Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

UN'ANALISI DELLO SCHEMA DI ALLOCAZIONE DI PORTAFOGLIO MEDIA - VARIANZA

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIACOMO BORMETTI

Presentata da:
CHIARA BEDEI

♯ Sessione 27-09-2019

2018 - 2019

Indice

Introduzione

Alla base dello studio presentato in questa tesi vi è l'analisi dello schema adatto alla definizione e costruzione di portafoglio finanziario al fine di poter raggiungere l'allocazione ottimale. In particolare, si percorre la storia recente dei modelli seguiti verso l'obbiettivo fino a sfociare nell'ultimo studio presentato da Gilles Zumbach sul tema. La principale domanda che sorge da parte dell'investitore riguarda come scegliere i titoli su cui investire il proprio capitale e quali regole usare nella strategia. Il mio interesse per questo tema è nato a seguito di un'esperienza lavorativa in un'agenzia di assicurazioni. Sul campo, ho scoperto l'esistenza del vasto mondo dei prodotti finanziari che ha catturato la mia curiosità. In seguito, sono sorte alcune domande oltre all'aspetto puramente normativo, ossia mi sono chiesta come si potessero presentare e comporre questi strumenti e quali fossero le fondamenta. L'obbiettivo di questa tesi è quello di fornire una descrizione utile per poter iniziare ad addentrarsi nel tema e capire quali siano i pilastri portanti dell'argomento.

La teoria riguardante l'allocazione ottimale di portafoglio secondo Markowitz è un fondamento della finanza moderna. L'idea di base è molto semplice: l'investitore vuole massimizzare il rendimento degli investimenti minimizzandone il rischio. Quindi, un semplice problema di ottimizzazione si ricava ponendo in equazioni questo modello, ed una soluzione analitica in assenza di vincoli può essere trovata agevolmente. Nonostante la sua semplicità, l'applicazione del punto centrale dello schema non può essere fatta senza attenzioni aggiuntive. Infatti, quando si applica come da teoria, le allocazioni risultanti presentano ampie posizioni lunghe e corte, estremamente sensibili ai dati in input. Questo aspetto comporta elevati costi di smobilitazione in caso di riallocazione delle posizioni. Inoltre, la procedura di calcolo delle allocazioni ottime richiede l'inversione della matrice di covarianza dei titoli e la procedura numerica è estremamente sensibile alla presenza di autovalori prossimi a zero. La presenza di questi ultimi è intrinsecamente legata alla natura stocastica dei titoli ed alla natura statistica della stima della matrice di covarianza dei dati. Per ottenere portafogli ben diversificati è pratica comune introdurre dei vincoli legati alla strategia di investimento. Questi ultimi stabilizzano le soluzioni cosicchè le allocazioni risultanti diventano meno estreme. Tuttavia, queste regolarizzazioni sono imposte dall'esterno della teoria. Se dal punto di vista del gestore del portafoglio questa soluzione può essere considerata soddisfacente, dal punto di vista della teoria la soluzione proposta lascia insoddisfatti. Ci si può aspettare che un sistema autoconsistente produca risultati ragionevoli senza vincoli aggiuntivi esogeni, mentre, in questo caso, le soluzioni diventano patologiche rimuovendo i vincoli. Inoltre, da un punto di vista culturale, il fatto che si abbia una parziale comprensione del problema non è soddisfacente. Il nucleo della questione è il termine di rischio da minimizzare. Essenzialmente, il termine di rischio al quadrato è lo scalare $\sigma^2 = \boldsymbol{\omega}^\intercal V \boldsymbol{\omega}$ generato dalla matrice di covarianza V e dal vettore dei pesi di portafoglio $\boldsymbol{\omega}$.

Alla radice della questione vi sono tre punti cruciali. In primo luogo, le proprietà statistiche dei titoli sono dinamiche e cambiano nel tempo, in particolare a causa dell'eteroschedasticità della volatilità associata. Secondo, la matrice di covarianza ha autovalori molto piccoli, che generano delle direzioni a basso rischio spurie. Infine, quando si introducono i costi di transazione, la ri-allocazione ottimale corrente dipende anche da quelle future. Come primo punto, si osserva che la volatilità non è una caratteristica statica del rendimento, ma essa varia nel tempo seguendo dei cluster di alta e bassa volatilità. Le informazioni relative alla volatilità presente contenute nei ritorni passati decadono nel tempo mentre il rendimento si allontana nel passato remoto. Ciò implica che le informazioni estraibili dai dati storici sono limitate dal decadimento temporale stesso ed aggiungere più dati ad una serie storica non porta necessariamente ad un miglioramento nella stima. Tuttavia, semplici modi per costruire una buona stima della matrice di covarianza sono stati introdotti in letteratura. La seconda questione cruciale è che la matrice di covarianza ammette autovalori molto piccoli o nulli. Nelle direzioni corrispondenti ad essi, il rischio stimato è minimo. Dato che il problema di ottimizzazione di Markowitz minimizza il rischio, l'allocazione ottimale si trova lungo le direzioni di questi piccoli autovalori. Poiché la soluzione dipende dall'inverso della matrice di covarianza V^{-1}, numericamente questo ha l'effetto di ingrandire i piccoli autovalori e sopprimere quelli più grandi. Senza vincoli esogeni, questo porta ad allocazioni instabili, fortemente dipendenti dai dati storici in ingresso, caratterizzate tipicamente da elevate posizioni lunghe e corte. Una possibile soluzione al problema può essere aggiungere quella di forzare un limite inferiore nella parte bassa dello spettro. Questo risultato può essere raggiunto ricorrendo a tecniche di regolarizzazione note come *shrinkage* della covarianza verso multipli della matrice identità oppure avvalendosi della teoria delle matrici random. L'introduzione di tali regolarizzazioni risolve il problema dei piccoli autovalori, ma rende la soluzione dipendente dalle scelte parametriche effettuate. Il terzo problema, relativo ai costi di transazione, si traduce nel fatto che al momento di effettuare la ri-allocazione ottimale, essa dipende da quella già esistente, ma anche da una eventuale ri-allocazione futura. Quest'ultima, a sua volta, dipenderà dalle ri-allocazioni successive. Questo fatto è apprezzabile, poiché rispecchia la natura dinamica del problema di allocazione nell'universo finanziario. Tuttavia, introduce un notevole livello di complicazione, che richiede da un lato di ricorrere a tecniche di ottimizzazione dinamica stocastica e dall'altro presuppone un modello quantitativo che descriva l'evoluzione di lungo periodo del mercato finanziario.

L'ultima osservazione ha il pregio di indicare alcune soluzioni verso le quali modificare il lavoro di Markowitz per ottenere allocazioni soddisfacenti e mantenere la complessità dell'approccio entro limiti ragionevoli. Innanzitutto, il costo di transazione introduce una regolarizzazione naturale del problema, siccome limita per definizione la variazione in ampiezza della ri-allocazione. Perciò, si può aggiunge un tale termine alla funzione da minimizzare. Tuttavia, includendo solo il costo di transazione relativo alla posizione corrente, non si impedisce che una sequenza di ri-allocazioni a basso costo non si traduca in allocazioni estreme poco diversificate. In altri termini, il costo di transazione non risolve di per sé la dipendenza dai dati storici in input. Si procede allora includendo nella funzione da ottimizzare il costo atteso derivante dal fatto che la matrice di covarianza stessa risulterà modificata in occasione del successivo istante di ri-allocazione. Questo effetto è dovuto sia alla natura dinamica della covarianza dei ritorni finanziari sia al fatto che la sua stima dipende da realizzazioni storiche specifiche che si manifestano nell'intervallo temporale trascorso tra due ri-allocazioni. Questi cambiamenti nella covarianza portano a modifiche nell'allocazione ottimale. Ciò genera un costo ulteriore, che è importante includere nel problema di allocazione ottima. Infatti, il risultato finale è un problema di ottimizzazione strutturalmente simile al problema di ottimizzazione di Markowitz, ma nel quale la matrice di covarianza V viene sostituita da una covarianza regolarizzata. Il termine di regolarizzazione è del tipo V^{-2}. I piccoli autovalori vengono penalizzati da questa regolarizzazione, portando quindi ad allocazioni ottimali stabili e ben diversificate. Infine, un'ulteriore idea innovativa dell'approccio regolarizzato di Zumbach è quella di separare l'orizzonte di allocazione strategico da quello tattico. Il tempo strategico è nell'ordine di anni e si traduce in una componente dell'allocazione che funge da riserva di liquidità da cui attingere le risorse per finanziare le riallocazioni tattiche, che invece si riferiscono ad orizzonti temporali brevi, dell'ordine di pochi giorni o settimane. L'allocazione strategica rappresenta una generalizzazione dell'idea già contenuta in Markowitz di allocazione in un titolo di riserva privo di rischio, quale il conto deposito bancario.

La struttura di questo documento è la seguente. Nel primo capitolo, la teoria di Markowitz viene analizzata, studiando lo schema da seguire per l'allocazione di portafoglio ottimale. Successivamente, si percorre la critica a questo modello evidenziandone i principali limiti. Nel secondo capitolo, si esamina nel dettaglio l'allocazione ottimale di portafoglio secondo Zumbach, partendo da un modello semplice, simile a quello di Markowitz, ed aumentandone sempre più la complessità fino a sfociare nella proposta finale.

