ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

RAPPRESENTAZIONI ORDINARIE E MODULARI DEL GRUPPO SIMMETRICO

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:
ANNACHIARA AIELLO

Sessione III
Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di introdurre il lettore alla vastissima teoria delle rappresentazioni dei gruppi. Come vedremo, una rappresentazione di un gruppo è un omomorfismo dal gruppo stesso a quello delle matrici invertibili di un certo ordine, che sappiamo poter interpretare come trasformazioni lineari fra spazi vettoriali. Questo passaggio di struttura consente di ridurre problemi della teoria dei gruppi a problemi di algebra lineare, di più nota risoluzione.

La teoria della rappresentazione si differenzia in base alle proprietà del gruppo e dello spazio vettoriale su cui esso agisce. In questa trattazione ci occuperemo soltanto di gruppi finiti, con particolare riguardo per il gruppo simmetrico, e di spazi vettoriali di dimensione finita, su campi algebricamente chiusi.

Nei primi due capitoli tratteremo la teoria della rappresentazione ordinaria, in cui la caratteristica del campo è nulla o è prima con l'ordine del gruppo. Dapprima otterremo dei risultati generali, riguardanti cioè un gruppo generico, per poi applicarli, nel secondo capitolo, al gruppo simmetrico. Il terzo ed ultimo capitolo apre la porta alla teoria della rappresentazione modulare, in cui il campo dello spazio vettoriale ha caratteristica che divide l'ordine del gruppo. Ciò che ci muoverà sarà l'intenzione di mettere costantemente a confronto queste due branche, ordinaria e modulare, e man mano scoprire le differenze e le affascinanti analogie fra di esse.

Capitolo 1

Rappresentazioni di gruppi finiti

In questo capitolo ci occuperemo di studiare le nozioni fondamentali della teoria delle rappresentazioni di gruppi. Tale teoria può essere espressa sia mediante matrici che in termini di moduli; vedremo come questi due approcci siano corrispondenti fra loro.

Durante l'intera trattazione assumeremo che G sia un gruppo moltiplicativo finito con identità ϵ e, nei primi due capitoli, lavoreremo sul campo complesso $\mathbb{C}$ (o in generale su qualsiasi campo algebricamente chiuso di caratteristica nulla o prima con l'ordine di G). Saranno inoltre date per note le proprietà elementari dei gruppi.

1.1 Richiami sul gruppo simmetrico

Se n è un intero positivo, si definisce gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ l'insieme di tutte le biiezioni da $\{1,2,...,n\}$ in se stesso con l'operazione di composizione. Un elemento $\pi \in S_n$ è chiamato *permutazione*. Esistono diverse notazioni per scrivere una permutazione; una di queste è la *notazione ciclica*. Preso $i \in \{1, 2, ..., n\}$, si consideri la più piccola potenza positiva p tale che $\pi^p(i) = i$. Otteniamo così il ciclo

$$(i, \pi(i), \pi^2(i), ..., \pi^{p-1}(i)).$$

Adesso prendiamo un elemento che non sia nel ciclo contenente i e iteriamo il procedimento finché non sono stati usati tutti i membri di $\{1, 2, ..., n\}$.

Ad esempio, se $\pi \in \mathcal{S}_3$ è data da

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi(3) = 3,$$

in notazione ciclica diventa

$$\pi = (1, \pi(1))(3) = (1, 2)(3).$$

Si definisce *k-ciclo* un ciclo di k elementi. Un 1-ciclo è detto *punto fisso* e può essere omesso se questo non crea confusione. Ad esempio, la permutazione precedente consiste di un 2-ciclo e un punto fisso, per cui può essere riscritta come $\pi = (1, 2)$. La *struttura ciclica* di $\pi \in \mathcal{S}_n$ è un'espressione della forma

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n}),$$

dove m_k è il numero di k-cicli in π. Il nostro esempio ha struttura ciclica

$$(1^1, 2^1, 3^0).$$

Ogni struttura ciclica è associata univocamente a una partizione. Una *partizione di* n è una sequenza

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k),$$

dove $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k > 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

Allora se π ha struttura ciclica $(1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n})$, nella partizione associata k sarà ripetuto m_k volte. Nel nostro esempio otteniamo

$$\lambda = (2, 1).$$

Ricordiamo che due elementi g, h di un gruppo G si dicono coniugati se esiste un terzo elemento $k \in G$ tale che $g = khk^{-1}$. Poiché la relazione di coniugio è una relazione di equivalenza, le distinte classi di coniugio costituiscono una partizione di G.

Si dimostra che due permutazioni sono nella stessa classe di coniugio se e solo se hanno la stessa struttura ciclica. Per questo motivo le partizioni di n sono in corrispondenza biunivoca con le classi coniugio di $\mathcal{S}_n$, fatto che risulterà fondamentale nel capitolo 2.

Infine ricordiamo che le permutazioni del tipo $\tau = (i, j)$ sono chiamate *trasposizioni*. Si dimostra che $\mathcal{S}_n$ è generato dalle *traspozioni adiacenti* $(1, 2), (2, 3), ..., (n - 1, n)$. Se π è il prodotto di k trasposizioni, si definisce il *segno* di π come

$$\text{sgn}\pi = (-1)^k.$$

1.2 Rappresentazioni matriciali

Una rappresentazione matriciale ci fornisce un modo per visualizzare un gruppo astratto tramite un gruppo di matrici. Diamone la definizione precisa.

Sia Mat_d l'insieme delle matrici $d \times d$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ e GL_d il gruppo delle matrici in Mat_d invertibili rispetto alla moltiplicazione.

Definizione 1.2.1. Una *rappresentazione matriciale di un gruppo* G è un omomorfismo di gruppi

$$X : G \to GL_d.$$

Il parametro d è detto *grado*, o *dimensione*, della rappresentazione e si indica con $\deg X$.

Può tuttavia risultare più utile una seconda definizione di rappresentazione.

Definizione 1.2.2. Una *rappresentazione matriciale di un gruppo* G è un'applicazione che ad ogni $g \in G$ associa $X(g) \in Mat_d$ tale che

1. $X(\epsilon) = I$, la matrice identità;
2. $X(gh) = X(g)X(h)$ per ogni $g, h \in G$.

Poiché dalle condizioni 1 e 2 segue $X(g^{-1}) = X(g)^{-1}$ per ogni $g \in G$, si ha effettivamente $X(g) \in GL_d$ e le due definizioni sono dunque equivalenti.

Di seguito forniamo alcuni esempi di rappresentazioni.

Esempio 1.2.1. Ogni gruppo G possiede la *rappresentazione banale*, che manda ogni elemento di G nella matrice (1). Chiaramente questa è una rappresentazione.

Esempio 1.2.2. Vediamo ora il primo esempio di rappresentazione di grado 1 non banale. Consideriamo il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$. Poiché $\mathrm{sgn}\epsilon = 1$ e $\mathrm{sgn}\pi\sigma = (\mathrm{sgn}\pi)(\mathrm{sgn}\sigma)$, l'applicazione $X(\pi) = (\mathrm{sgn}\pi)$, $\pi \in \mathcal{S}_n$, è una rappresentazione, chiamata la *rappresentazione del segno.*

Esempio 1.2.3. Passiamo a un esempio di rappresentazione di grado maggiore di 1. La *rappresentazione di definizione*, di grado n, è così definita: se $\pi \in \mathcal{S}_n$, allora $X(\pi) = (x_{i,j})_{n\times n}$, dove

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi(j) = i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La matrice $X(\pi)$ è chiamata *matrice di permutazione*, in quanto contiene solo zeri e uni, con un unico uno in ogni riga e colonna.

Ad esempio, consideriamo $\mathcal{S}_3$ e $\pi = (2, 3)$. Allora

$$X(\,(2,3)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappresentazioni equivalenti

Esiste un modo per convertire una data rappresentazione in un'altra. Osserviamo che, prese una rappresentazione X e una matrice T invertibile della stessa dimensione, $Y = TXT^{-1}$ è ancora una rappresentazione, con $degY = degX$. Ciò motiva la seguente definizione.

Definizione 1.2.3. Siano $X : G \to GL_n$ e $Y : G \to GL_m$ due rappresentazioni di G. Diciamo che X è *equivalente* a Y se $n = m$ e se esiste un matrice $T \in GL_n$ tale che

$$Y(g) = TX(g)T^{-1}$$

per ogni $g \in G$.

Si osservi che l'equivalenza fra rappresentazioni è una relazione d'equivalenza.

1.3 G-moduli

L'idea alla base di un G-modulo è quella di interpretare una rappresentazione matriciale di un gruppo G come una trasformazione lineare. Vediamo nel dettaglio come questo avviene. Sia V uno spazio vettoriale. Nei primi due capitoli, salvo diversamente indicato, lavoreremo soltanto con spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ di dimensione finita. $GL(V)$ indica l'insieme delle trasformazioni lineari invertibili da V in se stesso. Ricordiamo che se $dim(V) = d$, allora $GL(V)$ e GL_d sono isomorfi come gruppi.

Definizione 1.3.1. Siano V uno spazio vettoriale e G un gruppo. V è un *G-modulo* se esiste un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \to GL(V).$$

Può risultare molto più comodo definire un G-modulo V tramite una "moltiplicazione" $g\mathbf{v}$, che rappresenta $\rho(g)(\mathbf{v})$, dove $g \in G, \mathbf{v} \in V$.

Definizione 1.3.2. V è un *G-modulo* se esiste una moltiplicazione $g\mathbf{v}$ di elementi di G per elementi di V tale che

1. $g\mathbf{v} \in V$;
2. $g(c\mathbf{v}+d\mathbf{w}) = c(g\mathbf{v})+d(g\mathbf{w})$;
3. $(gh)\mathbf{v} = g(h\mathbf{v})$;
4. $\epsilon\mathbf{v} = \mathbf{v}$

per ogni $g, h \in G$; $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$; e scalari $c, d \in \mathbb{C}$.

L'equivalenza fra la 1.3.1 e la 1.3.2 è una semplice verifica.

Nota 1.3.1. Se V è uno spazio vettoriale su un campo K qualsiasi che soddisfa la condizione della definizione 1.3.1, diciamo che esso è un *KG-modulo*. Quando il campo è $\mathbb{C}$ scriviamo semplicemente G-modulo anziché $\mathbb{C}G$-modulo per abbreviazione.

Corrispondenza fra G-moduli e rappresentazioni matriciali di G

Consideriamo una qualsiasi rappresentazione matriciale X di G di grado d. Poniamo $V = \mathbb{C}^d$, lo spazio vettoriale di tutti i vettori colonna di lunghezza d con componenti in $\mathbb{C}$. Allora si può definire una moltiplicazione di $g \in G$ per $\mathbf{v} \in V$ come

$$g\mathbf{v} := X(g)\mathbf{v},$$

dove l'operazione sulla destra è un prodotto matriciale, che rende V un G-modulo.

Viceversa, dato un G-modulo V, si prenda una base $\mathcal{B}$ per V. Allora la rappresentazione associata a V sarà semplicemente quella che a $g \in G$ associa la matrice della trasformazione lineare $V \ni \mathbf{v} \longmapsto g\mathbf{v}$, rispetto alla base $\mathcal{B}$.

G-omomorfismi

Un G-omomorfismo è una funzione che preserva la struttura di G-modulo. Data la corrispondenza fra moduli e rappresentazioni, vedremo come ottenere un concetto analogo a quello di equivalenza fra rappresentazioni.

Definizione 1.3.3. Siano V e W due G-moduli. Un *G-omomorfismo* è un'applicazione lineare $\theta : V \to W$ che *preserva* l'azione di G, cioè tale che

$$\theta(g\mathbf{v}) = g\theta(\mathbf{v}) \tag{1.1}$$

per ogni $g \in G$ e $\mathbf{v} \in V$. Scriviamo che $\theta \in Hom(V, W)$.

Definizione 1.3.4. Un G-omomorfismo θ si dice *G-isomorfismo* se è biiettivo.

Se esiste un G-isomorfismo tra V e W essi si dicono *G-isomorfi*, o *G-equivalenti*, e si scrive $V \cong W$.

Traducendo nel linguaggio delle matrici, prendiamo delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ per V e W rispettivamente. Consideriamo le rappresentazioni matriciali corrispondenti X e Y e la matrice T di θ nelle due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Allora la (1.1) diventa

$$TX(g)\mathbf{v} = Y(g)T\mathbf{v}$$

per ogni $g \in G$ e $\mathbf{v} \in V$, da cui

$$TX(g) = Y(g)T$$

per ogni $g \in G$.

Poiché dire che T è invertibile è come dire che θ è una biiezione, abbiamo il seguente

Teorema 1.3.1. *Due G-moduli V e W, con basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente, sono isomorfi se e solo se le rappresentazioni associate rispetto a tali basi sono equivalenti.*

La seguente proposizione ci ritornerà utile nei paragrafi successivi.

Proposizione 1.3.1. *Sia* $\theta \in Hom(V, W)$. *Allora*

1. $Ker\theta := \{\boldsymbol{v} \in V : \theta(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ *è un sottomodulo di* V*;*
2. $Im\theta := \{\boldsymbol{w} \in W : \boldsymbol{w} = \theta(\boldsymbol{v})$ *per qualche* $\boldsymbol{v} \in V\}$ *è un sottomodulo di* W.

1.4 Algebra di gruppo

Si consideri adesso un qualsiasi insieme finito S. Se esiste una moltiplicazione di elementi di G per elementi di S che soddisfi le condizioni 1, 3 e 4 della definizione 1.3.2, diciamo che G *agisce su* S. La cosa interessante è che è sempre possibile rendere S un G-modulo nel modo che segue. Sia $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ e indichiamo con $\mathbb{C}\mathbf{S} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, ..., \boldsymbol{s_n}\}$, lo spazio vettoriale generato da S su $\mathbb{C}$. Allora l'azione di G su S può estendersi a un'azione su $\mathbb{C}\mathbf{S}$ per linearità:

$$g(c_1\boldsymbol{s_1} + c_2\boldsymbol{s_2} + ... + c_n\boldsymbol{s_n}) = c_1(g\boldsymbol{s_1}) + c_2(g\boldsymbol{s_2}) + ... + c_n(g\boldsymbol{s_n})$$

per ogni $g \in G$. In questo modo la moltiplicazione di elementi di G per elementi di $\mathbb{C}\mathbf{S}$ soddisfa tutti i punti di 1.3.2: abbiamo reso $\mathbb{C}\mathbf{S}$ un G-modulo di dimensione $|S|$.

