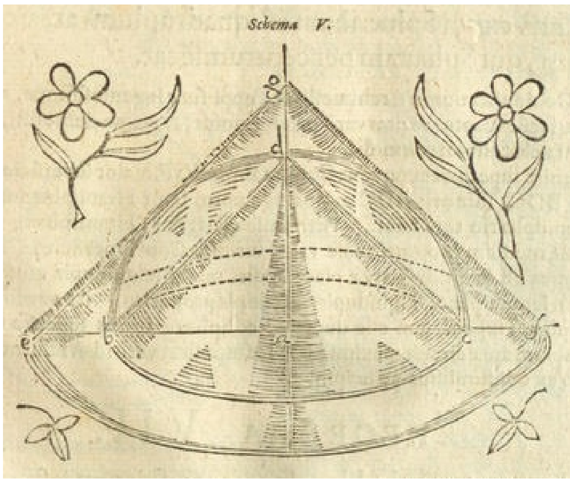

Figura 3.5: Teorema 5, parte I.

Si tagli la sfera BDC con un piano passante per il centro A e si continui a tagliare e si formino due coni retti, uno dei quali completamente all'interno dell'emisfero BDC il cui asse è il segmento AD che parte dal centro A, la perpendicolare sul diametro, e

[7]Ibidem, pp. 74-78.

BDC abbia la stessa base BC e lo stesso vertice D dell'emisfero; l'altro, completamente fuori dall'emisfero, che tocca quest'ultimo coi lati della sua superficie che sono EG, FG, paralleli a BD, CD, avente il vertice G sull'asse prolungato del primo vertice AD, ma la base EF sul piano che taglia la sfera. Quindi poichè BA e AD sono uguali, il semidiametro EA della base più larga e l'altezza AG del cono esterno saranno anch'essi uguali. E poichè EFG è un angolo retto, EG sarà il lato del quadrato circoscritto al cerchio e sarà pertanto uguale al diametro BC. Ma il quadrato EF è equivalente ai due quadrati EG e GF per cui i segmenti sono uguali al diametro BC. Dunque il quadrato EF è il doppio del quadrato BC: quindi il cerchio EF è il doppio del cerchio BC. Asserisco che anche il rapporto delle superfici coniche una rispetto all'altra sia di $2:1$ e che il rapporto della superficie curva del cono più piccola all'area della base BC è $\sqrt{2}:1$.
Per ciò che è stato detto nel teorema II il rettangolo formato dal semidiametro AB e l'intera circonferenza BC è due volte più grande dell'area del cerchio BC. Ma allo stesso modo e con lo stesso senso della dimostrazione il rettangolo formato dall'intero BD e l'intera circonferenza BC è due volte più grande della superficie curva del cono BDC. Per quella ragione AB sta a BD come la superficie piana del cerchio BC sta alla superficie curva del cono BDC. Ma il rapporto di AB a BD è $\sqrt{2}:1$ perché il rapporto dei (loro) quadrati è $2:1$. Quindi anche il rapporto delle superfici in questione è $\sqrt{2}:1$. E poiché i coni sono simili la base piana BC sta alla superficie curva BDC come la (superficie) piana EF sta alla superficie curva EGF, e tramite una permutazione la base sta alla base come la superficie curva del cono sta alla superficie curva del cono. Ma il rapporto tra le basi è $2:1$, dunque sarà $2:1$ anche quello tra le superfici curve del cono.[8]

Teorema 6. *La superficie convessa della sfera è quattro volte più grande dell'area del cerchio massimo che taglia la sfera attraverso il centro.*

Le dimostrazioni di Archimede[9] e Pappo sono le più geniali e non molto facili da comprendere. Ma la verità della proposizione e i primi elementi della dimostrazione diventano chiari dai presupposti.
Sicché la superficie convessa del cono più grande EGF è maggiore della superficie dell'emisfero BDC, quella del (cono) più piccolo BDC è minore. Poiché quella superficie

[8]Ibidem, pp. 78-80.
[9]Archimede, *De sphaera et cylindro* I, vol. I, prop. 33.

toccava l'emisfero, questa è completamente nascosta sotto l'emisfero. Dunque è probabile che la superficie dell'emisfero sia il medio proporzionale tra le superfici di entrambi i coni. Ma la superficie conica più piccola è la radice quadrata di due volte l'area della base piana, la più grande è due volte la radice quadrata di due volte la stessa (area). E la media (geometrica) di $\sqrt{2} : 1$ e $2\sqrt{2} : 1$ è il rapporto $2 : 1$. Dunque diventa probabile che la superficie dell'emisfero sia il doppio, e che la superficie dell'intera sfera sia il quadruplo, dell'area del cerchio massimo BC. Tuttavia Archimede lo dimostra in modo convincente per mezzo di principi simili.[10]

Teorema 7. *La superficie convessa di un qualsiasi spicchio della sfera è equivalente all'area piana di un cerchio il cui semidiametro copre la larghezza del segmento che va dal polo alla sfera.*

Qui gli spicchi di una sfera non vengono intesi come porzioni arbitrarie ma solo come quelle quando l'intera sfera viene tagliata da un singolo piano in due parti così che ogni parte abbia il suo polo. Sicché una tale sezione comporta che la base degli spicchi sia un cerchio piano. Sia BDCL la superficie della sfera attorno al centro A e sia questo il

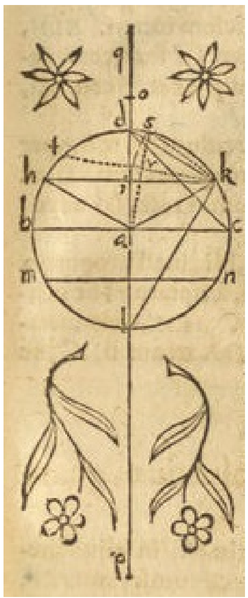

Figura 3.6: Teorema 7, parte I.

[10]Kepler, p. 80.

suo cerchio massimo. E assumiamo gli estremi del diametro DAL come i poli dei futuri spicchi, siano essi D, L. E le due perpendicolari HIK e BAC passino per il punto I e per il centro A. Le perpendicolari rappresentano spicchi o cerchi che sono perpendicolari al piano DBL. Quindi allo stesso modo in cui l'intero DL, che si stende attraverso metà del cerchio LCDB dal polo D al punto più basso L (questo punto prende il posto della base quando l'intera sfera viene confrontata con i suoi spicchi) diventa il semidiametro del cerchio piano che è equivalente all'intera superficie curva della sfera in base al teorema VI, il segmento DK che misura la larghezza del segmento dal polo D alla base K in generale diventa (nel caso di uno spicchio preso arbitrariamente) il semidiametro del cerchio piano che è equivalente alla superficie curva dello spicchio KDH. E se si considera lo spicchio HKL il cui polo è L e la cui base circolare è HK, il segmento KL che si estende diventa il semidiametro del cerchio piano che è equivalente alla superficie curva dello spicchio KLH.
Si veda la dimostrazione negli scritti di Archimede.[11] Ma l'analogia vi darà fiducia. Poiché è stato paragonato all'intera superficie e a metà di essa, è dunque probabile ottenere lo stesso rapporto nel caso degli altri spicchi.[12]

Al teorema VII segue un corollario, il quale precede il teorema VIII:

Teorema 8. *La superficie sferica convessa e il suo asse sono tagliate da un piano perpendicolare all'asse nella stessa proporzione.*

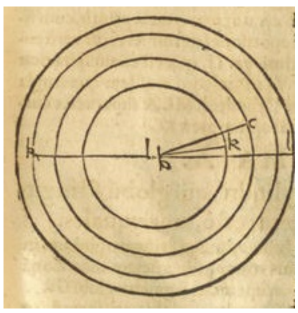

Figura 3.7: Teorema 8, parte I.

[11] Archimede, *De sphaera et cylindro* I, vol. I, prop. 42, 43.
[12] Kepler, pp. 80-82.

Il settimo teorema serve per una delineazione geometrica, questo ottavo è più utile per gli aritmetici e per un'abbreviazione più piacevole. In quello precedente, un piano diventa equivalente alla superficie curva, il secondo mostra che i segmenti sono equivalenti agli spicchi.
Se nella figura precedente (Fig. 3.7) l'intero asse DL rappresenta l'intera superficie DKLH, la parte DI dell'asse rappresenta la porzione HDK della superficie, ossia se DI fosse l'asse della sezione, cioè se fosse perpendicolare al piano secante HK e lo tagliasse nel centro I. Perciò la parte IL dell'asse rappresenta la porzione HLK della superficie.
Sicché HDK sta a KLH come il cerchio DK sta al cerchio del segmento KL in base al teorema VII, cioè, come il quadrato KD al quadrato KL (ma il quadrato KD sta al quadrato KL come il segmento DI sta al segmento IL), perciò anche il segmento DI sta al segmento IL come la superficie HDK sta alla superficie KLH.
Analogia. Allo stesso modo, dunque, in cui il rapporto delle circonferenze circolari BC, HK costruite con centro A, I è lo stesso che c'è tra i segmenti BA e HI, il rapporto delle aree BDC, HDK delimitate da quelle circonferenze è il medesimo che c'è tra i segmenti posti di traverso DA, DI. E alla stessa maniera in cui DI rappresenta l'area HDK e DA l'area BDC, IA rappresenta l'area della zona BHKC.[13]

Teorema 9. *La superficie del cilindro retto è equivalente a quella (superficie) sferica a cui è tangente.*

Infatti la superficie cilindrica viene creata moltiplicando l'intera circonferenza (nella figura seguente (Fig. 3.8)) per l'intero diametro KN o GB. Tuttavia moltiplicando metà della circonferenza KL per metà del diametro AB si crea la quarta parte della prima (superficie) perché le figure simili sono nel rapporto 2 : 1 dei lati.

$$\begin{array}{ccc} 4\cdot 6 & - & 24 \\ 2\cdot 3 & - & 6 \\ \hline 2\cdot 2 & & 4 \end{array}$$

Ma l'area del cerchio massimo è creata dalla stessa moltiplicazione in base al (teorema) II che è anche la quarta parte della superficie sferica in base al (teorema) VI. Due quattro

[13] Ibidem, p. 84.

volte la stessa cosa sono uguali tra loro, ossia la superficie curva del cilindro KML e la superficie curva del globo o della sua sfera, essendo entrambe il quadruplo dell'area KL.[14]

Teorema 10. *Le superfici del globo e del suo cilindro, il quale è tangente al globo, che vengono tagliate dallo stesso piano perpendicolare all'asse sono equivalenti.*

Sia GB il globo nella figura seguente (Fig. 3.8), LN il suo cilindro che è tangente al globo nel mezzo e in G, B. E il piano PST tagli entrambe le superfici. Affermo che la fascia cilindrica KPSTL sia equivalente alla superficie curva dello spicchio GR del globo. Questo sembra essere falso perchè la (superficie) cilindrica è tanto ampia, mentre la superficie del globo diventa stretta verso l'alto. Ma ricordate: così come la prima è ampia, così è estesa la seconda perché essa tende tangenzialmente alla stessa altezza. Tuttavia la dimostrazione è semplice. Infatti poiché KP e GR sono congruenti e poiché la fascia KPSTL è creata dalla moltiplicazione di KP o GR per l'intera circonferenza KOL e quindi anche la fascia PSTMN è creata dalla moltiplicazione di PN o RB per la stessa intera circonferenza, il segmento GR sta a RB e BG come la superficie dello spicchio GR del globo sta al segmento RB e all'intera superficie BG in base al (teorema) VIII. Dunque anche la (superficie) cilindrica KT sta a TN e NL come la (superficie) sferica GR sta a RB e BG. Ma l'intera (superficie) cilindrica NL è equivalente all'intera (superficie) sferica GB secondo il (teorema) IX. Pertanto anche la porzione KOLPST della (superficie) cilindrica sarà equivalente alla parte della (superficie) sferica nel segmento GR.[15]

Teorema 11. *Il rapporto del volume del cilindro al volume della sfera cui esso è tangente è 3 : 2.*

Questo perché, per analogia con ciò che è stato detto nel teorema II, il corpo della sfera contiene potenzialmente in sé per così dire infiniti coni coi loro vertici nel centro della sfera per cui le basi, prendendo il posto dei punti, giacciono sulla superficie. Quindi sia BG la sfera nella figura II, A il centro, AB, AG e infiniti altri (raggi) simili, anzi i coni più piccoli, cioè, coni le cui basi sono i punti B, G, e sia A il vertice comune a tutti. Creiamo una nuova figura in cui la superficie curva della sfera si spiega in un piano circolare il cui diametro è BC, due volte più grande del diametro della sfera BG

[14]Ibidem, p. 86.
[15]Ibidem, pp. 86-88.

perché il rapporto dei cerchi è 4 : 1 in base al (teorema) VI menzionato sopra. E ci sia un cerchio di diametro BC, dal cui centro H erigiamo la perpendicolare HD congruente al semidiametro AB. Sia BDC un cono con base BC e vertice D. Questo cono avrà un volume equivalente al volume della sfera BG. Poiché tutte le basi più piccole B, G di tutti gli infiniti coni AB, AG nella sfera vengono estesi nel cerchio piano BC e disposti fianco a fianco insieme alla superficie sferica stessa in cui giacciono. E al posto di quelli che nella sfera erano coni retti ABB, AGG, qui si creano i coni con lati diversi DCC, DBB, eccetto l'intermedio DHH che rimane retto. E tutti hanno la stessa altezza DH e basi uguali perché sono le più piccole. Quindi sono tutti equivalenti l'un l'altro e ai coni retti nella sfera. E l'intero cono BDC composto da tutti loro sarà equivalente all'intera sfera BG composta da tutti loro.

Dunque se si moltiplica l'area del cerchio BC per il semidiametro HD si ottiene il cilindro

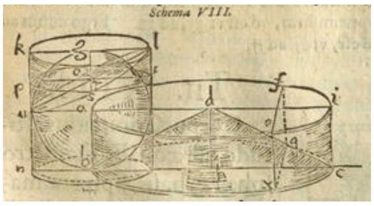

Figura 3.8: Teorema 11, parte I.

AICB, il cui volume è equivalente a tre volte quello del cono BCD secondo il (teorema) IV. Invece è due volte il (volume del) cilindro che è tangente alla sfera perché la base BC è quattro volte la base KL, ma l'altezza HD è metà dell'altezza di BG. Sicché due cilindri AICB posti uno sopra l'altro produrrebbero un'altezza uguale all'altezza BG del cilindro KLB e sarebbero quattro volte più grandi di quest'ultimo perché la base BC è quattro volte la base KL. Quindi un AICB è due volte il cilindro KLB. Ma esso era tre volte più grande del cono BDC, cioè, del volume della sfera BG che è equivalente al cono BDC. Perciò, se si divide il cilindro AICB per 6, metà di esso, ossia 3 parti, cade sul cilindro KLB, ma un terzo di 6, cioè 2, cade sulla sfera GB. Quindi il cilindro KLB sta alla sua sfera GB come 3 sta a 2. Questo è il rapporto 3 : 2.

La stessa cosa può essere provata per mezzo del (teorema) IX se immaginiamo che il cilindro sia tagliato in infiniti prismi che si incontrano sull'asse del cilindro ma che, invece delle basi quadrangolari, i prismi abbiano segmenti equivalenti alla base. Tutte queste basi dei prismi siano disposte fianco a fianco sulla superficie curva del cilindro, allo stesso modo in cui sopra abbiamo immaginato cose simili riguardo al cerchio nel teorema II. In quella figura il cerchio BG costituisca entrambe le basi del cilindro. E la circonferenza BG rappresenti la superficie curva del cilindro. Ma il punto A rappresenti l'asse del cilindro che è congruente al diametro BG e si spieghi la superficie curva del cilindro in un piano e BC rappresenti un rettangolo la cui lunghezza è BC e la cui larghezza è BG. E l'asse AA del cilindro sia collegato tramite il segmento CC (che è parallelo ad essa) al rettangolo AACC così che il prisma AABBCC sia equivalente al volume del cilindro. Infatti le più piccole basi del rettangolo (cioè, segmenti) dei più piccoli prismi del cilindro saranno disposte fianco a fianco sulla superficie rettangolare BC e qui i prismi retti nel cilindro avranno lati differenti. Ciononostante il vertice di tutti loro raggiungerà l'estremità AA dell'altezza come BA. Quindi avranno la stessa altezza tra di loro e tra i prismi retti del cilindro. Dunque se si moltiplica il rettangolo BBCC per l'altezza BA si creerà un parallelepipedo il cui volume è due volte il volume del prisma AABBCC, quindi due volte il volume del cilindro. Ma, sopra, il cerchio equivalente al rettangolo BBCC della superficie curva del cilindro (ossia quattro volte il cerchio massimo secondo il (teorema) VI) veniva moltiplicato per l'altezza congruente al semidiametro BA e avevamo costruito tre volte il cono, equivalente alla sfera. Pertanto tre volte la sfera è equivalente a due volte il cilindro. Perciò, come sopra, il rapporto del cilindro alla sfera è 3 : 2.[16]

Teorema 12. *Il volume del cubo è un po' meno di due volte il volume della sfera a cui è tangente, ossia, approssimativamente come 21 sta a 11.*

Questo perché il cubo STVX nella figura seguente (Fig. 3.9) sta al suo cilindro KLN a cui è tangente approssimativamente come 14 sta a 11 in base al summenzionato (teorema) III, ossia, come 42 sta a 33. Ma il cilindro KLN sta alla sfera PGOB a cui è tangente insieme al cubo come 3 sta a 2 secondo il suddetto (teorema) XI, cioè, come 33 sta a 22. Dunque il cubo sta alla sfera come 42 sta a 22, ossia, come 21 sta a 11.[17]

Teorema 13. *Il volume del cono la cui altezza è congruente al diametro della sfera (la base della sfera è il cerchio massimo) è metà del volume della sfera.*

[16]Ibidem, pp. 88-90.
[17]Ibidem, pp. 90-92.

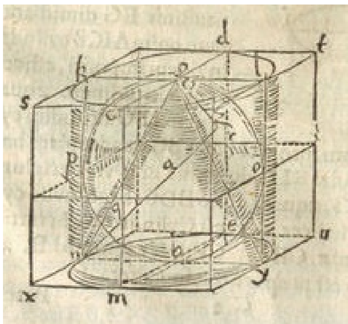

Figura 3.9: Teorema 13, parte I.

Questo perché il cilindro KLN con la stessa base e altezza è tre volte il suo cono NGY o come 3 sta a 1. Ma lo stesso cilindro sta alla sua sfera come 3 sta a 2 in base al (teorema) XI menzionato prima. Quindi il cono sta alla sfera come 1 sta a 2.[18]

Segue ora nell'opera un piccolo riepilogo dei risultati menzionati, un corollario e due osservazioni aggiuntive.

Teorema 14. *Il cono costruito sopra la stessa base, avente un'altezza che è così tanto più grande che il suo eccesso sta al semidiametro della sfera come l'altezza del segmento stesso sta al resto del diametro, è equivalente allo spicchio della sfera.*

Siano la sfera CLB e i suoi due spicchi HKD e HKL e i loro assi DI, IL parti del diametro che sono tracciate attraverso il centro A e che dovrebbero essere prolungate da D a O, P. Si cerca un cono che sia equivalente allo spicchio più piccolo HKD il cui asse sia DI, e il cui resto del diametro sia IL. Perciò IL stia a LA come ID sta a DO: IO sarà l'altezza e HK la base del cono il cui volume è equivalente al volume dello spicchio più piccolo HKD. Inoltre sia HKL lo spicchio, LI sia il suo asse, e ID sia l'avanzo del diametro. Nuovamente ID stia a DA come IL sta a LP: IP sarà l'altezza e HK la base del cono che è equivalente allo spicchio più grande HKL.
La dimostrazione non è ben conosciuta. Coloro che lo desiderano potrebbero prenderla dalla seconda proposizione del secondo libro de *Sulla sfera e sul cilindro*[19] di Archimede. Qui non intendo trascrivere quella intera di Archimede. Ma la sua verità riguardo

[18]Ibidem, p. 92.
[19]Archimede, *De sphaera et cylindro* II, vol. I, prop. 2.

all'emisfero diventa chiara nella maniera seguente. Sia BCD l'emisfero, sia AD il suo asse, sia AL il resto del diametro. E se ci si assicura che il resto del diametro AL stia al semidiametro LA come l'asse AD sta a DG, si rende DQ uguale a DA per quella ragione e l'altezza AQ sarà due volte l'altezza del segmento AD. Dunque si pone il cono che ha base BC e l'altezza del diametro DL equivalente all'emisfero. Che questo sia vero lo avete visto grazie al teorema precedente dove quel cono era metà della sfera.
Archimede confronta anche il rapporto degli spicchi dei volumi con il rapporto delle porzioni della superficie, dimostrando[20] che il rapporto dei volumi è più piccolo del rapporto dei quadrati (il doppio rapporto) delle superfici, ma più grande della potenza $\frac{3}{2}$ -esima di questo rapporto. Tuttavia, il doppio rapporto in numeri si forma quando ogni termine del rapporto viene moltiplicato per se stesso, mentre il rapporto 3 : 2 si forma quando la radice quadrata dello stesso termine viene moltiplicato per il termine stesso. Per esempio se le superfici delle porzioni stessero una all'altra come 4 sta a 9 (questi sono numeri quadrati), i solidi coperti sotto quelle superfici sarebbero più vicini uno all'altro di 16 e 81 dopo che ognuno dei quadrati è stato moltiplicato per se stesso, più lontani di 8 da 27 (dopo che le radici 2, 3 dei quadrati sono state moltiplicate per le radici stesse) o di 16 da 54. Dunque se la parte più piccola pesa 16, quella più grande peserebbe tra 54 e 81.[21]

Seguono un corollario e altre due osservazioni aggiuntive. Il teorema XV viene presentato diversamente, sotto forma di problema.

Teorema 15. *PROBLEMA.*

Nella stessa maniera in cui il teorema VII forniva cerchi piani equivalenti per le superfici curve degli spicchi, il teorema VIII d'altro canto mostrava che a segmenti congruenti, comparabili l'uno con l'altro, delle diverse sezioni, possiamo assegnare non solo coni equivalenti in volume agli spicchi, come nel teorema XIV, ma anche (figure) piane o (figure) piane della stessa proporzione e paragonabili con le diverse sezioni. Aggiungo questa dimostrazione sebbene sia più difficile da capire perché non è stata provata da geometri precedenti.

[20] Archimede, *De sphaera et cylindro* II, vol. I, prop. 8.
[21] Kepler, pp. 94-96.

Si cercano tre (figure) piane che dovrebbero essere nel rapporto che hanno due spicchi della sfera uno con l'altro e rispetto all'intero.

Siano HKD, HLK gli spicchi. Quindi con centro H o K, con delimitazione dello spicchio

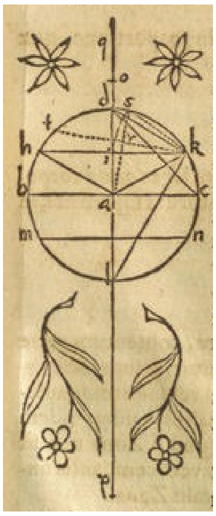

Figura 3.10: Teorema 15, parte I.

nel piano del cerchio HDK, con distanza HI o KI, si descriva l'arco del cerchio IS, che interseca HDK in S. Si tracci il diametro da S per A, e un segmento da K lo tagli formando un angolo retto. Sia R il punto d'intersezione. Dopo che è stato fatto questo si considerino tre rettangoli, il primo sotto il semidiametro AD e l'altezza o diametro DL dell'intera sfera che rappresenterà il volume dell'intera sfera; il secondo sotto il semidiametro AD e l'altezza DI del segmento che rappresenterà il volume del settore HAKD della sfera; il terzo costituito da AI (l'altezza del cono HKA) moltiplicato per RS. Affermo che esso rappresenti il cono solido HIKA nello stesso rapporto. Quindi nella stessa maniera in cui il cono HIKA sottratto dal settore HAKD lascia la porzione HIKD, anche il terzo rettangolo sottratto dal secondo lascerà un piano che è equivalente allo spicchio HIKD della sfera con lo stesso rapporto.

E se lo spicchio è più grande di un emisfero, cioè HKL, dovrà essere preso IL invece di DI nella formazione del secondo rettangolo e il rettangolo sotto AI e RS deve essere aggiunto ad esso e si formerà un piano che è equivalente allo spicchio più grande HIKL.

Dimostrazione. Prima di tutto, il rapporto della superficie degli spicchi e dell'intero è il rapporto tra i segmenti DI, IL, e DL in base al (teorema) VIII. Dunque lo stesso rapporto si manterrà tra i rettangoli dopo che questi segmenti sono stati moltiplicati per lo stesso semidiametro AD. Ma il rapporto dei settori HAKD, HAKL e dell'intera sfera sta reciprocamente tra loro come quella delle superfici HDK, KLH e l'intero. Dunque il rapporto dei settori HAKD e HAKL sta anche tra i rettangoli prodotti. Inoltre l'altezza AD moltiplicata per la base circolare che è equivalente alla superficie dello spicchio HDK il cui semidiametro è KD (secondo il VII) genera un cilindro che è tre volte il cono equivalente al settore HDKA. E l'altezza AI moltiplicata per la base circolare HK il cui semidiametro è KI genera tre volte il cono HIKA. Ma il cerchio col raggio KD sta al cerchio col raggio KI o KS come il quadrato KD sta al quadrato KS. Ma il quadrato KD sta infatti al quadrato KS come il segmento DI sta a SR, in base al VII. Dunque il rapporto delle basi circolari descritte da KD e KS è anche il rapporto dei segmenti DI, SR. Ma il rapporto dei coni è composto dal rapporto delle altezze e dal rapporto delle basi come mostra Archimede[22], [nel suo trattato] *Sui conoidi e sferoidi*, [teorema] XI. Dunque il rapporto del settore HDKA e del cono HIKA in esso è composto dal rapporto AD ad AI e DI a SR. Tuttavia anche il rapporto dei rettangoli è composto dal rapporto dei lati corrispondenti. Per quella ragione il rapporto del settore HDKA e del cono HIKA in esso è lo stesso di quello dei rettangoli sotto AD, DI e sotto AI, SR. E quindi essi stanno alla loro differenza reciproca come il settore HDKA e il cono HIKA in esso stanno alla loro differenza reciproca, cioè allo spicchio HIKD. Questo metodo riguarda principalmente il cono HIKA che è la differenza comune per cui gli spicchi differiscono dai loro settori. Talvolta è utile conoscere questo cono.[23]

Un'osservazione aggiuntiva di confronto e due corollari ci separano dal teorema successivo.

Teorema 16. *Il cono viene tagliato in vari modi: cioè o attraverso il vertice e la base o tramite un piano o un'altra superficie di un cono più piccolo avente lo stesso vertice.*
In entrambi i casi le porzioni del cono aventi uguale altezza stanno una all'altra come le loro basi.[24]

[22]Archimede, *De conoidibus et sphaeroidibus*, vol. I, prop. 10.
[23]Kepler, pp. 98-102.
[24]Archimede, *De sphaera et cylindro* I, vol. I, prop. 16, lemma 1.

Dal momento che il cono qui è per così dire un cerchio corporeo, sostiene la stessa cosa come il cerchio della sua base.
O il cono è tagliato da un piano, parallelo al lato dalla cui rivoluzione è generato il cono; oppure non da un (piano) parallelo ma da uno (un piano) che interseca il lato sopra il vertice fuori dalla figura. In entrambi i casi si generano porzioni indefinite sul cui volume non è stata fatta nessuna indagine dai geometri fino ad ora perché nessun'applicazione lo ha richiesto.
Oppure il cono è tagliato da un piano passante per entrambi i lati e si generano due parti, la parte superiore con il vertice e il tronco come parte inferiore. Archimede ha preferito chiamare la parte col vertice originata da un piano obliquo rispetto all'asse *porzione di cono* perché non ammetteva altri coni se non quelli isosceli. Apollonio tuttavia ha costruito alcuni coni isosceli, altri scaleni (un esempio di essi si trova nel disegno IV (Fig. 3.4) e ammetteva anche una tale porzione come un cono, per quanto l'asse sia tagliato obliquamente, purché la sezione sia un cerchio.
Per quanto riguarda la porzione col vertice, il suo taglio diventa un'ellisse che ha il suo centro fuori dall'asse verso il lato più lungo del cono. Nel disegno IX (Fig. 3.9) l'asse del cono GYN è GAB la cui porzione col vertice GNA ha un'ellisse come base che è rappresentata dal segmento NZ il cui centro o metà (dove è più ampio) è sotto A, e la sua intersezione con l'asse in direzione di N.
E questo è sempre più grande del segmento per cui il piano parallelo alla base NY passa attraverso l'estremo dell'asse che è stato tagliato dall'ellisse, ossia attraverso A. Sicché il piano secante, fissato in A e inclinato verso l'asse GA, acquisisce di più dal volume del cono dalla parte AN di quanto perda dalla parte AZ.
Tuttavia vale la pena di considerare se quel cono la cui base è parallela alla base NY e passa attraverso il centro dell'ellisse sottostante A sia equivalente alla porzione GNA. Non lo capisco né ho avuto ancora il tempo necessario (per risolvere questa questione). Si veda sotto qualcosa a riguardo di ciò nel teorema seguente. Nel frattempo il teorema XI de *Sui conoidi e sferoidi*[25] è generalmente vero riguardo a qualsiasi porzione col vertice. Quindi *il rapporto di un cono o di una porzione col vertice al cono è composto dai rapporti delle basi una rispetto all'altra e delle altezze a vicenda.*

[25] Archimede, *De conoidibus et sphaeroidibus*, vol. I, prop. 10.

Dunque l'area dell'ellisse NA rispetto all'area del cerchio NY è una parte del rapporto dei solidi GNA rispetto a GNY. Ma il rapporto di queste aree (in base all'osservazione aggiuntiva III appartenente al teorema II) si trova nel rettangolo dei diametri dell'ellisse e il quadrato NY come se fossero meglio conosciuti. L'altra parte del rapporto dei volumi è quella tra l'altezza GZ della porzione GNA sul piano NAZ e l'altezza GB del cono NGY sul piano NY. Quindi se si moltiplicano reciprocamente uno per l'altro i termini ZG dei rapporti per GZ e il rettangolo dei diametri dell'ellisse NA per il quadrato NY, quest'ultimo prodotto sta al primo[26] come il volume del cono NGY sta al volume della porzione GNA. Entrambi possono anche essere calcolati separatamente. Per esempio se l'altezza GZ viene moltiplicata per il piano dell'ellisse NA, GNA genera tre volte il volume GNA.
In particolare, se il piano secante fosse parallelo alla base NY, il rapporto dei volumi, della porzione e dell'intero, sarà la terza potenza delle altezze o dei raggi nelle basi circolari o la potenza $\frac{3}{2}$-esima dei piani.
Questo è così perché in questo modo la porzione col vertice e l'intero cono diventano solidi simili. Quindi se si eleva al cubo o le singole altezze o i singoli raggi delle basi, il cubo più grande starà al più piccolo come l'intero cono al segmento. O se sono note le sole aree delle basi si cercano le loro radici quadrate e vengono moltiplicate per le aree.
Come per i coni tronchi il metodo d'indagine su quelli è facile a causa di ciò che è stato detto. Sulla base di uno dei modi spiegati sopra, il cono per così dire intero e la porzione incompleta col cono vengono calcolati per mezzo dell'altezza data o del raggio della base. E se la sua altezza, per esempio della parte incompleta, non è nota anche se è stata necessaria, viene cercata confrontando le basi del tronco di cono con l'altezza. Dal momento che la differenza dei raggi nella base sta all'altezza (se il tronco di cono si trovasse sotto piani perpendicolari) come il raggio della base più piccola sta all'altezza della porzione incompleta, se sottraiamo il volume della parte incompleta dal cono intero rimane il volume del tronco di cono.
Tuttavia per questi coni tronchi contenuti sotto basi parallele c'è nuovamente un metodo più breve. Poiché le basi di tali coni tronchi non possono essere sconosciute i loro diametri

[26] La proporzione corretta recita: ellisse NR $\times$ altezza GZ : cerchio NY $\times$ altezza GB = porzione GNR : cono GNY.