Capitolo 1

Regola di Allocazione di Portafoglio Media - Varianza di Markowitz

1.1 Allocazione di Portafoglio includendo solo titoli rischiosi

In questo capitolo viene presentato il punto di partenza dello studio, analizzando la Regola di Media - Varianza dei rendimenti del portafoglio elaborata da Markowitz e da lui presentata in un articolo pubblicato in *The Journal of Finance* [3] del 1952 .
Gli strumenti finanziari sono caratterizzati principalmente da due parametri: il rendimento atteso e la varianza di esso; il primo è sostanzialmente una media pesata tra i dati della serie storica dell'investimento ed il rendimento di essi, mentre la varianza misura quanto il valore effettivo del titolo si discosti dal suo valore medio.
Una prima regola per la scelta del portafoglio su cui investire è la *Regola del Rendimento Atteso*, ossia quella secondo cui l'investitore dovrebbe massimizzare il valore scontato dei rendimenti futuri. Essa suggerisce che l'intero capitale venga impegnato interamente nel titolo con il migliore valore atteso di rendimento futuro, assumendo per esso la minima varianza.
Questo principio viene rifiutato dallo stesso Markowitz sia come ipotesi sia come guida per il comportamento degli investitori in quanto non porta ad investimenti fruttuosi e soddisfacenti. Sebbene lo scopo principale sia quello di ottenere il massimo rendimento

dal portafoglio investito, bisogna tenere conto anche delle fluttuazioni di esso e della propensione ad oscillare. Ciò accade poichè il rendimento del titolo è un processo stocastico ed in quanto tale è necessario considerare la sua aleatorietà. Non è necessariamente detto che la soluzione con il massimo rendimento sia quella con la minima varianza; c'è un tasso al quale l'investitore può ottenere il rendimento atteso assumendo varianza o, viceversa, ridurre la varianza rinunciando al rendimento atteso.
Inoltre, in questa teoria, non si fa mai riferimento al presupposto che un portafoglio diversificato, ossia avente diversi titoli di nature differenti, sia più efficiente rispetto ad uno non diversificato.
Quindi, per questi motivi, la regola del Rendimento Atteso deve essere rifiutata e Markowitz ha formulato la *Regola dei Rendimenti Attesi - Varianza dei Rendimenti* per dare una linea guida di fondamento.

Si ipotizza un modello di mercato che sia soggetto solo a rischi di mercato, perciò tale che solo i prezzi dei titoli siano variabili aleatorie non controllabili, e che abbia una liquidità di mercato certa. Inizialmente, si considerano solo titoli rischiosi.
L'investitore, al momento della scelta dei fondi su cui puntare la somma di denaro, ha a disposizione solo i dati delle serie storiche su cui poter basare un ragionamento e fare delle previsioni.
Siano dati N titoli; sia $\boldsymbol{\omega}$ il vettore dei pesi, ossia ogni ω_i è la frazione di capitale investita sul titolo *i-esimo*. Questa non è una variabile aleatoria, bensì viene fisssata dall'investitore nella definizione della suddivisione di capitale.
Nelle ipotesi si escludono vendite allo scoperto, per cui $\omega_i \geq 0$ ∀i.
In più questa somma è normalizzata, perciò

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1. \tag{1.1}$$

Sia $\mathbf{r}$ il vettore random dei rendimenti, r_i il rendimento del capitale investito sul titolo *i-esimo* e sia R il rendimento complessivo del portafoglio, perciò

$$R = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = \boldsymbol{\omega}^\intercal \mathbf{r}.$$

Il capitale finale dell'investitore ottenuto tra il tempo t_0 ed il tempo t_1 risulta essere

$$W_1 = (1 + \mathbf{r})W_0 = (1 + \boldsymbol{\omega}^\intercal \mathbf{r})W_0.$$

Grazie alla linearità dell'operatore valore atteso e grazie alle proprietà della varianza, dato il vettore dei pesi $\boldsymbol{\omega}$, il vettore dei rendimenti attesi $\boldsymbol{\mu}$ ($\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathrm{r}]$) e la matrice di covarianza V dei titoli tra gli istanti di tempo t_0 e t_0+ dT , si hanno il rendimento atteso del portafoglio e la sua varianza come segue

$$E_p = \mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i \equiv \boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\mu},$$

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \equiv \boldsymbol{\omega}^\intercal V \boldsymbol{\omega}.$$

A questo punto viene fatta la scelta di adottare un modello statico, ossia si considera la distribuzione del portafoglio fissata ed invariante nel tempo. Sebbene siano state percorse varie strade con diverse distribuzioni delle variabili aleatorie, la più efficace è quella in cui si assume che il portafoglio venga descritto da variabili aleatorie con distribuzione normale.

L'investitore al momento della definizione del portafoglio decide autonomamente quali siano i parametri in input, ossia quale sia il rendimento atteso desiderato e quale sia la varianza dei titoli accettata. A seguito, egli ha a disposizione varie combinazioni dei pesi del portafoglio ω_i che dipendono da rendimento atteso e varianza (μ_i, σ_{ij}).

Grazie alla regola di Media-Varianza, si può definire una frontiera efficiente. Essa risulta essere definita da tutti i possibili portafogli, con i relativi pesi, che, dato un valore per il rendimento atteso, portano la minima varianza, ossia il rischio minimo. In sostanza questo si traduce nella risoluzione del minimo della funzione di ottimizzazione di portafoglio, alla quale vengono aggiunti vincoli dall'esterno in accordo con le ipotesi fatte.

Tra tutti i possibili portafogli con un rendimento atteso fissato E_p, si vuole selezionare quello che abbia la minima varianza, ossia il minimo rischio. Questo fatto corrisponde a risolvere il seguente *Problema di Ottimizzazione Vincolato*

$$\begin{aligned} \min_{[\boldsymbol{\omega}]} \frac{1}{2}{\sigma_p}^2 &\equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal V\boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega}^\intercal\boldsymbol{\mu} &= E_p, \\ \boldsymbol{\omega}^\intercal\boldsymbol{\iota} &= 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

La *Funzione Lagrangiana* associata a questo problema di ottimizzazione è

$$L \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal V\boldsymbol{\omega} + \lambda(E_p - \boldsymbol{\omega}^\intercal\boldsymbol{\mu}) + \gamma(1 - \boldsymbol{\omega}^\intercal\boldsymbol{\iota}). \tag{1.3}$$

Le condizioni di primo ordine, ossia le condizioni sulle derivate parziali di primo ordine, sono:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \equiv V\boldsymbol{\omega} - \lambda\boldsymbol{\mu} - \gamma\boldsymbol{\iota} = 0, \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv E_p - \boldsymbol{\omega}^\intercal\boldsymbol{\mu} = 0, \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} \equiv 1 - \boldsymbol{\omega}^\intercal\boldsymbol{\iota} = 0. \tag{1.6}$$

La condizione (1.4) corrisponde ad un sistema di N equazioni in accordo con la dimensione del vettore $\boldsymbol{\omega}$.
Non avendo incluso titoli privi di rischio, la matrice di covarianza esiste ed è strettamente positiva. Perciò l'inverso di questa matrice esiste; per risolvere il sistema si può moltiplicare Equazione (1.4) per V^{-1}, ed ottenere

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda(V^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \gamma(V^{-1}\boldsymbol{\iota}). \tag{1.7}$$

Moltiplicando (1.7) per $\boldsymbol{\mu}^\intercal$, l'equazione diventa

$$\boldsymbol{\mu}^\intercal\boldsymbol{\omega} = \lambda(\boldsymbol{\mu}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \gamma(\boldsymbol{\mu}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\iota}),$$

che corrisponde ad E_p. Moltiplicando il sistema (1.7) per $\boldsymbol{\iota}^\intercal$ risulta che

$$\boldsymbol{\iota}^\intercal \boldsymbol{\omega} = \lambda(\boldsymbol{\iota}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \gamma(\boldsymbol{\iota}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\iota}),$$

che deve essere uguale ad 1 per i vincoli imposti. Perciò, in sostanza, ne deriva il seguente sistema

$$E_p = B\lambda + A\gamma, \tag{1.8}$$

$$1 = A\lambda + C\gamma, \tag{1.9}$$

dove

$$A = \boldsymbol{\iota}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\mu},$$

$$B = \boldsymbol{\mu}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\mu},$$

$$C = \boldsymbol{\iota}^\intercal V^{-1}\boldsymbol{\iota}.$$

Risolvendo il sistema di equazioni in λ ed in γ si trovano le soluzioni

$$\lambda = \frac{CE_p - A}{D},$$

$$\gamma = \frac{B - AE_p}{D},$$

dove $D = BC - A^2$. Inserendo λ e γ nell'equazione (1.7) ed isolando i termini in cui compare E_p si ricava la soluzione ottimale seguente

$$\boldsymbol{\omega_p} = \mathbf{g} + \mathbf{h}E_p, \tag{1.10}$$

dove i vettori $\mathbf{g}$ ed $\mathbf{h}$ sono definiti come

$$\mathbf{g} = \frac{1}{D}[B(V^{-1}\boldsymbol{\iota}) - A(V^{-1}\boldsymbol{\mu})],$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{D}[C(V^{-1}\boldsymbol{\mu}) - A(V^{-1}\boldsymbol{\iota})].$$

Trovato un portafoglio p che risolva le condizioni iniziali espresse nell'equazione (1.2), si ha un *Portafoglio di Frontiera.* Tutti i portafogli di frontiera sono quelli che costituiscono la *Frontiera Efficiente.* Essa ha la caratteristica di essere una funzione convessa, ossia definendo una combinazione convessa di più portafogli di frontiera si trova ancora un portafoglio di frontiera.