Si ha dunque la seguente

Definizione 1.4.1. Se un gruppo G agisce su un insieme S, allora il modulo $\mathbb{C}\mathbf{S}$ si chiama *rappresentazione di permutazione* associata ad S. Inoltre, gli elementi di S costituiscono una base per $\mathbb{C}\mathbf{S}$, detta *base standard*.

Gli esempi che seguono sono tutti G-moduli di questa forma.

Esempio 1.4.1. Il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ agisce come sappiamo sull'insieme $S = \{1,2,...,n\}$. Ora

$$\mathbb{C}\mathbf{S} = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + ... + c_n\mathbf{n} : c_i \in \mathbb{C} \text{ per ogni i}\}$$

con l'azione

$$\pi(c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + ... + c_n\mathbf{n}) = c_1\pi(\mathbf{1}) + c_2\pi(\mathbf{2}) + ... + c_n\pi(\mathbf{n})$$

per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$.

Possiamo visualizzare $\mathbb{C}\mathbf{S}$ tramite la sua rappresentazione matriciale, scegliendone una base e determinando le matrici $X(\pi), \pi \in \mathcal{S}_n$, in quella base.

Semplifichiamoci i calcoli prendendo $n = 3$. Per trovare, ad esempio, la matrice di $\pi = (2, 3)$, rispetto alla base standard $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$, calcoliamo

$$(2, 3)\mathbf{1} = 1, \quad (2, 3)\mathbf{2} = 3, \quad (2, 3)\mathbf{3} = 2,$$

da cui

$$X(\,(2,3)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinando in maniera analoga le altre matrici $X(\pi), \pi \in \mathcal{S}_3$, ci si accorge che esse sono le stesse di quelle della rappresentazione di definizione (si veda esempio 1.2.3). Si dimostra che ciò è vero per ogni n, per cui $\mathbb{C}\mathbf{S}$ corrisponde alla rappresentazione di definizione di $\mathcal{S}_n$.

Esempio 1.4.2. Presentiamo ora una delle più importanti rappresentazioni di gruppi, la *rappresentazione regolare (sinistra)*.

Ogni gruppo agisce su se stesso tramite moltiplicazione sinistra: se $g \in G$ e $h \in S = G$, l'azione di g su h è il prodotto usuale di gruppo. Allora è possibile considerare la rappresentazione di permutazione associata a $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$

$$\mathbb{C}[\mathbf{G}] = \{c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + ... + c_n\mathbf{g}_n : c_i \in \mathbb{C} \text{ per ogni i}\}.$$

Definizione 1.4.2. $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$ è detta l'*algebra di gruppo* di G.

Le parentesi quadre indicano che $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$ non è soltanto uno spazio vettoriale, ma anche un'algebra (ricordiamo che un'algebra è uno spazio vettoriale con una moltiplicazione associativa di vettori, che rende lo spazio un anello).

La moltiplicazione in $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$ è data da $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = \mathbf{g}_k$ se $g_ig_j = g_k$ in G, estesa per linearità.

Allora si può estendere l'azione di G sull'algebra di gruppo come segue

$$g(c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + ... + c_n\mathbf{g}_n) = c_1(\mathbf{g}\mathbf{g}_1) + c_2(\mathbf{g}\mathbf{g}_2) + ... + c_n(\mathbf{g}\mathbf{g}_n)$$

per ogni $g \in G$.

Nel paragrafo 1.8 sarà chiarito il motivo per cui l'algebra di gruppo svolga un ruolo chiave nella teoria delle rappresentazioni.

Esempio 1.4.3. Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. La rappresentazione regolare è in realtà un caso particolare di quella che si chiama *rappresentazione della classe laterale (sinistra)* di G rispetto ad H.

Sia $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$ un sistema di rappresentanti distinti per le classi laterali sinistre di H in G, cioè $\mathcal{H} = \{g_1H, g_2H, ..., g_kH\}$ è un insieme completo di classi laterali sinistre disgiunte di H in G.

Il gruppo G agisce su $\mathcal{H}$ in questo modo:

$$g(g_iH) = (gg_i)H$$

per ogni $g \in G$. Per cui la rappresentazione di permutazione associata ad $\mathcal{H}$ è

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1\mathbf{g}_1\mathbf{H} + c_2\mathbf{g}_2\mathbf{H} + ... + c_k\mathbf{g}_k\mathbf{H} : c_i \in \mathbb{C} \text{ per ogni i}\}$$

con l'azione

$$g(c_1\mathbf{g}_1\mathbf{H} + ... + c_k\mathbf{g}_k\mathbf{H}) = c_1(\mathbf{g}\mathbf{g}_1\mathbf{H}) + ... + c_k(\mathbf{g}\mathbf{g}_k\mathbf{H}).$$

Si noti che se $H = \{\epsilon\}$, allora $\mathcal{H} = G$, per cui si ottiene la rappresentazione regolare. Nel paragrafo 1.9 vedremo che questo è un esempio di rappresentazione indotta.

1.5 Riducibilità e teorema di Maschke

La strada migliore per studiare i moduli- e in genere qualsiasi altra struttura matematica- è quella di decomporli nei loro "pezzi" più piccoli. Come vedremo, esistono moduli che si costruiscono tramite altri di dimensioni minori, mentre per alcuni ciò non è possibile: questa è grosso modo la differenza fra rappresentazioni riducibili e irriducibili, che analizzeremo in questo paragrafo. Ma che cosa si intende precisamente per "pezzo" nel nostro caso? La risposta è nella nozione di sottomodulo.

Definizione 1.5.1. Sia V un G-modulo. Un sottoinsieme W di V si dice *G-sottomodulo*, o semplicemente *sottomodulo*, di V se è un sottospazio di V e se è chiuso sotto l'azione di G, cioè se

$$\mathbf{w} \in W \Rightarrow g\mathbf{w} \in W \text{ per ogni } g \in G.$$

Equivalentemente, W è un sottomodulo di V se è un sottospazio di V che è anche un G-modulo. Scriviamo $W \leq V$.

Esempio 1.5.1. Ogni G-modulo V ha come sottomoduli i sottospazi $\{\mathbf{0}\}$ e V stesso, detti *sottomoduli banali*. Tutti gli altri sottomoduli si dicono *non banali*.

Esempio 1.5.2. Per un esempio di sottomodulo non banale, consideriamo $\mathcal{S}_n$ con $n \geq 2$. Nell'esempio 1.4.1 abbiamo visto che $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \mathbf{n}\}$ corrisponde alla rappresentazione di definizione di $\mathcal{S}_n$. Dimostriamo che il sottospazio

$$W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}\}$$

è un sottomodulo di V. Per avere la chiusura sotto l'azione di $\mathcal{S}_n$, è sufficiente che

$$\pi(\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}) \in W$$

per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$. E in effetti

$$\pi(\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}) = \pi(\mathbf{1}) + \pi(\mathbf{2}) + ... + \pi(\mathbf{n}) = \mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n} \in W. \tag{1.2}$$

W è non banale dal momento in cui $dimW = 1$ mentre $dimV = n \geq 2$. Ci chiediamo quale rappresentazione si ottenga restringendo l'azione di $\mathcal{S}_n$ a W. Da (1.2) segue che la rappresentazione matriciale associata a W è quella banale. In generale, se G fissa ogni elemento di uno spazio vettoriale W, si dice che G *agisce banalmente su* W.

A questo punto possiamo dare la definizione di moduli irriducibili, che sono proprio i "mattoncini" per la costruzione di tutti gli altri.

Definizione 1.5.2. Un G-modulo V si dice *irriducibile* se è non nullo e se non ha sottomoduli a parte quelli banali. Altrimenti, V si dice *riducibile*.

Osservazione 1.5.1. Naturalmente, ogni G-modulo di grado 1 è irriducibile.

Prima di enunciare uno dei maggiori risultati della teoria delle rappresentazioni, il teorema di Maschke, richiamiamo alcune definizioni e proposizioni utili.

Definizione 1.5.3. Se U e W sono sottospazi dello spazio vettoriale V, diciamo che V è *somma diretta (interna)* di U e W se ogni $\mathbf{v} \in V$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U e uno di W. In tal caso si scrive $V = U \oplus W$.

Se inoltre V è un G-modulo e U, W sono suoi sottomoduli, diciamo che U e W sono *complementari fra loro*.

Definizione 1.5.4. Una matrice X è *somma diretta* delle matrici A e B se X è della forma diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Osservazione 1.5.2. Sia V un G-modulo di dimensione d con $V = U \oplus W$, dove $U, W \leq V$. Supponiamo che U e W abbiano dimensioni f e $d-f$ rispettivamente. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che i primi f vettori costituiscono una base per U e gli ultimi $d-f$ vettori costituiscono una base per W. Poiché un sottomodulo è per definizione chiuso rispetto all'azione di G, segue che per ogni $g \in G$ la matrice di rappresentazione associata a V rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$X(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix},$$

dove $A(g)$ e $B(g)$ sono le matrici dell'azione di G ristretta ad U e W rispettivamente.

Proposizione 1.5.1. *Sia V uno spazio vettoriale con $V = U \oplus W$, dove U, W sono sottospazi di V. Definiamo $\pi : V \to V$ come*

$$\pi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W.$$

Allora π è un endomorfismo di V. Inoltre, $Im\pi = U$, $Ker\pi = W$ e $\pi^2 = \pi$.

Definizione 1.5.5. Un endomorfismo π di uno spazio vettoriale V che soddisfa $\pi^2 = \pi$ si dice una *proiezione* di V.

Proposizione 1.5.2. *Sia π una proiezione di uno spazio vettoriale V. Allora*

$$V = Im\pi \oplus Ker\pi.$$

Sottolineamo che il teorema di Maschke è valido non soltanto su $\mathbb{C}$, ma più in generale su un qualsiasi campo K algebricamente chiuso di caratteristica o nulla o prima con $|G|$.

Teorema 1.5.1 (di Maschke)**.** *Siano G un gruppo e V un KG-modulo. Se U è un sottomodulo di V, allora esiste un sottomodulo W di V tale che*

$$V = U \oplus W.$$

Dimostrazione. Dato un sottomodulo U di V, è sempre possibile scegliere un sottospazio W tale che $V = U \oplus W$ come sottospazi. Allora, per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono unici $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Definiamo $\phi : V \to V$ ponendo $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Dalla proposizione 1.5.1 si ha che ϕ è una proiezione con nucleo W e immagine U. Vogliamo modificare la proiezione ϕ in modo da ottenere un'applicazione $\theta : V \to V$ tale che

- θ è ancora una proiezione di V;
- $Im\theta = U$;
- θ è un G-omomorfismo.

Definiamo $\theta : V \to V$ come

$$\theta(\mathbf{v}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi(g\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V.$$

Si verifica facilmente che θ è un endomorfismo di V. Mostriamo che θ preserva l'azione di G: per ogni $\mathbf{v} \in V$, $x \in G$

$$\begin{aligned} \theta(x\mathbf{v}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi(gx\mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} xh^{-1} \phi(hx^{-1}x\mathbf{v}) \\ &= x(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \phi(h\mathbf{v})) \\ &= x\theta(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dunque θ è un G-omomorfismo.

Dimostriamo che $\theta^2 = \theta$. Poiché U è un G-sottomodulo, per ogni $\mathbf{u} \in U$, $g \in G$, si ha che $g\mathbf{u} \in U$, e quindi $\phi(g\mathbf{u}) = g\mathbf{u}$. Da cui

$$\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi(g\mathbf{u}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} g\mathbf{u} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbf{u} = \mathbf{u}. \tag{1.3}$$

Poiché $Im\theta \subseteq U$, per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha $\theta(\mathbf{v}) \in U$, quindi da (1.3) segue che $\theta(\theta(\mathbf{v})) = \theta(\mathbf{v})$, cioè θ è una proiezione. Infine da (1.3) si conclude che $Im\theta = U$.

Ponendo $W = Ker\theta$, allora per la proposizione 1.3.1 W è un sottomodulo di V e $V = U \oplus W$ per la proposizione 1.5.2. □

Vedremo che, piuttosto che il teorema di Maschke, lo strumento di cui ci serviremo sarà il suo corollario. Difatti, in alcuni libri di testo come il Sagan [Sag], quest'ultimo viene presentato come il teorema di Maschke stesso.

Definizione 1.5.6. Un KG-modulo V si dice *completamente riducibile* se

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k,$$

dove ogni U_i è un sottomodulo irriducibile di V.

Corollario 1.5.1 (del teorema di Maschke)**.** *Ogni KG-modulo non nullo è completamente riducibile.*

Dimostrazione. Sia V un KG-modulo non nullo. Procediamo per induzione su $dimV$.

Passo base: se $dimV = 1$, V stesso è irriducibile, per cui il corollario vale prendendo $k = 1$ e $U_1 = V$.

Passo induttivo: Se V è irriducibile, abbiamo finito. Altrimenti, esiste un sottomodulo non banale U di V. Per il teorema 1.5.1 esiste un sottomodulo W di V tale che $V = U \oplus W$. Per ipotesi induttiva, poiché $dimU, dimW < dimV$, si ha

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r, \quad W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

dove gli U_i e W_j sono sottomoduli irriducibili di U e W rispettivamente. Da cui

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

cioè V è somma diretta di sottomoduli irriducibili. □

Prima di procedere, introduciamo il concetto di prodotto interno su un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Definizione 1.5.7. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Un *prodotto interno* su V è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}$ per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, dove la barra indica il complesso coniugato;

2. $\langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle$ per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$ e per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$;

3. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Si noti che la condizione 3 ha senso grazie alla condizione 1, dalla quale segue che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$. Inoltre, da 2 si dimostra facilmente che se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}$.

Definizione 1.5.8. Un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su V si dice *non degenere* se per ogni $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, l'applicazione $V \ni \mathbf{w} \longmapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ è diversa dall'applicazione nulla.

Esempio 1.5.3. Nell'esempio 1.5.2 abbiamo visto che $W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}\}$ è un sottomodulo non banale di $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \mathbf{n}\}$. Il teorema di Maschke ci dice che deve esistere un sottomodulo U tale che $V = W \oplus U$. Vediamo un modo semplice per costruirlo, nel caso $n = 3$. Il procedimento che utilizzeremo fornisce una dimostrazione alternativa del teorema di Maschke su $\mathbb{C}$.