(ciascuno per se stesso) vengono elevati al cubo. E se sottraiamo il cubo più piccolo dal maggiore il più grande starà alla differenza come l'intero cono sta al tronco di cono.
Clavio insegna un altro metodo, dichiaratamente più ingegnoso ma anche più difficile come sembra a me. Proprio come sopra l'area di entrambe le basi deve essere calcolata e ora, in aggiunta a ciò, si deve calcolare l'area proporzionale alla media tra l'area di entrambe le basi. Ma questo avviene o tramite una moltiplicazione ed un'estrazione di numeri alti o attraverso due estrazioni di radici e la loro moltiplicazione. Allora tutte e tre le aree devono essere sommate e la somma deve essere moltiplicata per un terzo dell'altezza del tronco di cono. Ma qualunque cosa sia necessaria può essere ottenuta più facilmente mediante i raggi dei cerchi richiesti per l'indagine sulle aree.
Poiché l'uso di coni tronchi che risultano da un piano perpendicolare all'asse è molteplice e particolarmente necessario per l'argomento attuale a causa della forma delle botti, vorrei qui aggiungere un bellissimo teorema e il compendio più desiderato, anche se rimando la dimostrazione a causa della somiglianza al supplemento sulla geometria solida archimedea e al teorema XXII. Il tronco di un cono è diviso in un cilindro centrale e in un foglio conico (tegumento) per così dire distribuito attorno ad esso che è una parte del cono che è dissimile dalla parte superiore, cioè formato da una superficie cilindrica: allora se tre diametri, due della base più piccola, uno della più grande, vengono estesi in un segmento, il rettangolo formato da questo e dalla differenza delle basi starà a tre volte il quadrato della base più grande o di quella più piccola come il volume del foglio sta al volume del cilindro più grande o di quello più piccolo.
Quindi si aggiunga due volte la più piccola a quella più grande, e si moltiplichi la somma per la differenza tra la più grande e la più piccola per (ottenere) il foglio. Allora si elevi al quadrato la più piccola, si prenda tre volte il quadrato per (ottenere) il cilindro inscritto, la somma di questo e di quello per (ottenere) l'intero tronco di cono.
Per esempio se i diametri delle basi sono 3, 5, la differenza è 2. Si aggiunga due volte 3 a 5, il risultato è 11, lo si moltiplichi per 2, il risultato è 22 per il foglio. E il quadrato di 3 è 9. Tre volte questo è 27 per il cilindro. Dunque (otteniamo) 49 per il tronco in un rapporto arbitrario dell'altezza. Tuttavia questo diventerà ancora più breve tramite il seguente teorema e il suo corollario.[27]

[27]Kepler, pp. 104-110.

Teorema 17. *Le parti rette di un cilindro tagliate da superfici parallele all'asse stanno una all'altra come i segmenti della base.*

Infatti il cilindro è qui per così dire un cerchio o un'ellisse corporea. Dunque avviene la stessa cosa come (avviene) a queste figure nella base con lo stesso taglio. Nella figura VIII il piano EFQX è parallelo all'asse DH. Quindi la porzione EFI o XQC del cerchio sta alla parte EFA o XQB come la porzione EFICX del cilindro sta alla parte EFABX. Si veda il corollario al teorema II.

Ma le parti stanno una all'altra come i segmenti dell'asse quando il piano passa attraverso l'asse, purché non tagli l'altra base.

Sicché il cilindro retto tagliato da un piano perpendicolare all'asse è per così dire una linea materiale effettivamente fornita di un volume cilindrico. Quindi la stessa cosa avviene a quest'ultimo come alla linea. Tuttavia le altre parti attraverso l'asse sono equivalenti a cilindri della stessa lunghezza dell'asse. Questo perché tanto quanto manca del segmento da un lato del cilindro viene aggiunto ad esso sull'altro lato. Questo non avviene nella sezione di un cono a causa del suo spessore variabile. Nella figura VIII i piani PST, perpendicolare all'asse, e LSV, obliquo all'asse GB lo tagliano insieme in R. Quindi GR sta a RB non solo come le porzioni rette KT a TN ma anche come le porzioni oblique LVK a VNL. Perché quanto manca da LVK dalle parti di L, ossia LRT, tanto lo guadagna nelle parti di V, ossia VRP che è simile a LRT.
La parte della porzione cilindrica è mostrata nella figura seguente XIV dalle lettere GST, cioè compreso tra tre superfici, il semicerchio piano GT, la semiellisse piana GS, e la (superficie) cilindrica curva VTS tali che la linea di sezione dei piani passa perpendicolarmente attraverso G, un punto dell'asse HF; questo pezzo, io dico, sta all'intero cilindro TY della stessa altezza come 7 a 33 o quasi come 14 a 66, ma alla parte rimanente HGS sta al semicilindro HGTS (ossia quando un piano è stato disegnato attraverso l'asse tagliato HG) come 14 a 19. Sicché più in basso nel *Supplemento ad Archimede* questo sarà mostrato solo per una specie di cilindri, ovvero quelli di altezza congruente alla circonferenza della base (teoremi XIX, XX, XXI). Tuttavia quando non solo l'intera sfera è equivalente all'intero semicilindro e l'intero anello chiuso all'intero pezzo del cilin-

dro dove i vertici dell'ellisse secante tocca le basi, ma quando anche le parti equivalenti della sfera e dell'anello chiuso in base a qualsiasi parte della circonferenza a cui sono proporzionali sono equivalenti alle parti delle porzioni menzionate del semicilindro e del cilindro in base alla stessa parte dell'altezza, eretti grazie alla stessa spiegazione dei corpi rotondi, ne segue che anche quelle parti della porzione la cui base è il semicerchio sono proporzionali alle loro altezze e che essi mantengono tra loro con ogni altezza lo stesso rapporto rispetto alla porzione del cilindro di uguale altezza che si mantiene tra l'intero o primo pezzo e l'intero cilindro di uguale altezza, cioè 7 a 33.
La stessa cosa è vera anche per le parti della porzione la cui base è il cerchio. Sicché la porzione con questa base - potrebbe essere alto o basso - è metà del cilindro con la stessa altezza. Tuttavia, per quelli le cui basi non sono un cerchio e un semicerchio ma altre porzioni di un cerchio, queste basi singole forniscono i singoli rapporti. Quindi l'assioma è valido anche per questi pezzi di porzioni cilindriche, nientemeno per coni e piramidi, che stanno uno all'altro come le altezze se poggiano sulla stessa porzione del cerchio; ma se giacciono sulla stessa linea della porzione circolare allora stanno uno all'altro come le corrispondenti parti dell'altezza.
Infine il bordo esterno del cilindro che viene tagliato mediante un'altra superficie cilindrica con lo stesso asse è diviso da una superficie conica, la cui base inferiore è un cerchio più ampio e la cui (base) superiore è un cerchio più stretto, in due porzioni circolari di un nuovo genere la cui parte interna l'abbiamo chiamata tegumento nel teorema precedente, per esempio di un cilindro più stretto.
Dunque il rapporto delle porzioni del bordo è quello di due medi proporzionali tra il diametro più piccolo e il diametro più grande.
Infatti se un numero, per esempio il diametro più grande, è diviso in due parti - il diametro più piccolo e un'eccedenza - e sono stati calcolati i quadrati del più piccolo così come del più grande, il quadrato più grande conterrà infatti quattro parti: I. il quadrato del più piccolo, II. il quadrato della differenza, e III., IV. due rettangoli aventi come lati il più piccolo e la differenza. Dopo aver triplicato i quadrati, si origineranno tre quadrati del più piccolo e tre della differenza, così come tre volte il più grande e sei rettangoli. E questi tre quadrati stanno ai loro cerchi e ai cilindri con uguale altezza come questa differenza sta all'intero bordo cilindrico.

Ora nel teorema precedente abbiamo dovuto moltiplicare la differenza per uno più grande e due più piccoli, cioè, per se stesso e per tre più piccoli, così come la parte interna del bordo che non aveva involucro. Dunque se si sottrae il quadrato della differenza e i tre rettangoli dai tre quadrati e sei rettangoli rimangono due quadrati della differenza e tre rettangoli così come il resto del bordo. Ma il rapporto di tre rettangoli e un quadrato a tre rettangoli e due quadrati è lo stesso di quello di tre più piccoli con una differenza rispetto a tre più piccoli con due differenze e lo stesso di quello di uno più piccolo con un terzo della differenza rispetto a uno più piccolo con due terzi della differenza. Ma se aggiungete al più piccolo prima una parte, poi due parti della differenza formate due medi proporzionali tra il più piccolo e il più grande. E questo è ciò che avevamo affermato.[28]

Seguono al teorema un primo corollario, corredato di esercizi, ed un ulteriore corollario. Questa prima sezione della Parte I si chiude con un paragrafo intitolato *Invocazione ai mecenati*.
Comincia ora la seconda sezione della Parte I, in cui Keplero, dopo aver esposto i principali teoremi di Archimede, supera quest'ultimo e formula nuovi risultati sulla geometria di figure simili a conoidi e sferoidi.

3.1.1 Supplemento ad Archimede - Sulla geometria solida di figure che sono le più simili ai conoidi e agli sferoidi

Prima di giungere ai teoremi di questa sezione, abbiamo una piccola dichiarazione d'intenti esposta da Keplero, che anticipa diverse piccole sottosezioni in cui vengono esposti metodi utili nella dimostrazione dei teoremi:

- Sulle sezioni di un cono, generatrici di solidi;
- Sui modi per generare;
- Sul numero di figure e le loro differenze.

Teorema 18. *Ogni anello con una sezione trasversale circolare o ellittica è equivalente a un cilindro la cui altezza è congruente alla lunghezza della circonferenza (del cerchio) de-*

[28]Kepler, pp. 110-114.

scritta dal centro della figura di rotazione. E la base è equivalente alla sezione trasversale dell'anello.

Intendo una sezione trasversale creata da un piano passato attraverso il centro dello spazio all'interno dell'anello, perpendicolare alla superficie dell'anello. La dimostrazione di questo teorema segue in parte dal teorema XVI e può essere stabilita sulla base degli stessi elementi con cui Archimede ha insegnato i principi della geometria solida.
Infatti l'anello GCD (nel disegno XI, Fig. 3.11), ancora completo, venga tagliato dal centro A dello spazio in infinite fette ED, in effetti le più piccole. Ognuna di esse sarà tanto più sottile verso il centro A quanto più una sua parte, come ad esempio E, è vicina al centro A, come lo è F, e vi sia una retta secante passante per F che sia perpendicolare a ED nel piano; è anche più spessa verso le parti esteriori D. Ma se gli estremi menzionati, ossia D, E, vengono presi contemporaneamente si ottiene il doppio dello spessore che vi è nel mezzo delle fette.

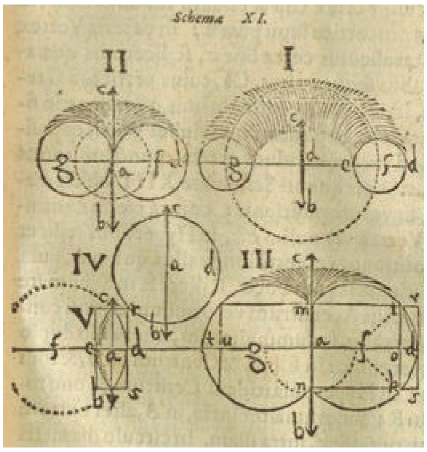

Figura 3.11: Figura contenuta nella sezione *Sui modi per generare.*

Questo ragionamento non sarebbe valido se le parti ED delle fette su questo lato e sull'altro lato della circonferenza FG e delle rette perpendicolari passanti per F, G non fossero uguali e ugualmente situate.[29]

[29]Kepler, p. 142.

A questo teorema segue un corollario, che precede il teorema XIX, il quale contiene anche un'analogia.

Teorema 19. *L'anello chiuso è equivalente ad un cilindro che ha la sezione trasversale dell'anello come base, e altezza congruente alla lunghezza di questo cerchio.*

Infatti quel metodo è valido per qualsiasi rapporto di tutti gli AE agli AF ed è ancora valido per l'anello chiuso dove il centro F del cerchio ruotato EC descrive un cerchio FG che è equivalente al (cerchio) ruotato DA. Infatti un tale anello chiuso viene tagliato a partire da A in fette che non hanno ampiezza in A e in D hanno due volte lo spessore di quello in F nello stesso modo in cui il cerchio passante per D è due volte il cerchio passante per F.[30]

Seguono un corollario, l'analogia citata precedentemente ed un altro corollario.

Teorema 20. *Una fascia a mela è composta dall'anello sferico (VTSL) e il tronco retto (ODTV) del cilindro la cui base è la sezione (circolare IKD) priva di quella figura che produce la mela, mentre la sua altezza (FG) è congruente (alla circonferenza del) al cerchio che è descritto dal centro (F) della sezione (circolare) più grande (MIKN).*

Dimostrazione. Sia allargato il corpo della mela in un tronco cilindrico con gli stessi processi con cui Archimede espanse l'area di un cerchio in un triangolo rettangolo nel teorema II. E sia AD il semidiametro del cerchio massimo nel corpo della mela. Dal suo punto D si eriga DS, di lunghezza pari a questo cerchio massimo esteso in un segmento che potrebbe essere assunto su una superficie cilindrica. Infatti la linea MN è per così dire lo spigolo comune dove tutti i tronchi solidi circolari terminano. Allora dopo che la circonferenza del cerchio massimo è stata estesa nel segmento DS tutti quei tronchi solidi circolari vengono estesi allo stesso tempo e diventano la (linea) ellittica MSN, eccetto il primo segmento MDN. Ma la forza di questa trasformazione apparirà più chiaramente tramite le osservazioni seguenti.
L'area MDN sia tagliata da rette che sono parallele a MN in alcuni segmenti più piccoli quasi lineari di uguale ampiezza, e si colleghino i punti A, S e si disegnino le perpendicolari FG, OL, dai punti del diametro AD generati dalle sezioni dell'area al segmento AS.

[30]Ibidem, p. 144.

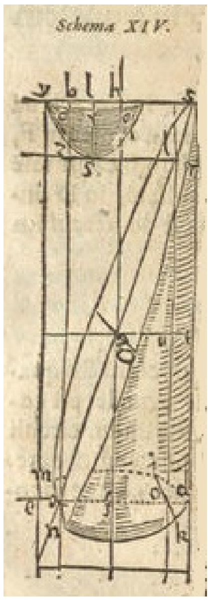

Figura 3.12: Teorema 20, parte I.

Sia F il centro e la perpendicolare da F tagli AS in G. E si disegni la parallela GT a FD passante per G. Infine sia O il punto medio della sezione IK e si disegni a partire da esso la perpendicolare OL che taglia AS in L. E si disegni la parallela LB a OD passante per L.

Quando la figura viene ruotata attorno a MN, la piccola area MN non genera quasi nulla perché viene spostata meno di tutti. Ma la sua parallela passante per F in effetti viene spostata in un cerchio di lunghezza FG, la linea passante per O in un cerchio di lunghezza OL e tutti in questo modo. E le parti del corpo cilindrico, denotate da FG, OL, sono equivalenti a quei per così dire fogli cilindrici nella mela che le rette generano quando la figura MDN viene ruotata attorno a MN in base al teorema XVI. Dunque l'intera figura, cioè il prisma MNDS del cilindro che consiste dei volumi (estesi in un corpo retto) di tutti i fogli è equivalente all'intero corpo della mela costituito dai fogli.

Inoltre, quando il cilindro viene tagliato dal piano su cui giacciono le rette OL e KI, il corpo cilindrico costruito sulla base IMNK fino a L sarà equivalente al (volume) cilindrico della mela da cui è stata sottratta la fascia esterna. E quindi la parte piccola del cilindro, cioè LSDO, tagliata da questo piano sarà equivalente alla fascia a mela.

Ora poiché GT è congruente a FD ed è il diametro di quella sfera il cui cerchio massimo

è MIKN, e dato che TS è la lunghezza di quel cerchio massimo (poiché AD sta a DS come GT sta a TS), il prisma del cilindro costruito su GT fino a S sarà equivalente alla sfera. E in maniera simile quella parte GVL sarà equivalente al corpo cilindrico della sfera (col raggio) FD che è descritta ruotando attorno la retta IK che è perpendicolare a FO. E quindi la piccola parte rimanente LSTV del cilindro sarà equivalente all'anello di questa sfera la cui sezione è la porzione KDI.
Ma ODSL è composta da VTSL e da ODTV, la parte cilindrica la cui base è la porzione IKD e la cui altezza FG è equivalente al cerchio che descrive il centro F della porzione più grande MIKN quando la figura viene ruotata attorno a MN. Dunque anche i loro volumi uguali sono equivalenti, cioè, la fascia a mela è composta dall'anello sferico descritto dallo stesso segmento e dal segmento cilindrico suddetto.[31]

A questo teorema seguono un primo corollario, corredato da esercizi stereometrici, e un ulteriore corollario.

Teorema 21. *Il volume del limone è la differenza tra l'anello sferico e il suddetto segmento del cilindro.*

Dimostrazione. Infatti nello stesso modo di prima quando la figura IDK (sopra nella Fig. 3.11, numero V, CDB attorno CAB), qui in realtà nella figura XIV, viene ruotata attorno a IOK, la parte della piccola area che termina in IOK stesso non crea quasi nulla perché viene mosso a malapena. Ma le parti più remote vengono infatti spostate sulla lunghezza delle loro circonferenze finché l'ultima D, o R che corrisponde ad essa, viene spostata sulla lunghezza RS. Questa è la quantità della circonferenza del cerchio massimo attraverso il volume del limone. Essa è fatta di questi elementi così che qui nel disegno XIV (Fig. 3.12) il volume del limone (CDBE nel disegno XI, Fig. 3.11) è equivalente alla parte del cilindro LRS. Ma se AO è due volte FO, cioè GV, anche OL sarà due volte GF. Dunque il corpo retto ODRL è due volte VTRL. Quindi la parte ODTV è equivalente alla parte VTRL. Ma RLS è la differenza tra LSTV e LRTV. Il primo di essi è equivalente all'anello sferico, il secondo di essi è equivalente al segmento ODTV del cilindro. Pertanto lo scopo è stato raggiunto.[32]

[31] Ibidem, pp. 146-148.
[32] Ibidem, pp. 150-152.

Seguono un corollario corredato di esercizi ed un ulteriore corollario.

Teorema 22. *La fascia di un limone, troncata su entrambi i lati da cerchi uguali, è composta dal corpo del limone più piccolo, che è creato dalla stessa parte del cerchio tramite il quale viene creata la suddetta fascia, e dal segmento del cilindro la cui base è la stessa parte più piccola del cerchio la cui altezza è congruente alla circonferenza del cerchio secante.*

Ripetiamo il disegno XIV (Fig. 3.12) e il segmento cilindrico LSR in esso sia equivalente al limone più grande. Ora si estenda separatamente questo segmento così che la sua base possa essere vista. Quella base è la parte della figura piana circolare creata dal limone più grande o quello che deve essere troncato. Immaginiamo questa parte del cerchio sotto il segmento YBLH e sotto l'arco YCRQ. Adesso questo limone venga troncato su entrambi i lati (come si vede nella figura seguente XVIII tramite le lettere EAHFSQCG) così che riconosciamo che esso non è generato dall'intera parte del cerchio bensì dalla sua parte interna BCHQ, quando l'arco CRQ viene ruotato attorno all'asse BH. Quindi i segmenti BC, HC rappresentano i semidiametri delle circonferenze secanti. E quella base verrà tagliata in quattro parti:

1. il mistilineo triangolare BCY da un lato;
2. l'altro costruito su HQ dall'altro lato, simile al precedente;
3. il parallelogramma rettangolo BHQC nel mezzo;
4. la parte più piccola del cerchio dietro tra il segmento CQ e l'arco CRQ.

Poiché il solido viene equiparato all'intero limone più grande, RS sarà l'altezza del solido, che è congruente alla circonferenza del cerchio attorno al punto centrale del corpo di questo limone. E poiché la figura piana YSH contiene le ipotenuse degli angoli retti BCZ e LRS, LR sta a RS come BC sta a CZ. Ma LR sta a RS come il raggio del cerchio sta alla sua circonferenza: dunque anche BC ha questo stesso rapporto rispetto a CZ. Quindi CZ sarà la circonferenza del (cerchio) secante poiché BC è il semidiametro del (cerchio) secante.

Perciò altrettante (parti) solide si erigono sulle quattro parti della base appena menzionate:

1. la (parte) piramidale BYCZ giace su BVCY delimitata da superfici miste così come da linee;

2. la parte costruita su HQX, simile ad essa. E queste due (parti) sono equivalenti ai due vertici solidi troncati dal limone. (Nella figura seguente XVIII questi vertici sono individuati dalle lettere GEI e FNH);

3. il prisma o pentaedro BCZXHQ si erige su BHQC poiché è limitato dai tre quadrilateri BCQH, CQXZ, XZBH e i due triangoli CZB, QXH. La sua altezza è CZ tra le parallele QC, XZ. Questo solido è equivalente al centro del cilindro nel corpo del limone troncato che ha i cerchi secanti come basi. (Questo cilindro è denotato dalle lettere EHFG nella figura seguente XVIII e giace completamente dentro l'anello FCG, HAE);

4. infine il solido SRQCZSX giace sulla parte molto piccola CQR, simile a quella in cui era stata estesa la fascia a mela. Ma poiché l'intera figura solida HYSR è equivalente all'intero volume del limone e le tre parti indagate equivalgono alle tre parti del limone, quei resti del segmento cilindrico sono necessariamente equivalenti alla parte rimanente del limone. L'ultimo è l'anello che circonda il suddetto cilindro nel corpo del limone troncato.

Ma ora quella parte solida è simile alla precedente, che era equivalente alla fascia a mela, che è anche costituita da due parti che differiscono l'una dall'altra in modo ovvio.
Una è un segmento retto del cilindro delimitato da quattro superfici, dal parallelogramma piano CQXZ, dalla superficie cilindrica XZCRQ, e da due piccole porzioni di un cerchio. Una di esse con le lettere QCR è visibile, l'altra in XZ non è visibile. E l'altezza CZ di questo segmento è congruente alla circonferenza del cerchio secante come è gia stato dimostrato.
L'altra parte di questa fascia è il prisma ZXS che si erige sulla stessa piccola porzione in ZX. Ma poiché si è detto che LR sta a RS come il semidiametro sta al (alla circonferenza del) cerchio e anche come BC sta a CZ, la differenza tra LR e BC avrà questo rapporto

rispetto alla differenza tra RS e CZ. Questa è l'altezza di questa seconda parte della fascia su ZX. Ma la differenza tra LR e e BC è l'ampiezza o senoverso (1 - cos θ) della parte CQR (nella figura XVIII AP che è il semidiametro del limone più piccolo descritto dall'arco HAE attorno all'asse HE). Quindi la differenza tra RS e CZ, cioè l'altezza di questo prisma cilindrico è anche congruente alla circonferenza del cerchio attorno al punto centrale del corpo del limone più piccolo.
In base a ciò che è stato detto nel teorema precedente, questo prisma cilindrico, ZXS, è equivalente al limone più piccolo, descritto dalla parte più piccola CQR (che è la parte HAE nella figura XVIII). E quindi abbiamo le due parti nella fascia del limone troncato come li avevamo descritti nel teorema, così che il volume del limone troncato è costituito interamente da tre elementi, il volume del limone più piccolo, il cilindro, e il segmento del cilindro.[33]

Seguono un corollario, corredato da esercizi, un ulteriore corollario, un'osservazione aggiuntiva e due piccole sottosezioni, una contenente diversi esempi di alcune delle regole precedenti e l'altra dedicata ai fusi.

Teorema 23. *Due coni che vengono generati ruotando un triangolo rettangolo scaleno, uno attorno al lato più piccolo, l'altro attorno al lato più grande di quelli che formano l'angolo retto, hanno lo stesso rapporto dei lati che descrivono le basi per i coni.*

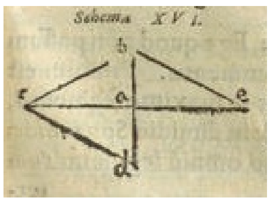

Figura 3.13: Teorema 23, parte I.

Sia ABC il (triangolo scaleno) rettangolo; BA, il più piccolo dei suoi lati attorno all'angolo retto, diventi l'asse. E dopo che la figura è stata ruotata attorno ad esso l'ipotenusa BC crei la superficie conica CBE il cui vertice è B, e la base CE. Viceversa il lato più grande AC sia l'asse e la figura ruotata attorno ad AC che è a riposo crei il cono

[33]Ibidem, pp. 152-156.

BCD con vertice C, col cerchio BD come base. Asserisco che il volume che è delimitato dal cerchio CE e dalla superficie conica CEB sta al volume del cono BDC come BA sta ad AC.
Dimostrazione. Infatti in base alle spiegazioni del teorema XVII il rapporto del cono EBC al cono BCD è composto dal rapporto del cerchio EC al cerchio BD e dal rapporto dell'altezza AB all'altezza AC. Ma il rapporto del cerchio AC al cerchio BD è il quadrato del rapporto del semidiametro AC al semidiametro AB. Quindi il rapporto dei coni EBC a BCD è composto dal rapporto di AC ad AB e di nuovo dallo stesso rapporto di AC ad AB e in terzo luogo da quello di AB ad AC. Ma il rapporto di AC ad AB composto col rapporto di AB ad AC produce la proporzione di uguaglianza, se esso viene moltiplicato o se si dividono i rimanenti rapporti per esso, non cambia nulla. Dunque dei tre termini del rapporto dei coni di cui gli ultimi due si neutralizzano a vicenda rimane solamente il primo, e il cono EBC sta al cono BCD come AC, il semidiametro del cerchio EC, sta ad AB, il semidiametro del cerchio BD.[34]

Teorema 24. *Un lungo sferoide inscritto in un ampio sferoide tale che abbiano gli stessi diametri, ma assi permutati, sta allo sferoide ampio come il diametro più corto sta a quello più lungo.*

CEI sia un lungo sferoide sul lato destro nella figura XII (Fig. 3.14) i cui vertici sono C, I; KCE sia uno (sferoide) ampio sul lato sinistro con i vertici K, E e sia CI l'asse di quello sferoide e congruente al diametro CI di questo sferoide. Asserisco che l'ellisse lunga o uovo sul lato destro sta allo spazio ampio o lente sul lato sinistro come il diametro più corto KE sta al diametro più lungo CI. Infatti si descrivano i coni, uno in metà dell'uovo KCE il cui vertice è C, e la cui base è il cerchio KE; ma l'altro il cui vertice è K e la cui base è il cerchio CI sta in metà della lente CKI. Dunque, in base ai presupposti, il cono KCE sta al cono IKC come il semidiametro KR del cerchio EK sta al semidiametro RC del cerchio CI. Ma metà dello sferoide[35] è sempre uguale a due volte il cono inscritto in esso con lo stesso asse e giacente sulla stessa base circolare. Dunque

[34]Ibidem, pp. 174-176.
[35]Archimede, *De conoidibus et sphaeroidibus*, vol. I, prop. 27, 28.

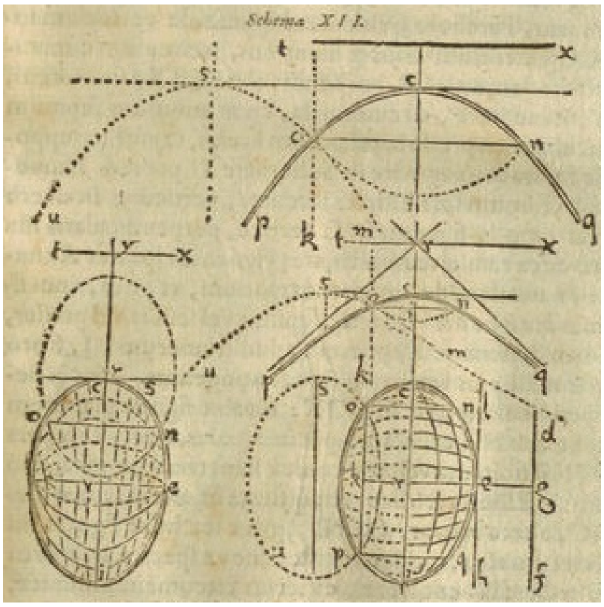

Figura 3.14: Figura XII.

anche metà degli sferoidi e quindi gli sferoidi interi hanno il rapporto di KR a RC, cioè come quello dei loro doppi KD e CI.[36]

Teorema 25. *Lo spicchio della sfera sembra avere lo stesso rapporto rispetto al limone*[37] *descritto dalla stessa porzione del cerchio che ha il semidiametro della base dello spicchio rispetto all'asse o all'altezza dello spicchio.*

Altri cerchino una dimostrazione legittima. Vorrei ricordare ciò che non posso provare con una dimostrazione dopo aver usato quattro argomentazioni. La prima è per analogia. Infatti ciò che è vero in metà della sfera, per così dire nello spicchio più grande che è l'inizio dei segmenti, è vero allo stesso modo nello spicchio più piccolo e per così dire nell'ultimo limite di tutti i segmenti e sembra avere luogo anche negli spicchi in mezzo. Ma in metà della sfera le cose stanno così: sicché nel modo in cui i lati attorno all'angolo retto di un quadrante hanno un rapporto di uguaglianza tra loro, anche ciò che viene generato dal quadrante ruotato attorno alla perpendicolare è equivalente a ciò che

[36] Kepler, p. 176.

[37] Se questo teorema fosse corretto, si dovrebbe leggere "metà del limone" come se fosse il caso nell'esempio considerato dopo il teorema.

viene creato dallo stesso quadrante ruotato attorno alla base. Negli (spicchi) più piccoli tuttavia quel rapporto si presenta in modo simile poiché più sono piccoli lo spicchio della sfera e il limone in esso contenuto, meno i coni inscritti nelle stesse figure differiscono da esse. Ma questi coni hanno il rapporto specificato nel teorema XXIII, e quindi anche i solidi circoscritti. Tuttavia confesso che la conclusione da ciò che è assolutamente il più piccolo a ciò che è più simile al più piccolo non è certo sicura.

In secondo luogo, il suddetto rapporto si presenta in metà dello sferoide anche se il rapporto di uguaglianza tra i diametri non si mantiene qui come nella sfera, e inoltre negli infiniti sferoidi e infiniti rapporti di diametri che li attraversano come si vede nel teorema precedente. E nel modo in cui il lungo sferoide è inscritto in uno sferoide ampio anche l'intero limone è inscritto nello spicchio raddoppiato dell'emisfero e in entrambi i casi si conosce la simile generazione.

Quindi, poiché il suddetto rapporto si mantiene tra lo sferoide lungo e quello ampio, esso si manterrà come sembra anche tra il limone intero e lo spicchio raddoppiato dell'emisfero.

In terzo luogo, invece di una dimostrazione completa, si può argomentare che nella figura seguente XVIII la porzione obliqua del cerchio, delimitata dal segmento AE e dall'arco AE, che crea l'eccedenza della porzione e anche metà del limone sopra i loro coni, è di uguale altezza sopra fino ad A e sotto fino ad E. Quindi le parti E ruotate attorno a PA realizzano una figura di rotazione che ha un rapporto rispetto alla figura di rotazione delle parti A ruotate attorno a PE che è lo stesso di PE a PA. Dunque il volume delle fasce oblique viene aggiunto ai coni inscritti con lo stesso rapporto con cui i coni stessi stanno uno all'altro.

In quarto luogo, il calcolo e la dichiarazione dei numeri porta a questi risultati. Anche se questi vengono trattati molto laboriosamente e nella maniera più minuziosa tramite una divisione del diametro in 100 000 piccole parti, tuttavia alla fine non sono appropriati per confutare questo rapporto.