Si supponga di avere due portafogli di frontiera p e q; per quanto appena visto essi si esprimono come $\boldsymbol{\omega_p} = \mathbf{g} + \mathbf{h}E_p$ e $\boldsymbol{\omega_q} = \mathbf{g} + \mathbf{h}E_q$, con $E_p \neq E_q$. Si consideri $\alpha \in (0,1)$. Si definisca una combinazione convessa dei portafogli p e q, dove l'investitore impiega la percentuale α della ricchezza totale nel portafoglio p e la percentuale (1 - α) della stessa nel portafoglio q. Perciò il vettore finale dei pesi del portafoglio è definito come

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{\omega_p} + (1-\alpha)\boldsymbol{\omega_q}.$$

Questo è ancora un portafoglio, in quanto la somma dei pesi dei capitali investiti è uguale ad 1. Infatti:

$$\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\omega_p} + (1-\alpha)\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\omega_q} = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Inoltre, questo è un Portafoglio di Frontiera. Effettivamente si ha che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \alpha\boldsymbol{\omega_p} + (1-\alpha)\boldsymbol{\omega_q} \\
&= \alpha(\mathbf{g} + \mathbf{h}E_p) + (1-\alpha)(\mathbf{g} + \mathbf{h}E_q) \\
&= \mathbf{g} + \mathbf{h}[\alpha E_p + (1-\alpha)E_q] \\
&= \mathbf{g} + \mathbf{h}E
\end{aligned}$$

In aggiunta, è anche possibile trovare una rappresentazione grafica della *Frontiera di Portafoglio.* Precisamente, dato un portafoglio ottimale p si può trovare la varianza ad esso associata inserendo l'espressione di $\boldsymbol{\omega_p}$ in $\boldsymbol{\omega}^\intercal V\boldsymbol{\omega}$. Quindi, al rendimento atteso E_p

corrisponde la varianza definita come

$$\sigma_p{}^2 = \frac{1}{D}(CE_p^2 - 2AE_p + B).$$

Variando E_p si trovano differenti valori della varianza. Graficamente, la *Frontiera di Portafoglio* è descritta come una parabola ruotata di 90° in senso antiorario.

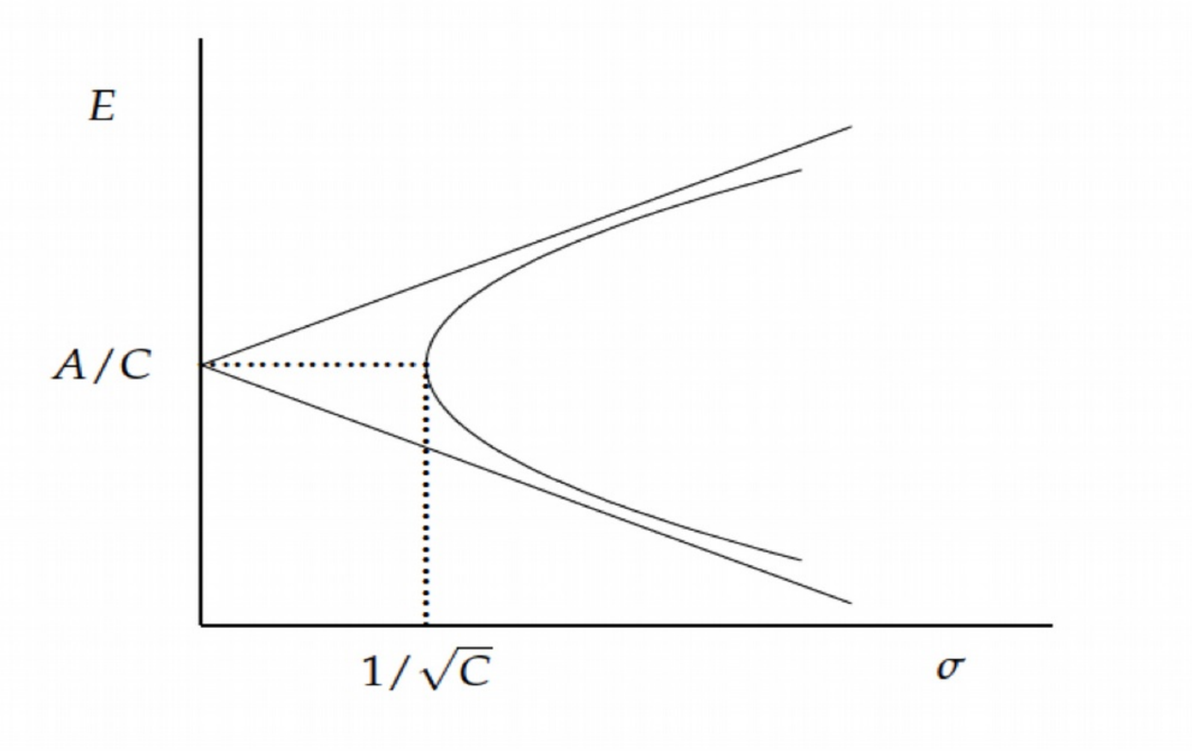

Figura 1.1: Bodie, Kane and Marcus, Investmentes, MCGRAW-HILL, 2011

1.2 Allocazione di Portafoglio includendo sia Titoli Rischiosi sia Titoli Privi di Rischio

Ora si analizza il problema di estendere i risultati precedenti al caso in cui uno dei titoli sia privo di rischio. Per preservare l'invertibilità della matrice di covarianza, è utile procedere nel modo seguente. In questo contesto, non è richiesto il vincolo di normalizzazione di $\boldsymbol{\omega}$ in Eq (1.1).

Dato un vettore $\boldsymbol{\omega}$ dei pesi per un asset soggetto al rischio, si ha automaticamente la porzione di ricchezza dell'investitore che sia non soggetta al rischio di mercato come 1 - $\boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\iota}$.

In questo modo l'investitore alloca completamente la sua ricchezza, infatti

$$\boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\iota} + (1 - \boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\iota}) = 1.$$

Sia ora μ_f il tasso di crescita del titolo privo di rischio.

Il nuovo problema di ottimizzazione che ne deriva è

$$\min_{[\boldsymbol{\omega}]} \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal V \boldsymbol{\omega},$$
$$\boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\mu} + (1 - \boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\iota})\mu_f = E_s. \tag{1.11}$$

Introducendo una nuova *Funzione Lagrangiana* associata a questo problema di ottimizzazione, si considera l'ottimizzazione seguente

$$\min_{[\boldsymbol{\omega},\lambda]} \Lambda \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal V \boldsymbol{\omega} + \lambda(E_s - \boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\mu} - (1 - \boldsymbol{\omega}^\intercal \boldsymbol{\iota})\mu_f) \tag{1.12}$$

con le condizioni di primo ordine

$$V\boldsymbol{\omega} - \lambda(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\iota}\mu_f) = 0,$$

o equivalentemente

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda V^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\iota}\mu_f), \tag{1.13}$$

dove ($\boldsymbol{\mu}$ - $\boldsymbol{\iota}\mu_f$) è il vettore dei ritorni attesi in eccesso, ossia il rendimento dei singoli titoli rischiosi in eccesso rispetto a quello privo di rischio.
Inoltre vi è la condizione per cui

$$\mu_f + \boldsymbol{\omega}^\intercal(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\iota}\mu_f) = E_s. \tag{1.14}$$

Sostituendo (1.13) in (1.14) si ottiene che

$$\lambda = \frac{E_s - \mu_f}{H}, \tag{1.15}$$

dove H = ($\boldsymbol{\mu}$ - $\boldsymbol{\iota}\mu_f$)$^\intercal$ V^{-1}($\boldsymbol{\mu}$ - $\boldsymbol{\iota}\mu_f$), cosicchè

$$\boldsymbol{\omega_s} = V^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\iota}\mu_f)\frac{E_p - \mu_f}{H}. \tag{1.16}$$

Inserendo il vettore $\boldsymbol{\omega_s}$ nell'espressione della varianza del portafoglio dei rendimenti si ottiene

$$\sigma_s{}^2 = \boldsymbol{\omega_s}^\intercal V \boldsymbol{\omega_s} = \tfrac{1}{H}(E_s - \mu_f)^2.$$

Prendendo la radice quadrata di questa espressione si trova che

$$E_s = \mu_f \pm \sqrt{H}\sigma_s. \tag{1.17}$$

Per quanto descritto fino ad ora, una caratteristica teorica della *Regola dei Rendimenti Attesi e Varianza dei Rendimenti* dovrebbe essere quella secondo cui essa implichi la *Diversificazione* per un ampio spettro di medie e varianze relative al titolo *i-esimo.*
In sostanza, con il termine diversificazione si intende il fatto che, dato un capitale, esso venga investito in vari fondi, possibilmente di diversa natura; questi sono i portafogli più efficienti, definiti dai parametri di Media e Varianza.
Inoltre, l'adeguatezza della diversificazione non dipende solamente dal numero di titoli differenti detenuti, ma anche dalla loro natura. Ciò significa che se il portafoglio è caratterizzato da vari titoli tutti della stesso genere, allora esso non è ben diversificato; questo accade perchè, generalmente, è più probabile che imprese di industrie dello stesso tipo affrontino contemporaneamente momenti turbolenti piuttosto che per aziende di

categorie dissimili.
Nella realtà, questo è solo ciò che si vorrebbe ottenere in quanto, a posteriori, si osserva che il portafoglio ottenuto in questo modo non è ben diversificato ed è concentrato su pochi titoli che abbiano buoni parametri in ingresso.
Allo stesso modo, dato che nella *Funzione Lagrangiana* interviene la varianza tra i titoli, si cerca di rendere essa la più piccola possibile. A tal fine non basta investire in molti titoli, è necessario evitare di avere in portafoglio titoli che abbiano alte covarianze tra loro: aziende con differenti caratteristiche economiche hanno una più bassa covarianza rispetto a quelle della stessa industria.