Innanzitutto abbiamo bisogno di introdurre un prodotto interno su V: dati due vettori $v = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3}$, $w = x\mathbf{1} + y\mathbf{2} + z\mathbf{3} \in V$, definiamo

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z}.$$

Si dimostra che questo è un prodotto interno non degenere e che inoltre è invariante sotto l'azione di $\mathcal{S}_3$, cioè

$$\langle \pi\mathbf{v}, \pi\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

per ogni $\pi \in \mathcal{S}_3$ e per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Dati un prodotto interno non degenere su un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale V e un sottospazio W di V, vale sempre $V = W \oplus W^\perp$, dove $W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{w} \in W\}$. La seguente proposizione ci assicura che $W^\perp = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \boldsymbol{n}\}^\perp$ è anche un G-modulo:

Proposizione 1.5.3. *Siano V un G-modulo, W un suo sottomodulo e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto interno invariante sotto l'azione di G. Allora $W^\perp$ è un G-sottomodulo.*

Nel nostro esempio, si ha che

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{\mathbf{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} \rangle = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{v} = a\mathbf{1} + b\mathbf{2} + c\mathbf{3} : \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Per calcolare le matrici $X(\pi)$ della rappresentazione associata a V, scegliamo la base $\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$ per W e la base $\{\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}\}$ per $W^\perp$. Otteniamo

$$X(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(\,(1,2)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(\,(1,3)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X(\,(2,3)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X(\,(1,2,3)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X(\,(1,3,2)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che sono tutte somme dirette di due matrici $A(\pi)$ e $B(\pi)$. Avevamo già visto nell'esempio 1.5.2 che $A(\pi)$ è la rappresentazione banale, che è irriducibile. Nel paragrafo 1.6 mostreremo che anche $B(\pi)$ è irriducibile, per cui abbiamo appena decomposto la rappresentazione di definizione nelle sue parti irriducibili.

1.6 Caratteri di gruppo

Introduciamo ora l'affascinante teoria dei caratteri di gruppo. Consideriamo una rappresentazione X di G. Il carattere di X è l'applicazione che ad ogni $g \in G$ associa il numero complesso dato dalla traccia di $X(g)$, ovvero la somma degli elementi sulla diagonale. L'eleganza di questa teoria risiede nel fatto che l'equivalenza fra due moduli può ridursi semplicemente all'uguaglianza fra i loro caratteri.

Definizione 1.6.1. Sia X una rappresentazione di G. Il *carattere* di X è l'applicazione

$$\begin{aligned} \chi :\ & G \longrightarrow \mathbb{C} \\ & g \longmapsto trX(g), \end{aligned}$$

dove tr indica la traccia di una matrice.

Se V è un G-modulo, il suo *carattere* è il carattere della rappresentazione corrispondente a V.

Dal momento in cui a un singolo modulo corrispondono più rappresentazioni matriciali, è necessario controllare che il carattere di un modulo sia ben definito. Supponiamo quindi che X e Y corrispondano a V, allora esiste una matrice di cambiamento di base T tale che $Y = TXT^{-1}$. Poiché la traccia è invariante per coniugio, si ha

$$trY(g) = trTX(g)T^{-1} = trX(g)$$

per ogni $g \in G$.

Nota 1.6.1. Molti termini utilizzati per le rappresentazioni si riferiranno anche ai caratteri corrispondenti. Per cui se X ha carattere χ, diremo che χ è irriducibile se X lo è, ecc.

Esempio 1.6.1. Se X è una rappresentazione di grado 1, $\chi(g)$ è semplicemente l'unico elemento della matrice $X(g)$ per ogni $g \in G$. Caratteri di questo tipo sono chiamati *caratteri lineari.*

Esempio 1.6.2. Consideriamo la rappresentazione di definizione di $\mathcal{S}_n$ (esempio 1.2.3), con il suo carattere χ^{def}. Ricordando che le matrici $X(\pi), \pi \in \mathcal{S}_n$, sono di permutazione, si ha $\chi^{def}(\pi) =$ numero di "1" sulla diagonale di $X(\pi) =$ numero di punti fissi di π.

Esempio 1.6.3. Sia $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Vogliamo calcolare i valori di χ^{reg}, il carattere della rappresentazione regolare di G con modulo $\mathbb{C}[G]$. Poiché $X(\epsilon) = I_n$, $\chi^{reg}(\epsilon) = |G|$.

Prendiamo ora $g \neq \epsilon$. Le matrici $X(g)$ rispetto alla base standard $\mathcal{B} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n\}$ sono matrici di permutazione per l'azione di g su $\mathcal{B}$. Ne segue che $\chi^{reg}(g)$ è dato dal numero di punti fissi di tale azione. Ma se $\mathbf{g}_i$ è un punto fisso, allora $g\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i$, da cui $g = \epsilon$, che è assurdo. Dunque non ci sono punti fissi e $\chi^{reg}(g) = 0$.

Proviamo alcune proprietà fondamentali dei caratteri.

Proposizione 1.6.1. *Se X è una rappresentazione matriciale di G con carattere χ, allora*

1. *χ è costante sulle classi di coniugio, cioè se K è una classe di coniugio di G, allora*
$$g, h \in K \Rightarrow \chi(g) = \chi(h).$$

2. *Rappresentazioni equivalenti hanno caratteri uguali, cioè se Y è una rappresentazione di G con carattere ψ, allora*
$$X \cong Y \Rightarrow \chi(g) = \psi(g)$$
per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. 1. Se $g = khk^{-1}$ per qualche $k \in G$, allora
$$\chi(g) = trX(g) = trX(k)X(h)X(k)^{-1} = trX(h) = \chi(h).$$

2. Questo punto è stato dimostrato quando abbiamo verificato la buona posizione della definizione dei caratteri di moduli.

□

Come già accennato, è vero anche il viceversa del punto 2. Per dimostrarlo, dobbiamo prima definire il prodotto interno di due caratteri.

Prodotto interno di caratteri

Un carattere χ di un gruppo $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ può essere pensato come un vettore riga con componenti complesse:
$$\chi = (\chi(g_1), \chi(g_2), ..., \chi(g_n)).$$
In quest'ottica, andiamo a definire il prodotto interno di due caratteri.

Definizione 1.6.2. Siano χ e ψ due caratteri. Il *prodotto interno* di χ e ψ è
$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}). \tag{1.4}$$

Nota 1.6.2. E' possibile definire più in generale il *prodotto interno* di due funzioni $\chi, \psi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ come
$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$
Se ψ è il carattere di un G-modulo, si può dimostrare che $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$ per ogni g, da cui la definizione 1.6.2.

Osservazione 1.6.1. Consideriamo $G = \mathcal{S}_n$. Poiché π e $\pi^{-1} \in \mathcal{S}_n$ hanno la stessa struttura ciclica, sono nella stessa classe di coniugio (vedasi paragrafo 1.1). Ma allora, per il punto 1 della proposizione 1.6.1, $\chi(\pi) = \chi(\pi^{-1})$ e la formula (1.4) per $\mathcal{S}_n$ si riscrive come

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi(\pi)\psi(\pi), \tag{1.5}$$

che è più comoda da calcolare.

Teorema 1.6.1 (Relazioni di caratteri del Primo Tipo). *Se χ e ψ sono caratteri irriducibili di un gruppo G, allora*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi,\psi},$$

dove

$$\delta_{\chi,\psi} = \begin{cases} 1 & se\ \chi = \psi, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Notazione 1.6.1. Scriviamo

$$mX = \underbrace{X \oplus X \oplus ... \oplus X}_{m},$$

la somma diretta di m rappresentazioni equivalenti a X. L'intero non negativo m si chiama la *molteplicità* di X.

Corollario 1.6.1 (del teorema 1.6.1). *Sia X una rappresentazione matriciale di G con carattere χ. Supponiamo*

$$X \cong m_1X_1 \oplus m_2X_2 \oplus \cdots \oplus m_kX_k,$$

dove gli X_i sono irriducibili a due a due non equivalenti con caratteri χ_i. Allora

1. *$\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_k\chi_k$;*
2. *$\langle \chi, \chi_j \rangle = m_j$ per ogni j;*
3. *$\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + ... + m_k^2$;*
4. *X è irriducibile se e solo se $\langle \chi, \chi \rangle = 1$*
5. *Se Y è una rappresentazione di G con carattere ψ,*

   $$X \cong Y \Leftrightarrow \chi(g) = \psi(g)$$

   per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. Per 1 si usa il fatto che la traccia di una somma diretta di matrici è la somma delle tracce. 2 e 3 sono semplici applicazioni del teorema 1.6.1.

Per il punto 4, l'implicazione verso destra segue ancora banalmente dal teorema 1.6.1; per il viceversa, supponiamo che

$$\langle \chi, \chi \rangle \overset{(3)}{=} \sum_i m_i^2 = 1.$$

Allora deve essere $m_j = 1$ per qualche j e per tutti gli altri indici i gli m_i sono uguali a 0. Da cui $X = X_j$, che è irriducibile.

Finalmente possiamo dimostrare 5. Un'implicazione è stata vista nella proposizione 1.6.1. Per l'altra, sia Y una rappresentazione di G, $Y \cong \oplus_{i=1}^k n_i X_i$. Si osservi che non è restrittivo assumere che le espansioni di X e Y contengano gli stessi irriducibili, salvo inserire con molteplicità 0 quelli che si trovano in una ma non nell'altra. Poiché per ipotesi $\chi = \psi$, $m_i \overset{(2)}{=} \langle \chi, \chi_i \rangle = \langle \psi, \chi_i \rangle \overset{(2)}{=} n_i$ per ogni i. Ma allora $X \cong Y$. □

Ritorniamo ora alla proposizione 1.6.1. Grazie al primo punto, dati una classe di coniugio K di G e un carattere χ, è possibile definire

$$\chi_K = \chi(g)$$

per un $g \in K$. Questo ci porta alla definizione della tabella dei caratteri di un gruppo.

Definizione 1.6.3. Sia G un gruppo. La *tabella dei caratteri* di G è una tabella dove le righe sono indicizzate dai caratteri irruducibili non equivalenti di G e le colonne dalle classi di coniugio. L'elemento della tabella corrispondente alla riga χ e alla colonna K è:

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & K & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ \chi & \cdots & \chi_k & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Nel paragrafo 1.8 vedremo che il numero di rappresentazioni irriducibili non equivalenti di un gruppo (a meno di isomorfismi) è uguale al numero di classi di coniugio, per cui la tabella dei caratteri è sempre quadrata.

Esempio 1.6.4. Vogliamo costruire la tabella dei caratteri di $\mathcal{S}_3$. Consideriamo il carattere della rappresentazione di definizione, $\chi = \chi^{def}$. Dal corollario del teorema di Maschke e dal punto 1 del corollario 1.6.1, possiamo scrivere

$$\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + m_3\chi_3,$$

dove i χ_i sono i tre caratteri irriducibili non equivalenti di $\mathcal{S}_3$ ($\mathcal{S}_3$ ha tre distinte classi di coniugio). Sappiamo che i primi due sono i caratteri banale e del segno rispettivamente.

Per trovare il terzo, χ_3, andiamo prima a calcolare le molteplicità m_1 e m_2. Ricordando che nell'esempio 1.6.2 abbiamo già calcolato i valori di χ^{def}, sfruttiamo l'equazione (1.5) e il punto 2 del corollario 1.6.1 per determinare:

$$m_1 = \langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\chi_1(\pi) = \frac{1}{6}(3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 1,$$
$$m_2 = \langle \chi, \chi_2 \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\chi_2(\pi) = \frac{1}{6}(3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0.$$

Perciò
$$\chi = \chi_1 + m_3\chi_3.$$

Riprendiamo ora l'esempio 1.5.3. Dalle considerazioni fatte finora segue che le matrici $B(\pi)$ dell'esempio 1.5.3 corrispondono a una o più copie del terzo modulo irriducibile. Sia ψ il carattere associato a tali matrici. Se K_1, K_2, K_3 indicano le tre classi di coniugio di $\mathcal{S}_3$, si ha

$$\begin{aligned} &\psi_{K_1} = \psi(\epsilon) = 2, \\ &\psi_{K_2} = \psi(\,(1,2)\,) = \psi(\,(2,3)\,) = \psi(\,(1,3)\,) = 0, \\ &\psi_{K_3} = \psi(\,(1,2,3)\,) = \psi(\,(1,3,2)\,) = -1. \end{aligned}$$

Grazie ai punti 3 e 4 del corollario 1.6.1 è possibile determinare facilmente se ψ è irriducibile:
$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1.$$

Dunque ψ è irriducibile e $m_3 = 1$, da cui $\chi_3 = \psi$. Possiamo finalmente scrivere la tabella dei caratteri di $\mathcal{S}_3$:

	K_1	K_2	K_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

In generale il modulo di definizione per $\mathcal{S}_n$, $V = \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\}$, ha sempre $W = \mathbb{C}\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}\}$ come sottomodulo, come abbiamo visto nell'esempio 1.5.2. Se χ^1 e $\chi^\perp$ sono i caratteri corrispondenti a W e $W^\perp$ rispettivamente, da $V = W \oplus W^\perp$ segue che $\chi^{def} = \chi^1 + \chi^\perp$. Perciò

$$\chi^\perp = (\text{numero dei punti fissi di } \pi) - 1,$$

essendo χ^1 la rappresentazione banale. Nel secondo capitolo saremo in grado di dimostrare che $W^\perp$ è irriducibile per ogni n.

1.7 Il lemma di Schur

Il lemma di Schur è un risultato fondamentale della teoria delle rappresentazioni, che caratterizza gli omomorfismi fra moduli irriducibili. Esso gioca un ruolo cruciale nel determinare il numero di caratteri irriducibili non equivalenti di un gruppo (teorema 1.8.2, che tuttavia enunceremo senza dimostrare), e tornerà utile nel capitolo 3 quando definiremo i cosiddetti caratteri di Brauer.

Teorema 1.7.1 (Lemma di Schur). *Siano V e W due G-moduli irriducibili.*

1. *Se $\theta : V \to W$ è un G-omomorfismo, allora o θ è un G-isomorfismo o è la funzione nulla.*

2. *Se $\theta : V \to V$ è un G-isomorfismo, allora è un multiplo scalare dell'endomorfismo identità 1_V.*

Dimostrazione. 1. Supponiamo che $\theta(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ per qualche $\mathbf{v} \in V$. Allora $Im(\theta) \neq \{\mathbf{0}\}$. Poiché per la proposizione 1.3.1 $Im(\theta) \leq W$, e W è irriducibile per ipotesi, si ha $Im(\theta) = W$. Ancora per la proposizione 1.3.1 si ha $Ker(\theta) \leq V$. Poiché V è irriducibile e $Ker(\theta) \neq V$, deve essere $Ker(\theta) = \{\mathbf{0}\}$. Ma allora θ è invertibile.

2. Poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, l'endomorfismo θ ha sicuramente un autovalore $c \in \mathbb{C}$, da cui $Ker(\theta - c1_V) \neq \{\mathbf{0}\}$. Allora $Ker(\theta - c1_V)$ è un sottomodulo non nullo di V. Poiché V è irriducibile, $Ker(\theta - c1_V) = V$. Ciò vuol dire che

$$(\theta - c1_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in V.$$

Dunque $\theta = c1_V$.

□

Osservazione 1.7.1. Si osservi che la prima parte del lemma di Schur continua ad essere valida su un campo qualsiasi (e persino per gruppi infiniti). E' soltanto nella seconda che diventa strettamente necessario che il campo sia algebricamente chiuso.

La seconda parte del teorema gode anche dell'implicazione inversa.

Proposizione 1.7.1. *Sia V un G-modulo non nullo, e supponiamo che ogni G-omomorfismo da V a V sia un multiplo scalare di 1_V. Allora V è irriducibile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che V sia riducibile, perciò esiste un sottomodulo non banale $U \leq V$. Dal teorema di Maschke, esiste un sottomodulo $W \leq V$ tale che $V = U \oplus W$. Si consideri la proiezione $\pi : V \to V$ definita come $\pi(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$. Si verifica facilmente che θ è un G-omomorfismo. Tuttavia θ non è un multiplo scalare di 1_V, il che è assurdo. □

Concludiamo interpretando il lemma di Schur in termini di rappresentazioni matriciali, includendo anche l'inversa del punto 2.

Corollario 1.7.1. *1. Siano X ed Y due rappresentazioni irriducibili di G. Se T è una matrice tale che*

$$TX(g) = Y(g)T \quad \textit{per ogni } g \in G,$$

allora o T è invertibile o è la matrice nulla.

2. Sia X una rappresentazione di G. Allora X è irriducibile se e solo se ogni matrice $n \times n$ A tale che

$$AX(g) = X(g)A \quad \textit{per ogni } g \in G$$

è della forma $A = cI_n$, con $c \in \mathbb{C}$.

1.8 Decomposizione dell'algebra di gruppo

Lo scopo principale di questa sezione è quello di dimostrare che ogni modulo irriducibile di un gruppo G è (isomorfo a) un fattore di decomposizione dell'algebra di gruppo $\mathbb{C}[G]$. Vedremo inoltre quali importantissime conseguenze implicherà questo fatto.

Cominciamo con la seguente osservazione. Si consideri un qualsiasi G-modulo V, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$, dove ogni U_i è un sottomodulo irriducibile di V. Come mostrato dal seguente esempio, può capitare che esista un sottomodulo irriducibile U di V che non sia uguale a nessuno degli U_i.

Esempio 1.8.1. Sia V un G-modulo di dimensione 2, con base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e l'azione banale. Allora si ha $V = U_1 \oplus U_2$, dove $U_1 = \mathbb{C}\{\mathbf{v}_1\}$ e $U_2 = \mathbb{C}\{\mathbf{v}_2\}$ sono suoi sottomoduli irriducibili. Ma $U = \mathbb{C}\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$ è un sottomodulo irriducibile $\neq U_1, U_2$.

Tuttavia, vale la seguente

Proposizione 1.8.1. *Sia V un G-modulo, e scriviamo $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ come somma diretta di sottomoduli irriducibili di V. Ogni sottomodulo irriducibile U di V è isomorfo a U_i per qualche i.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{u} \in U$, abbiamo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + ... + \mathbf{u}_n$ per degli unici vettori $\mathbf{u}_i \in U_i$, con $i = 1, ..., n$. Definiamo $\pi_i : U \to U_i$ ponendo $\pi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_i$. Scegliendo i tale che $\mathbf{u}_i \neq 0$ per qualche $\mathbf{u} \in U$, si ha $\pi_i \neq 0$. Le proiezioni π_i sono dei G-omomorfismi. Poiché U e U_i sono irriducibili, e $\pi_i \neq 0$, dal lemma di Schur si conclude che π_i è un G-isomorfismo. Perciò $U \cong U_i$. □

Teorema 1.8.1. *Consideriamo la rappresentazione regolare $\mathbb{C}[G]$, e scriviamone la decomposizione in sottomoduli irriducibili*

$$\mathbb{C}[G] = \oplus_i m_i U_i.$$

Allora ogni G-modulo irriducibile è (isomorfmo a) uno dei sottomoduli U_i.

Dimostrazione. Dal teorema di Maschke, possiamo scrivere

$$\mathbb{C}[G] = \oplus_i m_i U_i \tag{1.6}$$

dove gli U_i sono tutti i G-moduli irriducibili a due a due non equivalenti e soltanto un numero finito di m_i è non nullo. A priori, le molteplicità non nulle corrispondono a quei G-moduli irriducibili che sono anche sottomoduli di V (la proposizione 1.8.1 ci assicura che compaiono tutti). Mostriamo che per ogni i si ha $m_i = dimU_i$. Da questo segue che tutti i G-moduli irriducibili a due a due non equivalenti, essendo non nulli per definizione, compaiono nella decomposizione di $\mathbb{C}[G]$ con molteplicità non nulla.

Se χ_i è il carattere di U_i, dal punto 2 del corollario 1.6.1 si ha

$$m_i = \langle \chi^{reg}, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{reg}(g) \chi_i(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \chi^{reg}(\epsilon) \chi_i(\epsilon) = \chi_i(\epsilon) = dimU_i. \tag{1.7}$$

□

Da (1.6) e (1.7) segue che

$$\sum_i (dimU_i)^2 = dim(\oplus m_i U_i) = dim\mathbb{C}[G] = |G|,$$

perciò vale il seguente

Corollario 1.8.1. *Dato un gruppo G, esiste solo un numero finito di classi di isomorfismo di G-moduli irriducibili.*

Concludiamo con una conseguenza del teorema 1.8.1, per la cui dimostrazione si rimanda al paragrafo 1.10 del Sagan [Sag].

Teorema 1.8.2. *Dato un gruppo G, il numero di classi di isomorfismo di G-moduli irriducibili è uguale al numero di classi di coniugio di G.*

1.9 Rappresentazioni ristrette e indotte

Dato un gruppo G con un sottogruppo H, è possibile ottenere una rappresentazione di G da una di H e viceversa. Vediamo come.

Definizione 1.9.1. Sia X una rappresentazione di G e $H \leq G$ un suo sottogruppo. Si definisce *restrizione di X ad H*, $X\downarrow_H^G$, l'applicazione che ad ogni $h \in H$ assegna la matrice

$$X\downarrow_H^G (h) = X(h).$$

E' facile verificare che la restrizione è effettivamente una rappresentazione di H.

Più complesso è invece il procedimento inverso, di induzione, per cui da una rappresentazione di H se ne vuole ottenere una per G. Data una rappresentazione Y di H, si potrebbe provare a ottenere una rappresentazione di G semplicemente ponendo Y nulla fuori da H. Tuttavia questo non funzionerebbe in quanto le matrici devono essere non singolari. Di seguito forniamo la giusta definizione.

Definizione 1.9.2. Sia $H \leq G$ e prendiamo un sistema $\{t_1, ..., t_l\}$ di rappresentanti distinti per le classi laterali (sinistre) di H in G, cioè $G = \biguplus_i t_i H$. Se Y è una rappresentazione di H, si definisce la corrispondente *rappresentazione indotta* $Y\uparrow_H^G$ l'applicazione che ad ogni $g \in G$ assegna la matrice a blocchi

$$Y\uparrow_H^G (g) = (Y(t_i^{-1} g t_j)) = \begin{pmatrix} Y(t_1^{-1}gt_1) & Y(t_1^{-1}gt_2) & \dots & (t_1^{-1}gt_l) \\ Y(t_2^{-1}gt_1) & Y(t_2^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1}gt_1) & Y(t_l^{-1}gt_2) & \cdots & Y(t_l^{-1}gt_l) \end{pmatrix},$$

dove $Y(g)$ è nulla se $g \notin H$.

La definizione 1.9.2 è ben posta: potrebbe infatti sembrare che una rappresentazione indotta dipenda dalla scelta del sistema $\{t_1, ..., t_l\}$ di rappresentanti distinti per le classi laterali di H. Si dimostra tuttavia che, prendendo un altro insieme di rapprensentanti, si ottiene una rappresentazione equivalente alla prima. Inoltre si ha il seguente

Teorema 1.9.1. *Nelle ipotesi di 1.9.2, $X = Y\uparrow_H^G$ è una rappresentazione di G.*

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che ogni riga o colonna di $X(g)$ contiene esattamente un blocco non nullo $Y(t_i^{-1}gt_j)$. Consideriamo la colonna j-esima (gli altri casi sono analoghi). Basta far vedere che c'è un unico elemento di H fra tutti i $t_i^{-1}gt_j$, con $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Ma $gt_j \in t_i H$ per esattamente uno dei t_i, in quanto $\{t_1, ..., t_l\}$ è un sistema di rappresentanti distinti. Ora, segue direttamente dalla definizione di induzione che $X(\epsilon)$ è la matrice identità. Per dimostrare che $X(gh) = X(g)X(h)$ per ogni $g, h \in G$, consideriamo il blocco (i, j) da entrambi i lati. E' sufficiente mostrare che

$$\sum_k Y(t_i^{-1}gt_k)Y(t_k^{-1}ht_j) = Y(t_i ght_j). \tag{1.8}$$

Ponendo $a_k = t_i^{-1}gt_k$, $b_k = t_k^{-1}ht_j$ e $c = t_i^{-1}ght_j$, si ha $a_k b_k = c$ per ogni k. Allora (1.8) si riscrive come

$$\sum_k Y(a_k)Y(b_k) = Y(c).$$

Se $Y(c) = 0$, allora $c \notin H$, da cui a_k o $b_k \notin H$ per ogni k. Allora $Y(a_k)$ o $Y(b_k)$ è la matrice nulla per ogni k e abbiamo finito. Se $Y(c) \neq 0$, allora $c \in H$. Sia m l'unico indice per cui $a_m \in H$. Allora $b_m = a_m^{-1}c \in H$, da cui

$$\sum_k Y(a_k)Y(b_k) = Y(a_m)Y(b_m) = Y(a_m b_m) = Y(c),$$

dove si è usato che Y è una rappresentazione di H. $\square$

Riportiamo infine la seguente proposizione, di cui ci serviremo nel prossimo capitolo.

Proposizione 1.9.1. *Sia $H \leq G$. Sia $\{t_1, ..., t_l\}$ un sistema di rappresentanti distinti per le classi laterali (sinistre) di H in G, e $\mathcal{H} = \{t_1H, ..., t_lH\}$ l'insieme delle classi laterali corrispondente. Indichiamo con $Y = 1$ la rappresentazione banale di H. Allora $\mathbb{C}\mathcal{H}$ è un modulo per la rappresentazione indotta $1\uparrow_H^G$.*

Dimostrazione. Siano $X = (x_{i,j})$ e $Z = (z_{i,j})$ le matrici di $1\uparrow_H^G$ e $\mathbb{C}\mathcal{H}$ rispettivamente. Poiché si verifica che entrambe contengono soltanto zeri e uni, si conclude osservando che, per ogni $g \in G$,

$$x_{i,j}(g) = 1 \Leftrightarrow t_i^{-1}gt_j \in H \Leftrightarrow gt_jH = t_iH \Leftrightarrow z_{i,j}(g) = 1,$$

dove la prima equivalenza segue dalla definizione di rappresentazione indotta. $\square$

Capitolo 2

Rappresentazioni ordinarie del gruppo simmetrico

Lo scopo di questo capitolo è quello di costruire tutte le rappresentazioni ordinarie irriducibili del gruppo simmetrico. Il termine "ordinarie" si riferisce al fatto che il campo su cui lavoriamo è quello complesso (o qualsiasi campo algebricamente chiuso di caratteristica 0). Nel capitolo 1 abbiamo constatato che il numero di tali rappresentazioni a due a due non equivalenti è uguale al numero delle classi di coniugio del gruppo, che, nel caso di $\mathcal{S}_n$, equivale al numero di partizioni di n. Per questa ragione il nostro interesse si focalizzerà proprio sulle partizioni λ di n, da cui ricaveremo tutti gli $\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili corrispondenti, i cosiddetti moduli di Specht S^λ.

2.1 Prime definizioni

Iniziamo col fornire le prime definizioni necessarie al nostro studio: quelle di sottogruppi di Young, tabelle di Young e λ-tabloidi.

Notazione 2.1.1. Se λ è una partizione di n, scriviamo $\lambda \vdash n$.

Definizione 2.1.1. Sia $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l\} \vdash n$. Si definisce *diagramma di Ferrers*, o *forma*, di λ una tabella di n punti avente l righe allineate sulla sinistra, dove la riga i-esima contiene λ_i punti, per $i \in \{1, 2, .., l\}$. Il simbolo λ indicherà sia la partizione che la sua forma.

Si dice che il punto nella riga i e colonna j ha coordinate (i, j).

Esempio 2.1.1. $\lambda = \{3, 2, 2\} \vdash 7$ ha diagramma di Ferrers

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \end{array}$$

Notazione 2.1.2. Se A è un insieme, $\mathcal{S}_A$ indica l'insieme di tutte le permutazioni di A.

Vediamo ora come associare un sottogruppo di $\mathcal{S}_n$ ad ogni partizione $\lambda \vdash n$.

Definizione 2.1.2. Sia $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l\} \vdash n$. Si definisce *sottogruppo di Young* associato a λ

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\{1,2,...,\lambda_1\}} \times \mathcal{S}_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,...,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,...,n\}}.$$

In generale, $\mathcal{S}_{(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_l)} \cong \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \mathcal{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_l}$ come gruppi.

Esempio 2.1.2. Considerando ancora la partizione $\lambda = (3, 2, 2) \vdash 7$,

$$\mathcal{S}_{(3,2,2)} = \mathcal{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{4,5\}} \times \mathcal{S}_{\{6,7\}} \cong \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2.$$

Definizione 2.1.3. Data una partizione $\lambda \vdash n$, si definisce *tabella di Young di forma* λ una tabella t ottenuta dal diagramma di Ferrers di λ sostituendo i punti con gli interi senza ripetizioni $1, 2, ..., n$.

Una tabella di Young di forma λ si chiama anche λ-tabella, e si indica con t^λ. Equivalentemente, scriviamo $\mathrm{sh}t = \lambda$.

L'elemento di t nella posizione (i, j) si indica con $t_{i,j}$.

Osservazione 2.1.1. Ci sono esattamente $n!$ tabelle di Young di forma $\lambda \vdash n$.

Esempio 2.1.3. Sia $\lambda = (2, 1) \vdash 3$. Tutte le possibili λ-tabelle sono $3! = 6$; le elenchiamo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}.$$

E' possibile definire una relazione di equivalenza fra tabelle di Young della stessa forma, le cui classi costituiscono quelli che si chiamano λ- tabloidi.