Nell'esempio in alto PE era nove volte PA. Quindi anche lo spicchio HEA della sfera sia nove volte la metà del limone descritto da AEP attorno a PE fissato. Si cerchi il segmento HEA. AL era 22, LK o PE 27. Pertanto i quadrati sono 484 e 729. Tuttavia poiché le aree dei cerchi stanno uno all'altro come i quadrati dei raggi uno all'altro e il

cerchio AC precedentemente aveva 1 005 023 661 parti, 1 513 764 977 porzioni entreranno nell'area HPE che è la base del segmento presentato.
E poiché PA era 3 e il resto del diametro era 243, il semidiametro è 123.
Conseguentemente, come 243 sta a 123 o invece rispetto a 100 000 così 3 sta a $1\,234\frac{1}{2}$, l'ingrandimento dell'altezza del segmento in confronto all'altezza del cono equivalente, e questo nella dimensione abituale della regola. Dal momento che l'altezza PA del segmento è 2 439 in questa dimensione, l'altezza del cono equivalente è $3\,673\frac{1}{2}$. La sua terza parte è $1\,224\frac{1}{2}$ e moltiplicata per l'area della base trovata precedentemente essa crea il volume 1 852 848 331 848 dello spicchio. La sua nona parte è 205 872 036 872. Già precedentemente il volume dell'intero limone era 36etc., quindi metà di esso è 182 463 877 472. Questo è in effetti minore della nona parte del segmento, minore anche della sua decima parte, ma in questo trattamento inaffidabile di numeri attorno ai volumi più piccoli. Infatti è una questione della grandezza di un volume che è più piccolo di un $\frac{1}{20\,000}$ della sfera. E la differenza di questo piccolo volume che è molto più grande di quello di cui abbiamo trattato si origina da un unico centomillesimo del semidiametro perché il seno di AE, cioè PE, era presunto essere 21 951 che era un po' più grande, tuttavia più piccolo di 21 952. E se assumessimo 21 952, quando avremo ripetuto questa procedura il volume del limone risulterà 424 732 062 579. La sua metà 21etc. è ora più grande della nona parte dello spicchio trovato qui, naturalmente perché 21 952 è più grande di quello che dovrebbe essere in realtà. Quindi questi numeri sono compatibili col rapporto, espresso nel teorema, di metà del limone rispetto al suo spicchio della sfera.[38]

Teorema 26. *Se un segmento è tangente a una sezione conica e alla porzione dello sferoide o conoide generato da quella (sezione conica) nella circonferenza della base che interseca l'asse e se i segmenti ruotati attorno al diametro fissato della base creano solidi, la tangente crea un cono, ma la sezione conica crea una prugna, un'oliva o un fuso, ad ognuno il suo analogo; allora se la stessa tangente ruotata attorno all'asse fissato genera un altro cono, il rapporto di metà della prugna od oliva rispetto alla porzione dello sferoide, e quello del fuso rispetto alla sua (porzione) del conoide sarà quasi uguale al rapporto del primo cono rispetto al secondo.*

[38]Kepler, pp. 176-180.

Sia OCN una sezione conica nella figura XII - sopra sarà una parabola, nel mezzo un'iperbole, sotto un'ellisse il cui asse è CI - e quando metà (CN) della sezione OCN viene ruotata attorno al fissato CN in modo che il punto d'intersezione N rimanga fissato, ma C passi attraverso I, immaginiamo che sia stato creato metà (CIN) del volume di una prugna, un'oliva o un fuso OCNI. Quando la stessa metà CN della sezione è stata ruotata attorno al fissato CI in modo che C rimanesse fissato, e N passasse per O, immaginiamo che la porzione OCN di uno sferoide o conoide sia stata creata dal vertice C, dal cerchio ON come base. Assumo che, se un segmento è tangente alla sezione o solido negli estremi N od O, i due coni creati da quel segmento (tramite la stessa rotazione) sono molto simili a come sono già stati menzionati in modo tale che il rapporto tra questi coni è quello di metà del volume CIN della prugna, dell'oliva o del fuso rispetto alla porzione OCN dello sferoide o conoide. Fino ad ora abbiamo avuto bisogno della figura XII per la spiegazione del teorema Ora il resto verrà preso dalla figura XVIII.

Infatti esso è un teorema a proposito della parte di uno sferoide e di due conoidi, una parabola ed un'iperbole. Ha potenzialmente tre parti in esso. La prima e la seconda garantiscono che questo rapporto sia più piccolo di quello del teorema precedente, e la seconda che un rapporto sia dimostrato essere più grande. La terza, che non è ancora molto sicura, dice che questo rapporto è precisamente ciò che è espresso da questo teorema. Ma poiché ogni cosa è più evidente nel conoide (iperbolico), la linea denotata dai punti nella figura XVIII sia una sezione conica FCG, che è un'iperbole. Ma anche un arco del cerchio è descritto da FCG. Quindi l'iperbole lo taglia in F. Quindi il cerchio si estende verso S, ma l'iperbole verso R, sempre all'interno del cerchio finchè non tocca il cerchio da dentro nel vertice C come è stato dimostrato in Apollonio, *Coniche*, libro IV, proposizioni 25, 26. Ora si origini un conoide da FCG con vertice C, asse VCO, con base il cerchio FG e il suo semidiametro FO. E sia V il centro della figura e VX, VZ siano gli asintoti le cui sezioni col prolungato FG potrebbero essere X, Z. Ora il segmento FY sia tangente alla figura in F, tramite la circonferenza della base che incontrerà l'asse tra il centro V e il vertice C; la intersechi in Y. Ora si inscriva un triangolo FCG nella figura sulla stessa base FG.

Allora, poiché prima il volume di metà del limone, descritto dall'arco FSC del cerchio attorno al fissato FO, aveva un rapporto rispetto al volume della parte sferica FCG, descritta dallo stesso arco FSC ma ruotato attorno al fissato CO, che è lo stesso di CO rispetto a OF, ora questo teorema a proposito di metà del fuso che è descritto da metà (FRC) dell'iperbole attorno al fissato FO e a proposito del conoide che è descritto dallo stesso FRC ma ruotato attorno al fissato CO conferma (la validità di) un altro rapporto, cioè quello di YO rispetto a OF. Infatti questo è il rapporto del cono descritto attorno a FO dalla tangente FY rispetto al cono descritto dalla stessa FY, ma ruotata attorno a YO. Ora è evidente che il rapporto di YO a OF è più piccolo, cioè, più vicino all'uguaglianza del rapporto di CO rispetto a OF. E poiché VX e YF convergono verso le parti X, il rapporto di VO a OX è conseguentemente di nuovo più piccolo di quello di YO rispetto a OF.

Quindi nello stesso modo in cui YO rispetto a OF è tramite la sua grandezza un (rapporto) medio tra quello di CO rispetto a OF e quello di VO rispetto a OX, può essere dimostrato che il volume di metà del fuso ha un rapporto tramite la sua grandezza rispetto al volume del conoide che è un rapporto medio tra quello di CO rispetto a OF e quello di VO rispetto a OX.

Prima di tutto si esamini (il rapporto) di CO rispetto a OF. La dimostrazione sarà valida anche per quanto riguarda il conoide parabolico. Quindi è evidente che il fuso della linea FRC è più piccolo del limone dell'arco FSC, perciò anche che il conoide FRCG è più piccolo dello spicchio sferico FSCG. Ma poiché la figura piana tra l'arco FSC e l'iperbole FRC è di larghezza disuguale nelle parti F e C - infatti è più ampia intorno a F dove i segmenti si tagliano a vicenda, è più stretto dove sono tangenti l'uno all'altro - la lastra con cui lo spicchio della sfera limita il conoide è più spessa verso la base FG, più sottile verso il vertice C.

Tuttavia la lastra con cui il limone circonda il fuso è più sottile verso la base in C che verso il vertice F. Quindi il conoide e il fuso non perdono in proporzione, ma il conoide di più, il fuso di meno. Infatti anche se il conoide da parte sua perde di meno attorno al vertice rispetto a ciò che perde il fuso attorno al vertice F, tuttavia una piena compensazione non ha luogo perché il moto delle parti al vertice è limitato da un breve spazio, il moto delle parti attorno alla base si estende più ampiamente. Quindi il fuso è più simile ad un conoide di quanto il limone è vicino ad uno spicchio di una sfera o CO a OF (in base al teorema precedente). In questo modo YO è anche più vicino a OF di quanto CO

lo sia a OF.
Qui abbiamo usato il teorema precedente che non ha ancora una dimostrazione legittima. Ma lo stesso metodo è valido anche quando sostituiamo i coni FCG invece della parte FSCG e del limone. Infatti il cono generato dal segmento CF attorno a FO ha rispetto al cono generato dallo stesso FC attorno a CO lo stesso rapporto che ha CO rispetto a OF. Tuttavia la figura piana che è contenuta dall'iperbole FRC e dal segmento FC che crea l'eccedenza del conoide e del fuso costruiti sopra i loro coni è più ampia verso C perché lì l'iperbole è più curva, e più stretta verso F dove l'iperbole degenera gradualmente in un segmento. Dunque di nuovo l'aggiunta a quei coni non è proporzionale perché viene aggiunto di più al cono del fuso che al cono del conoide. Quindi il volume del fuso è più grande rispetto al conoide di quanto CO lo sia rispetto a OF, cioè il rapporto del (volume) più piccolo (il fuso) rispetto al più largo (il conoide) è più piccolo e vicino all'uguaglianza.
Ora deve essere dimostrato anche per VO rispetto a OX che questo rapporto è più piccolo del rapporto di metà del fuso rispetto al conoide. È una dimostrazione peculiare dell'iperbole perché la parabola non ha asintoti. Quindi la figura delimitata dai tre segmenti FX, XV, VC e dall'iperbole CRF è di nuovo più ampia verso V che verso X. Pertanto il volume o la forma ad utero in cui il conoide è nascosto è più spesso nel vertice V che nella base XZ. Tuttavia l'utero in cui il fuso è nascosto è più sottile nel vertice FX che nella base attorno a VC. Quindi viene aggiunto di più nel suo rapporto al cono il cui asse è XO che (nel suo rapporto) al cono il cui asse è VO. Perciò il primo cono è più grande rispetto al secondo (cono) di quanto il fuso lo sia rispetto a OX. Quindi il rapporto di VO rispetto a OX è più piccolo e vicino all'uguaglianza di quanto lo sia (il rapporto) di metà del fuso rispetto al conoide.
Ma poiché infiniti altri rapporti sono medi proporzionali tra il rapporto di CO rispetto a OF e quello di VO rispetto a OX, non solo l'unico, YO rispetto a OF, la conclusione è di conseguenza non necessaria ma almeno probabile nella terza figura di argomentazione che è affermativa sulla base di pure premesse.[39]

Un'analogia separa il teorema XXVI dal teorema XXVII.

[39] Ibidem, pp. 180-186.

Teorema 27. *Se un lato che forma l'angolo retto di un qualsiasi triangolo viene tagliato in due (lati) uguali e anche in modo che abbiano lo stesso rapporto dei lati rimanenti (del triangolo), e diverse sezioni coniche si incontrano nell'angolo opposto tangente ad esse e al lato opposto all'angolo retto, aventi i loro vertici principali sul lato tagliato, allora tutte (le sezioni coniche) saranno iperboli che vanno dal punto più alto fino al punto di bisezione; una parabola (sarà la sezione) che interseca la bisezione stessa; quelle da lì fino alla sezione proporzionale saranno ellissi verticali di ogni tipo; un cerchio (sarà la sezione) che interseca questo punto stesso della sezione proporzionale; infine ellissi trasversali di ogni tipo vanno da qui fino all'angolo retto. In queste ellissi il punto finale dell'asse più corto è impropriamente chiamato il vertice.*

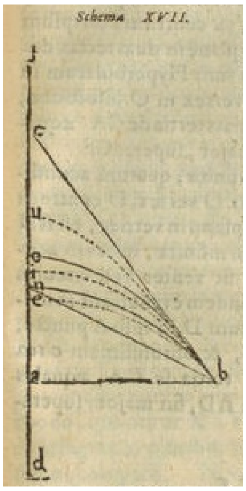

Figura 3.15: Teorema 27, parte I.

Sia BAC un (triangolo) rettangolo il cui lato AC viene tagliato in lati uguali in O, inoltre l'angolo CBA sia bisecato dal segmento BN in modo che AB stia a BC come AN sta a NC. Quindi AN sarà più piccolo di AO. Allora siano V un punto tra C e O, I un punto tra O e N, E un punto tra N e A. Ma le sezioni coniche siano tangenti l'una all'altra e al segmento BC nel punto B i cui vertici sono in questo ordine V, O, I, N, E. Assumo che BV sia un'iperbole, BO una parabola, BI un'ellisse verticale, BN un cerchio, BE un'ellisse trasversale.

Prima di tutto, per quanto riguarda BO. La sezione conica BO il cui asse o diametro è CA, e il cui vertice è O, è tangente al segmento BC in B e BC interseca l'asse al di

fuori della sezione conica in C. L'ordinata dal punto di tangenza al diametro sia BA poiché esso è perpendicolare all'asse CA. E poiché CO è congruente a OA, BO sarà di conseguenza una parabola secondo Apollonio, l'inverso del teorema I, 37 (*Conica*).
In secondo luogo, a proposito di BV. Le altre condizioni rimangano invariate. Poiché V è il vertice e CV è più piccolo di metà di CA, il doppio di CV può essere sottratto da CA e in tal caso la rimanenza sta a CV come CV sta a CF tra le parti esterne. Poiché il prodotto di CE e della rimanenza è equivalente al quadrato di CV, si aggiungano quantità comuni a entrambi, il quadrato di CF e i due rettangoli VCF, in modo che il rettangolo composto CFA sia da un lato, e il quadrato di FV sia dall'altro lato. Dal momento che sono equivalenti, la sezione BV sarà un'iperbole il cui centro è F in base al teorema inverso I, 37 di Apollonio.
In terzo luogo per quanto riguarda BI, BN, e BE. Le condizioni sopra rimangano le stesse. Poiché I, N, E sono i vertici e dato che IA, NA, EA sono più piccoli di metà di CA, così che il doppio di IA può essere sottratto da CA, e poiché le prime eccedenze stanno a IA come le ultime stanno ad AD, alle parti interne, può essere dimostrato per quanto riguarda il resto tramite lo stesso metodo di prima che i quadrati di DI etc. sono equivalenti ai rettangoli CDA e quindi in base allo stesso teorema inverso di Apollonio le sezioni coniche BI, BN, BE saranno limitate quando i loro centri D giaceranno all'interno delle figure in modo che essi siano ellissi o un cerchio.
In quarto luogo a proposito di BN. Si assumono le stesse condizioni che sono state mostrate nel terzo caso. Poiché inoltre AN sta a NC come AB sta a BC, il cui rapporto si presenta solo una volta in ogni triangolo arbitrario mentre le iperboli e le ellissi hanno diversi rapporti, la parabola in realtà solo uno, ma è il rapporto di uguaglianza, quindi BN non potrà essere nessuna delle sezioni coniche diversa dal cerchio. E questo è infatti il caso nel cerchio. Infatti sia BN un cerchio il cui centro è D che dovrebbe essere collegato al punto B. Perciò l'angolo CBD sarà retto, ma anche CAB era retto. Dunque DC sta a DB come DB, cioè, DN, sta a DA. Ma DN sta a DA come CB sta a BA e come CN sta a NA. Quindi l'arco del cerchio taglia il lato sul cui prolungamento esso ha il suo centro col rapporto dei lati AB, BC.[40]

[40]Kepler, pp. 188-190.

Seguono due corollari, di cui uno corredato da un'analogia.

Teorema 28. *Se le quattro specie di sezioni, cerchio, ellisse, parabola, iperbole sono tangenti ad un vertice comune e inoltre si intersecano in altri due punti ugualmente distanti dal vertice, tutti vengono tagliati in questi due punti da tutti e la circonferenza del cerchio all'interno delle sezioni è all'esterno e racchiude l'ellittica, e adesso la parabolica; la più interna è l'iperbolica e la più interna tra loro è quella che è più ottusa e allo stesso tempo più vicina ai propri asintoti.*

Infatti dal momento che sezioni di specie diverse sono fissate e dissimili anche da una specie all'altra di conseguenza non potranno avere le stesse parti. Tuttavia o sono tangenti l'una all'altra in un singolo punto o si intersecano a vicenda. Ma gli archi che giacciono tra i punti d'intersezione saranno completamente separati uno dall'altro secondo Apollonio (*Conica*), teorema IV, 24. E poiché si è assunto che siano tutte tangenti l'una all'altra al vertice del cono, e che si intersechino anche in altri due punti, nessuna di esse incontrerà nessuna delle altre in altri punti, anche se la parabola e l'iperbole vengono prolungate all'infinito in conformità ad Apollonio. E dato che si assume che esse si incontrino in tre punti non potranno essere tangenti a due dei tre punti. Se fossero tangenti a due punti non si intersecherebbero nel terzo in base ad Apollonio, teorema IV, 27. Quindi ne segue che gli altri due punti comuni siano punti di intersezione. Infatti ogni punto comune è o un punto di tangenza o un punto d'intersezione. L'ordine è permutato nei punti d'intersezione.
Ora se vengono presi tre punti sulla circonferenza di un cerchio un singolo cerchio passerà attraverso di essi in base ai teoremi provati in Euclide, libro III. In modo simile anche la parabola sarà unica. Infatti si assuma che ci siano parabole diverse. Poiché si è assunto che fossero tangenti una all'altra nel vertice del cono, esse avranno anche differenti tangenti al punto comune di intersezione se sono diverse e si tagliano a vicenda. Quindi il problema sarà ridotto a qualcosa di impossibile e il tutto diventerà uguale ad una parte tramite lo stesso metodo di dimostrazione che Apollonio, teorema IV, 28 usa per dimostrare che due parabole non si toccano a vicenda in più di un punto. Pertanto non ci sono parabole diverse ma solamente una che passa attraverso i tre punti.
E poiché le iperboli si estendono tanto più sull'esterno fuori dai punti di intersezione tanto più sono ottuse, come è evidente di per sé, sono più interne all'interno dei punti di

intersezione. E poiché quell'iperbole è supposta più grande tra iperboli simili, cioè quelle con lo stesso angolo degli asintoti se formate da lati più larghi, allora quelle ottuse sono più piccole nella loro specie di quanto le più acute lo siano nella loro specie.
In altre parole: quella interna ha asintoti più vicini perché è più piccola nella sua specie e perché è più ottusa anche della sua vicina. Infatti le (iperboli) più ottuse si avvicinano di più ai propri asintoti, come è stato detto nel teorema precedente, e infine coincidono con essi. Anche questo è stato dimostrato nel precedente teorema, che il centro in ogni serie di iperboli più ottuse è più vicino alla tangente di quanto lo sia al vertice, nelle restanti (serie) più sono acute più sono lontane. E infatti la tangente stessa è anche più interna dell'iperbole interna.
Questo può essere dimostrato completamente per mezzo di Apollonio, teorema I, 37. Dal momento che le iperboli fuori (dai punti di intersezione) includono la parabola, la parabola al contrario racchiuderà quelle all'interno dei punti d'intersezione perché la parabola include le ellissi fuori dai punti d'intersezione. Infine dato che si presume che il cerchio tangente alle ellissi nel vertice le tagli in due punti, le lunule ellittiche verranno tagliate di conseguenza dal cerchio e giaceranno fuori dal cerchio. Perciò, prima dei punti d'intersezione, gli archi delle ellissi saranno all'interno dell'arco del cerchio.[41]

Teorema 29. *Se i limoni, le prugne, i fusi parabolici, i fusi iperbolici e il cono raddoppiato - sono tutti troncati - hanno gli stessi cerchi, cioè quello che tronca così come quello al centro dei corpi, il limone sarà il corpo più grande, gli altri saranno nello stesso ordine di grandezza di volumi in cui sono enumerati qui.*

Questo è facilmente dimostrato sulla base del risultato precedente. Infatti il limone viene creato da una parte del cerchio, le prugne da segmenti verticali delle ellissi, i fusi da segmenti verticali delle parabole e delle iperboli, il cono doppio da un triangolo isoscele. Tuttavia poiché si assume che i corpi abbiano gli stessi cerchi secanti, gli archi di tutte le linee generatrici si taglieranno a vicenda in due punti per cui passano i cerchi secanti. E poiché lo stesso cerchio massimo così come quello al centro del corpo è assegnato a tutti i corpi, tutte le linee generatrici di conseguenza sono tangenti a vicenda nel vertice comune che crea quel cerchio nel mezzo dell'intero corpo ruotando la figura. Ma poiché

[41] Kepler, pp. 192-196.

le sezioni coniche si racchiudono a vicenda nell'ordine assegnato qui, anche i segmenti si supereranno reciprocamente a vicenda nello stesso ordine.
Quindi il cono raddoppiato e troncato (nella figura XVIII contenuto dai segmenti HAE, GCF) sarà il più piccolo. Prima di tutto, le singole iperboli condurranno attorno a esso singoli involucri così che si originano fusi iperbolici troncati; anche la parabola ne descriverà uno così che nascerà un fuso parabolico. Allora le singole ellissi aggiungeranno di nuovo (involucri) singoli in modo che si originino prugne ellittiche troncate. Infine il cerchio porrà l'ultimo involucro su di esso tramite l'arco FSQCG e produrrà un limone troncato.[42]

Teorema 30. *UN PROBLEMA PROPOSTO AI GEOMETRI.*
Indagare il rapporto delle porzioni del limone, dell'oliva, della prugna o del fuso prodotte da un piano parallelo all'asse.

La sua utilità non può essere oscura, la scienza è carente. Tuttavia quando il solido del limone viene esteso in un corpo retto, cioè nella porzione di un prisma cilindrico, la parte di quella porzione cilindrica corrisponderà a una tale parte del limone che viene prodotta da una superficie che è simile a una cilindrica o piuttosto alla parte di un foglio avvolto in qualche modo. Infatti è rettilineo in una direzione e parallelo ad una retta nella base della porzione cilindrica. Ma è curvo verso la cima, però né con la curvatura di un cerchio - questo è certo - né di una sezione conica per quanto vedo, sebbene diventi simile a un'ellisse tra le sezioni coniche poiché è più curva in cima. E anche se si dovrebbe conoscere la linea di questa curvatura, tuttavia il volume di una tale porzione non sarebbe fornito dai risultati che sono stati dimostrati finora.[43]

Una piccola conclusione di Keplero termina questo supplemento ad Archimede, portandoci direttamente alla Parte II di quest'opera.

[42]Ibidem, p. 196.
[43]Ibidem, pp. 196-198.

3.2 Parte II: La geometria solida della botte austriaca, in particolare a quale tipo di figure che abbiamo trattato sopra appartiene la forma di un barile?

La seconda parte dell'opera comincia con una dichiarazione d'intenti di Keplero sul contenuto di questa sezione, ovvero indagare la natura della forma delle botti, e prosegue con una piccola sottosezione dal titolo *Come si condanna l'asta di misura per falsità e come la sua affidabilità viene garantita*, che precede il primo teorema della seconda parte.

Teorema 31. *Le sezioni dei cilindri retti attraverso l'asse che hanno diagonali equivalenti hanno aree diseguali a meno che il rapporto del diametro della base rispetto all'altezza sia lo stesso o il suo inverso. E tra loro l'area più grande è quella del cilindro la cui altezza è congruente al diametro della sua base.*

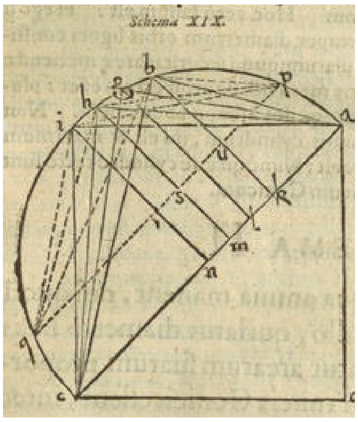

Figura 3.16: Teorema 1, parte II.

Sia CI il diametro della base cilindrica, IA l'altezza del cilindro congruente al diametro della base che rappresenta metà della botte di vino. La sezione del cilindro sia il rettangolo AICO che qui è un quadrato, e AC sia la diagonale che rappresenta l'asta di misura dall'apertura alla base del fondo di legno IC, che discende trasversalmente. Poiché si assume che il cilindro sia retto, CIA sarà un angolo retto. Si bisechi AC in N e si tracci un semicerchio AIC col centro N e il raggio NA che passerà per I perché AIC è un (angolo) retto. E poiché AI, IC sono congruenti, gli archi AI, IC saranno

conseguentemente quadranti di un cerchio. Se si collegano i punti N, I, gli angoli INA, INC saranno retti e IN sarà una perpendicolare su AC.
Inoltre si scelgano punti arbitrari di un quadrante: siano essi per esempio H, B e li si colleghi con gli estremi A, C del diametro tramite i segmenti HA, HC, BA, BC in modo che il quadrato AICO o metà di esso, cioè il triangolo AIC si trasforma in altre figure AHC, ABC per cui la diagonale AC rimane la stessa e l'angolo I rimane retto anche in H e B perché tutti gli angoli sono stati costruiti nello stesso semicerchio. Pertanto AHC, ABC sono di nuovo sezioni bisecate di cilindri retti e inoltre CH, CB sono i diametri delle basi, e HA, BA sono le altezze dei cilindri.
Assumo che l'area AIC sia la più grande, AHC sia più piccola, ABC sia ancora più piccola (poiché il punto B è più lontano dall'estremo I del quadrante). Infatti si traccino dai punti H, B le perpendicolari al diametro AC che sono HM, BK. Allora, in base a ciò che è stato dimostrato da Euclide[44], l'area di qualsiasi triangolo è equivalente al rettangolo formato da metà della base AC e dall'altezza dei triangoli, cioè NI, MH, KB. Quindi IN sta a HM e BK come l'area AIC sta alle aree AHC e ABC. Tuttavia nel quadrante AI tutti i segmenti, paralleli al semidiametro IN, come per esempio HM, BK, sono più piccoli del semidiametro IN, e BK, più lontano da esso, è più piccolo di HM, che è più vicino ad esso. Quindi l'area AHC è più piccola di AIC e ABC è ancora più piccola di AHC. Pertanto i rettangoli, il doppio di questi triangoli, sono più grandi nello stesso ordine.
Assumo che anche i cilindri col rapporto invertito dell'altezza al diametro della base hanno sezioni equivalenti.
Infatti sia AB il diametro della base e sia BC l'altezza del cilindro. Evidentemente il triangolo ABC che è metà della sezione del cilindro attraverso l'asse rimane la stessa di prima perché BC era il diametro della base e AB l'altezza e quindi il rapporto di questi segmenti è invertito.
Non devo nascondere l'errore in cui una considerazione disattenta di questo teorema mi ha spinto il primo giorno. Questo avvertirà il lettore di stare in guardia contro errori simili altrove. Infatti ho falsamente calcolato come segue: poiché il rapporto di aree simili è il quadrato del rapporto dei lati, ma quello di volumi simili è il cubo, anche in

[44]Quest'affermazione può essere dedotta da Euclide, *Elementi* I, 37.

(volumi) dissimili con la stessa diagonale AC, il rapporto dei volumi sarà sempre analogo al rapporto di aree e segmenti. Ma questo è falso. E se avessi veramente dato questo consiglio ai produttori di cestini per impostare sempre il diametro del fondo di legno come metà della lunghezza delle doghe (la trascuratezza lo richiede per misurare l'area e anche se questa negligenza fosse stata presa in considerazione per misurare il volume) avrei veramente danneggiato la loro arte e li avrei condotti lontano dal loro scopo. Infatti l'area più grande del piano che taglia il cilindro non implica il volume più grande del cilindro. Questo diventerà evidente più tardi. Ora dovrei accomodare al tronco di cono ciò che è stato detto a proposito del cilindro retto.[45]

Teorema 32. *Nei tronchi di coni tutte le affermazioni rimangono valide eccetto che tra i tronchi più simili a quello il cui lato è congruente al diametro della base più piccola, il rapporto delle loro aree varia di più che se i cilindri fossero sostituiti ai tronchi di coni, e tra i tronchi più lontani esso varia di meno.*

Siccome l'angolo formato dal lato del tronco e dal diametro della base più piccola è più grande di un angolo (retto), esso corrisponderà non a un semicerchio ma ad un arco che è più piccolo di un semicerchio. Si tracci PQ parallela ad AC che taglia il semicerchio nei punti P, Q e le perpendicolari IN, HM, BK nei punti R, S, V e si colleghino i punti I, H, B coi punti P, Q. Allora PQ rappresenta l'asta di misura, QI, QH, QB il diametro della base del cono troncato; IP, HP, BP è il lato del tronco, metà della lunghezza delle doghe nei barili. E gli angoli QIP, QHP, QBP sono ottusi e congruenti a vicenda poiché insistono sullo stesso segmento. Essi offrono la causa, in tutte queste figure, di questa variazione che ho intrapreso a spiegare qui.

L'area PIQ sta nuovamente alle aree PHQ e PBQ come IR sta a HS e BV. Quindi, poiché (lunghezze) congruenti RN e SM sono state sottratte dalle disuguali IN, HM, le rimanenze IR e HS avranno un rapporto più grande (di quello di IN e HM). Pertanto la differenza tra le aree PIQ, PHQ è più apprezzabile di quella tra le aree AIC, AHC. Le diminuzioni delle perpendicolari, tuttavia, sono massime in A. Quindi saranno minori in P. E in P l'altezza del tronco svanisce, ma in A spariscono le altezze dei cilindri. Dunque le aree PBQ, più vicine all'estremità P, diminuiscono in un rapporto più piccolo delle aree

[45]Kepler, pp. 204-208.

ABC, più vicine all'estremità A. Ma precedentemente le (aree) PHQ più vicine al punto iniziale I sono diminuite in un rapporto più grande di quello delle AHC. Questo teorema è particolarmente notevole per via di un'altra allucinazione più duratura riguardante il confronto di tronchi di coni tra loro che menzionerò sotto.
Inoltre il seguente teorema III contiene la confutazione dell'allucinazione in questione.[46]

Teorema 33. *I volumi dei cilindri retti le cui sezioni hanno la stessa diagonale non hanno rapporti tra loro che sono uguali ai rapporti delle aree da cui essi sono tagliati attraverso l'asse. E non è il cilindro con la massima area secante che ha il volume più grande.*

Quando nella precedente figura AIC è metà dell'area IO che seca il cilindro IO attraverso l'asse, e IC è il diametro della base, si origina un parallelepipedo rettangolo che è tangente al cilindro se l'area AICO viene moltiplicata per il diametro IC della base. Quindi 14 sta a 11 come questo parallelepipedo sta al volume del suo cilindro in base al teorema III della precedente geometria solida dei corpi regolari. Quindi nella figura tra quelle che hanno la stessa diagonale AC dove questo parallelepipedo è il più grande c'è anche il cilindro che è il più grande. Tuttavia questo parallelepipedo non è il più grande nella figura dove AIC è metà della sezione sebbene l'area di sezione AICO sia quella massima. Dimostro questo come segue.
Sia H il punto nel quadrante IA più vicino al punto I, cioè all'estremità del quadrante. Poiché AHC è una figura diversa da AIC e con la stessa diagonale AC, allora, poiché le aree AIC, AHC stanno una all'altra come le loro perpendicolari IN, HM, avranno il rapporto più piccolo tra loro all'estremità del quadrante e infatti quasi uguale perché anche le linee IN, HM separate una dall'altra da un determinato intervallo hanno tra loro il rapporto più piccolo. Questo rapporto tra loro diventa sempre più grande quanto più si avvicinano ad A, l'inizio del quadrante dove rimane lo stesso intervallo tra loro.
Ma ora le linee CI, CH devono essere moltiplicate per le aree così che si origini un volume e, a causa dell'equivalenza, il rettangolo formato da NI, IC sta al rettangolo formato da MH, HC come il volume del parallelepipedo AICI sta al volume AHCH. Tuttavia il rapporto di HC a CI è più grande di quello di IN a HM. Infatti CI si estende al di sotto del

[46]Ibidem, pp. 208-210.

quadrante, CH un po' di più, e le loro metà sono le perpendicolari di metà del quadrante e un po' di più. Ma quelli non hanno il rapporto minimo tra loro poiché è più grande nel mezzo del quadrante che all'estremità dove lo stesso intervallo è presupposto su entrambi i lati delle perpendicolari.
Quindi se c'è lo stesso intervallo tra le perpendicolari, per esempio, metà dell'arco HC, le perpendicolari all'estremità I del quadrante hanno un rapporto più piccolo di metà di (dei segmenti) CI, CH nel mezzo del quadrante, essendo distanti l'una dall'altra di metà dell'arco HI. E poiché la differenza tra metà di (dei segmenti) CI, CH è più grande di quella tra le perpendicolari in I che sono distanti l'una dall'altra di metà dell'arco HI, la differenza tra gli interi (segmenti) CI, CH, due volte la precedente, sarà più grande di quella tra le perpendicolari IN, HM che sono distanti l'una dall'altra per l'intero arco HI. Pertanto il risultato è che la differenza tra IC e CH è più grande di quella tra HM e IN. Quindi, sebbene HM nella seconda figura sia solo un po' più piccola di IN nella prima (figura), tuttavia d'altra parte CH nella seconda figura è molto più grande di CI nella prima (figura). Quindi il rettangolo MHC è più grande di NIC e pertanto il cilindro e il suo parallelepipedo AHCH è più grande di AICI mentre al contrario l'area di sezione AHC del cilindro AHCH era stato precedentemente dimostrato essere più piccolo di AUC. Quindi il rapporto dei volumi AICI, AHCH non è uguale al rapporto delle aree AIC, AHC. E AIC, in verità, è la massima delle aree sulla stessa diagonale, ma il volume AICI non è quello massimo, dato che AHCH è più grande di questo (volume).[47]

A questo teorema segue una sezione contenente alcuni esercizi, che mostra anche alcune conseguenze del risultato precedente.