1.3 Le Critiche alla Regola di Media - Varianza dei Rendimenti di Markowitz

Il *Metodo di Allocazione Media - Varianza* di Markowitz è un modello completo, esaustivo ed efficace. Esso viene considerato come un metodo efficiente di scelta per la costruzione di un portafoglio ottimale e di un'allocazione di un asset finanziario e come mezzo per razionalizzare il valore della diversificazione. Nonostante ciò, è stato ampiamente analizzato e discusso. Nella classica ottimizzazione, si assume che l'investitore preferisca un portafoglio che dia il massimo rendimento per un dato livello di rischio. Dando stime di media, varianza e correlazione dei rendimenti per N titoli, la procedura seleziona le proporzioni di ricchezza da allocare in ciascun titolo. Questo genera una soddisfazione nell'investitore in quanto vengono rispettati sia le finalità sia i vincoli da egli imposti. Sebbene ci siano questi aspetti positivi, i portafogli ottimizzati tramite questa metodologia portano in sè instabilità. Il difetto alla base è insito nelle quantità in input, ossia nei parametri relativi ai rendimenti attesi, varianza e covarianza dei titoli. Questo perchè se, per esempio, la stima della varianza cambia in un certo intervallo di tempo, di conseguenza il titolo con la covarianza più bassa non è più lo stesso. Questo implica che si è costretti a variare la composizione del portafoglio durante brevi periodi di tempo, il che porta ad un inevitabile costo da sostenere.
In più, le soluzioni dell'*Ottimizzazione Media - Varianza* sono facilmente perturbabili, ossia a piccoli cambiamenti nei dati in input corrispondono grandi cambiamenti nelle

soluzioni. Questo è dovuto alla matrice di covarianza presente nella funzione di ottimizzazione: la soluzione di essa richiede l'inverso della matrice di covarianza e l'inversione di quest'ultima è una procedura molto sensibile agli autovalori prossimi allo zero. Inoltre, le assunzioni sul valore dei parametri in input potrebbero riflettere stime finanziariamente non significative oppure utilizzare stime basate su insufficienti dati storici. In aggiunta, la soluzione dipende dalle assunzioni errate fatte, ossia dal fatto che i valori in input sono trattati come esatti mentre in realtà, in quanto stime, sono affetti da errore di stima statistica.

E' importante distinguere errori in medie, varianze e covarianze; l'impatto relativo ad ognuno di essi dipende dalla tolleranza di rischio dell'investitore. Per tolleranze di rischio più elevate, errori in medie sono più importanti relativamente agli errori in varianze e covarianze. A tolleranze di rischio più basse corrisponde un impatto relativo di errori in medie, varianze e covarianze più simile. Anche se errori in medie sono più influenti di quelli in varianze e covarianze, la differenza di importanza diminuisce con il declino della tolleranza al rischio.

Questa analisi viene fatta basandosi sulla funzione *Equivalente Certo*, che viene dettagliata di seguito.

Sia data una *Funzione di Utilità U*, W_0 il capitale iniziale dell'investitore; siano ω_i ed r_i rispettivamente il peso ed il rendimento per i titoli i=1, . . . , N. Vogliamo mostrare come, entro certi limiti plausibili, massimizzare la funzione di utilità attesa per l'investitore della ricchezza

$$Z(\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{E}[U(W_0 \textstyle\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i)]$$

corrisponda a trovare il portafoglio ottimale, soluzione di Z($\boldsymbol{\omega}$).

Per affrontare questo problema, si ricorre alla *Funzione di Utilità di von Neunmann-Morgenstern*. Sia

$$W = W_0 \textstyle\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i.$$

Si consideri una funzione di utilità esponenziale negativa, *U(W)* = 1 - exp($-\phi W$), dove $\phi > 0$ è il coefficiente assoluto di avversione al rischio, che assumiamo costante. Inoltre, i rendimenti siano distribuiti secondo una normale.

Lo Sviluppo di Taylor di $U(W)$ intorno a $\mathbb{E}[W]$ risulta essere

$$\begin{gathered}U(W) = 1 - \exp(-\phi\mathbb{E}[W])(1 - \phi(W - \mathbb{E}[W]) + \tfrac{1}{2}\phi^2(W - \mathbb{E}[W])^2 + \\ -\tfrac{1}{6}\phi^3(W - \mathbb{E}[W])^3) + \mathcal{O}((W - \mathbb{E}[W])^4)\end{gathered}$$

da cui si ottiene che

$$\begin{gathered}\mathbb{E}[U(W)] = 1 - \exp(-\phi\mathbb{E}[W]) + \exp(-\phi\mathbb{E}[W])\phi\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])] + \\ -\tfrac{1}{2}\phi^2\exp(-\phi\mathbb{E}[W])\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2] + \\ -\tfrac{1}{6}\phi^3\exp(-\phi\mathbb{E}[W])\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^3] + \mathcal{O}(\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^4]) = \\ = 1 - \exp(-\phi\mathbb{E}[W]) - \tfrac{1}{2}\phi^2\exp(-\phi\mathbb{E}[W])(\mathbb{E}[W^2] - \mathbb{E}[W]^2) + \\ -\tfrac{1}{6}\phi^3\exp(-\phi\mathbb{E}[W])(\mathbb{E}[W^3] - 3\mathbb{E}[W^2]\mathbb{E}[W] + 3\mathbb{E}[W]\mathbb{E}[W]^2 - (\mathbb{E}[W])^3 + \\ + \mathcal{O}(\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^4]).\end{gathered}$$

Siccome la distribuzione è simmetrica, allora il valore atteso diventa

$$\mathbb{E}[U(W)] = 1 - \exp(-\phi\mathbb{E}[W]) - \tfrac{1}{2}\phi^2\exp(-\phi\mathbb{E}[W])Var[W] + \mathcal{O}(\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^4]).$$

Trascurando i contributi legati agli effetti di kurtosi e momenti di ordine superiore, il problema di massimizzazione della *funzione di Utilità Attesa* è equivalente ad un *problema di Ottimizzazione Media - Varianza.* Infatti, massimizzare il precedente valore atteso è equivalente a massimizzare i primi due termini, quindi il valore atteso del portafoglio, e minimizzare il terzo contributo negativo, quindi il valore della varianza del portafoglio. Vale la pena ricordare che le assunzioni fatte includono che la distribuzione dei rendimenti sia stazionaria su un periodo campione. Se essa è variabile nel tempo, allora i parametri stimati sono errati.
Per misurare quanto un portafoglio si discosti da un altro si comparano i valori dell'Equivalente Certo. Questo valore per un portafoglio rischioso è una quantità certa di denaro che fornisce la stessa utilità attesa del portafoglio rischioso. Essa è una misura appropriata a questo fine poichè tiene in considerazione la tolleranza di rischio dell'investitore e l'incertezza dei rendimenti. Dato un insieme di parametri di distribuzione, l'allocazione e la tolleranza di rischio, il portafoglio ottimale di Media - Varianza ha il più grande valore equivalente in contanti di tutti i portafogli generati con quegli asset. La procedura

richiede delle previsioni in input per media dei rendimenti, varianze e covarianze. Perciò si calcolano le medie storiche, le varianze e covarianze basate sui dati delle serie storiche. Gli errori di stima sono inevitabili in quanto l'investitore ha a disposizione un numero limitato di dati.

Per esaminare l'influenza degli errori nelle stime dei parametri, si variano leggermente i veri valori e si calcola il portafoglio ottimale risultante. Successivamente si calcolano gli equivalenti in contanti del portafoglio di base e del nuovo portafoglio ottimale. La percentuale dell'equivalente in contanti di perdita, mantendendo il portafoglio modificato invece che il portafoglio originale, misura l'impatto degli errori nei parametri di input sull'utilità dell'investitore.

I risultati mostrano che l'importanza relativa degli errori in medie, varianze e covarianze dipende dalla tolleranza al rischio. Un investitore con una tolleranza al rischio elevata si concentra sull'aumento del rendimento atteso del portafoglio; in questo caso errori nei rendimenti attesi sono notevolmente più importanti di errori varianze e covarianze. Minimizzare la varianza del portafoglio è di maggiore interesse per un investitore con una bassa tolleranza al rischio rispetto al rialzo del rendimento atteso; errori in medie sono in qualche modo meno influenti di quelli in varianze e covarianze. Indipendentemente dal livello di tolleranza al rischio, errori in medie sono i più rilevanti, seguiti dagli errori in varianze; errori in covarianze sono quelli meno significativi in termini di influenza sull'ottimizzazione del portafoglio.