Definizione 2.1.4. Date due λ-tabelle t_1 e t_2, esse sono *equivalenti per righe*, $t_1 \sim t_2$, se le righe corrispondenti delle due tabelle contengono gli stessi elementi. Data una tabella t^λ, si definisce *tabloide di forma* λ, o λ*-tabloide*, la sua classe di equivalenza per righe

$$\{t\} = \{t_1 : t_1 \sim t\}.$$

Per differenziare graficamente tabloidi e tabelle, per i primi si utilizzano soltanto le linee orizzontali. Vediamo subito un esempio.

Esempio 2.1.4. Se

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},$$

allora

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \right\} = \begin{array}{cc}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}.$$

Osservazione 2.1.2. Fissata $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) \vdash n$, il numero di λ-tabelle in ogni classe di equivalenza per righe è $\lambda_1!\lambda_2! \cdots \lambda_l! := \lambda!$. Perciò il numero totale di λ-tabloidi è $n!/\lambda!$.

2.2 Il modulo di permutazione M^λ

Come vedremo, ogni modulo di Specht S^λ è sottomodulo del cosiddetto modulo di permutazione corrispondente a λ, M^λ. In questo paragrafo, dopo aver definito M^λ, dimostreremo che esso è di fatto la rappresentazione indotta $1\uparrow_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n}$.

Inoltre troveremo un ordine $\lambda^1, \lambda^2, ...$ su tutte le partizioni di n con la seguente proprietà. Il primo modulo M^{λ^1} è irriducibile, chiamamolo S^{λ^1}. Il secondo, M^{λ^2}, contiene solo copie di S^{λ^1} più una singola copia di un nuovo irriducibile S^{λ^2}. Così, in generale, M^{λ^i} conterrà alcune copie dei moduli precedenti e un unico nuovo irriducibile S^{λ^i}, che è proprio l'i-esimo modulo di Specht.

Prima di tutto definiamo un'azione di $\mathcal{S}_n$ sulle tabelle di forma $\lambda \vdash n$ nel modo che segue.

Definizione 2.2.1. Se $\pi \in \mathcal{S}_n$ e $t = (t_{i,j})$ è una tabella di forma $\lambda \vdash n$,

$$\pi t = (\pi t_{i,j}).$$

Esempio 2.2.1.

$$(2,3,1,4)\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Questo induce un'azione sui tabloidi:

$$\pi\{t\} = \{\pi t\}.$$

Si verifica facilmente che tale azione è ben definita, cioè è independente dalla scelta del rappresentante t della classe di equivalenza $\{t\}$.

Definizione 2.2.2. Sia $\lambda \vdash n$.

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\{t_1\}}, ..., \boldsymbol{\{t_k\}}\},$$

dove $\{t_1\}, ..., \{t_k\}$ è una lista completa di λ-tabloidi, è un $\mathcal{S}_n$-modulo con l'azione definita in 2.2.1, detto *modulo di permutazione corrispondente a* λ.

Abbiamo già incontrato alcuni di questi moduli, ma sotto altre spoglie.

Esempio 2.2.2. Se $\lambda = (n)$,

$$M^{(n)} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\{t\}}\},$$

dove $\boldsymbol{\{t\}} = \begin{array}{c}\hline \mathbf{1\ 2\ \cdots\ n} \\ \hline \end{array}$ è l'unico tabloide di forma λ. Si ha

$$\pi\boldsymbol{\{t\}} = \boldsymbol{\{\pi t\}} = \boldsymbol{\{t\}}$$

per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$. Dunque abbiamo ritrovato la rappresentazione banale.

Esempio 2.2.3. Se $\lambda = (n-1,1)$, ogni λ-tabloide è univocamente determinato dall'unico elemento nella seconda riga, che varia fra 1 e n. E' facile verificare il seguente isomorfismo fra moduli

$$M^{(n-1,1)} \cong \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{n}\},$$

cioè $M^{(n-1,1)}$ è la rappresentazione di definizione.

Definizione 2.2.3. Un G-modulo V si dice *ciclico* se esiste $\mathbf{v} \in V$ tale che

$$V = \mathbb{C}G\mathbf{v} := \mathbb{C}\{g\mathbf{v} : g \in G\}.$$

In tal caso si dice che V è *generato da* $\mathbf{v}$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $\lambda \vdash n$. M^λ è ciclico ed è generato da un qualsiasi λ-tabloide. Inoltre $dimM^\lambda = n!/\lambda!$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \vdash n$. Ogni λ-tabloide può essere ottenuto da un qualsiasi altro della stessa forma attraverso qualche permutazione. Perciò fissato un qualsiasi tabloide $\boldsymbol{\{t^\lambda\}}$, si ha che $M^\lambda = \mathbb{C}\{\pi\boldsymbol{\{t^\lambda\}} : \pi \in \mathcal{S}_n\}$, cioè M^λ è ciclico, generato da $\boldsymbol{\{t^\lambda\}}$. Infine, dall'osservazione 2.1.2 sappiamo che il numero dei λ-tabloidi è $n!/\lambda!$, da cui $dimM^\lambda = n!/\lambda!$. □

Ora siamo in grado di provare l'equivalenza fra M^λ e $1\uparrow_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n}$. Consideriamo un sistema $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k\}$ di rappresentanti distinti per le classi laterali di $\mathcal{S}_\lambda$ in $\mathcal{S}_n$. Allora dalla proposizione 1.9.1 si ha che

$$V^\lambda = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\pi_1\mathcal{S}_\lambda}, \boldsymbol{\pi_2\mathcal{S}_\lambda}, ..., \boldsymbol{\pi_k\mathcal{S}_\lambda}\}$$

è un modulo per $1\uparrow_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n}$.

E' possibile interpretare

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\{1,2,...,\lambda_1\}} \times \mathcal{S}_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,...,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,...,n\}}$$

come il tabloide

$$\{t^\lambda\} = \begin{array}{llll} \hline 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \cdots & \lambda_1+\lambda_2 \\ \hline & \vdots & & \\ \cline{1-3} n-\lambda_l+1 & \cdots & n & \\ \cline{1-3} \end{array}.$$

Questo perché il fatto che $\mathcal{S}_\lambda$ contiene tutte le permutazioni di un certo intervallo di interi si traduce nel fatto che l'ordine di tali interi non conta in $\{t^\lambda\}$, dato che essi si trovano tutti nella stessa riga. In questo modo la classe laterale $\pi\mathcal{S}_\lambda$ corrisponde al tabloide $\{\pi t^\lambda\}$ e si ha il seguente

Teorema 2.2.1. *Sia* $\lambda \vdash n$. *Sia* $\{t^\lambda\}$ *il tabloide associato al sottogruppo di Young* $\mathcal{S}_\lambda$, *attraverso la corrispondenza di sopra. Allora i moduli* $V^\lambda = \mathbb{C}\mathcal{S}_n\boldsymbol{\mathcal{S}_\lambda}$ *e* $M^\lambda = \mathbb{C}\mathcal{S}_n\boldsymbol{\{t^\lambda\}}$ *sono* $\mathcal{S}_n$*-isomorfi.*

Dimostrazione. Si prenda un sistema $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k\}$ di rappresentanti distinti per le classi laterali di $\mathcal{S}_\lambda$ in $\mathcal{S}_n$. Allora l'estensione lineare della mappa

$$\begin{aligned} \theta : V^\lambda &\longrightarrow M^\lambda \\ \boldsymbol{\pi_i \mathcal{S}_\lambda} &\longmapsto \boldsymbol{\pi_i\{t^\lambda\}}, \end{aligned}$$

dove $i = 1, ..., k$, è un $\mathcal{S}_n$-isomorfismo. Infatti per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$ e per ogni $i \in \{1, ..., k\}$

$$\theta(\pi\boldsymbol{\pi_i\mathcal{S}_\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\pi_j\mathcal{S}_\lambda}) = \boldsymbol{\pi_j\{t^\lambda\}} = \boldsymbol{\{\pi_j t^\lambda\}} = \boldsymbol{\{\pi\pi_i t^\lambda\}} = \pi\boldsymbol{\{\pi_i t^\lambda\}} = \pi\theta(\boldsymbol{\pi_i\mathcal{S}_\lambda})$$

dove nella prima uguaglianza $j \in \{1, 2, ..., k\}$ è tale che $\pi\pi_i = \pi_j$. Infine θ è banalmente iniettiva e suriettiva. □

Ordini di dominanza e lessicografico

Come accennato all'inizio del paragrafo, vogliamo trovare un ordine sulle partizioni di n che abbia una certa proprietà. Ricordiamo perciò che cosa si intende per ordini parziale e totale su un insieme.

Definizione 2.2.4. Un *ordine parziale su un insieme* A è una relazione $\leq$ tale che

1. $a \leq a$;
2. $(a \leq b$ e $b \leq a) \Rightarrow a = b$;
3. $(a \leq b$ e $b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

per ogni a, b e $c \in A$. Si dice che $(A, \leq)$ è un *insieme parzialmente ordinato*. Scriviamo anche $b \geq a$ per indicare che $a \leq b$; e $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$. Se inoltre per ogni coppia di elementi $a, b \in A$ si ha $a \leq b$ o $b \leq a$, allora $\leq$ è un *ordine totale* e $(A, \leq)$ si dice *insieme totalmente ordinato*.

Introduciamo due ordini sull'insieme delle partizioni di n. Il primo è quello di dominanza, che è un ordine parziale.

Definizione 2.2.5. Siano $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l), \mu = (\mu_1, ..., \mu_k) \vdash n$. Allora $\lambda \leq \mu$ nell'*ordine di dominanza*, scriviamo $\lambda \trianglelefteq \mu$, se

$$\lambda_1 + ... + \lambda_i \leq \mu_1 + ... + \mu_i$$

per ogni $i \geq 1$ (se $i > l$, o $i > k$, si prende λ_i, o μ_i, uguale a 0).

Il secondo ordine, che è invece totale, può essere visto come un raffinamento del primo, nel senso della proposizione 2.2.2.

Definizione 2.2.6. Siano $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l), \mu = (\mu_1, ..., \mu_k) \vdash n$. Allora $\lambda < \mu$ nell'*ordine lessicografico* se esiste un indice i tale che

$$\lambda_j = \mu_j \text{ per ogni } j < i \text{ e } \lambda_i < \mu_i.$$

Proposizione 2.2.2. *Siano $\lambda, \mu \vdash n$. Allora $\lambda \trianglerighteq \mu \Rightarrow \lambda \geq \mu$.*

Dimostrazione. Se $\lambda = \mu$ abbiamo finito. Se $\lambda \neq \mu$, si consideri il primo indice i in cui essi differiscono. Allora $\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j$ e, poiché $\lambda \trianglerighteq \mu$, $\sum_{j=1}^{i} \lambda_j > \sum_{j=1}^{i} \mu_j$. Dunque $\lambda_i > \mu_i$. □

L'ordine lessicografico è l'ordine che stavamo cercando. Partendo dalla partizione massima e procedendo in maniera decrescente, si ha che il primo modulo è $M^{(n)}$, che in effetti è irriducibile, come mostrato nell'esempio 2.2.2. Tuttavia, grazie alla proposizione 2.2.2, preferiremo utilizzare l'ordine di dominanza, al fine di ottenere risultati più generali.

2.3 I moduli di Specht

Prima di poter finalmente definire i moduli di Specht, fissiamo alcune notazioni.

Notazione 2.3.1. Sia t una tabella di Young con righe $R_1, R_2, ..., R_l$ e colonne $C_1, C_2, ..., C_k$. Indichiamo con

$$R_t = \mathcal{S}_{R_1} \times \mathcal{S}_{R_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{R_l} \quad \text{e} \quad C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \mathcal{S}_{C_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}.$$

Esempio 2.3.1. Se

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},$$

allora $R_t = \mathcal{S}_{\{1,3\}} \times \mathcal{S}_{\{2\}}$ e $C_t = \mathcal{S}_{\{2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{1\}}$.

Osservazione 2.3.1. Data una tabella t, si ha che $\{t\} = R_t t$.

Notazione 2.3.2. Sia $H \subseteq \mathcal{S}_n$. Poniamo

$$H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi \quad \text{e} \quad H^- = \sum_{\pi \in H} \operatorname{sgn}(\pi)\pi.$$

Ci serviremo inoltre della somma

$$k_t := C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} \operatorname{sgn}(\pi)\pi.$$

Osservazione 2.3.2. Se la tabella t ha colonne $C_1, C_2, ..., C_k$, allora si ha

$$k_t = k_{C_1} k_{C_2} \cdots k_{C_k},$$

dove $k_{C_i} = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{C_i}} \operatorname{sgn}(\pi)\pi$.

Ad ogni λ-tabella t si può associare un elemento di M^λ tramite la definizione seguente.

Definizione 2.3.1. Si definisce *politabloide* associato alla tabella t

$$\boldsymbol{e_t} = k_t \{\boldsymbol{t}\}.$$

Esempio 2.3.2. Consideriamo la tabella dell'esempio 2.3.1,

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Allora

$$k_t = k_{C_1} k_{C_2} = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{\{2,3\}}} \operatorname{sgn}(\pi)\pi \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{\{1\}}} \operatorname{sgn}(\pi)\pi = (\epsilon - (2,3))\epsilon = \epsilon - (2,3),$$

da cui

$$\boldsymbol{e_t} = \begin{array}{cc} \hline \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{2} & \\ \cline{1-1} \end{array} - \begin{array}{cc} \hline \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{3} & \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{cc} \hline \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{2} & \\ \cline{1-1} \end{array} - \begin{array}{cc} \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3} & \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Definizione 2.3.2. Sia $\lambda \vdash n$. Il corrispondente *modulo di Specht*, S^λ, è il sottomodulo di M^λ generato (come sottospazio) dai politabloidi $\boldsymbol{e_t}$, dove $\operatorname{sh} t = \lambda$.

Proposizione 2.3.1. *I moduli S^λ sono ciclici, generati da un qualsiasi politabloide.*

Dimostrazione. Abbiamo bisogno del lemma seguente.

Lemma 2.3.1. *Per ogni λ-tabella t e per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$ vale*

1. $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$;
2. $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$;
3. $k_{\pi t} = \pi k_t \pi^{-1}$;
4. $\boldsymbol{e_{\pi t}} = \pi \boldsymbol{e_t}$.