Teorema 34. *Il cubo è il volume più grande di tutti i parallelepipedi o delle colonne, inscritti nella stessa sfera, che consistono di due basi quadrate opposte.*

Il teorema mancava fino ad ora sebbene abbia un'evidente dimostrazione per analogia. Un cerchio è la più grande di tutte le figure piane contenute all'interno di perimetri uguali, come Pappo (*Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*) ha dimostrato nel libro V. Ma delle aree piane contenute da un uguale numero di lati e all'interno di un

[47]Ibidem, pp. 210-212.

uguale perimetro quelle che sono più grandi sono quelle che sono più simili a un cerchio. Nuovamente, delle porzioni di cerchi differenti, le cui circonferenze sono uguali, il semicerchio è il più grande.
Allo stesso modo il cubo è il più grande in volume di tutti i corpi che sono contenuti dalla stessa area di superficie del cubo. E dei poliedri isoperimetrici un poliedro arbitrario è tanto più grande quanto più è simile alla sfera nella disposizione e nel numero dei lati: l'icosaedro è infatti il più grande perché è contenuto da tantissime basi, come il cerchio da infinite quasi basi. Pappo tratta tutto quello nel libro V.
Archimede[48] ha anche dimostrato riguardo a spicchi isoperimetrici di sfere diverse che l'emisfero è il più grande di tutti gli spicchi del globo che sono contenuti dalla stessa area.
Riguardo a questo, il cerchio e la sfera superano infatti le altre figure quando esse sono isoperimetriche. Ma se l'uguaglianza della superficie viene lasciata da parte e se, al contrario, viene fornita la stessa sfera, circoscritta a poliedri, succede il contrario ad alcuni di essi: il dodecaedro è più grande dell'icosaedro, come è stato dimostrato da Apollonio e Ipsicle[49] in Euclide. Ma questo avviene a causa della natura della sfera e per via della somiglianza della figura al globo che domina qui. Precedentemente, quando le superfici erano uguali, la somiglianza con la sfera consisteva nella moltitudine di superfici. Qui la somiglianza col globo consiste nella moltitudine di angoli, che è più grande nel dodecaedro che nell'icosaedro perché viene assunta nelle varie figure una sfera equivalente degli angoli e una disposizione che è ordinata da essa.
Poiché la questione è questa, si vede facilmente che, anche tra i volumi che sono racchiusi da un uguale numero di figure piane, quel corpo è il più capiente nella sfera che è più simile ad esso. Lì la somiglianza consiste nell'equivalenza e somiglianza di superfici e nell'ordine degli angoli. Queste si trovano di più nel cubo che negli altri parallelepipedi di una sfera. Quindi il cubo è più capiente. Questa è in effetti una dimostrazione per analogia. Ora aggiungo una dimostrazione completa che veramente ha qualche difficoltà

[48] Archimede, *De sphaera et cylindro* II, vol. I, prop. 9.

[49] Ipsicle segnala nella sua prefazione al quattordicesimo libro degli *Elementi* di Euclide che Apollonio ha confrontato i volumi del dodecaedro e dell'icosaedro. Keplero poteva leggerlo nell'edizione di Clavio degli *Elementi* di Euclide, che è apparsa originariamente nel 1574, e che egli ha usato in parecchie edizioni di questo lavoro.

perché piccole sezioni del solido devono essere immaginate nella figura piana.
Sia AGB il cerchio massimo della sfera nella prossima figura, sia AB il suo diametro e allo stesso tempo l'asse della sfera, sia AG il lato del cubo nella sfera, e sia GB una diagonale di un quadrato del cubo. Perciò le colonne con due basi quadrate che sono inscritte nella stessa sfera o sono più alte del cubo e hanno basi quadrate che sono più piccole di quelle del cubo oppure sono più basse del cubo con basi quadrate più ampie.

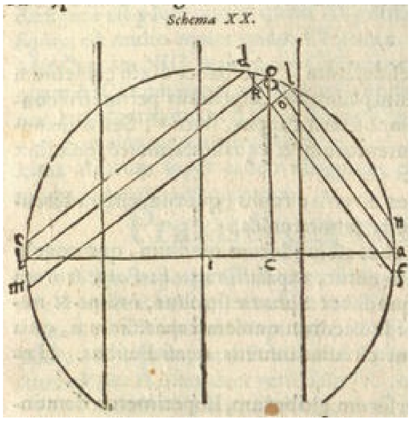

Figura 3.17: Teorema 4, parte II.

Prima di tutto la colonna sia più alta del cubo. Si disegni una parallela nel cerchio all'altezza GA del cubo che è più lunga di quanto DF dovrebbe essere, che taglia GB in K. In maniera simile si disegni anche una parallela alla diagonale GB del cubo dal punto D, l'estremità dell'altezza della colonna che dovrebbe essere DE, la diagonale di un quadrato della colonna. Assumo che il volume della colonna FDE sia più piccolo del volume del cubo AGB. Poiché DK sta a BK come GK sta a KF e al contrario FK sta a KB come GK sta a KD. Ma AG è più piccolo di FK e GB è più grande di KB. Quindi il rapporto AG a GB è più grande[50] di GK a KD. Ma AG a GB è il rapporto $1{:}\sqrt{2}$. Pertanto il rapporto GK a KD è più piccolo di $1{:}\sqrt{2}$ e GK è o più di metà di KD oppure è più grande o uguale a KD.
L'aggiunta del volume cubico all'altezza è stata realizzata moltiplicando i due quadrati della colonna su entrambi i lati per la piccola parte KD dell'altezza. D'altra parte

[50]L'affermazione corretta sarebbe "più piccola". La conclusione deve essere corretta corrispondentemente.

la diminuzione dello spessore del corpo cubico è stata prodotta moltiplicando i quattro quadrati attorno al volume della colonna per la piccola quantità di cui metà del lato della sezione quadrata del cubo differisce da metà del lato della sezione quadrata della colonna. Questa diminuzione sta a GK, il decremento di metà della diagonale, come AG sta a GB, ovvero 1:$\sqrt{2}$. Qui non è espressa l'intera diminuzione perché dodici piccole colonne che vengono anche sottratte dallo spessore del cubo giacciono ancora attorno a questi quattro mattoni di tipologia quadrata, la quale è più piccola di una sezione quadrata del cubo. E quando i quattro mattoni attorno alla colonna sottratti dal volume del cubo sono più grandi dei due mattoni che sono stati aggiunti sopra e sotto al corpo del cubo, l'intera diminuzione del volume del cubo eccederà notevolmente l'aggiunta che è stata fatta all'altezza. Ora i quattro mattoni ai lati sono più grandi dei due mattoni dell'altezza. Questo lo provo nel modo seguente.
Infatti ciascuno dei mattoni laterali sta a un mattone dell'altezza come il decremento di un lato del cubo sta all'incremento dell'altezza, ossia quella la cui metà è KD. Ma la diminuzione del lato cubico ha un rapporto rispetto all'incremento dell'altezza che è composto dai rapporti AG:GB e GK:KD. Infatti il decremento di metà del lato sta alla diminuzione GK di metà della diagonale come AG sta a GB. Questa è una parte del rapporto. L'altra parte è proprio il rapporto GK:KD. Ora questi due rapporti insieme danno qualcosa che è più piccolo di $1:2$. Questo poiché AG:GB è 1:$\sqrt{2}$ e GK:KD è più piccolo di 1:$\sqrt{2}$. Ma se si compongono una metà e meno di una metà esse producono meno dell'intero. Quindi se un mattone laterale ha un rapporto a uno dell'altezza che è più piccolo di $1:2$, un mattone dell'altezza non è del tutto il doppio di un mattone laterale e un mattone dell'altezza non è completamente equivalente a due mattoni laterali, ma è più piccolo. E di conseguenza due mattoni dell'altezza sono più piccoli di quattro mattoni laterali. E pertanto l'aggiunta fatta all'altezza è più piccola del decremento fatto riguardo ai lati del cubo. Quindi la colonna della sfera che è più alta del cubo è più piccola del volume del cubo.
In secondo luogo la colonna sia più bassa del cubo e si tracci nel cerchio una parallela più piccola LN all'altezza GA del cubo, che corrisponde all'altezza della colonna, e si tracci da L la parallela LM alla diagonale GB della figura piana del cubo, che corrisponde alla diagonale del quadrato più grande della colonna che taglia GA in O.

Dunque dall'altro lato come prima MO sta a OA come il decremento GO dell'altezza da una parte sta a OL, l'incremento di metà della diagonale. Ma BG è più piccolo di MO e GA è più grande di OA. Quindi il rapporto BG a GA che è $\sqrt{2}$:1 nel cubo è più piccolo di GO a OL. Pertanto il rapporto GO a OL è più grande di $\sqrt{2}$:1.
Ma il rapporto tra l'incremento di metà della diagonale OL e l'aumento di metà del lato del quadrato è $\sqrt{2}$:1. Quindi se si compone il rapporto $\sqrt{2}$:1 e un rapporto che è più grande di $\sqrt{2}$:1 ad un rapporto, il rapporto del decremento GO di metà dell'altezza all'incremento di metà del lato è più grande di $2:1$. Tuttavia moltiplicare due quadrati del cubo per GO produce due mattoni che vengono sottratti dall'altezza del corpo cubico. Moltiplicare i quattro quadrati del cubo per l'incremento di metà del lato produce quattro mattoni che sono più grandi dell'aggiunta che è stata fatta attorno al corpo del cubo. Questo poiché anche se si pongono questi quattro mattoni attorno alla colonna, la colonna non è ancora completa perché mancano quattro piccole colonne ai quattro lati eretti della colonna. Ciononostante questi mattoni eccedono l'altezza della colonna dall'altro lato, dove ci sono altre otto piccole colonne della stessa altezza di quelle che mancano, anche se più spesse di loro. Poiché il loro spessore è GO, lo spessore di esse sta a OL come AG sta a GB, in effetti più piccolo di OL, quindi molto più piccolo di GO. Quindi in breve le otto colonne spesse in eccesso sono più grandi delle quattro colonne sottili mancanti. Quindi i quattro mattoni in questione sono più grandi dell'aggiunta fatta al corpo del cubo. E se l'incremento di metà del lato fosse esattamente metà di GO (che è prodotta da GO moltiplicato per due quadrati) sarebbe uguale a quello prodotto dal decremento di metà del lato moltiplicato per i quattro quadrati. Ma è stato dimostrato che l'incremento di metà del lato è più piccolo di metà di GO. Quindi i quattro mattoni quadrati sono più piccoli anche dei due mattoni dell'altezza. Quindi l'aggiunta fatta ai lati del cubo è molto più piccola del decremento nell'altezza. Perciò la colonna della sfera, essendo più piccola del cubo della sfera, è più piccola del volume del cubo nella stessa sfera. Tuttavia in precedenza la colonna che era più alta del cubo era più piccola di quel cubo. Di conseguenza, nessuna colonna della sfera con basi quadrate e facce rettangolari raggiunge il volume del cubo nella stessa sfera, come doveva essere dimostrato.[51]

[51] Kepler, pp. 216-224.

Teorema 35. *Il più grande e più capiente di tutti i cilindri che hanno la stessa diagonale è quello il cui diametro della base sta all'altezza nel rapporto di $\sqrt{2}$:1 o come il lato del tetraedro o la diagonale del quadrato del cubo al lato del cubo nella stessa sfera.*

Ripetiamo la figura del primo teorema e sia AC la linea diagonale del rettangolo tramite cui il cilindro viene tagliato attraverso l'asse che rappresenta l'asta di misura e si tracci il semicerchio AGC su AC. Si divida AC in tre parti uguali e sia AL la prima parte, LC la seconda, e si eriga la perpendicolare LG da L che taglia il cerchio in G e si colleghi G con A e C. Allora, poiché CL è due volte LA, CA sarà tre volte LA. Ma CA sta ad AG come AG sta a LA. E, poiché vi sono tre proporzionali continui il primo sta al terzo come il quadrato del primo sta al quadrato del secondo. Ora dato che il primo (proporzionale) CA è tre volte il terzo (proporzionale) LA, anche il quadrato di CA sarà tre volte il quadrato del secondo (proporzionale) AG. E siccome il quadrato di AC è equivalente alla somma dei quadrati di AG, GC, di cui il quadrato di AG è un terzo, il quadrato di GC sarà due terzi del quadrato di AC e quindi il quadrato di GC sarà due volte il quadrato di AG. Pertanto AG è il lato del cubo inscritto nella sfera AGC e GC è la diagonale del quadrato del cubo o il lato del tetraedro inscritto nella stessa sfera.
Assumo che il cilindro il cui diametro della base è GC, e la cui altezza è GA, sia il più capiente di tutti i cilindri che hanno questa diagonale AC o quello col volume più grande. Infatti dato che G, C sono punti sulla superficie della sfera e il segmento GC è il diametro dell'unica base l'intera circonferenza di quella base sarà sulla circonferenza della sfera, quindi anche la base opposta di cui A è un punto. Ma se AG è un lato del cubo e GC la diagonale del lato del cubo, il quadrato del cubo, di cui due angoli opposti sono G, C, sarà necessariamente inscritto nel cerchio GC e quindi anche nel cerchio della base opposta tracciata attraverso A. Pertanto il cilindro già definito avrà un cubo inscritto con altezza uguale alla propria, e con tutti i suoi angoli sulla superficie della sfera.
Allo stesso modo, si può immaginare un quadrato inscritto di una colonna di altezza IA in ogni altro cerchio della sfera il cui diametro è per esempio IC. E i due angoli opposti di quel quadrato sono I, C, gli angoli dell'altro quadrato sono A, X. Quindi una colonna di uguale altezza è inscritta nel cilindro AIC.
Tuttavia il rapporto di tutte le colonne ai cilindri di uguale altezza è lo stesso. Ma il cubo è il più grande di tutte le colonne nella sfera. Quindi il cilindro AGC circoscritto

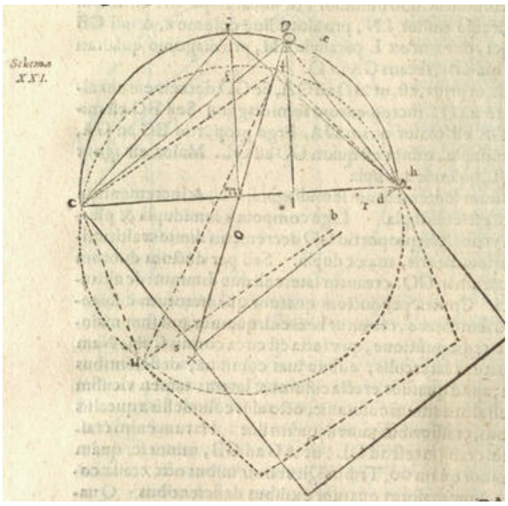

Figura 3.18: Teorema 5, parte II.

attorno al cubo della sfera è il più grande di tutti gli altri cilindri così come AIC nella sfera.

La stessa dimostrazione può essere effettuata per mezzo della figura XIX nel modo seguente. Si facciano terminare i tre cilindri nei punti H, G, B che hanno la stessa diagonale CA, le basi CH, CG, CB, e le altezze HA, GA, BA. Ma il quadrato CG sia due volte il quadrato GA e CH sia più corto, CB più lungo, di CG. Si traccino le perpendicolari HM, GL, BK su CA. Siccome CGA è un (angolo) retto, il quadrato di CG starà al quadrato di GA come il segmento CL sta al segmento LA, cioè due volte più grande. E il quadrato di CH starà al quadrato di HA come CM sta a MA e il quadrato di CB sta al quadrato di BA come CK sta a KA. Ma i quadrati di CH, CG, CB stanno uno all'altro come la basi circolari dei cilindri. Quindi anche CM, CL, CK stanno uno all'altro come la basi dei cilindri. Ma i rapporti dei cilindri sono composti dal rapporto delle basi e dal rapporto delle altezze. Quindi i tre rettangoli formati da CM, CL, CK che hanno il rapporto delle basi e delle altezze HA, GA, BA hanno il rapporto dei cilindri uno all'altro.

Tuttavia attraverso una permutazione AM, AL, AK stanno uno all'altro come stanno i quadrati delle altezze AH, AG, AB. Perciò la stessa quantità LM che viene aggiunta a LA viene anche sottratta da LC. E al contrario la quantità LK è la stessa che viene sottratta da LA e aggiunta a LC. Ma poiché CL è due volte LA, il rapporto del più piccolo CM al più grande CL è più grande della radice quadrata dell'inverso del rapporto del più lungo

MA al più corto LA. Per esempio se CL è 20, LA 10, e inoltre CM 19, MA 11, il rapporto 20 : 19 è più grande di metà del rapporto di 11 : 10, cioè 22 : 20. Infatti il rapporto 22 : 20 ha due elementi, 22 : 21 e 21 : 20. Ognuno di essi è più piccolo del rapporto 20 : 19. Quindi il rapporto MA a LA e perciò quello del quadrato di HA al quadrato di GA è più piccolo del quadrato del rapporto di CL a CM. Ma il rapporto dei segmenti HA a GA è la radice quadrata del rapporto dei quadrati e la radice quadrata del quadrato del rapporto è il semplice rapporto. Quindi il rapporto dell'altezza HA all'altezza GA è più piccolo di LC a MC, il rapporto delle basi. Pertanto il rettangolo formato da HA e CM che rappresenta il cilindro CHA è più piccolo del rettangolo formato da GA e CL che rappresenta il cilindro CGA perché CM è più corto nel suo rapporto e HA è più lungo nel suo rapporto.
La stessa cosa è dimostrata tramite argomentazioni opposte riguardo il cilindro CBA. Sicché il rapporto tra il più lungo CK e il più corto CL è più piccolo della radice quadrata del rapporto inverso tra il più corto AK e il più lungo AL. Per esempio, se CL è 20, LA è 10, e inoltre CK 21, KA 9, il rapporto 20 : 21 è più piccolo della radice quadrata di 9 : 10 o 18 : 20. Sicché gli elementi individuali 18 : 19 e 19 : 20 sono più grandi del rapporto 20 : 21. Quindi il rapporto tra LA e AK, cioè, tra il quadrato di GA e il quadrato di AB è più grande di quello tra il quadrato di KC e CL.
E così, il rapporto tra i segmenti GA e AB è più grande di quello tra KC e CL. E BA non è più corto di GA nel suo stesso rapporto di così tanto come CK sia più lungo di CL nel suo rapporto. E il rettangolo sotto BA, CK è più piccolo del rettangolo sotto GA, CL. Pertanto, il cilindro CBA è più piccolo del cilindro CGA. E questo dimostra che CGA è il più grande di tutti.[52]

Seguono al teorema due corollari e un'ammonizione. Di seguito riportiamo anche una definizione utile per la comprensione del Teorema 6.

Definizione 1. Un cilindro e un tronco di cono si dicono coniugati quando le sezioni di entrambi attraverso l'asse hanno le stesse (o congruenti) diagonali e quando il diametro della base del cilindro sta alla sua altezza come il diametro della base più piccola del

[52]Ibidem, pp. 224-228.

tronco sta al suo lato obliquo.[53]

Teorema 36. *PROBLEMA. Dati un cilindro e il lato del tronco coniugato o il diametro della base più piccola: si trovino gli altri segmenti del tronco coniugato. È necessario anche che il rapporto del lato (o base) nel cilindro al lato (o base) fornito del tronco è più piccolo del rapporto del diametro e dell'altezza del cilindro, uniti insieme, rispetto alla diagonale.*

Il cilindro AGCX abbia base con diametro CG, altezza GA, e diagonale AC. La base del tronco abbia diametro CT. E il rapporto di CG a CT sia più piccolo del rapporto di CG e GA, uniti insieme, rispetto a CA. È necessario trovare il lato del tronco e il diametro della base più larga. CG stia a GA come CT sta a un certo segmento, per esempio AT. E si costruisca un triangolo su CA tramite CT, AT. Poiché il rapporto di CG+GA a CA è più grande del rapporto di CG a CT, sarà più grande anche di GA ad AT e, dopo aver sommato i termini, il rapporto di CG+GA a CA sarà più grande del rapporto dello stesso CG+GA a CT+TA. Quindi la somma di CT e CA sarà più grande

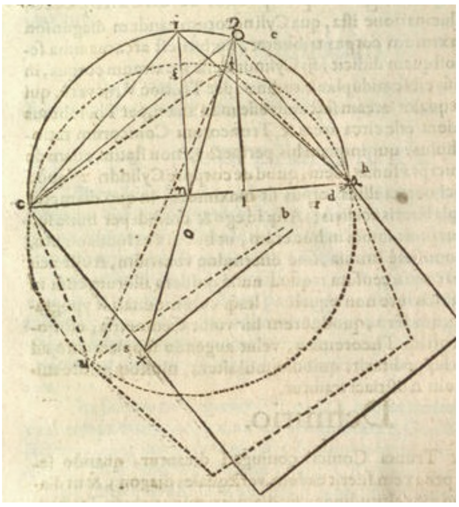

Figura 3.19: Teorema 6, parte II.

di CA. Quindi sarà possibile costruire il triangolo tramite CT e TA su CA. Ora si disegni un cerchio passante per i punti C, T, A. E si apponga una corda congruente a TA da C

[53]Ibidem, p. 232.

al cerchio in V e si colleghino A, V. Assumo che TA, CV siano i lati inclinati del tronco, e che AV sia il diametro della base più larga.
Si collegano i punti T, V. Dato che TA è congruente a CV e l'arco comune TC è stato aggiunto agli archi TA e CV, gli archi AC e TV saranno congruenti. Quindi anche le corde AC e TV saranno congruenti e l'angolo ATC sarà congruente all'angolo VCT. Quindi il quadrilatero ATCV sarà regolare e inscritto nel cerchio che ha la stessa diagonale AC o TV del parallelogramma AGCX e il rapporto CT a TA sarà lo stesso di quello tra CG e GA. Pertanto il tronco la cui sezione attraverso l'asse è ATCV e il cilindro la cui sezione è AGCX sono coniugati.[54]

Teorema 37. *Quando il cilindro e il tronco di cono sono coniugati e la differenza dei diametri nelle basi del tronco viene tagliata col rapporto che i quadrati del diametro della base e dell'altezza del cilindro hanno uno rispetto all'altro, il quadrato del diametro sarà equivalente al rettangolo formato dal diametro più piccolo del tronco e da un segmento che è composto da questo (diametro più piccolo) e dal segmento che corrisponde al diametro del cilindro.*

Siano AGCX una sezione del cilindro e AC la diagonale. La perpendicolare da G tagli questa (diagonale) nelle parti CL, LA in modo che CL corrisponda a CG. Si costruisca anche la sezione del tronco ATCV sulla stessa diagonale - in base all'ipotesi del teorema VI - il cui diametro più piccolo è CT, e il cui (diametro) più grande è AV. Quando VB, congruente a CT, viene sottratto da AV, il resto sia BA.
Allora, poiché il quadrilatero è posto in un cerchio, il quadrato di AC sarà equivalente ai due rettangoli uniti, quello formato da TC e AV e quello formato da TA e CV, cioè, il quadrato di TA o CV. Quindi se si sottrae il quadrato di AT dal quadrato di AC rimarrà il rettangolo formato da TC e AV, cioè formato da BV e VA. Ma anche se il quadrato di AG, essendo più grande di AT, viene sottratto dallo stesso quadrato di AC, rimane il rettangolo formato da GC e AX, cioè il quadrato di GC, che di conseguenza sarà più piccolo del rettangolo BVA.
Pertanto un certo rettangolo, più piccolo di BVA, sarà equivalente al quadrato di GC. Sia BVD questo rettangolo. Allora la rimanenza formata da DA e BV sarà l'eccedenza

[54] Ibidem, pp. 232-234.

del rettangolo BVA rispetto al quadrato di GC. Ma questo eccesso è equivalente all'eccedenza del quadrato di GA rispetto al quadrato di AT. E poiché il rettangolo BVD era supposto equivalente al quadrato di GC e il rettangolo DBV è l'eccedenza del rettangolo BVD rispetto al quadrato di BV o di TC, DBV è anche l'eccesso del quadrato di GC rispetto al quadrato di TC.
Allora tramite la composizione, dal momento che il quadrato di AG sta al quadrato di GC come il quadrato di AT sta al quadrato di TC, il quadrato di AG starà anche al quadrato di CG, cioè, AL a LC, come l'eccedenza del quadrato di AG rispetto al quadrato di AT, cioè, il rettangolo formato da DA e BV sta all'eccesso del quadrato GC rispetto al quadrato di TC, cioè al rettangolo DBV. Quindi AL sta a LC come il rettangolo formato da AD e BV sta al rettangolo DBV. Pertanto, poiché i rettangoli hanno la stessa altezza BV, AL starà anche a LC come l'altezza AD sta a DB. Perciò, per inversione, se AB viene diviso in D in modo che BD stia a DA come CL sta a LA, cioè, il quadrato di CG al quadrato di GA, il rettangolo BVD sarà equivalente al quadrato di GC, come doveva essere dimostrato.[55]

Seguono al teorema diversi corollari: il primo contiene un esempio di esercizi, e ad esso seguono il corollario II, III e IV.

Teorema 38. *Nel cilindro e nel tronco di cono coniugati il rapporto delle altezze è composto dal rapporto dei diametri nelle basi, la più piccola del tronco di cono e uguale a entrambe quelle del cilindro, e dal rapporto della perpendicolare al lato inclinato del tronco.*

Nella figura XXI (Fig. 3.19) le figure coniugate siano CGAX e CTAV in cui i diametri delle basi del cilindro sono CG e XA, la più piccola del tronco CT, la più grande VA. L'altezza del tronco sia TR, e il lato inclinato TA. Assumo che il rapporto dell'altezza GA del cilindro all'altezza TR del tronco sia composto dal rapporto di GC a CT e dal rapporto di AT a TR. La dimostrazione del teorema è facile. Tuttavia doveva essere data separatamente a causa dei corollari e l'importante analogia.
Poiché CG sta a GA come CT sta a TA, GC di conseguenza starà a CT (tramite permutazione) come GA sta ad AT. Ma il rapporto di GA a TR è composto dal rapporto di

[55]Ibidem, pp. 234-236.

GA ad AT e dal rapporto di AT a TR, per cui anche da quello di GC a CT e da quello di AT a TR.[56]

Seguono un corollario, contenente anche alcuni esercizi in cui si ricerca l'altezza, alcuni esempi ed un altro corollario corredato da un'analogia.

Teorema 39. *Se la differenza dei diametri del tronco viene tagliata nel rapporto che hanno i quadrati dei lati del cilindro coniugato e se la parte corrispondente al diametro della base del cilindro viene aggiunta al (diametro) più piccolo e se i rettangoli sono formati I. dal (diametro) più piccolo e dal più grande, II. dal più piccolo e dal (segmento) composto, allora il rapporto del primo rettangolo, aumentato per la terza parte del quadrato della differenza dei diametri (del tronco) rispetto al secondo rettangolo composto col rapporto dell'altezza del cilindro*[57] *rispetto all'altezza del tronco costituisce il rapporto del volume del tronco rispetto al volume del cilindro coniugato.*

Rimanga tutto invariato nella figura XXI come nel teorema precedente. BA sia la differenza divisa in D in modo tale che il quadrato di AG stia al quadrato di GC come AD sta a DB. Assumo che il rapporto del rettangolo formato da CT e AV, insieme alla terza parte del quadrato di BA, rispetto al rettangolo formato da CT e VD composto col rapporto[58] GA a TR costituisce il rapporto del volume del tronco al volume del cilindro coniugato.

Infatti in base al teorema XVII della prima parte, il rettangolo formato da CT e VA, dopo che è stata aggiunta la terza parte del quadrato di BA, sta al quadrato di CT come il volume del tronco CTAV sta al volume del cilindro inscritto con altezza congruente sopra la stessa base CT. Tuttavia il quadrato di CT sta al quadrato di CG come il volume del cilindro sopra la base CT sta al volume del cilindro con altezza sopra la base CG, in accordo con ciò che è stato detto nei teoremi III e XVI della prima parte. Quindi il rettangolo formato da CT e VA, dopo che è stata aggiunta la terza parte del quadrato di BA, sta al quadrato di CG, cioè, in base all'ipotesi del teorema VI, al rettangolo formato da CT e VD, che è equivalente al quadrato di GC, come il volume del tronco con le basi

[56]Ibidem, p. 240.

[57]"altezza del tronco rispetto all'altezza del cilindro" sarebbe giusto.

[58]Di nuovo deve essere considerato il rapporto inverso TR:GA.

CT, AV sta al volume del cilindro con altezza congruente. Pertanto se il tronco avesse l'altezza del cilindro coniugato, cioè GA, questo rapporto summenzionato sarebbe valido da solo. Tuttavia ora GA, l'altezza del cilindro coniugato, sta a TR, l'altezza più piccola, come il cilindro coniugato sta al cilindro con l'altezza del tronco e le stesse basi, in accordo col teorema XVII della prima parte. E così sta anche il tronco con l'altezza GA rispetto al tronco coniugato con l'altezza TR. Quindi questa è l'altra parte del rapporto (composto).[59]

Seguono tre corollari, di cui il primo corredato da esercizi, e la considerazione di un'analogia.

Teorema 40. *In ogni coniugazione i tronchi diventano infine più piccoli, quando il rapporto dei loro diametri aumenta, di una qualsiasi quantità solida data.*

Data una qualsiasi coniugazione il cui rapporto è CG rispetto a GA, assumo che vi sia un tronco come CTA della stessa coniugazione, cioè, dove CT sta a TA come CG sta a GA, più piccolo di una qualsiasi quantità solida.
È facile dimostrare questo. Infatti i lati CT, TA della figura possono essere diminuiti a un punto tale che CT e TA, uniti insieme, ammontino alla diagonale CA, per cui nel frattempo il rapporto rimane come quello tra CG e GA. Allora i tre lati uniti VC, CT, TA ammontano al quarto VA. Questo è il rapporto più grande possibile del diametro CT a VA in questa coniugazione. In questo caso l'intero tronco si abbassa sulla base o sul piano del cerchio VA. Ma la superficie arbitrariamente grande è più piccola di una qualsiasi quantità solida.[60]

Teorema 41. *Un cilindro che è equivalente in volume a un tronco di uguale altezza ha una base che è la somma dei singoli terzi delle due basi del tronco e il loro medio proporzionale.*

Il rettangolo formato dai diametri del tronco è equivalente al quadrato del medio proporzionale tra i diametri in base ad Euclide, *Elementi* VI, 17 e due tali rettangoli,

[59]Kepler, p. 246.
[60]Ibidem, p. 254.

insieme al quadrato della differenza, costituiscono i due quadrati dei due diametri sotto cui sono contenuti in base ad Euclide, *Elementi* II, 7.

3	5		15	due volte	30
3	5	diff.	2	2	4
9	25-34				34

Quindi tre rettangoli, insieme al quadrato della differenza, sono equivalenti ai tre quadrati dei due diametri nelle basi e del medio proporzionale. Pertanto un rettangolo, insieme a un terzo del quadrato della differenza, è equivalente alla terza parte della somma del quadrato proporzionale e così i singoli terzi uniti del singolo (quadrato). Tuttavia il rettangolo col terzo menzionato sta ai quadrati delle basi del tronco come il volume del tronco sta ai volumi dei cilindri di uguale altezza sopra le basi del tronco in base al (teorema) XVII della prima parte.
Quindi anche i tre terzi menzionati stanno ai quadrati delle basi come il volume del tronco (e perciò anche del cilindro che è equivalente al tronco) sta ai volumi dei cilindri di uguale altezza sopra le basi del tronco. Ma dato che le basi stesse di tali (cilindri) stanno come i volumi, anche la base del cilindro equivalente al tronco starà come le due basi del tronco. Quindi sarà la somma dei singoli terzi di queste (basi) e del medio proporzionale. Nel libro V, capitolo 3 della *Geometria pratica* Clavio usa questo teorema leggermente trasformato. Questo l'ho menzionato prima. Tuttavia egli si affida a principi di dimostrazione più difficili, non evidentemente connessi con i miei (principi). Quindi ho preferito usare utilizzare i miei propri principi per motivi di chiarezza.
Esempio: Siano i diametri 19, 22. Moltiplicate entrambi per se stessi e moltiplicate l'uno per l'altro. I quadrati saranno 361 e 484 e il medio proporzionale 418. La somma di tutti è 1 263, la sua terza parte 421 per il volume del tronco come 361 è il volume del cilindro più piccolo.[61]

Teorema 42. *Il diametro della base del cilindro che ha la stessa altezza del tronco retto e la stessa diagonale è la media aritmetica tra i diametri delle basi del tronco.*

CEAS sia il cilindro con diagonale CA e sia CTAV il tronco retto sopra di esso, la cui altezza TR è congruente all'altezza EA o CS del cilindro. Assumo che il diametro

[61]Ibidem, pp. 254-256.