Gli investitori hanno limitate risorse disponibili per ottenere stime di parametri futuri ed ignoti necessarie per i rischi ed i rendimenti. In alcuni casi, tutti i rendimenti attesi vengono posti uguali a zero; questo porta ad un'allocazione di portafoglio migliore poichè spesso è difficile ottenere una buona stima per questi parametri ed usare previsioni che non riflettano accuratamente i relativi rendimenti attesi di diversi titoli può sostanzialmente degradare la performance del metodo Media - Varianza.

In definitiva, il processo di ottimizzazione dovrebbe essere controllato al fine di verificare che stia producendo soluzioni di valore effettivo. Si dovrebbe richiedere un appropriato aggiustamento dei dati in input. Il fatto che siano richiesti vincoli per derivare le soluzioni ottimali dal punto di vista finanziario dovrebbe suggerire che il metodo possa essere soggetto a miglioramenti.

Capitolo 2

Regolarizzazione Stocastica per lo Schema di Allocazione Media - Varianza di Zumbach

Giunti a questo punto dell'analisi, si pone attenzione sullo *Schema di Allocazione Media - Varianza* presentato da Gilles Zumbach in un articolo datato 2019 [7].
L'idea alla base del metodo di Zumbach è quella di cercare di risolvere i tre punti, riassunti nell'Introduzione, alla radice dell'instabilità dello schema di Markowitz.
Innanzitutto, si tenta di dare una soluzione al problema dei piccoli autovalori della matrice di covarianza, dai quali la soluzione di Markowitz dipende fortemente. Inoltre, si considera che gli asset finanziari abbiano proprietà statistiche dinamiche e variabili nel tempo. Per esempio, si può osservare come vari la volatilità, ossia la deviazione standard dei rendimenti logaritmici, di un asset finanziario. Essa non è una caratteristica statica, viene descritta dai cluster di volatilità: tale valore si mantiene costante per un certo intervallo di tempo limitato per poi evolvere verso un nuovo livello. Infine, si nota che è necessario introdurre i costi di transazione: la riallocazione ottimale dipende da quella esistente, ma anche da una ipotetica riallocazione futura. Questo rispecchia appieno la natura dinamica dell'ambito finanziario: le decisioni prese al tempo corrente dipendono da un futuro incerto.
Il costo di transazione è una quantità fondamentale da inserire nella funzione da minimizzare in quanto esso rappresenta un vincolo naturale nel problema: l'investitore vuole

massimizzare il suo profitto, tenendo in conto il costo attuale della strategia. Perciò, questa quantità limita la gradezza della riallocazione.
La soluzione generale per ottenere posizioni solide include anche il costo atteso di riallocazione al successivo step, nel quale la covarianza viene modificata dalle informazioni aggiuntive ottenute nell'intervallo di tempo. Questi cambiamenti nella matrice di covarianza inducono altre modifiche per l'allocazione ottimale, che porta ad ulteriori costi da sostenere. In tutti i modi, un tale termine porta una naturale regolarizzazione al problema, poichè esso è estremamente sensibile rispetto ai dati in input, ed i piccoli autovalori della matrice di covarianza ne risentono.
Un'ulteriore modifica che viene fatta al metodo originale è la separazione tra l'orizzonte di tempo strategico e l'orizzonte di tempo tattico. Un'assegnazione di base a lungo termine corrisponde con l'orizzonte di tempo strategico. Essa viene descritta da un modello statico e può essere rappresentata da un conto bancario, da un indice azionario, da un portafoglio di riferimento od altro ancora. Invece, l'orizzonte di tempo tattico è quello a breve termine, nel quale si ottimizza il portafoglio attivo usando le informazioni correnti. La somma necessaria per ottenere nuove posizioni ottimali è presa dal fondo a lungo termine, ossia l'allocazione a lungo termine appare attraverso il finanziamento dei cambiamenti nella strategia.

2.1 Una prima bozza dello schema

Per l'orizzonte di tempo strategico, viene usato un modello statico corrispondente ad una scelta a lungo temine fatta dall'investitore. Quindi, un'allocazione di base viene fissata $\boldsymbol{\omega_{LT}}$; essa è rappresentata dalle scelte strategiche fatte e dal comportamento atteso a lungo termine per la volatilità.
Invece, l'orizzonte di tempo tattico è dominato dalla eteroschedasticità, ossia la propensione a co-variare di tutte le variabili aleatorie in gioco, ed i rendimenti storici inclusi nel set di informazioni portano a buone previsioni di covarianza. Questa supposizione permette di migliorare l'allocazione a lungo termine $\boldsymbol{\omega_{LT}}$, aggiungendo una deviazione $\boldsymbol{\delta\omega}$, per aggiustare la volatilità ed il rendimento del portafoglio.
Il problema di ottimizzazione del portafoglio è formulato anche in questo caso tramite

una funzione di costo, la Lagrangiana.
Sia t_0 il tempo corrente; le variabili random e tutto il set di informazioni sono noti fino a questo istante. Sia $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ l'allocazione statica di base, normalizzata con la condizione

$$\sum_{i=1} \omega_{LT,i} = 1.$$

Dal momento che $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ è fissata, il rischio in questa direzione non può essere minimizzato, cioè la funzione Lagrangiana può essere minimizzata solo nella direzione perpendicolare a $\boldsymbol{\omega_{LT}}$. Questo significa che il rischio nella direzione di $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ è libero, con un parametro corrispondente α nella soluzione minima; α è il fattore di esposizione che permette di controllare il rischio globale dell'allocazione.
L'allocazione viene derivata minimizzando la funzione Lagrangiana con alcuni vincoli. La funzione di costo più semplice è quella che include solo il rischio di mercato. In questo caso, la formulazione è simile a quella fatta da Markowitz, eccetto la presenza di una allocazione di base a lungo termine fissata. Uno schema più realistico si ottiene inserendo nella funzione anche i costi di transazione per cambiare le posizioni attive dalla deviazione da $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ corrente alla successiva. Questo nuovo termine porta ad una soluzione più concreta, in quanto la covarianza inversa viene regolarizzata. Comunque, la dipendenza dall'inverso della matrice di covarianza persiste, così come la sensibilità ai dettagli in input, e le criticità sono ancora presenti. Pertanto, si aggiunge un ulteriore termine che misuri il costo atteso di riallocazione al tempo t_0+dT. Quest'ultimo fattore quantifica la sensibilità dell'allocazione rispetto ai cambiamenti nella matrice di covarianza. Il calcolo porta ad un generale modello dinamico per le fluttuazioni attese di covarianza e ciò permette di ottenere un'espressione che includa le riallocazioni attese possibili al tempo t_0+dT. Di questa Lagrangiana si può trovare una soluzione analitica, sebbene essa sia complessa, usando un'espansione nei costi di transazione.

2.2 Set-up Generale

Il tempo corrente al quale si attua la riallocazione è t_0; i dati sono disponibili in un intervallo regolare denotato con δt e l'orizzonte di riallocazione è definito come $dT = n\delta t$. L'allocazione esistente $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ è ereditata da un tempo precedente $t<t_0$. Usando queste

informazioni, si ricerca una nuova allocazione $\boldsymbol{\omega}({t_0}^+)$; essa è calcolata usando le previsioni fino a un orizzonte di allocazione $t_0{+}dT$. La prospettiva di questa nuova strategia al tempo $t_0{+}dT$ è inclusa nello schema attraverso i costi attesi nei cambiamenti di allocazione tra $\boldsymbol{\omega}({t_0}^+)$ e $\boldsymbol{\omega}(t_0 + dT^+)$. In sostanza, l'allocazione $\boldsymbol{\omega}({t_0}^+)$ viene mantenuta fino all'istante $t_0{+}dT$ e le nuove informazioni raccolte nel periodo tra t_0 e $t_0{+}dT$ vengono usate per agire sulla successiva riallocazione.
La matrice di covarianza $V = V(t_0)$ che appare nell'ottimizzazione media - varianza è una previsione per la varianza media in un intervallo da t_0 a $t_0{+}dT$ con $dT = n\delta t$. La forma generale della previsione di questa matrice è

$$V(t) = \sum_{l=0}^{l_{max}} \lambda(n,l)\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\intercal}(t - l\delta t) + \lambda_{\infty}(n)\,\hat{V}_{\infty}, \tag{2.1}$$

$$1 = \sum_{l=0}^{l_{max}} \lambda(n,l) + \lambda_{\infty}(n).$$

Successivamente, nei calcoli espliciti si specifica chi siano i pesi $\lambda(n,l)$. La matrice $\hat{V}_{\infty}$ è una stima per la covarianza asintotica, che assume il ruolo di covarianza media, con il corrispondente peso λ_{∞}. La matrice di covarianza V dipende implicitamente dal periodo di detenzione $dT = n\delta t$ e ciò si può notare nella dipendenza dai coefficienti λ. Questa forma per la previsione di covarianza è una combinazione convessa tra una stima storica della covarianza a breve termine, che sottolinea la eteroschedasticità dei dati, e una della covarianza a lungo termine V_{∞}, che evidenzia le proprietà degli asset.
In questo contesto, si assume che la matrice di covarianza V abbia uno spettro strettamente positivo cosicchè se ne può calcolare l'inversa. Comunque, è lecito che essa abbia autovalori nulli, dovuti ai limitati dati storici comparati al numero di asset considerati; in questo caso si applica una regolarizzazione adatta, per esempio aggiungendo un termine del tipo $\epsilon\mathbb{I}$, facilmente rimovibile al termine dei calcoli prendendo $\epsilon \to 0$.
Inoltre, successivamente è necessario avere le proiezioni su un sottospazio uni-dimensionale generato dal vettore $\boldsymbol{\varphi}$. Per questo si introduce la seguente notazione:

$$P_{\parallel}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{\intercal}}{\boldsymbol{\varphi}^{\intercal}\boldsymbol{\varphi}},$$

$$P_{\perp}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{I} - P_{\parallel}(\boldsymbol{\varphi}). \tag{2.2}$$

Infine, si denota con $\boldsymbol{\delta\omega}$ la deviazione dall'allocazione di riferimento a lungo termine fissata $\boldsymbol{\omega_{LT}}$, così che l'allocazione al tempo t viene indicata come $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\omega}(t)$. Allo stesso modo, la matrice di covarianza dipende dal tempo e si hanno due differenti covarianze $V(t)$ e $V(t + dT)$ al tempo t e $t + dT$ rispettivamente. La differenza di tempo per la covarianza è denotata da $d_tV(t_0) = V(t_0 + dT)$ - $V(t_0)$ e similmente la differenza di tempo per l'allocazione è definita come $d_t\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t_0^+ + dT)$ - $\boldsymbol{\omega}(t_0^+)$.