Allora dal punto 4 del lemma segue che, se $\boldsymbol{e_t}$ è un qualsiasi politabloide fissato, $S^\lambda = \mathbb{C}\{\pi \boldsymbol{e_t} : \pi \in \mathcal{S}_n\} = \mathbb{C}\mathcal{S}_n \boldsymbol{e_t}$. $\square$

Esempio 2.3.3. Nell'esempio 1.6.4 abbiamo trovato la tabella dei caratteri di $\mathcal{S}_3$, e quindi anche tutti gli $\mathcal{S}_3$-moduli irriducibili a due a due non equivalenti, dato che i caratteri identificano univocamente i moduli. Verificando che essi sono effettivamente dei moduli di Specht S^λ, per qualche $\lambda \vdash 3$, avremo raggiunto il nostro scopo almeno nel caso $n = 3$.

In generale, se $\lambda = (n)$, nell'esempio 2.2.2 abbiamo visto che $M^{(n)}$ è la rappresentazione banale. $S^{(n)}$ è generato dall'unico politabloide

$$\boldsymbol{e_t} = \frac{\overline{\;\mathbf{1}\ \mathbf{2}\ \cdots\ \boldsymbol{n}\;}}{}\,,$$

da cui $dim S^{(n)} = 1$ e l'unica possibilità è che $S^{(n)}$ coincida con $M^{(n)}$ stesso. Abbiamo così mostrato che il primo $\mathcal{S}_3$-modulo irriducibile, quello banale, è un modulo di Specht.

Vediamo ora come ottenere la rappresentazione del segno. Sia $\lambda = (1^n)$ e si prenda

$$t = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}\,.$$

Se dimostriamo che

$$S^{(1^n)} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{e_t}\},$$

con l'azione $\pi \boldsymbol{e_t} = (sgn\pi)\boldsymbol{e_t}$, abbiamo finito.

In effetti, per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$, si ha

$$\boldsymbol{e_{\pi t}} = \pi \boldsymbol{e_t} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\mathrm{sgn}\sigma)\pi\sigma\{\boldsymbol{t}\} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} (\mathrm{sgn}\pi^{-1}\tau)\tau\{\boldsymbol{t}\} = (\mathrm{sgn}\pi)\boldsymbol{e_t}, \tag{2.1}$$

dove la prima uguaglianza segue dal punto 4 del lemma 2.3.1 e l'ultima dal fatto che $\mathrm{sgn}\pi^{-1}$=$\mathrm{sgn}\pi$. (2.1) dimostra che ogni politabloide è un multiplo scalare di $\boldsymbol{e_t}$ e che l'azione è quella del segno. Abbiamo così ottenuto anche il secondo $\mathcal{S}_3$-modulo irriducibile.

Infine, sia $\lambda = (n-1, 1)$. Usiamo l'isomorfismo dell'esempio 2.2.3 per esprimere ogni λ-tabloide come

$$\{\boldsymbol{t}\} = \begin{array}{l} \overline{\;\mathbf{i}\ \ \cdots\ \ \mathbf{j}\;} \\ \overline{\;\mathbf{k}\;} \end{array} = \mathbf{k}.$$

Allora il politabloide corrispondente è $\boldsymbol{e_t} = k_t\{\boldsymbol{t}\} = (-(i,k) + \epsilon)\{\boldsymbol{t}\} = \mathbf{k} - \mathbf{i}$, e $S^{(n-1,1)}$ è generato dai politabloidi di questo tipo, con $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \mathbf{n}$ e $\mathbf{k} \neq \mathbf{i}$. Segue che

$$S^{(n-1,1)} = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + ... + c_n\mathbf{n} : c_1 + c_2 + ... + c_n = 0\},$$

da cui $dim S^{(n-1,1)} = n - 1$. Scegliendo una base per questo modulo, ad esempio

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}, ..., \mathbf{n} - \mathbf{1}\},$$

è possibile calcolare l'azione di $\pi \in \mathcal{S}_n$ su tale base. Si dimostra che i caratteri corrispondenti sono uguali al numero di punti fissi di π meno uno. Per esempio, se $\pi = (2,3)$, allora

$$X(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

e il carattere associato è $\chi(\pi) = n-3 = (n-2)-1$. In effetti il numero dei punti fissi di π è proprio $n-2$. Abbiamo cioè ritrovato il modulo descritto alla fine dell'esempio 1.6.4, che, per $n = 3$, è il terzo irriducibile.

Nel paragrafo successivo dimostreremo che i moduli di Specht sono irriducibili per ogni n. Non solo: proveremo che essi rappresentano tutti gli $\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili a due a due non equivalenti. Questo ci sarà possibile grazie al teorema del sottomodulo.

2.4 Il teorema del sottomodulo

Consideriamo il prodotto interno su M^λ definito come

$$\langle \{\boldsymbol{t}\}, \{\boldsymbol{s}\} \rangle = \boldsymbol{\delta}_{\{t\},\{s\}}$$

ed esteso per linearità a tutto M^λ.

Lemma 2.4.1 (del Segno)**.** *Sia $H \leq \mathcal{S}_n$.*

1. *Per ogni $\pi \in H$*
$$\pi H^- = H^- \pi = (\mathrm{sgn}\pi) H^-.$$

2. *Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M^\lambda$,*
$$\langle H^-\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, H^-\mathbf{v} \rangle.$$

3. *Se $(b,c) \in H$, allora esiste $k \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ tale che*
$$H^- = k(\epsilon - (b,c)).$$

4. *Sia t una tabella. Se $(b,c) \in H$ è una trasposizione tale che b,c sono nella stessa riga di t, allora*
$$H^-\{\boldsymbol{t}\} = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. 1. Per ogni $\pi \in H$ si ha

$$\pi H^- = \sum_{\sigma \in H} (\mathrm{sgn}\sigma)\pi\sigma = \sum_{\tau \in H} (\mathrm{sgn}\pi^{-1}\tau)\tau = (\mathrm{sgn}\pi^{-1})H^- = (\mathrm{sgn}\pi)H^-.$$

2. Si osservi che il nostro prodotto interno è invariante sotto l'azione di $\mathcal{S}_n$, da cui

$$\langle H^-\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{\pi \in H} \langle (\mathrm{sgn}\pi)\pi\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{\pi \in H} \langle \mathbf{u}, (\mathrm{sgn}\pi)\pi^{-1}\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, H^-\mathbf{v}\rangle,$$

   dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito π^{-1} con π.

3. Se $(b,c) \in H$, allora l'insieme $K = \{\epsilon, (b,c)\}$ è un sottogruppo di H. Prendendo un sistema $\{k_1, ..., k_n\}$ di rapprensentanti distinti per le classi laterali di K in H, è possibile scrivere $H = \biguplus_i k_i K$. Allora $H^- = (\sum_i k_i^-)(\epsilon - (b,c))$, dove $\sum_i k_i^- \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$.

4. Poiché b, c sono nella stessa riga di t, si ha $(b,c)\{\boldsymbol{t}\} = \{\boldsymbol{t}\}$. Allora

$$H^-\{\boldsymbol{t}\} \overset{(3)}{=} k(\epsilon - (b,c))\{\boldsymbol{t}\} = k(\{\boldsymbol{t}\} - \{\boldsymbol{t}\}) = \mathbf{0}.$$

$\square$

Riportiamo, senza dimostrare, un utile corollario del lemma del segno.

Corollario 2.4.1. *Siano $t = t^\lambda$ e $s = s^\mu$ due tabelle, dove $\lambda, \mu \vdash n$. Se $k_t\{\boldsymbol{s}\} \neq \mathbf{0}$, allora $\lambda \trianglerighteq \mu$. Inoltre, se $\lambda = \mu$, allora $k_t\{\boldsymbol{s}\} = \pm\boldsymbol{e_t}$.*

Esso ha un'immediata conseguenza.

Corollario 2.4.2. *Si considerino $\mathbf{u} \in M^\lambda$ e t una λ-tabella. Allora $k_t\mathbf{u}$ è un multiplo scalare di $\boldsymbol{e_t}$.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere $\mathbf{u} = \sum_i c_i\{s_i\}$, dove gli s_i sono λ-tabelle. Dal corollario 2.4.1 segue che $k_t\mathbf{u} = \sum_i \pm c_i\boldsymbol{e_t}$. $\square$

Siamo ora in possesso di tutti gli strumenti sufficienti a dimostrare il teorema del sottomodulo.

Teorema 2.4.1 (del sottomodulo)**.** *Sia U un sottomodulo di M^λ. Allora $U \supseteq S^\lambda$ oppure $U \subseteq S^{\lambda\perp}$, dove il complemento ortogonale è preso rispetto al prodotto interno definito all'inizio del paragrafo.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u} \in U$ e t una λ-tabella. Allora per il corollario 2.4.2 esiste uno scalare c tale che $k_t\mathbf{u}= c\boldsymbol{e_t}$. Dividiamo la dimostrazione in due casi.

Supponiamo che esistano una $\mathbf{u}$ ed una t tali per cui $c \neq 0$. Poiché U è un sottomodulo, si ha $c\boldsymbol{e_t} = k_t\mathbf{u} \in U$, da cui, essendo $c \neq 0$, $\boldsymbol{e_t} \in U$. Ma poiché S^λ è ciclico, generato da $\boldsymbol{e_t}$, segue che $S^\lambda \subseteq U$.

Consideriamo ora il caso in cui c è sempre uguale a zero, cioè $k_t\mathbf{u}= \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{u} \in U$ e per ogni λ-tabella t. Prendendo una $\mathbf{u}$ ed una t qualsiasi, vale

$$\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{e_t} \rangle = \langle \mathbf{u}, k_t\boldsymbol{\{t\}} \rangle = \langle k_t\mathbf{u}, \boldsymbol{\{t\}} \rangle = \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{\{t\}} \rangle = \mathbf{0},$$

dove nella seconda uguaglianza è stato usato il punto 2 del lemma del segno. Poiché S^λ è generato dai politabloidi $\boldsymbol{e_t}$, $\mathbf{u} \in S^{\lambda\perp}$. Si conclude che $U \subseteq S^{\lambda\perp}$. □

Il lemma del segno ed il teorema del sottomodulo valgono più in generale su un qualsiasi campo arbitrario, con l'unica accortezza di sostituire il prodotto interno utilizzato finora con una forma bilineare. E' soltanto da questo momento che avremo invece strettamente bisogno dell'ipotesi che il campo sia complesso (o comunque di caratteristica 0).

Proposizione 2.4.1. *Supponiamo che il campo degli scalari sia $\mathbb{C}$ e che $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$ sia non nulla, dove $\lambda, \mu \vdash n$. Allora $\lambda \trianglerighteq \mu$. Inoltre, se $\lambda = \mu$, θ è una moltiplicazione per scalare.*

Dimostrazione. Poiché siamo su $\mathbb{C}$, si ha che $M^\lambda = S^\lambda \oplus S^{\lambda\perp}$. Allora possiamo estendere θ a un elemento di $Hom(M^\lambda, M^\mu)$ ponendo θ uguale a 0 su $S^{\lambda\perp}$. Inoltre, essendo θ non nulla, deve esistere qualche $\boldsymbol{e_t}$ generatore di S^λ tale che θ non si annulli in quel politabloide. Perciò

$$\mathbf{0} \neq \theta(\boldsymbol{e_t}) = \theta(k_t\boldsymbol{\{t\}}) = k_t\theta(\boldsymbol{\{t\}}) = k_t(\sum_i c_i\boldsymbol{\{s_i\}}),$$

dove ogni $c_i \in \mathbb{C}$ e gli s_i sono μ-tabelle. Dal corollario 2.4.1 si conclude che $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Se $\lambda = \mu$, per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$ si ha

$$\theta(\boldsymbol{e_{\pi t}}) = \theta(\pi\boldsymbol{e_t}) = \pi\theta(\boldsymbol{e_t}) = \pi(c\boldsymbol{e_t}) = c\boldsymbol{e_{\pi t}},$$

dove la penultima uguaglianza è una conseguenza del corollario 2.4.2. □

Abbiamo finalmente raggiunto il nostro obiettivo:

Teorema 2.4.2. *I moduli di Specht S^λ, con $\lambda \vdash n$, formano una lista completa di $\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili sul campo complesso.*

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che ogni S^λ è irriducibile. Sia $U \subseteq M^\lambda$ un sottomodulo di S^λ; vogliamo dimostrare che U è un sottomodulo banale. Se $U = S^\lambda$ abbiamo finito. Altrimenti, dal teorema del sottomodulo deve essere $U \subseteq S^{\lambda\perp}$. Ma allora $U \subseteq S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Dal teorema 1.8.2, sappiamo che il numero di classi di isomorfismo di $\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili è uguale al numero di partizioni di n. Perciò è sufficiente mostrare che gli S^λ sono a due a due non equivalenti. Ma se $S^\lambda \cong S^\mu$, allora esiste un omomorfismo non nullo $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$, perciò dalla proposizione 2.4.1 segue che $\lambda \trianglerighteq \mu$. Con un ragionamento analogo si ottiene $\mu \trianglerighteq \lambda$, da cui $\lambda = \mu$. □

Corollario 2.4.3. *Il modulo di permutazione si decompone come*

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$$

con $m_{\mu\mu} = 1$.

Dimostrazione. Ci serviamo del seguente risultato.

Proposizione 2.4.2. *Se V e W sono due G-moduli, con V irriducibile, allora $dimHom(V, W)$ è uguale alla molteplicità di V in W.*

Se S^λ compare nella decomposizione di M^μ con una molteplicità non nulla, dalla proposizione 2.4.1 segue che $\lambda \trianglerighteq \mu$. Se $\lambda = \mu$, utilizziamo la proposizione 2.4.2:

$$m_{\mu\mu} = dimHom(S^\mu, M^\mu) = 1,$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che ogni elemento di $Hom(S^\mu, M^\mu)$ è una moltiplicazione per scalare (segue ancora da proposizione 2.4.1). □

2.5 Una base per S^λ

Solitamente, i politabloidi che generano i moduli di Specht non sono linearmente indipendenti. Per ottenere una base per S^λ, dobbiamo definire un certo tipo di λ-tabelle.

Definizione 2.5.1. Una tabella si dice *standard* se gli elementi sono strettamente crescenti nelle righe e nelle colonne. I corrispondenti tabloidi e politabloidi si dicono anch'essi *standard*.

Esempio 2.5.1. Per esempio, la tabella

1	2	3
4	5	

è standard, mentre

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

non lo è, dato che gli elementi nella prima riga non sono crescenti.

Notazione 2.5.1. Data $\lambda \vdash n$, si indica con f^λ il numero di λ-tabelle standard.

In questa trattazione ci limitiamo soltanto ad enunciare il teorema che segue; per una dimostrazione approfondita si consultino i paragrafi 2.5 e 2.6 del [Sag].