CE della base del cilindro sia la media aritmetica tra CT e AV, i diametri delle basi del tronco. Infatti poiché il tronco è assunto retto, e i lati obliqui CV e TA sono assunti congruenti, EA e CS sono anch'essi uguali e gli angoli S ed E sono retti perché sono nella sezione del cilindro attraverso l'asse. Quindi VS e TE, i lati dei triangoli VSC e TEA, saranno anch'essi congruenti. Ma CE è congruente a SA, per cui CE supera CT di tanto quanto, data la quantità TE, AV supera AS, o CE, data dalla quantià uguale a VS. Quindi CE è la media aritmetica tra CT e VA, ciò che era da dimostrare.[62]

Teorema 43. *L'eccedenza di un tronco che ha la stessa altezza e la stessa diagonale del cilindro ha un rapporto a quest'ultimo che la dodicesima parte del quadrato della differenza (dei diametri) ha rispetto al quadrato del diametro del cilindro.*

Si immagini un cilindro con la base CT, e la stessa altezza TR come il tronco CTAV. Il rapporto di questo cilindro rispetto al cilindro con base CE e la stessa altezza sarà lo stesso del quadrato CT rispetto al quadrato CE, e questi quadrati stanno alla comune differenza come i cilindri CT, CE stanno alla fascia che il cilindro più grande pone attorno al più piccolo CT. Ma la differenza dei quadrati consiste dei due rettangoli formati da CT e TE e il quadrato di TE che è metà della differenza tra CT e AV, cioè metà di AB, cioè AR. Dall'altro lato il tegumento del tronco CTAV è stato posizionato attorno al cilindro con base CT. Il rapporto di questo tegumento al cilindro inscritto CT è lo stesso di quello del rettangolo formato da AB, BV (o CT) insieme a un terzo del quadrato di AB rispetto al quadrato CT. Tuttavia, il rettangolo formato da AB e CT è equivalente ai due rettangoli formati da ET e TC perché AB è il doppio di ET. Quindi se si sottraggono queste uguali (quantità) da entrambi i lati, il quadrato del più grande CE aggiunge il quadrato AR al quadrato CT lì, cioè la quarta parte del quadrato AB. Qui, tuttavia, viene aggiunto un terzo dello stesso quadrato AD. Ma un terzo supera un quarto di un dodicesimo. Perciò viene aggiunto un dodicesimo del quadrato AB qui, piuttosto che lì. Pertanto il tegumento del tronco è molto più grande della fascia del cilindro sopra la base CE. Quindi se si aggiunge il cilindro comune sulla base CT su entrambi i lati, il tronco CTAV sarà più grande del cilindro CEAS della quantità menzionata.

Esempio: Il tronco abbia i diametri CT 19, AV 22. In base a ciò che è stato detto pre-

[62]Ibidem, p. 256.

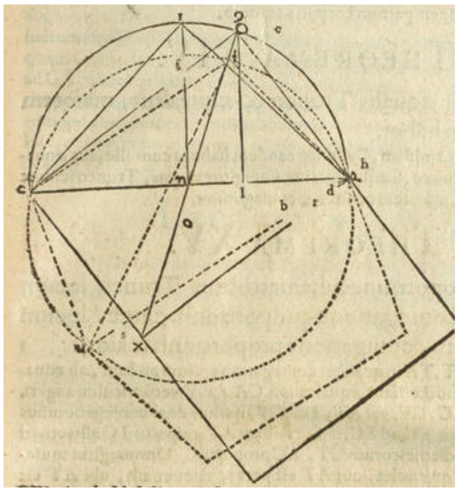

Figura 3.20: Teorema 13, parte II.

cedentemente, il cilindro CTRS inscritto nel tronco sarà 361, il quadrato di 19. Tuttavia il tronco CTAV aggiungerà ad esso il tegumento TRA, CSV, 60, dopo che la differenza AB 3 è stata moltiplicata per CT 19 e per la terza parte di esso, 1, cioè per 20. E si tradurrà nel volume $421\frac{1}{4}$ del tronco CTAV. Ma la media aritmetica tra 19 e 22 è $20\frac{1}{2}$ ed essa dà il quadrato $420\frac{1}{4}$ per il volume del cilindro CE. Infatti metà della differenza AB 3, cioè, TE $1\frac{1}{2}$, moltiplicata per il doppio del più piccolo TC 19, diventa 57. La stessa TE $1\frac{1}{2}$ moltiplicata per se stessa diventa $2\frac{1}{4}$. La somma riguardo alla cintura TE attorno a TC è $59\frac{1}{4}$. Si aggiunga questo al cilindro CT 361. Il risultato è $420\frac{1}{4}$ come è stato detto. Quindi il cilindro CEAS è più piccolo del tronco CTAV di tre quarti di uno che è la dodicesima parte del quadrato 9 dell'intera differenza AB 3.[63]

Segue un corollario contenente un'analogia, che prelude al teorema XIV.

Teorema 44. *Un cilindro che è equivalente ad un tronco e ha la stessa altezza ha una diagonale più grande di quello (quel tronco).*

Infatti, in base alla precedente (intuizione), un cilindro che ha la stessa diagonale di quello (quel tronco) o di uno equivalente è più piccolo in volume del tronco se esso ha

[63]Ibidem, pp. 256-260.

la stessa altezza. Quindi un qualsiasi (cilindro) più grande che è in effetti equivalente in volume al tronco di uguale altezza ha anche una diagonale più grande.[64]

Teorema 45. *Tutti i rapporti di diametri di un tronco che sono validi nella coniugazione con un certo rapporto sono validi anche nella coniugazione con un rapporto più grande.*

Infatti dato che CT, TA possono essere diminuiti in ogni coniugazione dall'uguaglianza[65] finché diventano insieme uguali a CA mentre AV dall'altra parte può essere aumentato fino a che non è uguale ad AC, CV o AT, TC, CV, il rapporto di AT a TC è di conseguenza più grande di queste coniugazioni, ovviamente AT più grande riguardo a TC. Anche il rapporto dei diametri può essere cambiato più di questi. Quindi ogni cambio del rapporto che sia valido per un piccolo AT è valido anche per un AT più grande. Ma dove AT è più grande, un'ulteriore modifica è valida.
A causa di questa coincidenza in varie coniugazioni degli stessi rapporti di diametri ha luogo il seguente paragone.[66]

Teorema 46. *Ogni cilindro sulla stessa diagonale che è più alto del più grande ha un compagno che è equivalente ad esso in volume tra i cilindri che sono più bassi del più largo. Dovremmo chiamarlo "subcontrario".*

Infatti quando il rapporto delle basi è l'inverso del rapporto delle altezze i cilindri sono equivalenti. Si dovrebbe guardare la figura XIX, in cui CGA è il cilindro più largo con base CG e altezza GA. Si prenda CHA che è più alto di CGA. Assumo che si trovi un (cilindro) più basso come CBA tale che la sua altezza BA stia all'altezza HA del primo come la base o il quadrato di CH sta al quadrato di CB.
Infatti quando ne vengono dati uno più largo e uno più piccolo, ne viene anche dato uno equivalente. Ma il quadrato di CH aumenta continuamente di quantità nulle con le linee CQ, CI, CH, CG, CB, CP fino a raggiungere il quadrato del diametro CA, determinando rapporti di ogni tipo. D'altra parte l'altezza, all'inizio assunta come la lunghezza del diametro AC, decresce con le linee AQ, AI, AH, AG, AB, AP allo stesso modo per tutte le proporzioni, in modo che il rapporto diventi più grande di qualsiasi rapporto arbitrario

[64] Ibidem, pp. 260-262.
[65] Quest'affermazione non è vera.
[66] Kepler, p. 262.

dato fino a che l'altezza scompare nel punto A. Pertanto dove i decrementi delle altezze AB percorrono tutti i rapporti mentre gli aumenti dei rapporti crescono all'infinito, lì gli incrementi dei quadrati di CB vengono diminuiti sempre di più e gli aumenti dei rapporti diminuiscono. E dal momento che vi è un cilindro che è più basso di CHA e allo stesso tempo più largo di CHA, come per esempio CGA, e che con un rapporto di HA a GA, che è più piccolo di quello del quadrato di CG rispetto al quadrato di CH, ci sarà di conseguenza un transito per un certo punto nella discesa verso B dove il rapporto di HA a BA che precedentemente era più piccolo (dal momento che cresce di più) diventa uguale al rapporto del quadrato di BC al quadrato di HC (poiché cresce di meno) mentre in precedenza era più grande. Vi sono esempi di cilindri equivalenti nel calcolo appartenente al teorema IV e V.[67]

Teorema 47. *In qualsiasi coniugazione che ha un quadrato del diametro più piccolo di due volte il quadrato dell'altezza, tutti i tronchi che sono i più vicini al cilindro stesso diventano gradualmente più grandi del cilindro coniugato sebbene la loro altezza decresca. In seguito, essi decrescono nuovamente, ancora più grandi del cilindro coniugato fino a quando hanno un'altezza più grande del cilindro subcontrario del cilindro coniugato.*

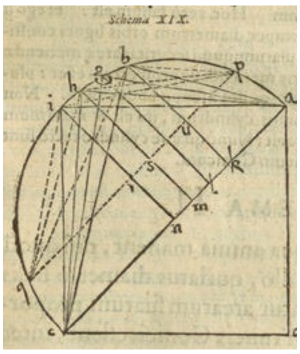

Figura 3.21: Figura 19, parte II.

Nella figura XIX, vi sia una coniugazione, col cilindro CHA, in cui il quadrato del diametro HC è più piccolo di due volte il quadrato di HA. Ma questo cilindro abbia un compagno, proveniente da un'altra coniugazione che è equivalente in volume al cilindro

[67]Ibidem, pp. 262-264.

CBA con base CB e altezza BA.
Per prima cosa assumo che tutti i tronchi CHA della coniugazione la cui altezza sta tra HA e BA siano più grandi dei cilindri CHA e CBA. Infatti il cilindro più grande CGA in cui il quadrato di CG è due volte il quadrato di GA giace tra i compagni CHA e CBA. Quindi tutti i cilindri CGA tra CHA e CBA sono più grandi dei più esterni terminati in H e in B secondo il teorema V di questa (parte). E questi hanno altezze medie tra HA e BA nello stesso modo dei tronchi. Tuttavia in base al (teorema) XIII di questa (parte) i tronchi che hanno altezze uguali ai cilindri sulla stessa diagonale CA sono più grandi di questi (cilindri). Quindi sono molto più grandi dei (cilindri) più piccoli più esterni che terminano in H e B.[68]

Teorema 48. *In una coniugazione con un rapporto che è più piccolo di $\sqrt{2}$:1 il tronco equivalente in volume al cilindro coniugato ha un'altezza che è più piccola dell'altezza del cilindro che è il compagno del (cilindro) coniugato ed equivalente a quest'ultimo, appartenendo tuttavia a una differente coniugazione.*

Infatti il tronco di uguale altezza con un tale cilindro compagno che è equivalente in volume al coniugato è più grande di quello (quel cilindro) in base al (teorema) XIII. È più grande anche del suo cilindro coniugato. Quindi il cilindro che è equivalente in volume al suo coniugato non avrà la stessa altezza. È o più alto o più basso. Ma non (è) più alto in base al presupposto del (teorema) XVII, quindi è più basso. Ma da qui in poi i tronchi (secondo il (teorema) X di questa parte) diventano più piccoli del cilindro coniugato finchè infine svaniscono.[69]
Segue un breve corollario che precede il teorema successivo.

Teorema 49. *In tutte le coniugazioni di tronco e cilindro in cui il diametro della base più piccola è più piccolo di $\sqrt{2}$ del lato obliquo ci sono due differenti rapporti dei diametri del tronco per cui il tronco diventa equivalente al cilindro più grande in tutte le coniugazioni.*

Il diametro GC della base del cilindro stia all'altezza GA (in questo teorema) in un rapporto più piccolo di quello tra $\sqrt{2}$:1. Assumo che vi siano due rapporti CT, AV in questa coniugazione per cui il tronco può diventare equivalente al cilindro più grande il

[68]Ibidem, p. 264.
[69]Ibidem, p. 266.

cui diametro della base è due volte l'altezza. Infatti se GC è più piccolo di GA, GA è di conseguenza più grande di $\frac{1}{\sqrt{3}}$CA. Quindi può essere presa una certa quantità che sia più piccola di AG - sia essa AT - e TC può essere paragonata ad AT col rapporto in cui AG sta a GC, in modo che la perpendicolare da T, cioè TR, sia $\frac{1}{\sqrt{3}}$CA. E il tronco ATCV avrà la stessa altezza come quella del cilindro più grande il cui diametro sta all'altezza con un rapporto di $\sqrt{2}$:1. Perció un tale tronco sarà ancora più grande di questo cilindro massimo in base al teorema XIII di questa parte.
E poiché in base al (teorema) XIV di questa (parte) il cilindro che deve essere equivalente se ha altezza uguale al tronco ha una diagonale maggiore, il cilindro che ha una diagonale più piccola, ossia la stessa del futuro tronco equivalente, deve di conseguenza avere un'altezza che è più grande di quella del tronco, in modo esso guadagni tramite l'aumento dell'altezza ciò che ha perso per via della riduzione della diagonale. Cioè, il tronco che sarà equivalente a quello (quel cilindro) deve diventare più piccolo di quello che ha la stessa altezza del cilindro massimo costruito sopra la stessa diagonale. Ma questo può accadere in due modi. Dato che in qualsiasi coniugazione il cilindro è il punto di partenza di tutti i tronchi, ma poiché nelle coniugazioni proposte qui il cilindro è più piccolo del cilindro massimo, i tronchi che sono i più vicini al loro cilindro coniugato e sono più alti di esso sono più piccoli del cilindro massimo. Tuttavia da qui essi aumentano a causa dell'incremento della differenza AB dei diametri CT, AV finché non diventano più grandi del cilindro massimo come è gia stato dimostrato.
Quindi in questo incremento di AB succede una sola volta che il tronco diventi equivalente al cilindro massimo finché TR è più piccolo dell'altezza GA del suo cilindro coniugato, ma più grande dell'altezza del cilindro massimo. Tuttavia i tronchi della stessa coniugazione non crescono all'infinito perché AB aumenta, ma in base al (teorema) X e XVIII di questa (parte) essi decrescono nuovamente. In questo cambio avviene per la seconda volta che il tronco diventi equivalente al cilindro massimo. E dato che il tronco che aveva un'altezza uguale a quella del massimo (il cui TR era $\frac{1}{\sqrt{3}}$ di AC) era più grande di esso, il tronco composto da un'altezza più piccola di quella del cilindro massimo di conseguenza diventerà ancora una volta equivalente ad essa. Quindi TA deve ancora essere diminuito ulteriormente. Ma se TA e - proporzionalmente insieme a esso - TC sono stati ridotti il quadrato di TA è diminuito. Tuttavia il quadrato di CA resta (invariato). Quindi

il rettangolo rimanente formato da TC, AV è aumentato. Ma la sua ampiezza viene ridotta come è stato detto. Perciò d'altra parte, e in realtà in altre parole, la lunghezza del rettangolo aumenta. Per quella ragione vi è un determinato rapporto TC ad AV per cui il tronco diventa equivalente al cilindro massimo per la seconda volta, il che era da dimostrare.[70]

Teorema 50. *I tronchi di differenti coniugazioni, aventi lo stesso rapporto dei diametri, saranno tanto più grandi quanto più sono vicini in altezza al cilindro massimo costruito sulla stessa diagonale. Più sono alti rispetto al (cilindro) più sono piccoli in volume.*

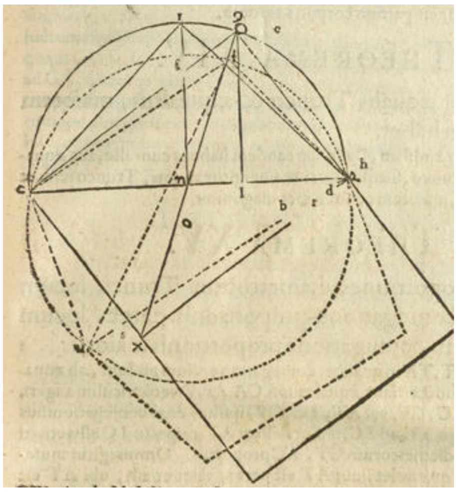

Figura 3.22: Figura XXI.

Si suppone che anche questo teorema sia falso. Chi potrebbe non dire che il tronco la cui altezza è IA sia più grande di un altro tronco la cui altezza è GA se entrambi hanno la stessa diagonale CA e lo stesso rapporto delle basi più piccole rispetto a quelle più grandi? Tuttavia il viceversa è vero. Si consideri il cilindro massimo il cui diametro CG della base stia all'altezza GA come $\sqrt{2} : 1$ in base al teorema V. E si consideri un tronco il cui diametro più piccolo stia sulla linea CG, il cui diametro più grande stia sulla linea (continuata) AX e il loro rapporto sia arbitrario e la media aritmetica tra essi sia GC in base al teorema XII. Allora poiché si presuppone che il rapporto delle due basi e delle altre due per i differenti tronchi sia lo stesso, anche il rapporto della loro differenza

[70]Ibidem, pp. 266-268.

rispetto alla media aritmetica sarà lo stesso per tutti (i tronchi). E dato che ogni tronco di questo tipo supera il cilindro con uguale altezza nel rapporto di un dodicesimo del quadrato della differenza dei diametri del tronco rispetto al quadrato della loro media aritmetica in base al teorema XIII di questa (parte), questa eccedenza del tronco sarà più grande laddove il cilindro è più grande. Ma il cilindro CGA è il più grande di tutti quelli costruiti sopra la stessa diagonale. Quindi l'eccedenza di questo tronco, o il suddetto dodicesimo, sarà il più grande di tutti per gli altri tronchi che hanno lo stesso rapporto dei diametri. E quindi anche il tronco sarà più piccolo nonostante l'altezza del tronco sia più grande di GA perché il cilindro di questa altezza sarà più piccolo.
Per esempio si prenda il rapporto massimo di tutti i diametri del tronco, cioè quello infinito, il che significa prendere il cono, il limite di tutti i tronchi, invece del tronco. L'altezza del cono sia IA il cui quadrato sia metà del quadrato di AC. E la base del cilindro CIA di uguale altezza sia la linea CI, uguale all'altezza AI. Poiché CI è la media aritmetica dei diametri del tronco, mentre uno di essi è 0, l'altro, cioè il diametro della base del cono, sarà di conseguenza due volte CI. Pertanto qui un terzo di AI deve essere moltiplicato per il quadrato del doppio di CI per avere il volume di questo cono. Questo è quattro volte il quadrato di CI, quindi due volte il quadrato di CA.
Tuttavia un altro cono (di nuovo invece del tronco con lo stesso rapporto dei diametri) avente l'altezza GA il cui quadrato è un terzo del quadrato di CA avrà allo stesso modo il doppio di GC come diametro della base, quindi quattro volte il quadrato. Ma il quadrato di GC è due terzi del quadrato di AC. Quattro volte due terzi sono otto terzi. Essi superano il doppio o sei terzi del primo cono di due terzi mentre d'altra parte il quadrato dell'altezza di quel primo cono, cioè, metà del quadrato di CA, supera il quadrato di questa altezza (del secondo cono), che è un terzo del quadrato di CA, solo di un sesto del quadrato di CA. Tuttavia, non tutto questo decremento deve essere preso in considerazione perché per le basi non vengono moltiplicati i quadrati, ma le altezze stesse; inoltre nemmeno le altezze stesse ma solo i loro terzi. Perciò l'aumento del cono nel caso della base più grande CG è maggiore della perdita nel caso dell'altezza più corta GA.[71]

Teorema 51. *Tra tutti i tronchi della stessa coniugazione, quello massimo è quello con*

[71] Ibidem, pp. 268-272.

l'altezza del cilindro massimo, ossia $\frac{1}{\sqrt{3}}$ volte la diagonale. Da questo culmine tutti gli altri, il più alto così come il più basso, decrescono.

Se necessario Snell o Adriaen van Roomen, essendo entrambi un Apollonio del Belgio, potrebbe realizzare la dimostrazione legittima o la confutazione[72]. Esso è in effetti una piccola osservazione per quanto riguarda lo scopo del libretto, ma è qui menzionato a causa dell'affinità coi precedenti (teoremi). La sua somiglianza con il (teorema) precedente per prima cosa mi ha dato fiducia, sebbene i tronchi del teorema precedente non siano coniugati nel modo in cui abbiamo usato questa parola finora. Tuttavia essi sono descritti sulla stessa diagonale e hanno lo stesso rapporto delle basi tra essi nello stesso modo in cui gli altri (tronchi) coniugati hanno tra loro lo stesso rapporto del diametro della base più piccola rispetto al lato obliquo.
L'altra dimostrazione deriva dalla proprietà della coniugazione del cilindro massimo, che ho dimostrato nei (teoremi) precedenti, cioè vi è una determinata altezza del tronco coniugato, più grande dell'altezza del cilindro massimo, e un'altra altezza più piccola di quella (altezza). I tronchi con entrambe le altezze sono equivalenti al cilindro massimo. Ma (ho inoltre dimostrato che) il tronco che ha un'altezza uguale a quella del cilindro massimo ha un volume maggiore e i tronchi decrescono da entrambi i lati di esso, verso il cilindro coniugato così come verso i tronchi più bassi. Non c'è ragione per cui una svolta degli incrementi del volume debba essere solo nelle prossimità.
Si aggiunga il segno del calcolo. Si consideri la coniugazione in cui il diametro CI è uguale all'altezza IA e il tronco di questa coniugazione sia di altezza uguale al cilindro CGA, qui quello massimo, cioè quello il cui diametro CG è $\sqrt{2}$ volte l'altezza GA. Allora il diametro del tronco sarà più piccolo in CG. Ma è uguale al lato obliquo poiché si presuppone che stia a quello come CI sta a IA. Quindi CF è il diametro più piccolo, che taglia IN, la perpendicolare dal centro N, nel punto F e il lato obliquo FA. Pertanto CL sta a CG come CN sta a CF. Ma CL è due terzi di CA e il quadrato di CL è quattro noni del quadrato di CA. E il quadrato di CN è la quarta parte del quadrato di CA. Infine il quadrato di CG è due terzi del quadrato di CA. Ma CL, quattro noni, sta a due terzi, CG, come la quarta parte, CN, sta a CF, tre ottavi. Quindi il quadrato di CF sarà tre ottavi del quadrato di CA. Ma anche il quadrato del lato obliquo è così grande.

[72]Il teorema è in effetti falso.

Pertanto i tre ottavi del quadrato di CA sottratti lasciano cinque ottavi del rettangolo formato da CF, il diametro più piccolo, e dal diametro opposto, più grande che coincide con AX andando oltre X. Quindi, poiché il quadrato di CF e il rettangolo dei diametri CF e del diametro più largo hanno la stessa altezza CF, le loro lunghezze staranno una all'altra come le aree stesse, ovvero come tre sta a cinque. Pertanto questo è il rapporto dei diametri del tronco che, secondo questa coniugazione, è di altezza uguale al cilindro massimo.

Quindi, in base al (teorema) XIII di questa (parte), il quadrato 16 della loro media aritmetica 4, cioè, di CG sta a un $\frac{1}{12}$ del quadrato 4 della differenza 2 tra i diametri (ma $\frac{1}{12}$ di 4 è $\frac{1}{3}$) come il volume del cilindro massimo CGA sta all'eccedenza di CFA, il tronco di uguale altezza. Quindi il tronco supera il cilindro massimo di $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{16}$ o della quarantottesima parte del volume del cilindro CGA. Perciò si cerchi il rapporto del cilindro massimo CGA rispetto al cilindro coniugato CIA. Il quadrato della base CI è metà del quadrato di CA. Quindi il rapporto delle basi CI a CG è di 3 a 4. D'altra parte il quadrato dell'altezza GA è un terzo del quadrato di CA. Perciò il rapporto dei quadrati IA a GA è di 3 a 2 o di 9 a 6. Quindi il rapporto dei segmenti IA a GA è $\sqrt{\frac{3}{2}}$, cioè, 30 000 a 24 495 o 24 495 a 20 000.

Ma il rapporto dei volumi è composto dal rapporto della base e dal rapporto delle altezze. Quindi se moltiplichiamo reciprocamente i termini corrispondenti uno per l'altro, il rapporto del cilindro CIA rispetto al cilindro CGA, lo stesso rapporto risulta come quello di 9 000 a 9 798. Sopra, nel teorema III, il rapporto delle colonne da queste coniugazioni era di 2 828 a 3 080. E se si cambia questo numero del cilindro CGA in 16, o in 48 terzi, il primo numero, il numero del cilindro CIA, sarà 44 in questo rapporto. Quindi il cilindro CIA sta al tronco coniugato CFA come 44 sta a 49 e il tronco è più grande di una parte che è un po' più grande di un nono. Questo è in effetti in accordo con questo teorema e il corollario III, teorema IX, di questa parte. Infatti dato che il rapporto dei diametri era di 2 a 3, cioè, di 20 a 30, il tronco crescente eccedeva di una parte che è un po' più grande di un undicesimo. Quindi è aumentato fino al rapporto di 3 a 5, cioè, di 18 a 30. Allora il tronco eccedeva di più di una parte che è più grande di un nono come è stato dimostrato qui. Dopo di che quando il rapporto era di 1 a 2, cioè, di 15 a 30, il tronco decresceva di nuovo in modo che eccedesse solo di una nona parte. Quindi ciò che avviene in una coniugazione avviene in tutte (le coniugazioni): il tronco di altezza uguale a quella del cilindro massimo supera il cilindro coniugato più di tutti.[73]

Teorema 52. *Nelle coniugazioni dove il quadrato del diametro del cilindro è due volte il quadrato dell'altezza o più grande, tutti i tronchi sono più piccoli del cilindro massimo, ossia del suo coniugato; e tanto più è così, tanto più ci siamo allontanati dal rapporto 2:1.*

Nella figura XIX sia CGA la coniugazione dove il rapporto è 2:1 per il quadrato di CG rispetto al quadrato di GA, e sia CHA (una coniugazione) di un rapporto più piccolo e con un cilindro subcontrario in H e in B. Allora tutti i cilindri tra H e B e quindi anche i tronchi di uguale altezza con essi sono più grandi del cilindro terminato in H o B, e da un po' sotto a B fino ad A tutti i tronchi sono più piccoli dei cilindri H e B in base ai presupposti del (teorema) XV e XVI.
Tuttavia tanto più H è vicino a G, tanto più B sarà vicino a G e tanto più sarà piccolo l'arco HB in cui giacciono i tronchi più grandi. Infine, il cilindro CGA è il suo proprio subcontrario alla maniera di H così come di B. Quindi allo stesso modo in cui tutti i cilindri da B sono più piccoli di H stesso e tutti i tronchi sono un po' sotto B, anche tutti i cilindri da G e, insieme a questi, i tronchi di uguale altezza saranno più piccoli del coniugato CGA.
La ragione per cui lì i tronchi non iniziano a diventare più piccoli in B ma un po' sotto B è che in B stesso è dato un tronco di altezza uguale a quella del cilindro, appartenente alla coniugazione CGA. Ma qui in G non è dato un tronco di altezza uguale al cilindro derivante dalla coniugazione. Quindi i primi tronchi dal cilindro CGA sono contemporaneamente più bassi della linea GA, perdendo tramite l'altezza di più di quanto guadagnino tramite l'aggiunta del terzo.
Pertanto appare anche la stessa analogia. Infatti i tronchi di questa coniugazione, tutti dal cilindro stesso, sono più bassi di quello (quel cilindro) perché esso è il capo di questa coniugazione. Dato che questo è il massimo dei cilindri, tutti i tronchi coniugati ad esso sono di conseguenza più piccoli secondo l'ordine, in base al teorema XXI, in cui essi sono lontani dalla sua altezza. Quindi il cilindro stesso è il più grande tra quelli perché esso

[73] Kepler, pp. 272-276.

eguaglia da solo se stesso tra quelli ordinati per l'altezza.
Questa è l'invincibile dimostrazione per analogia. Ma dato che i geometri sono meno abituati alle analogie, proviamo una dimostrazione più laboriosa e completamente geometrica, di nuovo usando la figura XXI. Qui sia CTAV il tronco della coniugazione CGA e si prolunghi CT finché non taglia il cerchio in E. E si colleghino i punti E, A. Allora il cilindro CEA è più piccolo del cilindro CGA in base al teorema V. Tuttavia il tronco CTAV ha la stessa altezza, appartenendo alla costruzione, poiché EA, TR sono uguali. Quindi il tronco è più grande del cilindro CEA di un terzo del quadrato di AR secondo il presupposto del (teorema) XIII. Si deve provare che il rapporto di GA ad AE è più grande del rapporto del quadrato di CE insieme ad un terzo del quadrato di AR o di ET rispetto al quadrato di CG in modo che il cilindro abbia perso di più per la bassezza di EA di quanto abbia guadagnato tramite il terzo di quadrato di ET.
Prima di tutto il quadrato di TR o AE è più piccolo del quadrato di TA tramite l'intero quadrato di AR. Tuttavia anche il quadrato di CE è più piccolo del quadrato di CE insieme a un terzo del quadrato di AR solo tramite questo terzo del quadrato di AR. Quindi lì una certa quantità fa la differenza tra i termini che è tre volte la quantità che qui rende i termini differenti. E inoltre questi termini sono più grandi del doppio di quei termini. Infatti dato che il quadrato di CG è due volte il quadrato di AG, qui il quadrato di CE è più grande del quadrato di CG e il quadrato di AE è più piccolo del quadrato di GA. Ma quando una certa quantità come 1 costituisce la differenza tra alcuni termini come 25, 26, infatti quando tre volte questa quantità come 3 costituisce la differenza tra termini che sono più piccoli di metà dei (termini precedenti) o produce almeno la seconda metà del (precedente) secondo (termine) come tra 10, 13, il rapporto dei termini più piccoli è più grande di sei volte il rapporto del più grande, come 10 a 13 o 20 a 26 ha un rapporto più grande di sei volte il rapporto di 25 a 26. E il primo rapporto sarebbe molto più grande se anche il secondo termine 13 fosse stato più piccolo di metà del (precedente) secondo termine 26.
Infatti quando la differenza rimane uguale tanto più i termini diventano piccoli, tanto più il rapporto aumenta. Quindi il rapporto del quadrato di TA rispetto al quadrato di TR o EA è più grande di sei volte il rapporto dei quadrati di CE e un terzo del quadrato di AR rispetto al quadrato di CE. Perciò il rapporto dei segmenti TA a TR o EA è più

grande di tre volte il rapporto del quadrato di CE e un terzo del quadrato di AR rispetto al quadrato di CE.

Dimostreremo anche nello stesso modo che il quadrato di CE rispetto al quadrato di CG ha un rapporto più piccolo di quello dei segmenti GA rispetto ad AT. Infatti il quadrato di CG è equivalente al rettangolo BVD, dove BA è diviso in D in modo che AD sia metà di DB nello stesso modo in cui il quadrato di AG è metà del quadrato di GC in base al teorema VII di questa (parte). Ma CE è la media aritmetica di VB e VA secondo il teorema XII di questa (parte). Pertanto il quadrato di CE è equivalente all'intero rettangolo BVA più il quadrato di AR, metà di AB. Quindi se un parallelogramma, equivalente al quadrato di AR, viene aggiunto a BV o CT l'ampiezza del parallelogramma viene aggiunta a VA. Sia AH l'ampiezza. Allora il quadrato di CG sarà equivalente al rettangolo BVH. Tuttavia anche il quadrato di CG era equivalente al rettangolo BVD. Quindi AV sta a VD come il quadrato di EC sta al quadrato di CG.