2.3 Da t_0 a $t_0{}^+$

Sia data l'allocazione di base $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ e l'operatore di finanziamento

$$\mathcal{F}\big(\boldsymbol{\omega_{LT}}\big) = \mathbb{I} - \boldsymbol{\omega_{LT}}\boldsymbol{\iota}^\intercal. \tag{2.3}$$

I vettori $\boldsymbol{\iota}$ e $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ appartengono al nucleo dell'operatore $\mathcal{F}$, cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\boldsymbol{\omega_{LT}} &= 0 \quad & \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{LT}}^\intercal\mathcal{F}^\intercal &= 0 \\ \boldsymbol{\iota}^\intercal\mathcal{F} &= 0 \quad & \mathcal{F}^\intercal\boldsymbol{\iota} &= 0. \end{aligned}$$

Usando queste relazioni, si possono stabilire le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} P_\perp(\boldsymbol{\iota})\mathcal{F} &= \mathcal{F} \qquad & \mathcal{F}P_\perp(\boldsymbol{\iota}) &= P_\perp(\boldsymbol{\iota}) \\ P_\perp(\boldsymbol{\omega_{LT}})\mathcal{F} &= P_\perp(\boldsymbol{\omega_{LT}}) \qquad & \mathcal{F}P_\perp(\boldsymbol{\omega_{LT}}) &= \mathcal{F} \\ P_\parallel(\boldsymbol{\iota})\mathcal{F} &= 0 \qquad & \mathcal{F}P_\parallel(\boldsymbol{\omega_{LT}}) &= 0. \end{aligned}$$

Si consideri il caso in cui il portafoglio $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ sia totalmente stanziato e sia $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ una deviazione arbitraria. In questo modo, l'allocazione può essere scritta come $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$; essa necessita di essere finanziata in quanto $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} \neq 0$ e $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\omega} \neq 1$. Il portafoglio $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ viene fornito vendendo il corrispondente valore dall'allocazione di base $\boldsymbol{\omega_{LT}}$. Perciò, l'allocazione attuale è della forma

$$\boldsymbol{\omega} = (1 - \boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\hat{\omega}})\boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\hat{\omega}}. \tag{2.4}$$

Inserendo nell'espressione l'operatore $\mathcal{F}$, l'allocazione risultante con la deviazione $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ può essere scritta come

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\omega} = \boldsymbol{\omega_{LT}} + \mathcal{F}\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} \tag{2.5}$$

con $\boldsymbol{\delta\omega} = \mathcal{F}\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$. Il termine $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ è il valore totale delle posizioni contenute in $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$. La deviazione $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ è finanziata vendendo parte dell'allocazione di base $\boldsymbol{\omega_{LT}}$, come espresso nel termine - $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}\ \boldsymbol{\omega_{LT}}$. L'operatore di finanziamento $\mathcal{F}$ è applicato ad una deviazione scoperta $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ che viene erogata cedendo parte delle posizioni contenute in $\boldsymbol{\omega_{LT}}$. La deviazione risultante $\boldsymbol{\delta\omega}$ ha valore totale nullo, come espresso da $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\mathcal{F}} = 0$ e le posizioni proporzionali a $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ in $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ vengono eliminate grazie alla condizione $\mathcal{F}P_{\parallel}(\boldsymbol{\omega_{LT}}) = 0$.

Data un'allocazione di base $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ ed una allocazione $\boldsymbol{\omega}$, la deviazione $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}}$ presente nell'equazione (2.5) può essere trovata risolvendo

$$\mathcal{F}\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega_{LT}}$$

con la condizione $\boldsymbol{\iota}^\intercal(\boldsymbol{\omega}$ - $\boldsymbol{\omega_{LT}}) = 0$.
La soluzione generale è del tipo $\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} = \boldsymbol{\omega}$ - $\boldsymbol{\omega_{LT}} + \alpha\ \boldsymbol{\omega_{LT}}$, dove α è un parametro libero tale che $\alpha \in \mathbb{R}$. Se viene imposta la condizione $\boldsymbol{\omega_{LT}^\intercal}\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} = 0$, cioè la deviazione non ammette componenti nella direzione di $\boldsymbol{\omega_{LT}}$, il parametro α risulta essere

$$\alpha = -\frac{\boldsymbol{\omega_{LT}^\intercal}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega_{LT}})}{\boldsymbol{\omega_{LT}^\intercal}\boldsymbol{\omega_{LT}}}$$

e la soluzione può essere espressa come

$$\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} = P_{\perp}(\boldsymbol{\omega_{LT}})(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega_{LT}}).$$

Dato che $P_{\perp}(\boldsymbol{\omega_{LT}})\ \boldsymbol{\omega_{LT}} = 0$, la soluzione diventa

$$\boldsymbol{\delta\hat{\omega}} = P_{\perp}(\boldsymbol{\omega_{LT}})\boldsymbol{\omega}. \tag{2.6}$$

2.3.1 Rischio di Mercato dell'Allocazione di Base

La varianza per l'allocazione di base è definita come

$$\sigma^2 = var = \boldsymbol{\omega_{LT}}^{\intercal} V \boldsymbol{\omega_{LT}}$$

dove V è la previsione per la covarianza media tra gli istanti di tempo t_0 e $t_0 + dT$. La derivata prima della varianza fatta rispetto a $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ risulta essere

$$\frac{\partial var}{\partial \boldsymbol{\omega_{LT}}} = 2\, V \boldsymbol{\omega_{LT}}$$

e, dato che l'allocazione $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ non è ottimale, la derivata non è nulla.
Nei seguenti calcoli, questo termine compare nell'espressione della Lagrangiana e deve essere proiettato fuori dalle equazioni in quanto non può essere nullo. Quindi

$$P_{\perp}(V\boldsymbol{\omega_{LT}}) \frac{1}{2} \frac{\partial var}{\partial \boldsymbol{\omega_{LT}}} = P_{\perp}(V\boldsymbol{\omega_{LT}}) V \boldsymbol{\omega_{LT}} = 0.$$

Per l'allocazione arbitraria $\boldsymbol{\delta\omega}$, la minimizzazione della funzione Lagrangiana viene fatta nel sottospazio perpendicolare portando all'equazione

$$P_{\perp}(V\boldsymbol{\omega_{LT}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\delta\omega}} = 0. \tag{2.7}$$

Perciò, la soluzione contiene un termine arbitrario nella direzione di $V\boldsymbol{\omega_{LT}}$ e questo parametro è collegato al rischio dell'allocazione in questa direzione.

2.3.2 Allocazione Ottimale

Come primo passo, si consideri solo il rischio di mercato dell'allocazione $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\omega}$, che viene misurato tramite la varianza $var = \boldsymbol{\omega}^{\intercal}\ V\ \boldsymbol{\omega}$.
Si vuole così minimizzare il termine contenente il rischio di mercato, con il vincolo $\boldsymbol{\iota}^{\intercal}\boldsymbol{\delta\omega}$ $= 0$. Questo porta alla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{\intercal} V \boldsymbol{\omega} + \lambda \boldsymbol{\iota}^{\intercal} \boldsymbol{\delta\omega}. \tag{2.8}$$

L'equazione di minima varianza che dovrebbe essere risolta per $\boldsymbol{\delta\omega}$ risulta essere

$$P_{\perp}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\delta\omega}}\right) = P_{\perp}\big\{ V\boldsymbol{\omega_{LT}} + V\boldsymbol{\delta\omega} + \lambda\boldsymbol{\iota}\big\} = 0.$$

Il termine $V\boldsymbol{\omega_{LT}}$ viene proiettato nel sottospazio perpendicolare alla direzione di $V\boldsymbol{\omega_{LT}}$, perciò il termine tra parentesi risulta essere

$$V\boldsymbol{\delta\omega} = -\lambda\boldsymbol{\iota} - \alpha\, V\boldsymbol{\omega_{LT}},$$

dove il vettore $\alpha\, V\boldsymbol{\omega_{LT}}$ può essere aggiunto con il parametro α arbitrario, che assume il ruolo di fattore di esposizione al rischio. Così, risolvendo quest'ultima equazione per $\boldsymbol{\delta\omega}$ si giunge alla soluzione

$$\boldsymbol{\delta\omega} = -\lambda\, V^{-1}\boldsymbol{\iota} - \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}.$$