Teorema 2.5.1. *Sia $\lambda \vdash n$. Allora l'insieme dei politabloidi standard*

$$\{\boldsymbol{e_t} : \ t \text{ è una } \lambda\text{- tabella standard}\}$$

costituisce una base per S^λ.

Corollario 2.5.1. *Sia $\lambda \vdash n$. Allora*

1. *$dim S^\lambda = f^\lambda$;*
2. *$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$.*

Dimostrazione. La prima parte è un'immediata conseguenza del teorema 2.5.1. Per la seconda, basta ricordare che

$$\sum_i (dim U_i)^2 = |G|,$$

dove gli U_i sono tutte le classi di isomorfismo di G-moduli irriducibili (paragrafo 1.8). □

Concludiamo il secondo capitolo con una pratica (e curiosa!) formula per calcolare f^λ, detta formula dell'uncino.

Definizione 2.5.2. Sia $v = (i, j)$ un punto del diagramma di Ferrers di $\lambda \vdash n$. Si definisce *uncino* di v l'insieme

$$H_v = H_{i,j} = \{(i, j') : j' \geq j\} \cup \{(i', j) : i' \geq i\},$$

e la corrispondente *lunghezza dell'uncino* come

$$h_v = h_{i,j} = |H_{i,j}|.$$

Esempio 2.5.2. $\lambda = (3, 3, 2) \vdash 8$ ha diagramma di Ferrers

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \end{array},$$

dove abbiamo contrassegnato con dei cerchietti vuoti l'uncino $H_{1,2}$, da cui la corrispondente lunghezza $h_{1,2} = 4$.

Teorema 2.5.2 (Formula dell'uncino). *Se* $\lambda \vdash n$, *si ha*

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}}.$$

Capitolo 3

Rappresentazioni modulari del gruppo simmetrico

Abbiamo visto che il teorema di Maschke è valido su un qualsiasi campo algebricamente chiuso di caratteristica nulla o prima con l'ordine del gruppo. In questo capitolo ci chiediamo che cosa accada invece quando la caratteristica del campo divide $|G|$. Tale quesito dà luogo alla teoria della rappresentazione modulare, per la quale otterremo risultati diversi, ma che in un certo senso ci ricordano quelli della rappresentazione ordinaria. In particolare, ci concentreremo ancora sul gruppo simmetrico, con l'intenzione di scoprire chi sono in questo caso gli $\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili.

3.1 Classi di coniugio e partizioni p-regolari

Notazione 3.1.1. Indichiamo con F un qualsiasi campo algebricamente chiuso con $car(F) \nmid |G|$, e con K un qualsiasi campo algebricamente chiuso con $car(K) \mid |G|$. Siano inoltre $p = car(K)$ ed $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che $p \leq n < car(F)$.

Vedremo che gli elementi del gruppo rilevanti nel determinare i KG-moduli irriducibili sono quelli di ordine primo con p.

Definizione 3.1.1. Sia G un gruppo. Un elemento di G è detto *p-regolare* se ha ordine primo con p. L'insieme di tutti gli elementi di G p-regolari si indica con G_{reg}. Inoltre, si definisce *classe di coniugio p-regolare* la classe di coniugio di un elemento p-regolare.

Osservazione 3.1.1. Si osservi che la definizione di classe di coniugio p-regolare è ben posta dal momento in cui due elementi di una stessa classe di coniugio condividono lo stesso ordine.

Le classi di coniugio p-regolari di $\mathcal{S}_n$ sono in qualche modo legate a quelle che si chiamano partizioni p-regolari di n.

Definizione 3.1.2. Si scriva una partizione $\lambda \vdash n$ come la sua struttura ciclica corrispondente

$$\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n}),$$

ricordando che m_i indica il numero di parti lunghe i in λ. Diciamo che λ è p-regolare se $m_i < p$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$.

Notazione 3.1.2. Se $\mathcal{P}_n$ denota l'insieme delle partizioni di n, denotiamo con $\mathcal{P}_{n,p}$ l'insieme delle partizioni di n p-regolari.

Contrariamente a quanto i termini possano suggerire, le partizioni p-regolari di n non corrispondono alle strutture cicliche delle classi di coniugio p-regolari di $\mathcal{S}_n$, ma si ha la seguente

Proposizione 3.1.1. *Il numero di classi di coniugio p-regolari di $\mathcal{S}_n$ è $|\mathcal{P}_{n,p}|$.*

Per dimostrarla ci serviamo del risultato che segue.

Proposizione 3.1.2. *Sia*

$$p(n) = \begin{cases} 1 & se \;\; n = 0 \\ |\mathcal{P}_n| & se \;\; n \geq 1. \end{cases}$$

Allora

$$\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n}) \vdash n$, con $\sum_{i \geq 1} i m_i = n$. Si ha che

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i} = (1 + x + x^2 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...) + ... = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i + x^{2i} + ...).$$

Allora

$$\text{il coefficiente del termine } x^n \text{ di } \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i} = \text{numero di modi di ottenere } x^n \text{ in}$$

$$\prod_{i \geq 1} (1 + x^i + x^{2i} + ...) = \text{numero di modi di scrivere } n \text{ come} \sum_{i \geq 1} i m_i = p(n).$$

□

Dimostrazione (della proposizione 3.1.1). Si consideri la frazione

$$\frac{\prod_{i \geq 1} (1 - x^{pi})}{\prod_{i \geq 1} (1 - x^i)} = \frac{1}{\prod_{p \nmid i} (1 - x^i)} = \prod_{p \nmid i} \frac{1}{(1 - x^i)},$$

dove nel primo passaggio abbiamo semplificato tutti i fattori $(1 - x^{pi})$ per $i \geq 1$ del numeratore. Allora dalla proposizione 3.1.2 si evince che il coefficiente del termine x^n è il numero di partizioni di n tali che nessuna parte sia divisibile per p. Vogliamo far vedere che questo è esattamente il numero di classi di coniugio p-regolari di $\mathcal{S}_n$. In effetti, una classe di coniugio è p-regolare se e solo se nella notazione ciclica di ogni elemento di quella classe non compare nessun ciclo di lunghezza divisibile per p. Ciò equivale proprio a dire che la partizione corrispondente non ha nessuna parte divisibile per p.

Ora, si consideri la frazione di partenza e si divida $(1 - x^{pi})$ per $(1 - x^i)$, ottenendo

$$\frac{\prod_{i\geq 1}(1 - x^{pi})}{\prod_{i\geq 1}(1 - x^i)} = \prod_{i\geq 1}(1 + x^i + x^{2i} + ... + x^{(p-1)i}).$$

Il coefficiente del termine x^n nel prodotto a destra è il numero di partizioni di n con al massimo $p - 1$ parti di lunghezza i, per ogni $i = 1, 2, ..., n$, cioè di partizioni p-regolari. Si conclude perciò uguagliando i coefficienti da entrambi i lati. $\square$

Riportiamo infine il seguente teorema, che è una generalizzazione di quello per cui il numero di classi di isomorfismo di FG-moduli irriducibili è uguale al numero di classi di coniugio di G (teorema 1.8.2).

Teorema 3.1.1. *Il numero di classi di isomorfismo di KG-moduli irriducibili è uguale al numero di classi di coniugio p-regolari di G.*

3.2 $K\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili

Per dimostrare che i moduli di Specht S^λ sono irriducibili su $\mathbb{C}$ abbiamo utilizzato il teorema del sottomodulo, ed in particolare il fatto che $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Tuttavia su K, che è di caratteristica positiva, questa intersezione potrebbe essere non banale (come vedremo nell'esempio 3.2.1). Definendo $D^\lambda := S^\lambda/(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})$, dimostreremo che i D^λ, per $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$, costituiscono una lista completa di classi di isomorfismo di $K\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili.

Cominciamo con una considerazione su $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$.

Proposizione 3.2.1. *Se $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \neq S^\lambda$, allora $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ è l'unico sottomodulo massimale di S^λ.*

Dimostrazione. Segue banalmente dal teorema del sottomodulo, che ricordiamo essere vero su qualsiasi campo. $\square$

Proposizione 3.2.2. *$D^\lambda := S^\lambda/(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})$ è irriducibile se $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \neq S^\lambda$ ed è il sottomodulo nullo altrimenti.*

Dimostrazione. Si consideri la proiezione canonica al quoziente $\pi : S^\lambda \to S^\lambda/(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})$. Sappiamo già che essa è suriettiva e si verifica facilmente che è un $\mathcal{S}_n$-omomorfismo. Supponiamo che $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \neq S^\lambda$ e prendiamo un sottomodulo $U \subsetneq D^\lambda$. Sicuramente $\{\mathbf{0}\} \subseteq U$, da cui $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = \pi^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subseteq \pi^{-1}(U) \neq S^\lambda$. Ma allora dalla proposizione 3.2.1 segue che $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = \pi^{-1}(U)$, e quindi $U = \pi(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}) = \{\mathbf{0}\}$. □

Vogliamo dimostrare che le partizioni λ di n per le quali D^λ è irriducibile sono le p-regolari.

Proposizione 3.2.3. *Sia $\lambda \vdash n$. Allora $D^\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$ se e solo se $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$.*

Dimostrazione. Abbiamo prima di tutto bisogno del seguente lemma.

Lemma 3.2.1. *Sia $\lambda = (1^{m_1}, ..., n^{m_n}) \vdash n$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forma su M^λ considerata nel paragrafo 2.4.*

1. *Se t ed s sono λ-tabelle, allora*

$$\prod_{j=1}^{n}(m_j)! \mid \langle e_t, e_s \rangle.$$

2. *Se t è una λ-tabella e $\tilde{t}$ è la tabella ottenuta invertendo gli elementi in ogni riga di t, allora*

$$\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = \prod_{j=1}^{n}(m_j!)^j.$$

Dimostrazione (del lemma 3.2.1). 1. Definiamo una nuova relazione d'equivalenza $\sim_*$ fra λ-tabelle. Se t_1 e t_2 sono due λ-tabelle, diciamo che $t_1 \sim_* t_2$ se e solo se t_1 si ottiene permutando le righe di t_2. Naturalmente, ogni classe di equivalenza contiene $\prod_{j=1}^{n} m_j!$ elementi.

Osservazione 3.2.1. Se $\{t_1\}$ compare in $\boldsymbol{e_t}$, allora vi compare anche ogni $\{t_2\}$ tale che $t_2 \sim_* t_1$. Inoltre, il fatto che $\{t_1\}$ e $\{t_2\}$ compaiano con coefficienti di stesso segno od opposto è indipendente dalla scelta della tabella t.

Supponiamo che il tabloide $\{t_1\}$ compaia in $\boldsymbol{e_t}$ ed $\boldsymbol{e_s}$ con lo stesso coefficiente. Allora, per l'osservazione precedente, tutti i $\prod_{j=1}^{n} m_j!$ elementi nella classe di equivalenza (rispetto a $\sim_*$) di $\{t_1\}$ devono comparire in $\boldsymbol{e_t}$ ed $\boldsymbol{e_s}$ con lo stesso coefficiente. Segue che il contributo della classe di equivalenza (rispetto a $\sim_*$) di $\{t_1\}$ in $\langle \boldsymbol{e_t}, \boldsymbol{e_s} \rangle$ è proprio $\prod_{j=1}^{n} m_j!$. Se invece t_1 occorre in $\boldsymbol{e_t}$ ed $\boldsymbol{e_s}$ con segno opposto, il contributo è $-\prod_{j=1}^{n} m_j!$. Ma allora $\langle \boldsymbol{e_t}, \boldsymbol{e_s} \rangle$ è la somma di un certo numero di $\pm \prod_{j=1}^{n} m_j!$, da cui la tesi.

2. Sia $C \leqslant C_t$ il sottogruppo di C_t dato da tutte le permutazioni $\pi \in C_t$ tali che, per ogni $i \in \{1, ..., n\}$, i e $\pi(i)$ si trovano in righe di stessa lunghezza in t. Si ha

$$C \cong \prod_{j=1}^{n} (S_{m_j})^j,$$

in quanto per ogni $j = 1, ..., n$ bisogna permutare gli m_j elementi in ognuna delle j colonne nelle righe di lunghezza j. Segue che $|C| = \prod_{j=1}^{n} (m_j!)^j$. Sia ora $\tilde{t}$ la tabella ottenuta invertendo le entrate in ogni riga di t. Si osserva che se $\{t_1\}$ compare in $\boldsymbol{e_t}$ ed $\boldsymbol{e_s}$, allora deve essere $\{t_1\} = \{\pi t\}$ per qualche $\pi \in C$; inoltre il coefficiente di $\{t_1\}$ in $\boldsymbol{e_t}$ ed $\boldsymbol{e_s}$ è lo stesso. Allora

$$\langle \boldsymbol{e_t}, \boldsymbol{e_s} \rangle = \prod_{j=1}^{n} (m_j!)^j.$$

□

Supponiamo ora che $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$. Dal punto 2 del lemma 3.2.1, se t è una λ-tabella e $\tilde{t}$ è la tabella ottenuta invertendo gli elementi in ogni riga di t, si ha

$$\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = \prod_{j=1}^{n} (m_j!)^j \neq 0,$$

dove la disuguaglianza è dovuta al fatto che λ è p-regolare. Da ciò segue che $S^\lambda \nsubseteq S^{\lambda\perp}$, cioè $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \neq S^\lambda$, e quindi $D^\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.

Viceversa, supponiamo che $\lambda \notin \mathcal{P}_{n,p}$. Dal punto 1 del lemma 3.2.1 segue che, per ogni λ-tabelle t ed s, si ha

$$\langle e_t, e_s \rangle \equiv 0 \pmod{\prod_{j=1}^{n} (m_j)!}.$$

Poiché per ipotesi λ non è p-regolare, deve esistere un $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tale che $m_i \geq p$, perciò

$$\langle e_t, e_s \rangle \equiv 0 \pmod{p},$$

cioè $\langle e_t, e_s \rangle = 0$ in K. Ciò significa che $S^\lambda \subseteq S^{\lambda\perp}$ e quindi $D^\lambda = \{\mathbf{0}\}$. □

Rimane soltanto da provare che i D^λ, al variare di $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$, sono a due a due non equivalenti.

Proposizione 3.2.4. *Siano $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{n,p}$. Allora $D^\lambda \cong D^\mu$ se e solo se $\lambda = \mu$.*

Dimostrazione. Sfruttiamo una proposizione, che ci ricorda la 2.4.1.