Assumo che quello di HV a VD sia un rapporto più piccolo di DV a VB. Infatti BD è due volte DA e BA è due volte AR. Quindi anche AD è due volte DR. E se AH fosse uguale ad AD e di conseguenza HD uguale a DB, (il rapporto di) AV a VD sarebbe più piccolo (del rapporto) di DV a VB. Ma ora AH è più piccolo di AD e quindi anche più piccolo di DR. Infatti il quadrato di CT o VB è sempre più grande di due volte il quadrato di BA secondo il teorema X di questa (parte). Se fosse due volte più grande, l'altezza del tronco sarebbe zero, (ci sarebbe) volume zero. Pertanto il quadrato di VB è sempre più grande di otto volte il quadrato di AR. Poi, dato che VB, AR, AH sono continuamente proporzionali, il segmento VB sarà sempre più grande di otto volte AH e quindi AR sarà la media geometrica tra AH 1 e BV 8+. Perciò AR è la radice di 8+ espressa da tali parti sulla base delle quali AH è 1. Ma la radice di 8 giace tra 2 e 3 nel caso in cui l'altezza del tronco sia zero, dove non c'è volume. E appare in fretta, anche nel caso di un'altezza del tronco davvero piccola, che 9 risulta da 8 dove la radice è 3 e sempre più grande con altezze più grandi (AR). Quindi dove AH è il massimo esso giace tra metà di AR e la sua terza parte. E diventa più piccolo di qualsiasi parte di AR tramite un aumento dell'altezza dei tronchi coniugati in modo che diventi infine una porzione di AR di infinita piccolezza insieme ad AB che sta svanendo (dove il tronco si sta trasformando in un semplice cilindro).

Ma se fosse senza AH, il rapporto di AV a VD sarebbe più piccolo di quello di $\sqrt{DV}$ rispetto a $\sqrt{VB}$ poiché AD è metà di DB. E dato che il rapporto di DV a VB è $\sqrt{GC^2} : \sqrt{AT^2}$, il rapporto AV:VD e quindi anche il quadrato di EC rispetto al quadrato di CG starebbe sempre in un rapporto più piccolo di quello dei segmenti GA ad AT se fosse senza AH. Ma dato che i rapporti tra AR e AH sono di ogni tipo per i differenti tronchi, accade da qualche parte, ossia nei tronchi che sono molto prossimi ad essere di altezza uguale a quella del cilindro, che AH non aggiunga così tanto in modo che il rapporto HV a VA eguagli il rapporto GA ad AT e lì il teorema è certo. Infatti dall'inizio i tronchi erano più piccoli del cilindro. Così i tronchi vengono diminuiti continuamente finché non svaniscono. Ciò nondimeno i seguenti casi danno ancora più fiducia nella dimostrazione.
O: il rapporto di HV a VD è equivalente al rapporto di GA ad AT nei tronchi più bassi, per cui i secondi elementi dei rapporti summenzionati sono uguali, ma i primi sono ancora ineguali, e l'eccesso del segmento AT rispetto a TR paragonato a TR è più di tre volte più grande di un terzo del quadrato di AR in confronto al quadrato di CE, e questo senza compensazione. Quindi l'intero rapporto delle altezze è ancora più grande del rapporto delle basi.
Oppure: il rapporto di HV a VB supera infine il rapporto di GA ad AT, ma nei tronchi ancora più bassi quando CE viene allungato, e TR accorciato. Lì il quadrato di AR è sempre più equivalente al quadrato di TR e infine lo supera provocando un rapporto grande tra TR e TA. Questo è in effetti subito dall'inizio e sempre più grande di tre volte il rapporto tra il quadrato di CE insieme a un terzo del quadrato di AR e il solo quadrato di CE mentre un terzo del quadrato di RA, tuttavia, aumenta il quadrato di CE non con lo stesso aumento del rapporto perché esso stesso sta aumentando. E dato che avviene velocemente che l'elemento del rapporto delle altezze che è il rapporto di AT a TR diventa più grande della terza parte del rapporto di GA ad AT, avviene sempre a quel punto per questa ragione che l'eccesso di questo elemento nel rapporto dell'altezza non solo compensa ma supera anche sempre di più l'eccesso di quell'elemento nel rapporto delle basi. Infatti qui l'intera unità crescente del quadrato di AR aumenta il rapporto dei termini più piccoli e decrescenti. Lì almeno un terzo ugualmente in aumento aumenta il rapporto dei termini più grandi e crescenti. Pertanto qui una terza parte dell'aumento del rapporto ha una maggiore influenza dell'intero aumento del rapporto.

Questo è ciò che doveva essere dimostrato a proposito della coniugazione in cui il quadrato di CG è due volte il quadrato di GA. E se il quadrato di CG fosse più grande di due volte quel quadrato, esso rimane valido. Per ciò che concerne l'analogia, i cilindri di altezza uguale a tali tronchi (nella figura XIX CBA) sono subcontrari di cilindri equivalenti, ma più alti. Nel teorema XVIII è stato dimostrato a proposito di questi (cilindri subcontrari) che i tronchi cominciano da essi a diventare più piccoli, anche quelli che hanno come alti coniugati i cilindri CHA. Come quelli che appartengono alla stessa coniugazione di questi (cilindri) subcontrari CBA, e che nascono solo qui, sin dall'inizio diventano più piccoli del cilindro coniugato CBA.
Ma ora si parli della dimostrazione rimanente: dato che nella figura XXI i cilindri stessi, i capi della coniugazione, sono assunti più bassi del cilindro CGA, CG di conseguenza aumenta in essi ma con aumenti decrescenti, GA viene diminuito ma con decrementi crescenti in base al teorema X di questa (parte). Quindi il decremento del volume del cilindro coniugato diventa più grande tramite la riduzione di TR perché ha luogo per quanto riguarda la base grande CG e riguardo alla differenza più grande di TR e AG. Tuttavia l'aggiunta al volume del cilindro coniugato riguardo al terzo del quadrato di AR e all'aumento del quadrato di CE tramite BA diventa piccola e di minore importanza. Chiunque sia disposto deve ripetere tutti gli elementi della precedente dimostrazione per questo caso. Egli troverà non minore chiarezza di quanto sia mostrato sopra sulla verità dal calcolo del teorema IX di questa (parte).[74]

A questo lungo teorema segue un corollario, che anticipa alcuni problemi che vengono proposti da Keplero ai geometri.

Teorema 53. *UN PROBLEMA PROPOSTO AI GEOMETRI.*
Se viene fornito il rapporto dei diametri del tronco, trovare la coniugazione in cui un tale tronco sia equivalente al cilindro della coniugazione massima.

Prima di tutto ogni tronco nello stesso coniugato del cilindro massimo e quindi il tronco che ha il dato rapporto dei diametri è più piccolo del cilindro massimo secondo il teorema XXI di questa (parte). Pertanto la coniugazione ricercata è quella al di sopra di

[74]Ibidem, pp. 276-284.

G, il coniugato del cilindro massimo, verso il coniugato del tronco che è di altezza uguale al (cilindro) massimo avente il rapporto dei diametri dato. Se per esempio CFA è il tronco di altezza uguale al cilindro massimo CGA, e CIA è il cilindro coniugato ad esso, in realtà se il tronco CTA è anche nella coniugazione CGA e se CF sta al diametro opposto e parallelo su AX come CT sta ad AV, allora il volume del tronco CTA della coniugazione G sarà più piccolo del cilindro massimo CGA. Quindi la coniugazione ricercata ricadrà sulla coniugazione G verso I. Pertanto il tronco cercato avrà un'altezza che è più grande di GA. E il diametro della base del cilindro di uguale altezza, cioè la media aritmetica tra i diametri del tronco ricercato, avrà una lunghezza che è più piccola di CG.
Assumo che la coniugazione ricercata sia anche al di sopra di I e che l'altezza del tronco cercato sia più grande di AI, il che potrebbe sembrare stupefacente. Ma poiché il rapporto dei diametri del tronco è dato, è anche dato il loro rapporto rispetto alla loro media aritmetica. Quindi come CF sta a CG anche il diametro più piccolo del tronco ricercato starà al diametro del suo cilindro di altezza. Tuttavia questo (diametro) è più piccolo di CG e più lontano da A. Perciò quello (quel diametro) è anche più piccolo di CF e più lontano da A. Quindi il rapporto di CF a FA o di CI a IA è più piccolo di quello del diametro del tronco cercato rispetto al suo lato obliquo, cioè, quello del diametro del cilindro coniugato rispetto alla sua altezza. Pertanto l'altezza del coniugato ricercato è più grande di AI, e il diametro è più piccolo di IC. Questo è per quanto riguarda come procede la mia dimostrazione. Consegno il resto di questo problema ad Adriaen van Roomen per realizzarlo e se vi è qualcun altro a cui piaccia Geber.
Poiché ogni tronco è più grande del suo cilindro di uguale altezza, nel rapporto di un dodicesimo dal quadrato della differenza dei diametri rispetto al quadrato del diametro del cilindro di uguale altezza, ci viene chiesto di dividere il quadrato di CA in modo tale che una parte, aumentata tramite il rapporto che viene dato dalla differenza dei diametri e moltiplicata per il lato dell'altra parte, sia equivalente al quadrato di CG moltiplicato per il segmento GA. Geber, quando è stato interrogato a proposito di questo problema, risponde secondo la sua algebra: deve essere trovata un'altezza così grande che, nel rapporto in cui esso stesso sta a CA, se vi sono tre termini continuamente proporzionali a quella (altezza), una certa moltitudine del primo (termine) è equivalente a un numero

assoluto dato insieme a una certa moltitudine dei terzi (termini). Ma i cossisti[75] stanno ancora cercando una tale equazione in geometria e a mio avviso non la troveranno mai.[76]

Teorema 54. *UN PROBLEMA PROPOSTO AI GEOMETRI.*
Sia data una coniugazione in cui il quadrato del diametro nella base del cilindro sia più piccolo di due volte il quadrato dell'altezza. Trovare i due rapporti dei diametri per cui i tronchi della stessa coniugazione siano equivalenti al cilindro massimo.

Sia data la coniugazione CIA in cui il quadrato di CI sia più piccolo di due volte il quadrato di IA. Si devono trovare i diametri dei tronchi coniugati che sono equivalenti al cilindro massimo CGA. Quindi l'altezza di un tronco sarà più grande dell'altezza GA del cilindro massimo, l'altezza dell'altro tronco sarà più piccola in base al (teorema) XXI di questa (parte). Pertanto il rapporto dei diametri del primo tronco sarà più piccolo del rapporto dei diametri del tronco di altezza uguale al cilindro massimo, e per il secondo tronco sarà più grande. Entrambi avranno il loro cilindro di altezza uguale. Essi stessi non saranno subcontrari ma vicini ai (cilindri) subcontrari. Infatti se fossero subcontrari sarebbero equivalenti secondo il (teorema) XVI di questa (parte). Ma dato che i tronchi di essi hanno rapporti dei diametri disuguali perché hanno differenti altezze nella stessa coniugazione essi aggiungerebbero differenti dodicesimi dei quadrati alle loro differenze (tra tronco e cilindro) in base al (teorema) XIII di questa (parte). Quindi i tronchi diventerebbero diversi. Ma stiamo cercando (tronchi) equivalenti dato che entrambi devono essere equivalenti allo stesso (cilindro) CGA.
Questo è per quanto riguarda come procede la dimostrazione. I cossisti possono svolgere il resto. Infatti sia dato il desiderato CF. Allora sia dato anche FA in base alla coniugazione e il suo quadrato, quindi anche il rettangolo formato dai diametri e, se questo è diviso dal diametro piccolo dato CF, anche il diametro più grande. Pertanto anche la differenza tra il più grande e il più piccolo è data, e la dodicesima e la quarta parte del suo quadrato. Se la quarta (parte) viene sottratta dal quadrato di AF rimarrà il

[75]I cossisti erano esperti in calcoli di ogni tipo ed erano impiegati dai mercanti e dagli uomini d'affari per risolvere complessi problemi di contabilità. Il loro nome deriva dalla parola italiana "cosa", perché essi usavano simboli per rappresentare quantità sconosciute, in modo analogo all'uso odierno della x da parte dei matematici.

[76]Kepler, pp. 286-288.

quadrato dell'altezza. Se questo viene paragonato al quadrato di GA[77] esso produrrà l'unica parte del rapporto dei volumi.
Così se entrambi i diametri sono dati ci forniscono il diametro della base del cilindro che ha l'altezza del tronco CFA, cioè, il quadrato (del diametro della base) secondo il (teorema) XII di questa (parte). Il dodicesimo trovato precedentemente, aggiunto ad esso, produce un termine composito che, confrontato con il quadrato di CG, fornisce l'altra parte del rapporto dei volumi. Queste parti del rapporto dei volumi devono essere necessariamente uguali in modo che, messi insieme, essi costituiscano il rapporto di uguaglianza.
Raccogliete, o cossisti, il crocifisso del genio che ho stabilito e seguitemi. Troverete, se Minerva non si è voltata indietro a guardarmi, che il primo, il secondo e il quinto dei continui proporzionali eguagliano un numero assoluto col terzo e il quarto dei proporzionali tutti moltiplicati per un certo numero[78]. E quindi l'equazione non sarà geometrica ma una statistica di Nicolaus Raimarus Ursus o una meccanica di Jost Bürgi[79]. Non è un problema del tipo che Pappo ha chiamato piani secondo l'uso degli antichi, cioè, perfettamente geometrico e scientifico, ma solido e geometrico insieme a una condizione, cioè, che siano dati due continui medi proporzionali. Questo problema non ha una spiegazione scientifica. Inoltre non c'è una soluzione singola di questa equazione. Infatti è stato dimostrato che vi sono due tronchi di questo tipo.[80]

Teorema 55. *Se i tronchi di differenti coniugazioni hanno lo stesso rapporto di diametri, e la stessa diagonale, il rapporto dei volumi sarà composto da tre elementi: dal rapporto dei cilindri della coniugazione e dai rapporti di ciascun cilindro rispetto al suo tronco coniugato, del rapporto inverso del primo cilindro, ma del rapporto diretto del secondo cilindro.*

Sia CFA un tronco della coniugazione CIA, e CTA un tronco della coniugazione CGA sulla stessa diagonale CA. E CF stia al diametro più grande prolungato su AX come CT

[77]La prima parte del rapporto corretta non è il rapporto del quadrato dell'altezza rispetto a GA^2 ma dell'altezza rispetto a GA.

[78]L'equazione è di sesto grado, non di quinto grado

[79]Il metodo di approssimazione di Bürgi è trattato da Keplero nella sua *Harmonices Mundi* (1619), libro I, prop. 45, vol. VI (Prodit autem illi ex aequatione, quam iuvat mechanice, valor radicis).

[80]Kepler, pp. 290-292.

sta ad AV. Assumo che il rapporto del volume CFA rispetto al volume CTA del tronco sia composto di tre rapporti, 1. CIA rispetto a CGA, 2. CFA rispetto a CIA, 3. CGA rispetto a CTA. La riduzione al teorema molto noto è facile a condizione che quattro quantità vengano messe in un ordine tale che il rapporto del primo al quarto sia composto dai rapporti intermedi. Nell'ordinare le quantità si deve avere cautela. Dal momento che abbiamo a che fare col rapporto dei tronchi tra loro è necessario collocare uno dei tronchi nel quarto posto, l'altro al primo posto, e i cilindri nel mezzo, ciascuno vicino al proprio (tronco) coniugato. Infatti secondo il corollario dal teorema III il rapporto delle colonne e quindi anche dei cilindri è dato, cioè, quello di CFA a CIA, e il rapporto diretto di CGA a CTA. Il suddetto ordine risulta dai volumi posti in un ordine col rapporto dato.[81]

Segue un corollario con esercizi e altri due corollari.
A proposito dell'asta di misurazione cubica e della sua certezza, abbiamo il teorema XXVI.

Teorema 56. *Nei recipienti di forma simile il rapporto delle capacità è il rapporto cubico delle lunghezze che vanno dall'apertura superiore al margine più basso di uno dei fondi di legno.*

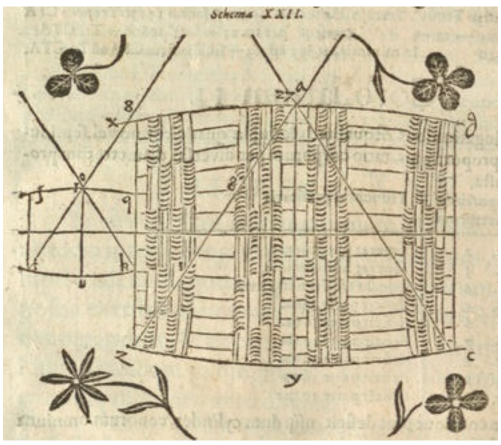

Figura 3.23: Teorema 26, parte II.

[81]Ibidem, pp. 292-294.

Siano SQKT, XGCZ recipienti di diversa grandezza della stessa specie le cui aperture sono O, A, i cui diametri dei fondi di legno sono QK, ST e GC, XZ e i cui punti più bassi sono T, K e Z, C; le lunghezze OK, OT sono uguali, e così sono anche AC, AZ. Assumo che il rapporto delle capacità dei recipienti sia il rapporto cubico delle lunghezze OK, AC. Infatti si disegnino i piani OV, AY passanti per O, A, paralleli al fondo di legno e siano SV e VQ due tronchi conici simili tra loro, lo stesso deve essere vero per XY e YG. Quindi ciò che è vero per il rapporto di metà dei recipienti è vero anche per le metà raddoppiate.
Perciò le figure proposte OVKQ, AYCG siano tronchi conici e i lati delle figure siano OQ, VK e AG, YC. I diametri delle basi più piccole sono QK, GC, i diametri delle basi più grandi OV, AY, e OQKV, AGCY sono sezioni quadrilaterali delle figure attraverso i loro assi, simili una all'altra, e le loro diagonali OK, AC.
Pertanto, dato che figure simili stanno una all'altra nel rapporto cubico dei lati analoghi, la terza potenza del rapporto del lato AG rispetto al lato OQ o del diametro GC rispetto al diametro QK sarà il rapporto del volume GY rispetto al volume QV. Ma nelle figure piane simili, trilaterali AGC e OQK GC sta all'analogo QK o AG sta all'analogo OQ come anche la diagonale AC sta all'analoga diagonale OK. Quindi la terza potenza del rapporto della lunghezza AC rispetto alla lunghezza OK è il rapporto del volume GY rispetto al volume QV e quindi anche dell'intero recipiente GZ rispetto all'intero contenitore QT.[82]

A questo teorema seguono due corollari: il primo contiene anche la costruzione dell'asta di misurazione.

Teorema 57. *Anche se entrambe la metà di un barile austriaco non sono completamente simili, ma se una delle tavole rotonde di legno è un po' più piccola e più stretta dell'altra, la differenza tra le capacità in entrambe le metà sarà impercettibile purché la lunghezza sull'asta di misura sia la stessa.*

Infatti è stato detto nel corollario al teorema V della seconda parte che il barile austriaco è vicino alla forma più capiente. Tutte le forme su entrambi i lati, cioè, i barili

[82]Ibidem, pp. 296-298.

più lunghi e più corti di quello austriaco, sono meno capaci di quello austriaco. Tuttavia in quei punti in cui si verifica una variazione, dal più sottile al più ampio e di nuovo al più sottile, la differenza è sempre impercettibile fino a questo punto per una certa legge del cerchio. Quindi ciò che è vero per i barili interi aventi la stessa diagonale è vero anche per i due tronchi di un barile, come per esempio per AYX, AYG, così che tuttavia la capacità è uguale su entrambi i lati fino a qualsiasi percettibilità, anche se una delle tavole rotonde, per esempio GC, è più piccola dell'altra XZ purché AC, AZ siano equivalenti.[83]

Teorema 58. *Se le lunghezze delle aste di misura attraverso entrambi i tronchi del barile non sono uguali - come può succedere - la media geometrica di entrambe le lunghezze dell'asta di misura, cioè la media tra i due numeri indicati da una e dall'altra parte centrale viene presa senza errori come misura della capacità.*

Poiché la lunghezza più piccola indica la doppia capacità del proprio tronco, anche quella più grande indica il doppio del suo tronco. Quindi entrambe le lunghezze indicano la doppia capacità dell'intero barile dopo che sono stati aggiunti i numeri. Pertanto la media aritmetica tra i numeri di entrambe le lunghezze, che è equivalente alla media geometrica tra le linee, rappresenta la semplice capacità dell'intero barile.[84]

Teorema 59. *La curvatura delle doghe o il modo di essere gonfio tra l'apertura centrale ed entrambe le tavole rotonde di legno non sottrae nulla dall'indicazione dell'asta di misura, essa aumenta la capacità indicata dall'asta di misura nelle botti oblunghe (quando l'altra circonferenza rimane la stessa), e diminuisce la capacità nei barili accorciati.*

Infatti anche se in base al teorema XXIX della prima parte un barile della figura di un limone, una prugna, un'oliva, un fuso parabolico o iperbolico troncato supera col suo volume il barile cilindrico o una botte che ha la forma di un semplice tronco raddoppiato, e nelle posizioni dell'ordine in cui le figure sono state osservate prima, quella differenza è ciononostante molto piccola come è evidente dal teorema XXII della prima parte. E qualunque cosa sia percettibile di esso è già stato messo nei numeri dell'asta. Infatti il primo barile la cui capacità era inscritta nell'asta in modo da indicare che un secchio ha

[83]Ibidem, p. 300.
[84]Idem.

il suo rigonfiamento in modo simile a tutti gli altri. Quindi l'asta tiene conto di tutti i barili con un rigonfiamento simile. Sebbene questo non sia simile in tutti gli (i barili) austriaci tutti loro hanno tuttavia un po' di rigonfiamento e quindi l'errore riguardo ad esso è più piccolo. Ma quando i barili sono più lunghi di quello austriaco in esse la curvatura delle doghe dall'apertura alle tavole rotonde è anche maggiore. Pertanto sono di capacità maggiore anche se la curvatura è simile su entrambi i lati. Allo stesso modo quella curvatura è minore se sono più corti degli (dei barili) austriaci. Tuttavia l'asta tiene conto della curvatura di una lunghezza moderata come avviene nel barile austriaco. Perciò l'asta non raggiunge la lunghezza della curvatura in una botte oblunga (quando tutte le altre circostanze rimangono le stesse). Essa prevale in un barile corto.[85]

3.3 Parte III: L'uso dell'intero libro sui barili

Questa sezione conclusiva spiega come utilizzare i risultati contenuti nelle parti precedenti: non tutti i barili infatti rispettano gli stessi rapporti che valgono per le botti austriache.
Si propone qui la traduzione delle sezioni che lo compongono.

3.3.1 I. Confronto delle botti investigato per mezzo di un'asta di misura trasversale

Se un barile possiede il rapporto austriaco ci si può fidare dell'asta di misura senza prendere in considerazione né la pancia tra i due cerchi o il grado di gonfiore o la curvatura tra l'apertura ed entrambi i cerchi di legno. Un tale barile è preferibile a tutti gli altri tranne a quello di Rhine, che ha una profondità del ventre che è più grande di quattro terzi del diametro del cerchio di legno se in effetti ne ha uno. Quindi tra gli altri si selezionino quelli oblunghi con una grande pancia come alcuni di quelli che vengono da Rhine, poiché la circonferenza della pancia in mezzo e la lunghezza delle cavità compensano un po' per l'esilità e l'ampia lunghezza del corpo. Si disprezzino le botti oblunghe e cilindriche senza pancia. Dopo questi dovreste apprezzare i barili accorciati Alcuni di questo tipo

[85]Ibidem, p. 302.

provengono dall'Ungheria differendo poco o niente da un cilindro puro e vero. Ma evitate con ogni mezzo le botti corte e bulbose. Poiché esse hanno tre caratteristiche difettose: una è la dimensione del rapporto dei cerchi rispetto a metà della lunghezza delle doghe in base al teorema V; la seconda è la dimensione della pancia secondo il teorema XXII; la terza è la cortezza delle cavità in base al teorema XXIX.[86]

3.3.2 II. Considerazione del metodo di misurazione tramite un'asta di misura cubica, trasversale

Considerando tutto insieme, si conclude che non vi è un metodo più conciso e circospetto tra tutti i metodi per misurare i barili dell'uso di un'asta di misura trasversale con suddivisioni cubiche nelle botti austriache. Questo avviene perché contiene tutte le precauzioni dei misuratori.

Prima di tutto, l'asta di misura posta all'interno del barile elimina lo spessore delle doghe, dei cerchi, che sono cerchioni, e dei vimini da cui i cerchi di legno sono legati. Essa elimina anche l'eccesso dei bordi alle cui tacche sono appesi i cerchi di legno o le basi. Ma nessun altro metodo di misurazione può far questo tramite un processo che non richieda metodi riguardo alla misura vicino all'apertura A, dove la superficie più interna delle doghe è aperta. Per questa ragione alcuni misuratori consegnano alcune regole per stimare a memoria questo spessore nascosto delle doghe e dei cerchi e le seguono. A causa della loro incertezza riguardo a esempi variabili tutta la cura rimanente nella misurazione viene elusa.

In secondo luogo, il metodo si occupa della disuguaglianza delle basi di legno o cerchi, e senza una noiosa moltiplicazione e senza la ripetizione di esplorazione dello stesso processo come è stato detto nel teorema XXVI di questo libro. Ma tra i misuratori rimanenti ce ne sono molti che uguagliano il cerchio dei barili tra loro e trovano la loro media geometrica, ed infine la media conica tra le capacità, combinando l'uso dell'asta che misura i piani con un calcolo più laborioso. Si veda il libro più recente *On solid geometry of empty vessels* del fisico Johann Hartmann Beyer di Francoforte. In terzo luogo, la diversità delle brocche non compromette molto l'attendibilità di questa misura, come è stato

[86]Ibidem, p. 304.

detto nel corollario I ai teoremi V e XXII di questa (parte). Essa è in effetti piuttosto piccola tra le botti austriache quando i bottai usano approssimativamente la loro regola o riparano vecchi barili con i margini cancellati.

In quarto luogo, l'ampiezza della pancia o del cerchio massimo AY non viene qui trascurata ma viene usata dal metodo stesso. Infatti la misura viene effettuata dal suo punto più alto A al punto più basso C dell'altro (cerchio). Il fondamento di questa pratica dipende dal teorema XXII di questa parte.

In quinto luogo, il gonfiore del tronco conico qui non importa neanche, in base al teorema XXIX. Infatti da solo è piccolo e, per il punto centrale di tutte le botti, generalmente una simile connivenza delle doghe riguardo ai metodi di costruzione non richiede né la semplice rettilineità conica né alcuna significativa bulbosità, tuttavia più per la prima che per la seconda. Ma la maggior parte dei misuratori sono molto solleciti riguardo a questo gonfiore, così tanto che Clavio, come menzionato sopra[87], fugge verso le ellissi e i corpi conici. Tuttavia nessuno di essi ha finora seguito le forme autentiche dei barili nel calcolo. Ho fornito loro i numeri per la prima volta tramite le dimostrazioni più complicate, e tramite un calcolo più fastidioso, ma per quanto riguarda le nostre botti austriache, è stato fatto attraverso un artificio più ingegnoso che utile o necessario, unicamente quello sulla base di un confronto del calcolo con l'uso dell'asta austriaca ci dà la comodità di questa misura eclissando il resto. Altri calcolatori diligenti guardino a se stessi, valutando come si siano spremuti il cervello invano tramite i calcoli più laboriosi, sforzando diligentemente il moscerino delle più insignificanti frazioni ma ingoiando il cammello degli errori. Sono felici di far questo per il solo fatto, altrettanto sconosciuta a loro, che la maggior parte degli scrupolosi dettagli sono di solito completamente irrilevanti rispetto agli errori che causano.

Quindi ciò che conta di più per la sicurezza dei privati, per eliminare l'inganno, è che la legge sulla costruzione di barili è confermata dal potere e dalla diligenza delle autorità pubbliche che prescrive il cerchio delle tavole rotonde di legno e la terza parte della lunghezza delle doghe e previene, tramite sanzioni e divieti di recipienti che non abbiano questa forma, o che almeno sia revocata dalla decisione pubblica la fiducia nell'asta di

[87]Introduzione alla seconda parte.

misura quando quegli enormi barili vengono misurati.[88]

3.3.3 III. Il fatto che l'uso dell'asta trasversale con inscritte divisioni cubiche sia caratteristico dell'Austria

Quindi è anche evidente perché l'uso dell'asta obliqua sia più familiare in Austria che in altre nazioni: ovvero perché essi hanno accettato questa figura di un barile dove i bottai che le riparano arrecano meno danni alla capacità per errore manuale. Ma tra le nazioni rimanenti sono utilizzate anche altre forme di botti in cui viene modificata l'estensione delle pance e la lunghezza delle doghe. È immediatamente percettibile cosa provoca danni. Sebbene sia vero che l'uso dell'asta trasversale è universale in tutte le botti simili una all'altra secondo il teorema XXVI di questa parte, tuttavia nessuna legge e nessuna istituzione sono sufficienti per gli artigiani per rispettare sempre esattamente lo stesso rapporto delle doghe e molto meno quello della profondità della pancia rispetto alle tavole rotonde. Così per formarla il caso è il (metodo) più efficace, e la riflessione dell'artigiano è quella meno efficace. Poiché la proprietà della forma introdotta non viene in soccorso dall'errore manuale come in Austria, così che figure dissimili diventano equivalenti a quelle simili, mentre figure dissimili di barili senza capacità simili si trovano tutti i giorni, l'uso dell'asta trasversale cubica da solo non può essere così diffuso nelle rimanenti nazioni senza il rischio di errore.[89]

3.3.4 IV. Metodo per misurare un barile arbitrario con tavole rotonde circolari senza un'asta con divisione cubica

Poiché ho deciso di fare una speculazione generale in questo libro, gli esercizi devono essere estesi anche ad altre forme di botti, così che altre nazioni possano trarre profitto da questa geometria solida e anche in modo che i nostri austriaci siano supportati meglio per quanto riguarda le botti straniere (che ora e allora vengono portati in Austria sul Danubio, a valle o a monte, o piene di vino esotico o esportando vino austriaco), così che essi non comportino svantaggi agli altri usando la loro asta né ci perdano loro stessi.

[88] Ibidem, pp. 304-308.

[89] Ibidem, p. 308.

Infatti l'immagine della giustizia viene dipinta con una bilancia, il simbolo di tutte le misure esatte. E questa cura riguardo all'affidabilità delle misure rispetta la virtù che dà a ciascuno il suo. Essa mantiene gli stati sicuri e li adorna, essendo esso stesso più bello di qualsiasi sole in modo che tutte le piccole nuvole di errore vengano rimosse il più a lungo possibile e disperse.

Quindi dovrebbe essere disponibile un'asta, divisa in parti uguali più piccole. La si ponga nell'apertura del barile e si misuri per prima cosa la profondità della parte centrale della pancia, poi le lunghezze oblique dal punto centrale dell'apertura fino alle estremità più basse di entrambe le tavole rotonde di legno; in terzo luogo si tenga l'asta estratta fuori vicino alle estremità delle tavole rotonde di legno, si prema anche il punto nelle tacche, se possibile, e si misuri il diametro di entrambe le tavole rotonde di legno separatamente estese in altezza. Tutti gli altri diametri di una tavola rotonda di legno dovrebbero essere uguali ad esso a causa del metodo di costruzione e poiché qui non ci occupiamo di fiaschi. Se ci fosse tuttavia una qualsiasi notevole diversità tra i diametri di una stessa piastra rotonda di legno, originata o dalla deviazione dell'artigiano o dalla natura del legno che ha una larghezza delle doghe esposta ai cambiamenti provocati dall'aria sebbene essa renda costanti le lunghezze delle venature, allora si misurino anche i diametri trasversali delle tavole rotonde di legno.

E poiché accade che l'estensione della parte centrale della pancia non sia un cerchio perfetto, un misuratore accurato (che intenda fornire gli strumenti e possibili metodi) potrebbe provare un altro metodo per sapere l'area da cui il barile dovrebbe essere tagliato nel mezzo. Questo dovrebbe essere il seguente.

Si avvolga una fascia di pelle o di un altro materiale flessibile, ma inestensibile, come la corda attorno alla parte centrale della pancia della botte e si misuri quante parti dell'asta contiene un tale barile. A condizione che il barile sia esattamente circolare fuori nella parte centrale saprete facilmente dal numero di queste parti, in base al teorema I, quanto debba essere grande il diametro di questo cerchio. Per esempio se avete trovato $628\frac{1}{5}$ sulla circonferenza il diametro dovrebbe avere 2 000 parti.

Ma in ogni caso, ora che avete il diametro interno analizzato o la profondità della pancia a vostra disposizione, si sottragga lo spessore del legno dal valore calcolato che potete misurare nell'apertura e si sottragga altrettanto per l'altra doga nel fondo del barile. E se il diametro del fondo è risultato uguale a quello calcolato per mezzo dell'altra circonferenza e diminuito, la pancia della botte può essere considerata come esattamente circolare.