Imponendo la condizione $\boldsymbol{\iota}^{\intercal}\boldsymbol{\delta\omega} = 0$ e moltiplicando quest'ultima equazione per $\boldsymbol{\iota}$ si ottiene

$$0 = -\lambda\boldsymbol{\iota}^{\intercal}\, V^{-1}\boldsymbol{\iota} - \alpha$$

da cui si ricava la soluzione per il moltiplicatore di Lagrange

$$\lambda = -\frac{\alpha}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}\, V^{-1}\boldsymbol{\iota}}. \tag{2.9}$$

Introducendo un vettore ausiliario $\boldsymbol{\varphi}$ la soluzione si può meglio esprimere come

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{V^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}\, V^{-1}\boldsymbol{\iota}},$$

$$\boldsymbol{\delta\omega} = \alpha\big\{\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\omega_{LT}}\big\} = \alpha\mathcal{F}(\boldsymbol{\omega_{LT}})\boldsymbol{\varphi}. \tag{2.10}$$

Perciò, l'allocazione ottimale al tempo ${t_0}^{+}$ è data da $\boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\omega_0^{+}}$ con $\boldsymbol{\delta\omega_0^{+}} = \boldsymbol{\delta\omega}$ dato dall'quazione (2.10). Nel caso in cui l'allocazione di base $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ sia un conto corrente investito completamente in un portafoglio attivo $\boldsymbol{\delta\omega_0^{+}}$, cioè $\alpha = 1$, si ritrova la soluzione

di minima varianza di Markowitz usuale. Effettivamente, il termine -$\boldsymbol{\omega_{LT}}$ nella soluzione corrisponde al capitale servito per definire il nuovo portafoglio e viene omesso in quanto è implicito.
Definendo l'allocazione come segue

$$\boldsymbol{\omega} = (1-\alpha)\boldsymbol{\omega_{LT}} + \alpha\boldsymbol{\varphi},$$

si osserva che la varianza di $\boldsymbol{\omega}$ è

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (1-\alpha)^2\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{LT}}^{\intercal} V \boldsymbol{\omega_{LT}} + (1-(1-\alpha)^2)\frac{1}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal} V^{-1}\boldsymbol{\iota}} \\ &= \frac{1}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal} V^{-1}\boldsymbol{\iota}} + (1-\alpha)^2\left(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{LT}}^{\intercal} V \boldsymbol{\omega_{LT}} - \frac{1}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal} V^{-1}\boldsymbol{\iota}}\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

La prima espressione di varianza mostra che la varianza è una combinazione convessa della varianza dell'allocazione a lungo termine $\boldsymbol{\omega_{LT}}$ e quella dell'allocazione ottimale. Invece, nella seconda espressione, il primo termine rappresenta il rischio dell'allocazione ottimale di Markowitz, che è minimo. Il secondo termine è il rischio aggiunto creato dall'esposizione α diversa da uno.

2.3.3 Allocazione Ottimale includendo i Costi di Transazione

In questa sezione, si esamina come il portafoglio corrente modifichi l'allocazione ottimale a causa dei costi di transazione. Viene aggiunto un termine nella funzione Lagrangiana al fine di includere i costi di transazione e successivamente si deriva l'allocazione ottimale. La posizione corrente $\boldsymbol{\omega_0} = \boldsymbol{\omega}(t_0)$ al tempo t_0 è composta dall'allocazione di base e dalla deviazione al tempo t_0 dalla allocazione di riferimento $\boldsymbol{\omega_{LT}}$, di cui $\boldsymbol{\delta\omega_0}$ è il vettore dei pesi

$$\boldsymbol{\omega_0} = \boldsymbol{\omega_{LT}} + \boldsymbol{\delta\omega_0}.$$

Il vettore dei pesi ottimizzati $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ rappresenta la deviazione al tempo ${t_0}^+$, tenendo in conto i rischi attesi, dovuti alle fluttuazioni ed alle correlazioni di mercato, ed i costi di transazione tra $\boldsymbol{\delta\omega_0}$ e $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$. La variazione dell'allocazione, ossia il cambiamento di posizioni da $\boldsymbol{\delta\omega_0}$ al tempo t_0 a quelle in $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ al tempo ${t_0}^+$, è fatto attraverso le negoziazioni $\partial_t\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}({t_0}^+)$ - $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ - $\boldsymbol{\delta\omega_0}$. I costi di transazione sono proporzionali al valore assoluto dei cambiamenti nelle posizioni $|\partial_t\boldsymbol{\omega_k}|$, con un costo s_k per posizione. Il costo totale della transazione relativo alla riallocazione in t_0 è

$$T_c = \sum_k s_k \mid \partial_t\boldsymbol{\omega_k} \mid,$$

dove s_k è il costo di transazione per la $k-esima$ posizione. Assumendo lo stesso costo di transazione per ogni posizione $s = s_k$, si giunge ad una norma L^1 per il costo totale $T_c = s\sum_k|\partial_t\boldsymbol{\omega_k}| = \mathrm{s}|\partial_t\boldsymbol{\omega}|_1$. Questo termine introduce una regolarizzazione nello schema di Media - Varianza, ma un termine in norma L^1 non è trattabile analiticamente. Per convenienza analitica, si utilizza la norma L^2, fatto equivalente a calcolare i costi di transazione al quadrato.

Usando una norma L^2, il costo di transazione T_c che occorre tra le posizioni $\boldsymbol{\delta\omega_0}$ e $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ è

$$ {T_c}^2 = s^2(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0})^\intercal(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0})$$

in cui s misura il costo complessivo di transazione. La derivata di questo termine risulta essere

$$\frac{1}{2}\frac{\partial {T_c}^2}{\partial\boldsymbol{\delta\omega_0^+}} = s^2(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0}).$$

Considerando la Lagrangiana che comprende sia il rischio di mercato, sia il costo di transazione al quadrato, sia il vincolo di peso unitario si ottiene una funzione del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal V\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}s^2(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0})^\intercal(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0}) + \lambda\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\omega_0^+}. \tag{2.12}$$

La derivata di quest'ultima espressione nello spazio perpendicolare porta a

$$\begin{aligned} P_\perp\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\delta\omega_0^+}}\right) &= P_\perp\big\{\, V\boldsymbol{\omega_{LT}} + V\boldsymbol{\delta\omega_0^+} + s^2\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - s^2\boldsymbol{\delta\omega_0} + \lambda\boldsymbol{\iota}\big\} \\ &= P_\perp\big\{\big(V + s^2\mathbb{I}\big)\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - s^2\boldsymbol{\delta\omega_0} + \lambda\boldsymbol{\iota}\big\} = 0. \end{aligned}$$

Per semplificare la notazione, si introduce l'operatore

$$V_{\mathbb{I}} = V + s^2\mathbb{I}$$

il quale fa si che il termine tra parentesi porti all'equazione

$$V_{\mathbb{I}}\boldsymbol{\delta\omega_0^+} = -\lambda\boldsymbol{\iota} + s^2\boldsymbol{\delta\omega_0} - \alpha\, V\boldsymbol{\omega_{LT}}.$$

Si usa l'uguaglianza

$$V_{\mathbb{I}}^{-1}\, V = V_{\mathbb{I}}^{-1}(V_{\mathbb{I}} - s^2\mathbb{I}) = \mathbb{I} - s^2 V_{\mathbb{I}}^{-1}$$

per ottenere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta\omega_0^+} &= -\lambda V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota} + s^2 V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\delta\omega_0} - \alpha\big(\mathbb{I} - s^2 V_{\mathbb{I}}^{-1}\big)\boldsymbol{\omega_{LT}} \\ &= -\lambda V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota} - \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}} + s^2 V_{\mathbb{I}}^{-1}\big(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}\big). \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Con la condizione $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\omega_0^+} = 0$, moltiplicando questa ultima equazione per $\boldsymbol{\iota}$ si giunge a

$$0 = -\lambda\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota} - \alpha + s^2\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\big(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}\big),$$

da cui si ricava la soluzione per il moltiplicatore di Lagrange

$$\lambda = \frac{1}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}\big\{-\alpha + s^2\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\big(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}\big)\big\}. \qquad (2.14)$$

Perciò, la soluzione per $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ risulta essere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta\omega_0^+} &= -\frac{V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota} V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}\big\{-\alpha + s^2\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\big(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}\big)\big\} - \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}} + s^2 V_{\mathbb{I}}^{-1}\big(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}\big) \\ &= \alpha\left\{\frac{V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}} - \boldsymbol{\omega_{LT}}\right\} + s^2\left(\mathbb{I} - \frac{V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}^\intercal}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}\right) \times V_{\mathbb{I}}^{-1}\big(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}\big). \\ &\qquad (2.15)\end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli, si introduce il vettore

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}} = \frac{V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal} V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}$$

e si richiama l'operatore di finanziamento $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}})$ introdotto nell'equazione (2.3), così che la soluzione diventa

$$\boldsymbol{\delta\omega}_{\mathbf{0}}^{+} = \alpha\mathcal{F}(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{LT}})\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}} + s^2\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}})V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega}_{\mathbf{0}} + \alpha\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{LT}}). \tag{2.16}$$

Ancora una volta, il parametro α non è fissato e può essere definito dall'investitore in base all'esposizione al rischio che egli ritiene opportuna.