Proposizione 3.2.5. *Sia U un $K\mathcal{S}_n$-sottomodulo di M^μ e supponiamo che $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu/U)$ sia non nulla, dove $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}, \mu \in \mathcal{P}_n$. Allora $\lambda \trianglerighteq \mu$.*

E' ovvio che se $\lambda = \mu$ allora $D^\lambda \cong D^\mu$. Viceversa, definiamo ϕ come la composizione

$$\phi : S^\lambda \xrightarrow{\pi} D^\lambda \xrightarrow{\psi} D^\mu = S^\mu/(S^\mu \cap S^{\mu\perp}) \subseteq M^\mu/(S^\mu \cap S^{\mu\perp}),$$

dove π è la proiezione canonica al quoziente e ψ è l'isomorfimo fra D^λ e D^μ. Allora $0 \neq \phi \in Hom(S^\lambda, M^\mu/(S^\mu \cap S^{\mu\perp}))$, e dalla proposizione 3.2.5 si conclude che $\lambda \trianglerighteq \mu$. Analogamente, scambiando ψ con ψ^{-1}, si ha anche $\mu \trianglerighteq \lambda$, da cui $\mu = \lambda$. □

Mettendo insieme i risultati fin qui ottenuti, si dimostra l'analogo del teorema 2.4.2.

Teorema 3.2.1. *I moduli D^λ, con $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$, formano una lista completa di $K\mathcal{S}_n$-moduli irriducibili.*

Dimostrazione. Dalle proposizioni 3.2.2 e 3.2.3 sappiamo che i D^λ sono irriducibili se e solo se $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$. Dal teorema 3.1.1 sappiamo che il numero di classi di isomorfismo di KG-moduli irriducibili è uguale al numero di classi di coniugio p-regolari di G, che nel caso di $\mathcal{S}_n$ è a sua volta uguale a $|\mathcal{P}_{n,p}|$ (proposizione 3.1.1.) Si conclude allora con la proposizione 3.2.4, per cui i D^λ sono non isomorfi. □

Nel secondo capitolo, avevamo visto che $dimS^\lambda = f^\lambda$, dove f^λ è il numero di λ-tabelle standard. Per determinare invece la dimensione dei D^λ, ci serviamo di un fatto generale.

Proposizione 3.2.6. *Siano C un campo qualsiasi e V un C-spazio vettoriale di dimensione finita con una forma bilineare non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to C$. Sia W un sottospazio di V con base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_k}\}$. Allora*

$$dim(W/(W \cap W^\perp)) = rg((\langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j} \rangle)_{i,j=1,...,k}),$$

dove $(\langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j} \rangle)_{i,j=1,...,k}$ è la matrice di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Applicando la proposizione 3.2.6 si ottiene così una formula per $dimD^\lambda$.

Proposizione 3.2.7. *Sia $\lambda \vdash n$. Allora*

$$dimD^\lambda = rg((\langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j} \rangle)_{i,j=1,...,k}),$$

dove $\{\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_k}\}$ è una base per S^λ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è la forma su M^λ definita nel paragrafo 2.4.

Vediamo un esempio dei risultati ottenuti in questo paragrafo.

Esempio 3.2.1. Consideriamo $\mathcal{S}_4$ e la partizione $\lambda = (3,1) \vdash 4$. Visualizziamo λ tramite il suo diagramma di Ferrers

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \end{array}$$

ed utilizziamo la formula dell'uncino per determinare $dimS^\lambda$. Si ha

$$dimS^\lambda = f^\lambda = \frac{4!}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3.$$

Elenchiamo le tre λ-tabelle standard:

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}, \qquad t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \qquad t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array},$$

da cui determiniamo i tre politabloidi standard che costituiscono una base per S^λ. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e_1} &= k_{t_1}\{\boldsymbol{t_1}\} = (\epsilon - (1,4))\{\boldsymbol{t_1}\} = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \\
\boldsymbol{e_2} &= k_{t_2}\{\boldsymbol{t_2}\} = (\epsilon - (1,3))\{\boldsymbol{t_2}\} = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \\
\boldsymbol{e_3} &= k_{t_3}\{\boldsymbol{t_3}\} = (\epsilon - (1,2))\{\boldsymbol{t_3}\} = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo adesso tutti i possibili prodotti interni fra di essi:

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1} \rangle = 2, \quad \langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3} \rangle = 1, \\
&\langle \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2} \rangle = 2, \quad \langle \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \rangle = 1, \\
&\langle \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3} \rangle = 2.
\end{aligned}$$

Un elemento $\mathbf{v} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} \in S^\lambda$ appartiene a $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ se e solo se

$$\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{e_i} \rangle = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } i = 1,2,3. \tag{3.1}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{e_1} \rangle &= 2a_1 + a_2 + a_3, \\
\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{e_2} \rangle &= a_2 + 2a_2 + a_3, \\
\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{e_3} \rangle &= a_1 + a_2 + 2a_3,
\end{aligned}$$

perciò la condizione (3.1) equivale al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Si noti che la matrice 3×3, chiamiamola A, non è altro che la matrice di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto a $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$. Su $\mathbb{C}$ essa ha rango massimo: ciò significa che l'unica soluzione del sistema è quella banale, e quindi $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Tuttavia, su un campo di caratteristica 2 la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 1. Considerando la proiezione canonica al quoziente $\pi : S^\lambda \to D^\lambda$, si ricava che $dim(Ker(\pi)) = dim(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}) = dimS^\lambda - dimD^\lambda = 3 - rg(A) = 2$, dove la penultima uguaglianza segue dalla proposizione 3.2.6. In particolare $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$, per cui S^λ non è irriducibile. Mentre si ha che, poiché $dimD^\lambda = 1 \neq 0$, D^λ lo è.

Che D^λ sia irriducibile è confermato da altri due fatti, in accordo con la teoria vista finora. Il primo è che $2 = dim(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}) \neq dimS^\lambda = 3$, per cui $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \neq S^\lambda$; il secondo è che $\lambda = (1^1, 2^0, 3^1, 4^0)$ è 2-regolare.

3.3 Caratteri di Brauer

Per ultimo, ci prefiggiamo lo scopo di definire il carattere di una rappresentazione di un gruppo sul campo K. Ingenuamente, si potrebbe procedere come è stato fatto su $\mathbb{C}$, considerando cioè la funzione traccia nel campo rispettivo. Tuttavia questo approccio non porterebbe alle interessanti proprietà dei caratteri che abbiamo studiato nel paragrafo 1.6. Vediamolo con un esempio.

Esempio 3.3.1. Si consideri un K-spazio vettoriale di dimensione p su cui G agisce banalmente. La rappresentazione associata è

$$\begin{aligned} X : G &\longrightarrow GL_p \\ g &\longmapsto Id_p. \end{aligned}$$

Allora la mappa che a $g \in G$ associa $trX(g)$ è identicamente nulla su K, in quanto K ha caratteristica p. Naturalmente otterremmo lo stesso risultato se la dimensione dello spazio fosse un qualsiasi multiplo di p. Definendo perciò il carattere come la funzione traccia su K, i caratteri non identificherebbero di certo una rappresentazione, come avviene su $\mathbb{C}$ (anzi, potrebbe accadere come in questo caso che un insieme infinito di moduli condivida lo stesso carattere).

Per ottenere una giusta definizione di carattere, ricorriamo prima ad alcuni fatti generali della teoria delle rappresentazioni, riguardanti in particolare i gruppi abeliani finiti. La seguente proposizione è una conseguenza della seconda parte del lemma di Schur (1.7.1), che ricordiamo essere vera su ogni campo algebricamente chiuso.

Proposizione 3.3.1. *Siano C un campo algebricamente chiuso e G un gruppo abeliano finito. Allora ogni CG-modulo irriducibile ha dimensione* 1.

Dimostrazione. Si consideri $x \in G$. Poiché G è abeliano, si ha

$$gx\mathbf{v} = xg\mathbf{v} \quad \text{per ogni } \ g \in G,$$

e quindi l'endomorfismo $\mathbf{v} \longmapsto x\mathbf{v}$ è un G-omomorfismo di V. Per la parte 2 del lemma di Schur tale endomorfismo è un multiplo scalare dell'identità 1_V, cioè esiste $c \in C$ tale che

$$x\mathbf{v} = c\mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in V.$$

Questo implica che ogni sottospazio di V è un sottomodulo, e poiché V è irriducibile si deduce che $dimV = 1$. $\square$

Proposizione 3.3.2. *Sia V un FG-modulo. Se $g \in G$, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice di rappresentazione associata $X(g)$ è diagonale. In particolare, se g ha ordine n, allora gli elementi sulla diagonale di $X(g)$ sono radici n-esime dell'unità.*

Dimostrazione. Sia $H = \langle g \rangle$, il gruppo ciclico generato da g. Allora V è anche un FH-modulo. Poiché $car(F) \nmid |G|$, segue che $car(F) \nmid |H|$, perciò è possibile applicare il teorema di Maschke e scrivere V come somma diretta di FH-sottomoduli irriducibili U_i, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$. Grazie alla proposizione 3.1.1, ogni U_i ha dimensione 1. Sia $\mathbf{u}_i$ il vettore che genera U_i e si ponga $w = e^{2\pi i/n}$. Allora, poiché g ha ordine n, per ogni i esiste un intero m_i tale che $g\mathbf{u}_i = w^{m_i}\mathbf{u}_i$. Dunque la base cercata è $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r\}$. Infatti, la matrice di rappresentazione rispetto a tale base è

$$X(g) = \begin{pmatrix} w^{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w^{m_r} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Osservazione 3.3.1. E' importante notare che l'ipotesi che V sia un FG-modulo non è la più restrittiva per applicare il teorema. Ciò che conta infatti, come si può dedurre dalla dimostrazione, è che la caratteristica del campo non divida $o(g)$, l'ordine di g (quando la caratteristica del campo è prima con $|G|$, questo segue dal teorema di Cauchy).

Possiamo finalmente definire i caratteri sul campo K, chiamati caratteri di Brauer.

Scriviamo $|G| = p^k m$, con $k \in \mathbb{N}$ e $p \nmid m$. Se z è una radice primitiva m-esima dell'unità, è possibile costruire un omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[z] \longrightarrow K$, che manda z in una radice primitiva m-esima dell'unità in K (una tale radice esiste sempre, essendo K algebricamente chiuso e $m \neq 0$ in K).

Data una rappresentazione X di G, la si può restringere all'insieme G_{reg}. Se $g \in G_{reg}$, allora $car(K) = p \nmid n = o(g)$. Inoltre, poiché K è algebricamente chiuso, è possibile applicare la proposizione 3.3.2. Ciò significa che $X(g)$ è diagonalizzabile, con gli autovalori che sono radici n-esime dell'unità, e quindi anche m-esime. Infine calcoliamo le controimmagini in $\mathbb{Z}[z] \subseteq \mathbb{C}$ di tali autovalori tramite ϕ, e sommiamole in $\mathbb{C}$.

Definizione 3.3.1. Data una rappresentazione X di gruppo G, si definisce *carattere di Brauer* di X su K l'applicazione $G_{reg} \longrightarrow \mathbb{C}$, che ad ogni $g \in G_{reg}$ associa la somma descritta sopra.

Abbiamo visto che, definendo il carattere come la funzione traccia su K, si possono avere rappresentazioni non isomorfe con lo stesso carattere. Si dimostra invece che i caratteri di Brauer di due rappresentazioni irriducibili sono uguali se e solo se le rappresentazioni sono equivalenti, per cui abbiamo trovato i corrispondenti modulari dei caratteri ordinari. Riprendiamo ora l'esempio 3.3.1.

Si considerino le rappresentazioni

$$\begin{array}{rcl} X_1 : G & \longrightarrow & GL_p \\ g & \longmapsto & Id_p \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} X_2 : G & \longrightarrow & GL_{np} \\ g & \longmapsto & Id_{np} \end{array}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preso un qualsiasi elemento $g \in G_{reg}$, $X_1(g) = I_p$ e $X_2(g) = I_{np}$, che sono già matrici diagonali, con tutti gli autovalori uguali a $1 \in K$. I rispettivi caratteri di Brauer χ_1 e χ_2 si ottengono sommando le controimmagini di tali autovalori tramite gli omomorfismi di anelli $\phi, \psi : \mathbb{Z}[z] \longrightarrow K$. Poiché un omomorfismo di anelli manda l'unità nell'unità, si ottiene $\chi_1(g) = p$ e $\chi_2(g) = np$, che sono naturalmente diversi in $\mathbb{C}$.

Esempio 3.3.2. Consideriamo di nuovo $\mathcal{S}_3$. Nell'esempio 2.3.3 abbiamo determinato i moduli di Specht $S^{(3)}, S^{(1^3)}$ e $S^{(2,1)}$. Riportiamone la tabella dei caratteri.

	ϵ	$(1,2)$	$(1,2,3)$
$S^{(3)}$	1	1	1
$S^{(1^3)}$	1	-1	1
$S^{(2,1)}$	2	0	-1

E' possibile costruire una tabella dei caratteri di Brauer, che sarà ancora quadrata, tenendo conto del teorema 3.1.1. Mettiamoci in un campo di caratteristica 3. Sappiamo che dobbiamo considerare soltanto le classi di coniugio 3-regolari, ovvero sia ϵ e $(1,2)$. In questo caso $S^{(3)}$ e $S^{(1^3)}$ rimangono irriducibili, in quanto di dimensione 1, perciò uno di essi deve corrispondere a $D^{(3)}$ e l'altro a $D^{(2,1)}$ ($D^{(1^3)} = 0$ poiché la partizione (1^3) non è 3-regolare). Sappiamo che $0 \neq dim D^{(3)} = dim S^{(3)} - dim(S^{(3)} \cap S^{(3)\perp}) = 1 - 0 = 1$, perciò $D^{(3)} = S^{(3)}$. Di conseguenza, $D^{(2,1)}$ corrisponde a $S^{(1^3)}$, e la tabella dei caratteri di Brauer è semplicemente

$$\begin{array}{c|cc} & \epsilon & (1,2) \\ \hline D^{(3)} & 1 & 1 \\ D^{(2,1)} & 1 & -1 \end{array}.$$

Bibliografia

[Sag] Sagan, Bruce Eli, seconda edizione- *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions/ Bruce E. Sagan*, Springer Verlag- New York 2001.

[Jam] James, G.D. (Gordon Douglas), 1945- *Representations and characters of groups/ Gordon D. James and Martin W. Liebeck*, Cambridge University 1993.

[Alp] Alperin, J.L.- *Local representation theory/ J.L.Alperin*, Cambridge University Press, 1986.

[Ser] Serre, Jean-Pierre, prima edizione- *Linear Representations of Finite Groups/Jean-Pierre Serre*, Springer-Verlag New York, 1977.