Infatti se si discosta da un cerchio non c'è ragione per cui i diametri obliqui debbano essere diversi più di quanto lo siano quelli eretti e trasversali (il che, tuttavia, può anche accadere). Ma avrete la completa certezza su questa questione (se magari la sostanza da misurare fosse più preziosa dell'oro, nella stessa quantità) tramite linee parallele che sono unite saldamente ad una distanza che richiede il barile, tramite cui potrete analizzare tutti i diametri tutt'intorno se due stecche sostengono il barile. E se dunque si scopre che i diametri sono uguali, quello eretto e quello trasversale o un qualsiasi altro, allora la forma è un'ellisse. Quindi, in base all'osservazione aggiuntiva riguardo al teorema I della prima parte, il diametro calcolato sarà la media aritmetica tra quello eretto e quello trasversale. Allora, per quanto il diametro calcolato e diminuito sia più grande del diametro del fondo, di così tanto questo diametro sarà più grande del diametro trasversale. In questo modo ricaverete l'area dal diametro riconosciuto o dai diametri di ogni cerchio o ellisse, della piastra rotonda di legno così come della sezione immaginaria attraverso la parte centrale della pancia in base al teorema II e all'osservazione aggiuntiva III della prima parte. Si moltiplichi il diametro eretto per quello trasversale, siano essi uguali o diversi. E il prodotto starà alla somma dei piccoli quadrati, che sono lunghi uno (una unità) e ampi della divisione uguale dell'asta, contenuto nell'area di una tale piastra rotonda di legno, quasi come 14 sta a 11. Più accuratamente (completando quindi questa omissione nel teorema menzionato) il rapporto è come quello del numero avente sedici cifre ordinate dopo il quattro rispetto alla metà del numero da cui è rappresentata la circonferenza del cerchio nel teorema I.

Infatti per dirlo in un modo che non è stato dimostrato da nessuno fino ad ora: in tutte le figure regolari circoscritte intorno a un cerchio, e anche nel cerchio stesso, come se fosse una figura con infiniti angoli, avviene che i loro perimetri, se si assume che il diametro abbia due unità, siano limitati da un numero che è due volte il numero da cui è limitata l'area della figura.

La prossima, per voi necessaria, conoscenza riguarda la lunghezza del bordo. Non è facile misurarlo fuori o dentro con una piccola asta perché le doghe sono curve e sporgono oltre

le tacche e le piastre rotonde di legno il cui spessore è sconosciuto. Pertanto apprenderete così la reale lunghezza: elevare al quadrato la lunghezza trasversale, sottraete il prodotto del diametro della tavola rotonda di legno e del diametro della pancia da questo quadrato (dopo aver preso la media aritmetica se non tutti i diametri dell'unica figura fossero uguali), conservate il resto. Sottraete poi il diametro della piastra rotonda di legno dal diametro della pancia, elevate il resto al quadrato, sottraete la quarta parte del quadrato dal resto messo da parte precedentemente. La sua radice che rimane è la lunghezza di quella parte centrale di cui avete applicato la piastra rotonda di legno. Tecnicamente, essa è chiamata altezza del tronco. E se la botte è regolare, il suo doppio sarà la lunghezza di questo intero barile. Ma procederete in modo più sicuro ripetendo la stessa procedura con l'altra lunghezza trasversale e l'altra tavola rotonda di legno. Quindi la lunghezza dell'altra parte centrale diventerà ovvia, ossia la lunghezza dell'altro tronco.
Esempio: nella figura XXII si trovi che la lunghezza trasversale AZ di parti uguali dell'asta è $24\frac{1}{2}$ e un po' di più in modo che il suo quadrato sia $602\frac{1}{2}$. I diametri trovati AY, XZ abbiano 22 o 19 delle stesse parti, rispettivamente. Moltiplicati a vicenda danno come risultato 418. Si sottragga questo da $602\frac{1}{2}$, il resto è $184\frac{1}{2}$. I diametri differiscono di 3 il cui quadrato è 9 e quindi una quarta parte è $2\frac{1}{4}$. La si sottragga da $184\frac{1}{2}$. Il resto è $182\frac{1}{4}$ la cui radice $13\frac{1}{2}$ è la lunghezza più interna di metà del barile in modo che l'intero GX sia lungo 27. E poiché il quadrato di 22 è 484, e quello di 19 è 361, di conseguenza 40 000 sta a 31 416 come 484 e 361 stanno a 380+ e $283\frac{1}{2}$, le aree dei cerchi AY e XZ.
Dopo che sono state trovate le aree dei cerchi e la lunghezza di entrambe le parti centrali, si verificano tre possibilità. Infatti o due parti centrali di ogni botte sono considerati come tronchi di cono o come tronchi di un limone o come forme intermedie, troncate come una prugna, un'oliva, come un fuso parabolico o iperbolico, cioè: o una pura rettilineità dall'apertura fino al bordo viene assegnata alla curvatura delle doghe o un semplice cerchio tra entrambi i bordi e l'apertura o una forma mista di entrambi.
Con il primo metodo dedurrete sempre un po' meno del valore accurato, con il secondo in generale raggiunge o più del valore accurato o è uguale ad esso. Tramite questo metodo verrebbe anche raggiunto il valore esatto se si procedesse così facilmente tramite quest'ultimo come tramite il primo.
I. Tramite il primo metodo un tronco arbitrario viene diviso in un cilindro regolare come

se si trovasse su una base, su una piastra rotonda di legno e in una porzione conica di una cintura cilindrica che lo circonda che abbiamo chiamato guscio. Quindi il volume del cilindro (in base al teorema III della prima parte) viene calcolato moltiplicando l'altezza di metà del barile per la base della piastra rotonda di legno trovata sopra. Infatti il numero così generato conterrà la somma dei piccoli cubetti che stanno nel cilindro proposto. Ciascuno di essi è un pezzettino della divisione uguale dell'asta lunga, ampia e profonda. Ma si trova il rapporto del tronco o di metà della botte rispetto al cilindro sulla base, che è la piastra rotonda di legno, per il corollario al teorema XVII della prima parte: il diametro della tavola rotonda di legno viene moltiplicato per se stesso e per il diametro o la profondità della pancia. Anche la differenza tra questi diametri viene moltiplicata per la terza parte di se stessa. E dopo che il numero di cubetti nel cilindro trovato precedentemente è stato moltiplicato per la somma dei prodotti successivi e dopo che il prodotto è stato diviso per il quadrato del diametro della piastra rotonda di legno si ottiene la somma dei cubetti nel barile. Bisogna infatti procedere nella stessa maniera con l'altra parte centrale del barile se è diverso o diseguale.
Tuttavia non apprenderete quanti di tali cubetti formino una misura se non costruendo un recipiente piccolo, oblungo, esattamente cilindrico e uniformemente rotondo da un foglio di ferro, con un fondo livellato perfettamente, e poi versando una misura di liquido nel recipiente vuoto. La vostra asta misurerà l'altezza che il liquido aveva indicato prima che l'asta venisse inserita nel piccolo recipiente. Misurerete anche l'ampiezza del cerchio nel punto più alto. Infatti deve essere uguale a quello più basso. Difatti apprenderete l'area del cerchio dall'estensione nel modo menzionato sopra, da quest'area e dall'altezza, il volume o il numero di cubetti in una misura. Se dividete il numero di cubetti di un solido arbitrario per questo numero troverete nel quoziente il numero di tali misure che la parte solida del barile o del tino. E questo è il primo metodo con cui - come ho detto - viene desunto un valore minore di quello esatto. Avete un esempio dopo il teorema XXII della prima parte.
Ma qui continueremo anche ciò che è stato iniziato precedentemente. Quindi si moltiplichi $13\frac{1}{2}$ per $283\frac{1}{2}$, la base più piccola, cioè, della piastra rotonda di legno XZ. Il risultato è il cilindro $3\,685\frac{1}{2}$. Tuttavia in questo rapporto di diametri il cilindro sta al tronco come 361 a 421. Pertanto se 361 diventa $3\,685\frac{1}{2}$ cosa diventa 421? Ne consegue $4\,298$, metà

del barile comprende così tanti cubetti, quindi quello intero 9 596. E se 30 di tali cubetti riempivano una misura, verrebbe fuori circa 320 dopo che 9 596 è stato diviso per 30. L'intera botte conterrebbe così tante misure.

II. L'altro metodo è quello in cui un barile è considerato come un limone troncato su entrambi i lati, che frequentemente annuncia il valore esatto ma altrettanto frequentemente più del valore esatto. È stato abbondantemente e più attentamente spiegato sopra nell'esempio per i teoremi XXII e XXV della prima parte. E non è necessaria alcuna ripetizione salvo ricordarvi che lì il barile è chiamato limone troncato, e che qui la pancia della botte è un cerchio massimo attraverso la parte centrale del corpo del limone; lì le piastre rotonde di legno vengono chiamate cerchi troncanti. Inoltre, deve anche essere aggiunto che bisogna fare il lavoro due volte se le tavole rotonde di legno non sono uguali: una volta per mezzo della piastra più piccola come se entrambe fossero così grandi, ancora una volta tramite quella più grande se entrambe sono più grandi. Il secondo calcolo produrrà qualcosa di diverso dal primo. Il valore esatto sarà costituito (come in una perfetta forma di limone) quando metà della differenza sarà stata sottratta da qui o sarà stata aggiunta lì.

III. E se questi scrupoli non vi soddisfano ancora poiché la curvatura non ha sempre esattamente una figura circolare e se vi piace, come se fosse la natura dei geni geometrici, argomentare e calcolare non sulla base di una figura di ciascun barile straniera e finta, ma sulla base di una figura autentica e propria, meglio informarsi prima di quale tipo sia in generale la figura di questa curvatura delle doghe.

Così ne distinguerete alcune con un semplice sguardo; per l'esplorazione di alcune avrete bisogno di uno strumento e della destrezza delle mani e un'esattezza molto accurata per quanto riguarda questo esercizio; infine alcune, anzi la maggior parte di loro, non le distinguerete con ogni genialità da un cerchio perfetto a causa della verga che unisce le doghe, degli impedimenti delle piastre rotonde di legno e dei ramoscelli pieghevoli, dello spessore disuguale delle doghe e dell'affinità delle forme tra loro.

E se una diversità della curvatura delle doghe nella parte centrale della pancia dalla curvatura verso le estremità dei bordi cattura l'attenzione, il barile sarà il tronco di un fuso iperbolico. E quanto più strettamente la curvatura ha circondato la pancia, tanto più sarà grande la parte di iperbole e tanto più la capacità del barile si avvicinerà alla

capacità del tronco conico.
Vi procurerete il resto con questo strumento. Prendete una stecca quadrata di ferro o rame, ben lucidato, della lunghezza del barile, non piegata dal suo peso. Vi siano in esso spilli di ferro sottili e affilati come chiodi che possono essere impressi lungo tutta la stecca in modo che si blocchino saldamente, non vacillanti in nessuna parte di essa. Ma sia possibile per i chiodi essere tirati fuori dalla stecca e rimesse in essa. Dovrebbero essere almeno cinque, e preferibilmente sette. È sufficiente che il chiodo centrale fisso sia bloccato al centro della stecca per quanto riguarda la sua lunghezza in modo che essa superi lo spessore di ogni piastra rotonda di legno nelle botti. Poi dopo che il chiodo fissato è stato posto in una delle giunture da cui due doghe sono unite nella parte centrale della pancia del barile, gli altri chiodi possono essere impressi, due alla volta, o se esistono, tre per tre, verso i bordi del barile, per cui un intervallo moderato e uguale è assegnato ad essi. E si spingano fuori i chiodi in modo che tocchino tutti la stessa giuntura, il più esterno ugualmente lontano dal centro alle estremità dei bordi, gli altri nei punti limitrofi che entrano tra le due piastre rotonde di legno in qualunque modo sia dato il loro piccolo intervallo. I cinque o sette punti di una figura così compresa tra le estremità dei chiodi si trasferiscono con la stecca sul piano di un tavolo ben piallato producendo altrettanti punti su di esso. Per esempio nella figura XVIII i punti più esterni siano F, G, quello centrale sia C, quelli in mezzo siano Q, S e corrispondentemente nell'altra parte. E, per non lasciare dubbi, si misuri anche lo spessore delle doghe, nell'apertura così come nel bordo. Si realizzino altri punti in un intervallo grande come è stato questo spessore verso le parti interne e il centro, per così dire, della curvatura e si cancellino i punti precedenti così da avere la curvatura interna della botte, proposta da cinque o sette punti nel piano. Quindi prima di tutto si uniscano i punti F, G col segmento FG. Allora si tracci - dato che CG, CF sono uguali in base alla descrizione della procedura - una perpendicolare da C a FG. Sia essa CO. Ed essa dovrebbe essere prolungata da qualche parte verso l'esterno. In terzo luogo si traccino segmenti per i due punti più esterni come F, S e per i (punti) corrispondenti sull'altro lato. E li si prolunghi fino alla perpendicolare prolungata CO. E se i rimanenti punti trovati non fossero inclusi da queste linee o almeno fuori esattamente in questa linea o se queste due linee si incontrassero altrove che sulla stessa perpendicolare prolungata CO o su Y, allora avete fatto uno sforzo inutile e potete

essere certi che o la forma del barile o lo strumento o le vostre mani siano inappropriate per questa sottigliezza. Tuttavia possiamo usare queste due linee invece delle tangenti sebbene le singole linee taglino, parlando con precisione, l'iperbole in due punti almeno nei barili che ho visto.

Perciò si misuri diligentemente, in base al teorema XXVII della prima parte, qual è il rapporto di CO (metà della differenza tra i diametri della pancia e della piastra rotonda di legno) rispetto a CY. Infatti tagliando l'angolo OGY in parti uguali quando la linea secante passa per il punto C la figura deriverà da un cerchio e si riferirà esclusivamente al secondo metodo. Ma ciò che contribuisce maggiormente al confronto con le altre è allora lo spicchio della sfera FGC che viene cercato. Dopo di che GO a OC risulta come il numero dello spicchio della sfera rispetto al numero che esprimerà metà del volume del limone piccolo in base al teorema XXV della prima parte. Il suo rapporto rispetto all'anello attorno al cilindro HFGE è spiegato nell'esempio al teorema XXII.

Ma se OC, CY sono uguali, la figura deriva da una parabola. Pertanto, in base al teorema XIII, osservazione aggiuntiva II, viene cercato un conoide parabolico dal cono di uguale altezza. Infatti l'area del cerchio il cui diametro è FG, moltiplicata per la terza parte di OC, produce il numero del volume di un cono. Tuttavia un conoide è pari a un cono e mezzo. Quindi si ottiene il volume del conoide quando l'area FG viene moltiplicata per metà di CO. Allora si ricerca il piccolo fuso nel conoide, deriva dal conoide tramite l'analogia del teorema XXVII della prima parte: ossia GO sta a YO, il doppio di CO, come il conoide trovato sta a metà del volume del suo fuso. Dopo aver trovato il volume del piccolo fuso la procedura rimanente è la stessa di quella col tronco del limone. Infatti l'anello attorno al fuso ha due parti. Una è il piccolo fuso già trovato. L'altra parte, in realtà più grande, viene creata moltiplicando la circonferenza del cerchio della piastra rotonda di legno per la figura piana FGC che è chiamata parabola. Si ottiene la sua area in base all'osservazione aggiuntiva II al teorema II. Infatti se si moltiplica metà della parte, che è tre sesti di CO, per il segmento FG, si crea l'area del triangolo FCG. Dato che $\frac{4}{3}$ di esso è l'area della parabola essa viene creata di conseguenza quando quattro sesti, cioè, due terzi di CO vengono moltiplicati per il segmento FG.

E se CO dovesse essere più grande di CY, la figura verrebbe fuori da un'iperbole e il barile si avvicinerebbe molto a un cono raddoppiato, tanto più quanto CO è più grande di CY. E il rapporto del conoide iperbolico rispetto al volume di metà del fuso inscritto sarà un po' più piccolo di quello di GO a OY, tuttavia più grande di quello di GO a OV se V è il centro della figura. Deduciamo questo risultato con questa attenzione riguardo alla parabola. Per quanto riguarda il resto poiché il segmento tra OY e OV non è stato ancora determinato adattandosi a un rapporto conveniente, non abbiamo ancora rivolto il pensiero o alla quadratura dell'iperbole la conoscenza della quale sarebbe necessaria più e più volte per calcolare abilmente l'anello del fuso iperbolico. Aiuto, Apollonio![90] D'altra parte, se CO fosse in effetti più piccolo di CY, ma più grande in relazione a CY di quanto OG stia a GY (qualcuno lo discernerà con ogni diligenza?) la figura verrebbe fuori da un'ellisse retta. I suoi segmenti avranno sempre quel rapporto rispetto alle porzioni del cerchio composto dal segmento parallelo all'asse che il suo diametro più corto ha rispetto a quello più lungo, secondo ciò che Archimede[91] applica per dimostrare l'osservazione aggiuntiva III al teorema II e a ciò che è stato detto da me nei commenti al moto di Marte. Questo deve essere aggiunto al teorema II menzionato nella prima parte. Ma dato che il limite del rapporto del segmento dello sferoide retto rispetto alla prugna ellittica non è ancora stato determinato come prima nell'iperbole, non posso mostrare qui alcuna via d'uscita, all'uomo ingegnoso e senza dubbio ad Apollonio, a quello che i più sagaci, tramite l'acume del loro genio provocato sopra nel teorema XXVI, hanno raggiunto e reso evidente. Per i geni mediocri nessun tesoro segreto di utilità o abbreviazione si trova qui nascosto. Infine tenete presente la stessa cosa quando CO a CY fosse più piccola di OG a GY. Infatti la forma verrà fuori dall'ellisse trasversale e il rapporto del segmento dello sferoide rispetto all'oliva sarà più grande di quello di GO a OC, ma il limite autentico non è ancora noto. Quest'impedimento deve essere considerato di importanza così tanto più piccola quanto più è poco probabile che i barili imitino la forma di uno sferoide piuttosto che quella di un'iperbole o un cerchio.[92]

[90]Solo nel 1668 la quadratura dell'iperbole fu trovata grazie a William Brouncker, James Gregory, e Nicolaus Mercator.

[91]Archimede, *De conoidibus et sphaeroidibus*, vol. I, prop. 4-6.

[92]Kepler, pp. 310-324.

3.3.5 V. Come qualcuno potrebbe abilmente misurare il rapporto della parte svuotata rispetto al resto del liquido dopo che il barile è stato adagiato e che i diametri della pancia e delle piastre rotonde di legno sono stati eretti su una perpendicolare

Per quanto ne so questa è una parte mancante di questa dottrina. È comunque utile per i padri di famiglia per accusare e fare attenzione a barare. Tuttavia Bacco ha posto la sua ricchezza lontano dal potere di Teti e le ha vietato i suoi territori - infatti questa dea era avvezza a coprire i mali del suo schiavo in modo tale da corrompere il resto riempiendo di nuovo quando lui ne portava via una parte. Il metodo di Coignet e altri è di uso limitato fino a che esso è certo. Ma estenderlo a botti di ogni tipo, senza errori e assurdità, è un problema che gli autori confesseranno facilmente che non può essere risolto. Tuttavia cominciamo con quel problema. Ovvero, se il barile ha la forma di un cilindro o se si discosta impercettibilmente da esso, la superficie piana del liquido interseca le piastre rotonde di legno e l'ampiezza della pancia in due porzioni di un cerchio. Quindi, in base al teorema XVII della prima parte, i due segmenti dell'intera botte cilindrica, quella vuota e quella piena, hanno il rapporto dei segmenti piani nelle basi.

Ma poiché un barile è composto da due per così dire tronchi conici la cui altezza conica viene calcolata come la lunghezza tra il cerchio della pancia e la piastra rotonda di legno, ogni tronco è costituito da un cilindro nel mezzo sopra la base piccola del tronco e dall'involucro circostante. Infatti chiamo così metà del gonfiore della pancia nella botte sopra la massa del cilindro interno. Se considerate l'intera botte e la sua forma autentica l'intero gonfiore della pancia costituito da due tali per così dire involucri opposti, che sopra è stato da me chiamato anello. Quindi prestate attenzione che prima di tutto il bordo dell'involucro o di questo anello decresca prima che tutto inizi a mancare dal cilindro interno tra le piastre rotonde di legno. Dopo che il cilindro inizia ad essere diminuito, anche l'involucro viene diminuito allo stesso tempo. Quando l'intero cilindro viene esaurito fino alla fine, il bordo dell'involucro o anello rimane ancora sul fondo. Chi potrebbe sperare in un aiuto dall'astuzia in questa irregolarità?

Ma in ogni caso non abbiamo bisogno di più di un teorema per prescrivere un metodo

completamente dimostrativo per svuotare un barile con la forma del tronco conico raddoppiato. È stato detto sopra nel teorema XVI della prima parte che non è ancora stata fatta un'indagine dai geometri sul volume di alcuni segmenti del cono. Anche queste porzioni dei tronchi conici o di una botte sono tra quelle determinate dalla superficie piana di un liquido che fuoriesce parallelo all'asse dei tronchi conici, perpendicolare alla base comune dei tronchi o al cerchio nella parte centrale della pancia.
Perciò vorrei discutere di questi segmenti qui per provocare i geometri, in modo che coloro che credevano che si dovessero avere problemi con queste porzioni perché un'applicazione, come ho detto sopra, non li richiedeva, si sveglino finalmente dal loro sonno dopo aver visto un'evidente applicazione e cerchino una dimostrazione del loro volume.
Prima di tutto ho considerato se, per esempio, un tale segmento di un cono che si origina da un piano parallelo all'asse, e quindi iperbolico, abbia un rapporto all'intero cono che è composto dal rapporto del segmento della sua base rispetto alla base del cono e dal rapporto della sua altezza rispetto all'altezza del cono. Questa opinione è in effetti del tutto ovvia ma tuttavia falsa. Infatti questa è la porzione del segmento di un cono più basso, scaleno, cioè, tagliato attraverso il vertice, rispetto al cono più alto presentato. Ma un tale segmento di un cono scaleno tagliato attraverso il vertice è più piccolo della porzione del cono più alto, sulla stessa base. Infatti esso termina in un punto mentre il secondo finisce sopra in un ampio margine di forma iperbolica. Il primo segmento è racchiuso dalla superficie di un cono più piccolo e un piano triangolare, il secondo segmento dalla porzione della superficie di un cono più grande e un piano iperbolico.
In secondo luogo, ho considerato se il segmento di cono presentato fosse equivalente ad una porzione simile di un segmento cilindrico avente la stessa base e altezza. Abbiamo avuto a che fare con questi secondi segmenti nel teorema XVII della prima parte. Anche il teorema XXII si riferisce in parte a questo soggetto. E se ogni segmento cilindrico così come conico, giacente sullo stesso segmento del cerchio e chiuso da segmenti piani - il primo da uno ellittico, il secondo da uno iperbolico - non sia equivalente alla terza parte del segmento cilindrico retto causato da un piano parallelo all'asse sulla stessa base. Ma questo non poggia neanche sulla più pura verità, tuttavia si avvicina ad essa. Infatti se questo fosse vero per questo non potrebbe essere falso per il semicilindro che il piano passante per l'asse determina attraversando l'asse e il vertice del cono inscritto. Infat-

ti quando questo semicilindro è stato diviso in 33 parti, il semicono determinato dallo stesso piano attraverso l'asse ha undici di tali parti in base al teorema IV della prima parte. Ma la porzione del segmento cilindrico ha 14 di tali parti in base al teorema XVII. Quindi il piccolo volume raddoppiato, terminato all'interno dalla superficie conica, all'esterno da una superficie piana e dalle piccole parti della superficie cilindrica, ha solo 8 parti[93]. Sebbene qui metà del cono sia in effetti precisamente un terzo del semicilindro non si mantiene in altri segmenti, solo per il motivo che poi il cono non viene più tagliato attraverso il vertice. Quindi la porzione del cono presentata è più grande di un terzo del segmento cilindrico retto con uguale altezza. Ed essi sembrano diventare successivamente sempre più uguali, e d'altro canto i piccoli volumi posti in mezzo sembrano essere diminuiti sempre di più quanto più è piccolo il segmento cilindrico stesso di cui essi sono le parti.

In terzo luogo, sembra che si debba indagare sulla quadratura dell'iperbole che determina il segmento del cono. Dopo che questa è stata trovata è facile assegnare un triangolo a una qualsiasi iperbole sopra la stessa base la cui area è equivalente all'area dell'iperbole. Infatti il rapporto dei segmenti del cono rispetto all'intero cono sembra essere composto dal rapporto delle basi piane e dal rapporto delle altezze di questi triangoli equivalenti all'iperbole. Nel frattempo, finché Apollonio non porta a casa questo bottino di caccia, seguiamo l'affidabilità dell'eccezionale teorema, non ancora dimostrato, e scegliamo ciò che va vicino alla verità. E dovremmo moltiplicare i segmenti dei cerchi che sono le basi dei solidi conici presentati non per le loro altezze, che produrrebbero qualcosa di più piccolo del valore esatto, ma per segmenti più lunghi, cioè per altezze prolungate fino all'arco del cerchio tracciato per i vertici dei coni continuati e per l'apertura del barile; per esempio, se nella figura XVIII il cerchio massimo fosse tracciato per B, C e il vertice opposto oltre D in modo che CL sia la freccia e LB il seno dell'arco che determina le nostre linee. È utile avere un nome speciale per questo cerchio. Lo si chiami il *misuratore*. Infatti è evidente che un tale arco non tocchi il barile in G, nella piastra rotonda di legno, e che quindi l'altezza tecnica OG del segmento conico COG prolungato fino a questo arco sarà lungo come se fosse OZ. Quindi si moltiplicherà il segmento della pan-

[93] Il calcolo è sbagliato perché la parte comune di semicono (11 parti) e segmento cilindrico (14 parti) deve essere sottratta dal semicilindro (33 parti) sono una volta.

cia CA la cui altezza è CO per un terzo delle linee OZ come per il volume del segmento conico. Se qualcuno avesse paura che OZ sia troppo lungo, dovrebbe considerare che i segmenti presentati qui da noi non sono semplicemente conici ma più grandi di questi derivanti da un limone o un fuso.

Quindi abbiamo la seguente procedura. Innanzitutto è necessario che, in base alla regola precedente, l'ampiezza della pancia CA sia conosciuta e il diametro GE della piastra rotonda di legno, insieme a metà della differenza CO e, tramite la linea trasversale CE, anche l'altezza tecnica dello stesso tronco OG. Tuttavia CO sta a OG come CL sta a LB, l'altezza del cono prolungato. Quindi le aree dei cerchi CA e GE saranno note dalle precedenti quantità in una misura. Queste aree devono essere moltiplicate per le terze parti delle loro altezze LB e KB. E il cono GEB, mancante nel cono prolungato CAB, deve essere sottratto in modo che rimanga il tronco CAEG, in cifre adatte per il compito attuale. Ora il diametro del misuratore è necessario per trovare le linee OZ. Quindi si divida il quadrato di LB per CL e il resto del diametro emergerà nel quoziente. Si aggiunga CL a questo resto. La quantità ottenuta sarà il diametro del misuratore.

Perciò se viene data l'altezza dello spazio vuoto CO, bisogna indagare tramite essa nel cerchio della pancia, usando le regole precedenti e la linea che parte perpendicolarmente ad O che galleggia sopra la superficie del liquido che fuoriesce verso il misuratore. Si sottragga CO dal diametro del misuratore, si moltiplichi la (linea) sottratta per il resto; la radice del prodotto è la linea cercata. L'area del segmento del cerchio della pancia deve essere moltiplicata per la sua terza parte in base al volume del segmento conico. E se l'altezza CO dello spazio vuoto non supera metà della differenza dei diametri CA, GE, questa quantità di lavoro è sufficiente. Ma se lo supera, il lavoro è raddoppiato. Infatti il segmento del cono si estende allora oltre il tronco CGE nel cono mancante GBE. Quindi si deve indagare sulla sua parte mancante e questa dovrà essere sottratta dall'intero segmento.

Pertanto si sottragga metà della differenza dei diametri dall'altezza del liquido. Col resto, come se fosse il senoverso, si cerchi l'area del segmento della piastra rotonda di legno che si proietta sopra la superficie del liquido. Si dovrebbe raggiungere la stessa misura per l'area del segmento di piano della pancia. Allora si dosi la porzione della linea OZ per questo segmento più piccolo della piastra rotonda di legno nello stesso rapporto, cioè

il rapporto dell'altezza del liquido rispetto al suo eccesso su metà della differenza tra i diametri. Si moltiplichi la terza parte di questa porzione per il segmento della tavola rotonda di legno, corrispondente al volume della parte che manca dal segmento conico. Dopo la sua sottrazione dal segmento conico rimane la porzione svuotata del tronco.
Infine, se conoscete il numero di misure contenute dall'intero barile, lo si moltiplichi per il segmento del tronco trovato con una o due operazioni. Si divida il prodotto per il volume dell'intero tronco. Nel quoziente emergerà il numero di misure che è fuoriuscito.
Ma poiché avviene spesso qui e sopra che i segmenti dei cerchi debbano essere ricercati tramite i senoversi di metà degli archi, il che crea un grande guaio, qui ho composto un programma per liberarvi parzialmente dal problema. Alle singole centesime parti del senoverso o della freccia dall'alto verso il centro esso assegna una quantità di area del segmento nel rapporto per cui l'area dell'intero cerchio vale 15 710 parti. Non mi è venuto nessun numero più appropriato usando un modo di calcolo semplice e pronto. Ed ora non ho tempo di cambiare questo numero con uno (un numero) più arrotondato.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0.	0	294	818	1478	2237	3072	3964	4900	5868	6856	7855
1.	10	339	879	1550	2318	3159	4056	4996	5966	6956	
2.	27	386	941	1623	2399	3246	4148	5092	6065	7056	
3.	49	434	1004	1697	2481	3334	4241	5188	6163	7155	
4.	76	484	1069	1772	2563	3423	4334	5284	6262	7255	
5.	105	536	1134	1847	2646	3512	4428	5381	6360	7355	
6.	138	589	1201	1923	2730	3601	4521	5478	6459	7455	
7.	173	644	1269	2001	2815	3691	4616	5575	6558	7555	
8.	211	701	1337	2079	2900	3782	4710	5673	6658	7655	
9.	252	759	1407	2158	2985	3873	4805	5770	6757	7755	

Uso dell'elenco: dividete la freccia o senoverso o cosa c'è al posto di esso (come nella pancia l'altezza dello spazio vuoto, nella piastra rotonda di legno l'altezza della parte che si proietta sul liquido), aumentato di due cifre, dal semidiametro del cerchio a cui appartiene il segmento. Quando avete il risultato, cercate le decine davanti, e le unità a margine, e l'area comune rappresenterà l'area del segmento. L'area di quell'intero cerchio è 15 710 di tali (quantità). Se valesse di meno o di più, sarebbe necessaria una riduzione alla misura comune.

Esempio di questa procedura: la pancia del barile CA sia alta 22, il diametro della piastra rotonda di legno GE 19, quindi metà della differenza CO una e mezza. E OG $13\frac{1}{2}$. Ma CO $\frac{3}{2}$ sta a OG $13\frac{1}{2}$ o 3 a 27, o 1 a 9, come CL 11 sta a LB 99. Quindi KB è $85\frac{1}{2}$. Ma supporremo che l'area del cerchio CA abbia come valore un numero dell'elenco, ovvero 15 710. Quindi il quadrato 484 di CA 22 starà al quadrato 361 di GE 19 come l'area del cerchio CA 15 710 sta all'area del cerchio GE 11 718. Si moltiplichi 15 710 per un terzo di 99, il risultato sarà 518 430 per il volume CBA. Si moltiplichi 11 718 per un terzo di $85\frac{1}{2}$. Il risultato è 333 963 per il volume GBE. Si sottragga questo da CBA. Il resto è 184 467 per il tronco CGEA. Ora per il diametro del misuratore si divida il quadrato 9 801 di LB 99 per CL 11. Il quoziente sarà 891. Si aggiunga 11 ad esso. Il diametro del misuratore sarà 902.

Prima di tutto l'altezza dello spazio vuoto sia più piccolo di CO, cioè, 1. Allora per poter raccogliere il suo segmento dall'elenco, si dica che CL 11 diventa 100, e 1? Risulta 9 più $\frac{1}{11}$. Se questo viene inserito nell'elenco esso porta al segmento della pancia circa 256. Allora si sottragga 1 da 902, dal diametro del misuratore, il resto è 901. Lo si moltiplichi per 1, il risultato è 901, la sua radice è 30+. Allora si moltiplichi la sua terza parte 10 per 256. Risulta il volume 2 560 del segmento. Pertanto, poiché l'altezza dello spazio vuoto è più piccola di CO, questo è il valore dell'intero volume. E 184 467 sta al numero di misure del barile come 2 560 sta al numero delle misure che sono defluite. Ma si noti, se aveste lavorato tramite la semplice altezza del segmento, che era 11, non avreste raccolto molto più della terza parte di essa. Questo è certamente meno del valore esatto.

In secondo luogo l'altezza dello spazio vuoto sia più grande di CO, ossia 6. Ma 11 a 100 è come 6 a 54 più $\frac{6}{11}$. Quindi nell'elenco i (valori) cercati, 50 davanti e 4 con l'appendice a margine, rappresenta il segmento 3 468. Si sottragga poi 6 da 902, il resto è 896. Lo si moltiplichi per 6, il risultato è 5 376 la cui radice è 74 meno una sesta parte. Si moltiplichi la sua terza parte per il segmento. Risulta il volume 8 535 del segmento conico, ma superando il tronco conico perché 6 supera CO. Quindi si sottragga CO $\frac{3}{2}$ da 6, rimane $4\frac{1}{2}$. Lì il segmento della piastra rotonda di legno deve essere ricercato. Se il suo semidiametro $9\frac{1}{2}$ diventa 100 allora $4\frac{1}{2}$ diventa 47 più circa un terzo. Qui il segmento

2 843 viene ricavato dall'elenco. L'area della piastra rotonda di legno che è più piccola dell'area della pancia ha 15 710 di tali (unità).
Quindi si moltiplichi 2 843 per 361, il quadrato di 19. Si divida il prodotto per 484, il quadrato di 22. Risulta $2\,120\frac{1}{2}$. E dato che 74 era assegnato all'intero segmento il cui numero era 6, bisognerà assegnare $55\frac{1}{2}$ alla sua parte il cui numero è $4\frac{1}{2}$ per l'altezza. Si moltiplichi la sua terza parte per $2\,120\frac{1}{2}$, il risultato sarà $39\,229\frac{1}{2}$, il volume del vertice del segmento che si estende nel cono mancante. Lo si sottragga dall'intero segmento. Il resto è il segmento vuoto 46 121 del tronco conico. Perciò di nuovo 184 467 sta al numero di misure dell'intera botte come 46 121 sta al numero di misure scodellate fuori. Se aveste lavorato tramite la semplice altezza del segmento non sarebbe stato 74, ma 66, il volume del segmento 76 312, ma del vertice mancante 36 400, pertanto il volume del segmento del tronco è 39 912, certamente meno del valore accurato. Quindi abbracciamo come vero ciò che abbiamo trovato qui come più grande.
Ma certamente Apollonio non riceverà nemmeno così qualcosa che soddisfi la diversità nei barili quando venga concesso questo volume dei segmenti conici. Per essere sicuri, questo volume si adatterà a non più di una forma di barili perché è calcolato in base al misuratore di una forma? Lo so senza dubbio. Quindi li rimando al teorema XXX della prima parte in modo da soddisfare anche loro. Lì essi troveranno (intendo i seguaci di Apollonio troveranno quando cercheranno) da dove potrebbero integrare ciò che è ancora mancante nella dimostrazione scientifica di questo stratagemma.[94]

3.3.6 Conclusione del libro

Avevo intenzione di individuare gli errori degli altri riguardo alle misurazioni di interi barili così come di una parte vuota di essi, e per fondare le confutazioni sui teoremi di questo libro. Ma poiché basta una verità, anche silenziosa, contro ogni disturbo di errore, e già nel passato il libro di appena dieci teoremi è aumentato oltre ogni aspettativa, tutti coloro che sono lieti dei propri errori, dovrebbero conservarli. Noi, tuttavia, godremo dei nostri vantaggi e pregheremo che ci siano abbastanza cose da godere mentre i beni del

[94] Kepler, pp. 324-336.

corpo e della mente stanno bene.[95]

E quando avremo bevuto mille tazze
Li metteremo in disordine in modo da non saperlo.[96]

FINE.

[95] Ibidem, p. 336.
[96] I due versi (endecasillabi faleci) variano o citano Catullo, *Carmina* 5, 7-11

3.4 La ripresa del metodo di esaustione di Archimede

Non si può veramente comprendere l'opera di Keplero senza parlare di ciò che l'ha preceduta. Non è un caso che il matematico tedesco abbia preso come base del proprio lavoro, citandone effettivamente alcuni estratti, i risultati di Archimede (Siracusa, 287 a.C. circa - ivi, 212 a.C.): verso la fine del XVI secolo, infatti, si erano diffuse numerose traduzioni in latino delle opere classiche dei geometri greci, e a beneficiarne di più furono proprio i temi archimedei, in particolare il calcolo delle aree e dei volumi delle figure geometriche.
Quest'ultimo è stato uno dei principali problemi dei primi anni del XVII secolo e rappresenta uno dei due grandi filoni che condurranno all'invenzione del calcolo infinitesimale.[97] Esso trova la sua massima espressione proprio nelle opere di Archimede, il quale recuperò un metodo, detto di *esaustione*, attribuito all'ateniese Eudosso: una tecnica rigorosa come poche altre, ma allo stesso tempo estremamente laboriosa e che lascia poco spazio all'intuizione.[98] La maggiore limitazione del metodo di esaustione è che esso fornisce solo prove indirette: per mostrare che $A = B$ bisogna dimostrare l'impossibilità delle due relazioni $A < B$ e $A > B$.[99] Il termine *esaustione* si riferisce al procedimento di costruzione della figura intermedia, ottenuto inscrivendo poligoni regolari di n lati, con n sempre crescente per approssimare al meglio le aree da stimare.
Un ulteriore problema riguardante questo metodo consiste nel fatto che esso richieda di conoscere in precedenza il risultato che si vuole raggiungere. Archimede non mostra chiaramente quale sia la via per giungere a questi risultati, e questo convinse i matematici del Rinascimento dell'esistenza di un metodo segreto, che il matematico greco avrebbe usato per scoprire i risultati che avrebbe poi dimostrato col metodo di esaustione. Scrisse infatti Wallis: *Sembra che Archimede abbia di proposito ricoperto le tracce della sua investigazione, come se avesse sepolto per la posterità il segreto del suo metodo di ricerca.*[100] Anche Federigo Enriques e Giorgio de Santillana scrissero: *Come uno stratega che prepari con cura il colpo che gli darà la vittoria, vediamo il geometra sbarazzare il*

[97] Giusti 1980, p. 24.
[98] Giusti 2007, pp. 9-11.
[99] Giusti 1980, pp. 24-25.
[100] Radice, p. 653.

terreno con metodo di ogni minimo ostacolo e disporre le sue forze senza farsi scoprire: poi a un tratto viene il teorema decisivo.[101] Queste convinzioni si rivelarono esatte solo col ritrovamento, da parte del filologo danese Johan Ludvig Heiberg, di un'opera di Archimede conservata a Costantinopoli, in cui il siracusano svelava il suo metodo segreto, tanto ricercato dai matematici del Cinquecento.

3.4.1 Il *Metodo* di Archimede

Nel 1906 Heiberg scoprì a Costantinopoli un palinsesto, la cui scrittura superiore era di preghiere mentre quella inferiore, parzialmente cancellata, rappresentava testi di matematica del IX o X secolo.[102] Heiberg non faticò a riconoscere nel testo appena visibile, diverse opere di Archimede e riuscì a decifrare la maggior parte del palinsesto trovando vari frammenti delle seguenti opere del grande matematico siciliano:

- Sulla Sfera e il Cilindro;
- Sulle Spirali;
- Misura del Cerchio;
- Sull'Equilibrio dei Piani.

Ma la straordinaria importanza di questo codice è dovuta al fatto che rappresenta l'unica fonte greca dei trattati:

- Sui Galleggianti (quasi completo);
- Stomachion (in parte);
- Metodo sui Teoremi Meccanici (completo).

Nel 1907 Heiberg pubblicò il testo originale greco con la traduzione in tedesco della lettera di Archimede a Eratostene che conteneva il *Metodo*. La grande importanza di questa

[101] Enriques, De Santillana, vol. I, pp. 360-361.

[102] Un palinsesto è un manoscritto antico su papiro o, più frequentemente, su pergamena, il cui testo originario è stato cancellato mediante lavaggio e raschiatura e sostituito con altro disposto nello stesso senso.

lettera risiede nel fatto che è uno dei pochi trattati (forse l'unico) in cui uno scienziato dei tempi antichi rivela il metodo di induzione usato per ottenere i suoi risultati.
Il procedimento di Archimede nel *Metodo* consiste nel sostituire la tecnica di esaustione e i suoi laboriosi calcoli con la considerazione di quelli che saranno più tardi chiamati gli indivisibili delle figure: sezioni delle figure piane con rette parallele e delle figure solide con piani paralleli a uno dato.[103] Alla base del metodo, quindi, si trova la composizione di una figura piana come insieme delle sue rette parallele fra loro. La figura piana risulterebbe per Archimede, in questa visione intuitiva, come la somma di infinite linee prive di larghezza: questo si evince dai termini utilizzati dal siracusano. Nella proposizione I infatti Archimede scrisse che il triangolo consta (il termine tradotto in latino da Heiberg è *constat*) delle sue rette, e così anche il segmento parabolico. Abbiamo visto nell'opera come questo metodo sia stato ripreso più volte da Keplero nelle sue dimostrazioni: lo vediamo comparire la prima volta nella proposizione 8 della parte I, dove viene sottolineata l'utilità di questo asserto per gli aritmetici per garantire un'abbreviazione più piacevole. Seguono a questa diverse proposizioni in cui si approfondisce il rapporto di coni inscritti in sfere o cilindri. Tuttavia Keplero, interessato ad approssimare forme particolari come quelle delle botti e dei barili, ritiene che Archimede non abbia approfondito a sufficienza lo studio di figure simili a conoidi e sferoidi, ed è proprio a queste che dedica il suo *Supplementum* al matematico siracusano: egli sta in effetti costruendo le fondamenta per la parte II, dedicata proprio alla geometria solida del barile. Alcuni aspetti vengono però lasciati irrisolti anche da Keplero, che li consegna a geometri successivi che vogliano cimentarsi con essi.
In ogni applicazione del Metodo di Archimede, per valutare l'area o il volume di una figura geometrica, si cerca una seconda figura che possa utilmente essere paragonata alla prima, ovvero una seconda figura le cui rette o piani componenti siano paragonabili alle corrispondenti rette o piani della prima.
Questa innovativa intuizione pose le prime basi per l'origine del calcolo infinitesimale e fu ripresa diversi secoli dopo da Galileo Galilei e, soprattutto, da Bonaventura Cavalieri, come si vedrà tra poco. Questo metodo meccanico, seppur complesso, permise ad Archimede di costruire punto per punto la dimostrazione: ha dunque un valore euristico,

[103] Giusti 2007, pp. 11-12.

ovvero efficace per trovare la soluzione, a differenza del metodo di esaustione che, essendo una tecnica completamente *a posteriori*, è completamente inefficace al momento della scoperta e fornisce una dimostrazione solo dopo che il risultato è stato trovato.[104] La parte più difficile è individuare la seconda figura che possa essere messa efficacemente in relazione con la figura di cui vogliamo conoscere le proprietà.
È questa tirannia congiunta della prova indiretta e del caso speciale che Bonaventura Cavalieri attacca con le sue idee matematiche, sostenendo fondamentalmente, nella sua opera *Geometria indivisibilium*, che sia possibile confrontare due continui paragonando i loro indivisibili.

3.4.2 Gli *indivisibili* di Cavalieri

Il metodo proposto da Cavalieri (Milano, 1598 - Bologna, 30 novembre 1647) costituisce un nuovo e potente strumento per la determinazione di aree e volumi. Vediamo come lo stesso Cavalieri descrive, nelle prime pagine della sua *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (La geometria ampliata con un nuovo metodo mediante gli indivisibili dei continui)* il processo tramite cui ha formulato la sua elaborazione:

> Meditando dunque un giorno sulla generazione dei solidi che sono originati da una rivoluzione intorno ad un asse e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati mi meravigliavo moltissimo del fatto che le figure generate si discostassero a tal punto dalla condizione di quelle che lo generano da mostrare di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. Per esempio un cilindro, che è ottenuto insieme ad un cono della stessa base per rotazione attorno a un medesimo asse, è il triplo di questo, anche se nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il cono. [...]
> Avendo dunque più e più volte fermato l'attenzione su tale diversità in moltissime altre figure, mentre prima, raffigurandomi ad esempio un cilindro come l'unione di parallelogrammi indefiniti per numero e il cono con stessa base e

[104] Bertozzi, pp. 20-22; Giusti 1980, p. 25.

> stessa altezza come l'unione di triangoli indefiniti per numero passanti tutti per l'asse, ritenevo che ottenuto il mutuo rapporto di dette figure piane dovesse subito venirne fuori anche il rapporto dei solidi da esse generate, risultando invece già chiaramente che il rapporto delle figure piane generatrici non concordava affatto con quello dei solidi generati mi sembrava si dovesse a buon diritto concludere che avrebbe perduto il tempo e la fatica e che avrebbe trebbiato inutile paglia chi si fosse messo a ricercare la misura delle figure con tale metodo.
>
> Ma dopo aver considerato la cosa un po' più profondamente pervenni finalmente a questa opinione e precisamente che per la nostra faccenda dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro ma paralleli. In questo infatti, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee [...].
>
> Avendo dunque considerato il cilindro e il cono suddetti secati non più per l'asse ma parallelamente alla base, trovai che il rapporto del cilindro al cono è uguale a quello di quei piani che chiamo nel libro II "tutti i piani" del cilindro a "tutti i piani" del cono, con riferimento alla base comune [...]. Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure quello di indagare i rapporti delle linee al posto di quello dei piani e i rapporti dei piani al posto di quello dei solidi per procurarmi subito la misura delle figure stesse. La cosa, ritengo, andò come era nei miei voti, come risulterà chiaro a chi leggerà tutto.

La *Geometria* si compone di sette capitoli o "libri": i primi due e l'ultimo di carattere teorico, gli altri quattro contenenti le applicazioni. Di questi, i primi sei furono scritti molto prima, sicuramente prima del 1627. Infatti, in una lettera a Galileo datata 15 Dicembre 1621, Cavalieri scrisse: "*vado dimostrando alcune proposizioni d'Archimede diversamente da lui, et in particolare la quadratura della parabola, divers'ancora da quella di V.S.*". Nel primo e secondo libro Cavalieri espone i principi sui quali si basa il suo metodo, introducendo i concetti di "tutte le linee" di figure piane e di "tutti i piani" di una figura solida.[105] Vediamo come lo stesso matematico li definisce nella sua opera:

> Se tramite tangenti opposte di un'arbitraria figura piana data, due piani vengono condotti paralleli uno all'altro, o perpendicolari o inclinati rispetto al piano della figura data, ed estesa indefinitamente in ogni parte, di cui il primo viene spostato parallelamente verso l'altro fino a che non diventa congruente ad esso; le singole parti dei segmenti, che in tutto il movimento sono le intersezioni del piano che si muove e della figura data, raccolti insieme vengono chiamati: tutte le linee di tale figura, prendendo una di esse come direzione.[106]

Così tramite un segmento che si muove parallelamente a se stesso è possibile caratterizzare tutti gli indivisibili di una data figura o, seguendo Cavalieri, *tutte le linee* della figura, ovvero le intersezioni del segmento che si muove con la figura.[107]
In maniera simile un piano che si muove parallelo a se stesso caratterizzerà in un corpo solido tutti i suoi indivisibili, le intersezioni del solido con il piano che si muove. Questi sono *tutti i piani* del solido dato:

> Se, dato un qualsiasi solido, due piani opposti tangenti vengono condotti arbitrariamente, ed estesi indefinitamente in ogni parte, di cui il primo viene spostato parallelamente verso l'altro, finché non diventa congruente ad esso, i singoli piani [figure piane], che nell'intero movimento vengono descritti nel solido dato, riuniti insieme, vengono chiamati: tutti i piani del solido dato, prendendo come direzione uno di esso.[108]

Una volta introdotti questi concetti, Cavalieri stabilisce che "tutte le linee" di figure piane (e analogamente "tutti i piani" di figure solide) sono grandezze che hanno tra loro rapporto, un passaggio essenziale per chi voglia inquadrare questi nuovi oggetti nell'ambito della teoria delle proporzioni.[109] Un passaggio, quello dalla proporzionalità delle figure

[105] Giusti 2007, p. 17.
[106] Cavalieri, libro II, definizione I.
[107] Giusti 1980, p. 26.
[108] Cavalieri, libro II, definizione II.
[109] Giusti 2007, p. 18.

a quella dei solidi, riassunto nella frase "come uno ad uno, così il tutto al tutto": questo ci fa comprendere che l'unico modo efficace per confrontare gli indivisibili di due figure come un intero (*collettivo*) è paragonarli singolarmente (*distributivo*), e dedurre dal rapporto (costante) di ogni singola coppia corrispondente l'uguale rapporto delle figure geometriche. È da questa osservazione che si origina il secondo metodo degli indivisibili, discusso nel settimo libro della *Geometria* e nell'*Exercitatio II*. In esso, avendo abbandonato i concetti controversi di tutte le linee e tutti i piani, Cavalieri passa direttamente dal confronto degli indivisibili uno per uno a quello delle figure corrispondenti.[110] Tutto ciò è abilmente esposto nel teorema IV del libro II, un risultato oggi noto come "principio di Cavalieri":

> Se due figure piane o solide hanno la stessa altezza; se poi, condotte nelle figure piane delle rette parallele e nelle solide dei piani paralleli, si troverà che i segmenti di retta tagliati dalle figure piane (o le superfici piane tagliate dalle solide) sono grandezze proporzionali, le due figure staranno tra loro come uno qualsiasi dei segmenti (o nei solidi una delle superfici) tagliati nella prima al corrispondente segmento tagliato nell'altra.

Un tipico esempio dell'applicazione del principio di Cavalieri sta nel calcolo dell'area dell'ellisse. Il principio di Cavalieri effettivamente, nonostante sia sotto forma di proposizione, si potrebbe considerare anche come definizione stessa di area. Infatti, limitandoci al caso delle figure piane, una volta dimostrato che esiste un rapporto tra gli insiemi degli indivisibili delle figure piane, si definisce tale rapporto come misura della prima rispetto alla seconda, cioè come area della prima rispetto alla seconda presa come unità di misura.[111] Molto più importanti sono però le applicazioni ai volumi dei solidi: Cavalieri considera solidi "similari", cioè tali che le loro sezioni siano tutte figure simili, e il suo principio consente di calcolare facilmente il rapporto tra due di questi solidi con lo stesso profilo.[112] Vi è un numero impressionante di volumi di solidi, principalmente ottenuti tramite la rotazione attorno a un asse di sezioni coniche o parti di esse, molte delle quali furono introdotte da Keplero proprio nella *Nova Stereometria*.[113]

[110] Giusti 1980, p. 32.
[111] Bertozzi, p. 36.
[112] Giusti 2007, pp. 19-20.
[113] Giusti 1980, p. 29.

Quando due solidi similari si generano da due figure F_1 e F_2 per mezzo della stessa figura G, essi saranno detti reciprocamente similari. Un importante risultato è il fatto che il rapporto tra due solidi reciprocamente simili è indipendente dalla figura G, e dipende unicamente dalle figure generatrici F_1 e F_2; quindi sarà uguale al rapporto tra *tutti i quadrati* delle figure F_1 e F_2.[114]
Si noti l'estrema versatilità del teorema nell'effettivo calcolo del teorema di una grande varietà di solidi: si potrebbe dire che, con le sole eccezioni del sesto e del settimo libro, ogni risultato della *Geometria* segue da questo teorema. Occorre rimarcare anche la generalità della teoria di Cavalieri e in particolare del teorema in questione: un esame della dimostrazione di quest'ultimo mostra che esso è completamente indipendente dalla figura G, contrariamente al metodo di esaustione che coi suoi calcoli limita inevitabilmente la sua applicabilità al caso particolare.[115] Tuttavia quest'ultimo ha il compito cruciale di sviluppare un criterio di uguaglianza per le figure delimitate da curve, per le quali l'equivalenza diventa, per così dire, un carattere negativo e può essere provato solo escludendo una per una entrambe le possibilità opposte $A > B$ e $A < B$. Il metodo di esaustione affonda però le sue radici in quei processi finiti di decomposizione che giacciono alla base del confronto tra figure, mentre per superare i limiti dei metodi indiretti della geometria classica è necessario abbandonare queste procedure finite e confrontare le grandezze dividendole in infinite parti. L'idea su cui si basa quindi la Geometria degli indivisibili è pertanto che un'area possa essere considerata come formata da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e sottilissimi ("indivisibili" appunto) e che analogamente un volume possa essere considerato come composto da un numero indefinito di aree piane parallele. Si nota che questo era lo stesso ragionamento utilizzato da Archimede nel suo *Metodo*, che a quella data non era però ancora stato ritrovato. Precisamente, come si nota anche dalla prefazione dell'opera, Cavalieri concepisce la figura o il solido come insieme (*congeries*) di infinite linee o infiniti piani paralleli privi di spessore (*sine crassitie*). L'aggettivo *infinito* però fu sempre accuratamente evitato dal matematico per mettersi al riparo dalle critiche della filosofia aristotelica-tolemaica di quel periodo: egli scrisse, per tutta l'opera, *indefiniti* o *numero indefinito*, anche se intendeva infiniti, come

[114] Cavalieri, libro II, prop. XXXIII.
[115] Giusti 1980, pp. 30-31.

si può notare nella già citata lettera a Galileo del 15 Dicembre 1621.[116] Il successo del metodo degli indivisibili dipende fondamentalmente da questa decomposizione infinita, che genera tutte le linee di una figura.
Sebbene il passaggio dal finito all'infinito giochi un ruolo principale, questo non significa che le regole di queste decomposizioni infinite siano più chiare o meglio definite. Al contrario, Cavalieri deve la sua reputazione di autore incomprensibile precisamente all'ambiguità su cui poggiano questi concetti fondamentali, in particolare quella "massa di indivisibili" su cui si basano tutte le successive elaborazioni.[117] Il matematico bolognese era perfettamente a conoscenza di queste difficoltà: come già detto in precedenza, infatti, i primi sei libri vennero scritti prima del 1627, mentre il settimo e ultimo libro, invece, conteneva interamente il risultato delle riflessioni avute fino alla pubblicazione avvenuta nell'aprile del 1635, in quanto Cavalieri predisse le obiezioni che si sarebbero scatenate sui principi della sua *Geometria*. In una lettera del 22 Luglio 1634 indirizzata a Galileo, Cavalieri scrisse infatti:

> E perché dubito che a molti sia forsi per dar fastidio quel concetto delle infinite linee o piani, perciò ho poi voluto fare il settimo libro, nel quale dimostro per altra via, differente anco da Archimede, le medesime cose.

Cavalieri ebbe effettivamente una forte controversia sui fondamenti degli indivisibili con Paolo Guldino (Mels, 12 giugno 1577 - Graz, 3 novembre 1643), maggior esponente del gruppo di matematici che criticavano la teoria di Cavalieri, considerata non geometrica e inconclusiva. Di conseguenza, Cavalieri rispose con l'ultimo lavoro della sua vita, le *Exercitationes Geometricae Sex*, in cui questa controversia occupa la terza esercitazione. Se l'opera di Cavalieri fu osteggiata da diversi matematici, egli fu tuttavia anche stimolato nelle sue ricerche, soprattutto da Galileo Galilei, ed influenzato anche dai lavori di Nicola Oresme ma soprattutto dalla *Nova Stereometria doliorum* di Keplero, il quale calcolava aree e volumi suddividendo i corpi in infinite parti infinitesime, come abbiamo potuto apprezzare nell'opera.[118] Quest'ultimo aspetto è stato però fonte di critiche da parte di Guldino, riguardanti l'originalità delle idee di Cavalieri: egli infatti sosteneva che fossero

[116] Bertozzi, pp. 32-33.
[117] Ibidem, pp. 34-36.
[118] Ibidem, p. 32.

completamente derivate da Keplero. In realtà, Keplero aveva sì utilizzato considerazioni infinitesimali nella sua *Nova stereometria doliorum*, ma con uno spirito completamente differente e osservando in particolare i solidi di rotazione, per cui egli dimostrò un caso particolare del teorema di Guldino, ossia quello in cui la figura che ruota ha un centro di simmetria. Fu quindi facile per Cavalieri rivolgere l'accusa di plagio da Keplero contro Guldino stesso.[119]

3.4.3 Gli inizi del calcolo infinitesimale

Come precedentemente detto, Cavalieri, al finire della sua vita, precisamente nel 1647, pubblicò un'altra opera, le *Exercitationes geometricae sex*, in cui riprese molto di quello già descritto nella sua maggiore opera ma seguendo una via diversa. Infatti, egli non confrontò più singolarmente gli indivisibili corrispondenti delle due figure, ma l'insieme degli indivisibili della prima figura con quello della seconda, in modo collettivo. Questo ultimo metodo è quello che più si accosta all'uso del moderno integrale definito e che colloca quindi Cavalieri stesso tra gli iniziatori del calcolo infinitesimale.[120] Dovremmo quindi concludere che Cavalieri oscillava tra i due poli di tutte le linee come insieme o come integrale? Non è così. Prima di tutto, nessuno dei due concetti sembra essere adeguato per una completa descrizione dei nuovi oggetti. In secondo luogo, entrambe le interpretazioni, insieme o integrale, sono completamente estranee all'intuizione geometrica di Cavalieri. Della prima c'è poco da dire, eccetto che visioni così astratte appariranno solo molto più tardi. Per quanto riguarda la seconda, dobbiamo ricordare che l'integrale è strettamente correlato all'idea di somma di quantità infinitesimali, e quindi all'attribuzione agli indivisibili di uno spessore infinitesimale, un concetto che Cavalieri respinse esplicitamente in parecchie occasioni.[121] Il risultato più importante cui arrivò equivale a risolvere l'integrale che, in linguaggio moderno, si scrive come $\int_0^a x^n \, dx$. Questo risultato era stato già dimostrato nel libro II della sua *Geometria* per i casi n $=$ 1, nella proposizione XIX, e n $=$ 2, nella proposizione XXIV.
L'integrale definito venne indicato a lungo con un simbolo "cavalieriano": *omn. L*, ab-

[119]Giusti 1980, p. 60.
[120]Bertozzi, p. 37.
[121]Giusti 1980, p. 28.

breviazione di *omnes lineae*. Solo con Leibniz si sarebbe arrivati alla notazione moderna; quest'ultimo la sostituì in modo esplicito alla precedente notazione: *utile erit scribi* $\int$ *pro omnes lineae, ut* $\int$ *L pro omn. L, id est summa ipsorum L.*[122] Pertanto, si può stabilire una corrispondenza tra le denominazioni cavalieriane e le notazioni integrali. Si ha allora:

$$\textit{omnes lineae} = \int_0^a y\,dx$$

$$\textit{omnes abscissae} = \int_0^a x\,dx$$

$$\textit{omnes quadrata abscissarum} = \int_0^a x^2\,dx$$

Qualche piccola precisazione è doverosa. In Cavalieri il differenziale dx non si trova; infatti ydx è un rettangolo, un elemento bidimensionale, seppur infinitesimo, mentre Cavalieri considera linee prive di larghezza. Cavalieri non si stancava di ripetere che, proprio per questo, il suo metodo era completamente diverso da altri, tra cui quello di Keplero. Inoltre la definizione di *omn. L* di Leibniz come *summa* non corrisponde al pensiero di Cavalieri, che le vedeva come "insieme".[123] Tuttavia, anche se non ancora completo, il metodo proposto da Cavalieri fu adocchiato da molti suoi contemporanei, desiderosi di utilizzarlo nelle loro ricerche geometriche. Primo fra tutti l'italiano Evangelista Torricelli che, con un uso rifinito degli indivisibili, ottenne alcuni dei migliori risultati del suo tempo. L'esempio di Torricelli fu seguito da praticamente tutti i geometri del secolo, e fu così che ebbe luogo la grande diffusione delle idee di Cavalieri e dell'interesse per un metodo che sarebbe rimasto vitale fino e oltre l'invenzione del calcolo.[124]

[122]Lettera di Leibniz a Oldenburg, pubblicata in Gerhardt, pag. 154.
[123]Bertozzi, pp. 37-39.
[124]Giusti 1980, pp. 48-49.

Conclusione

In questo elaborato abbiamo proposto una prima traduzione in italiano dei teoremi della *Nova stereometria doliorum vinariorum* di Keplero: per secoli quest'opera è rimasta lievemente nell'ombra rispetto ad altre risalenti allo stesso autore, come testimonia anche il fatto che la prima traduzione di sempre in una lingua europea moderna risalga solamente agli ultimi mesi del 2018. Tuttavia, le ultime pagine di questo elaborato mostrano importanti legami con opere del passato, come quelle di Archimede, dei contemporanei di Keplero, come Cavalieri, e anche di scienziati successivi come Leibniz.
Proprio per questo crediamo che sia importante riprendere in mano questo libro nato quasi per caso, di fronte a un trucco d'osteria, per comprendere al meglio come siano state gettate le basi del calcolo infinitesimale. Certamente, alcuni risultati proposti da Keplero sono sbagliati, come specificato anche lungo la traduzione, ma questo sicuramente non toglie la novità e l'inventiva con cui il matematico ha affrontato un problema particolare, per ritrovarsi infine, come era già avvenuto per la sua *Astronomia Nova* coi suoi problemi di integrazione, in prima linea tra gli uomini che hanno aperto la strada al rivoluzionario metodo del calcolo integrale.
Inoltre, non si dimentichi che egli, tramite questo libro, ha spalancato un nuovo terreno d'indagine ai geometri che volessero confrontarsi con esso - ricordiamo, a questo proposito, i vari problemi irrisolti proposti ad essi lungo il corso dell'opera - riprendendo Archimede ma addirittura superandolo, allargando il suo campo di ricerca fino ad includere corpi generati dalla rotazione di una sezione conica attorno a qualsiasi segmento giacente nel suo piano.
Suggeriamo quindi che, ora che la struttura principale dell'opera è stata tradotta in italiano, si indaghino diversi filoni a partire da quest'opera: innanzitutto, portare a termine

il lavoro di traduzione, per una comprensione sempre più completa di questo testo. Ancora, si potrebbero ricercare le somiglianze tra il lavoro di Keplero e quello di Cavalieri per capire se effettivamente si possa accusare quest'ultimo di plagio o se il tedesco lo abbia solo leggermente influenzato. Infine, si potrebbero indagare più a fondo i legami tra quest'opera e gli studiosi che hanno raccolto quest'eredità per fondare il glorioso calcolo infinitesimale, non solo Cavalieri ma in una visione più ampia.

Bibliografia

[1] Archimede, *Opere di Archimede*, in Frajese A. (a cura di), UTET, Torino (1974).

[2] Bertozzi L., *Indivisibili e Infinitesimi: un percorso storico alle origini del calcolo infinitesimale*, Bologna (2018).

[3] Caspar M., *Kepler. Translated and edited by C. Doris Hellman*, Collier Books, New York (1962).

[4] Cavalieri B., *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Ex typographia de Duccijs, Bologna (1653).

[5] Enriques F., De Santillana G., *Storia del pensiero scientifico*, F.lli Treves, Milano (1932).

[6] Gerhardt C. I. (a cura di), textitDer Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematiken, Berlino (1899).

[7] Giusti E., *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Edizioni Cremonese, Bologna (1980).

[8] Giusti E., *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, Pisa · Roma (2007).

[9] Kepler J., *Nova stereometria doliorum vinariorum. Accessit Stereometriae Archimedeae supplementum - New solid geometry of wine barrels. A supplement to the Archimedean solid geometry has been added. Edited and translated, with an Introduction, by Eberhard Knobloch*, Paris, Les Belles Lettres (2018).

[10] Lombardi A.M., *Keplero. Una biografia scientifica*, Torino, Codice edizioni (2008).

[11] Methuen C., *Kepler's Tubingen Stimulus to a Theological Mathematics*, University of Edinburgh (1995).

[12] Radice L. L. (a cura di), *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*, UTET, Torino (1966).

[13] Struik D.J., *Kepler as a mathematician*, in "*Johann Kepler - A Tercentenary Commemoration of His Life and Work*", Baltimore, The Williams & Wilkins Company (1931).