2.4 Da ${t_0}^+$ a $t_0 + dT$

Il passo successivo è quello di considerare la sensibilità dell'allocazione rispetto alla matrice V ed il potenziale costo al tempo $t_0 + dT$ indotto dai cambiamenti nella covarianza. Un'allocazione corrisponde ad un numero fissato di titoli; l'allocazione $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{+}$ è un'allocazione con $\omega_i = \frac{N_i P_i}{A}$, dove A è il valore totale del portafoglio. Per un'allocazione fissata N, la relativa allocazione $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{+}$ non è costante durante il periodo di esecuzione. Di seguito, si assume che il cambiamento dei relativi pesi tra ${t_0}^+$ e $t_0 + dT$ sia trascurabile e che il costo della successiva ri-allocazione sia tra $\boldsymbol{\omega}({t_0}^+)$ e $\boldsymbol{\omega}({t_0}^+ + dT)$. Il costo in $t_0 + dT$ dovrebbe essere scontato, ma, per semplicità, il fattore di sconto viene trascurato.
L'allocazione di minima varianza $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{+}$ è una funzione della covarianza V. In questa sezione, non si assume una specifica forma per l'allocazione, si fa solo riferimento alla sua dipendenza dalla matrice di covarianza V, $\boldsymbol{\omega}[V]$. Si vuole valutare come $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{+}$ sia modificata tramite le variazioni random in V, $d_t V$, cambiando le posizioni con $d_t\boldsymbol{\omega}$. Nello specifico, si osserva che anche $d_t\boldsymbol{\omega}$ è una variabile casuale, dipendente da $d_t V$; si vuole valutare la media e la varianza di $d_t\boldsymbol{\omega}$, cioè si cercano di valutare le oscillazioni attese nelle posizioni indotte dalle fluttuazioni nella covarianza.
Una stima per la covarianza $V(t_0)$ viene costruita al tempo t_0 usando le informazioni relative ai rendimenti storici fino al tempo t_0 tramite l'equazione (2.1). L'intervallo di tempo dT è quello dopo il quale il portafoglio viene rivisitato ed aggiornato; la covarian-

za più utile è una previsione tra il tempo corrente t_0 ed il tempo di destinazione $t_0 + dT$. Al tempo $t_0 + dT$ questa procedura viene ripetuta e si giunge ad una nuova stima $V(t_0 + dT)$ usando le informazioni a disposizione fino a $t_0 + dT$. Come per t_0, anche la covarianza $V(t_0 + dT)$ è una variabile aleatoria ed essa può essere scritta come $V(t_0 + dT) = V(t_0) + d_t V$. Ancora una volta, i cambiamenti nella covarianza $d_t V$ sono casuali. Per valutare i cambiamenti attesi tra t_0 e $t_0 + dT$, la covarianza in $t_0 + dT$ dovrebbe essere calcolata al tempo t_0, usando le informazioni disponibili in quel momento. Per questo, si ha che i rendimenti precedenti al tempo t_0 (t_0 incluso) sono noti, mentre i rendimenti tra t_0 e $t_0 + dT$ sono variabili random.
Per i successivi calcoli, si definiscono

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}[n] &= \sum_{l=0}^{l_{max}-n} \lambda(n, n+l) = 1 - \sum_{l=0}^{n-1} \lambda(n,l) - \lambda_\infty \\ V[n] = V[n](t_0) &= \frac{1}{\boldsymbol{\eta}[n]} \sum_{l=0}^{l_{max}-n} \lambda(n, n+l) \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\intercal(t_0 - l\delta t) \end{aligned} \tag{2.17}$$

dove λ sono i pesi usati per calcolare la previsione di varianza in equazione (2.1). La covarianza $V[n]$ è calcolata grazie al set di informazioni in t_0 e fornisce una previsione rilevante in un periodo $n - esimo$. Per la covarianza in $t_0 + dT$, la normalizzazione $\boldsymbol{\eta}[n]$ misura la frazione di covarianza contenuta nel set di informazioni, mentre il complementare 1 - λ_∞ - $\boldsymbol{\eta}[n]$ rappresenta la frazione random contenuta nella covarianza.
In termini di rendimenti futuri, la covarianza è

$$\begin{aligned} V(t_0 + dT) &= \sum_{l=0}^{n-1} \lambda(n,l) \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\intercal(t_0 + (n-l)\delta t) + \sum_{l=0}^{l_{max}-n} \lambda(n, l+n) \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\intercal(t_0 - l\delta t) + \lambda_\infty \hat{V}_\infty \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \lambda(n,l) \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\intercal(t_0 + (n-l)\delta t) + \boldsymbol{\eta}[n]\, V[n] + \lambda_\infty \hat{V}_\infty \end{aligned}$$

L'incremento della covarianza in un intervallo di tempo $dT = n\delta t$ è definito come

$$d_t V[dT](t_0 + dT) = V(t_0 + dT) - V(t_0).$$

In termini di rendimenti successivi, l'incremento della covarianza risulta essere

$$d_t V(t_0 + dT) = \sum_{l=0}^{n-1} \lambda(n,l) \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\intercal}(t_0 + (n-l)\delta t) + \boldsymbol{\eta}[n]\, V[n] - \boldsymbol{\eta}[0]\, V[0], \tag{2.18}$$

dove il primo termine contiene le variabili random, mentre i termini in $V[\;]$ sono calcolati tramite il set di informazioni al tempo t_0.

Al tempo t_0, data la matrice di covarianza corrente $V(t_0)$, si ha che la matrice di covarianza ad un tempo successivo prende la forma $V(t_0 + dT) = V(t_0) + d_t V$. I costi di transazione al tempo $t_0 + dT$ sono proporzionali ai cambiamenti nelle posizioni determinati da $d_t V$. Infatti, considerando un'espansione di primo ordine dell'allocazione si ottiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t_0 + dT) = \boldsymbol{\omega}[\,V(t_0) + d_t V] \simeq \boldsymbol{\omega}[V(t_0)] + \sum_{i,j} d_t V_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial V_{ij}} \\ = \boldsymbol{\omega}(t_0) + d_t \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Così, data la matrice delle oscillazioni $d_t V$, i corrispondenti cambiamenti nell'allocazione sono dati da

$$d_t \omega_k = \sum_{i,j} d_t V_{ij} \frac{\partial \omega_k}{\partial V_{ij}}. \tag{2.20}$$

2.4.1 I Costi Attesi

Il costo totale di transazione indotto da $d_t V$ è una variabile aleatoria positiva. Come è stato osservato nelle sezioni precedenti, anche in questo caso è utile usare una norma L^2 per valutare il costo di transazione.
In questo modo, la varianza delle oscillazioni per il $k-esimo$ asset prende la forma

$$(d_t \omega_k)^2 = \sum_{i,j} \sum_{p,q} \frac{\partial \omega_k}{\partial V_{ij}} d_t V_{ij} d_t V_{pq} \frac{\partial \omega_k}{\partial V_{pq}}$$

dove $(d_t \omega_k)^2 = (d_t \omega_k(d_t V))^2$ è una variabile random. In questa forma, il valore atteso della covarianza può essere calcolato analiticamente ed esso coinvolge il valore atteso

della matrice di covarianza delle fluttuazioni $\mathbb{E}[d_tV_{ij}\ d_tV_{pq}]$.
Il quadrato del totale costo di transazione atteso risulta essere

$$\mathbb{E}_{t_0}[{T_c}^2] = s^2 \sum_k \sum_{i,j,p,q} \frac{\partial \omega_k}{\partial V_{ij}} \mathbb{E}[d_tV_{ij} d_tV_{pq}] \frac{\partial \omega_k}{\partial V_{pq}}. \tag{2.21}$$

A questo punto, è necessario definire una distribuzione di probabilità per d_tV affinchè si possa valutare il valore atteso di questo termine, presente nella funzione costo di transazione.
Sono diverse le possibili assunzioni che possono farsi, di complessità e realismo crescenti. In questa tesi, lo scopo è quello di esporre il razionale dell'approccio e ci si limita ad un caso scarsamente realistico, ma di ragionevole trattabilità analitica.
Si assume che i rendimenti seguano un processo descritto da un modello stazionario con distribuzione normale, ossia

$$r[\delta t](t) \sim \mathcal{N}(0, V_\infty).$$

La covarianza V_∞ è costante ed i rendimenti sono indipendenti in diversi istanti di tempo.
I primi momenti per i rendimenti sono

$$\mathbb{E}[r_i(t)r_j(t)] = V_{\infty,ij}$$

$$\mathbb{E}[r_i(t)r_j(t)r_p(t^{'})r_q(t^{'})] = V_{\infty,ij}V_{\infty,pq} + \delta_{t,t'}(V_{\infty,ip}V_{\infty,jq} + V_{\infty,iq}V_{\infty,jp}).$$

Usando la definizione (2.1), il valore atteso della previsione di covarianza può essere valutato

$$\mathbb{E}_{t_0}\Big[V(t_0 + dT)\Big] = V_\infty + \boldsymbol{\eta}[n]\Big(V[n] - V_\infty\Big) + \lambda_\infty\Big(\hat{V}_\infty - V_\infty\Big)$$

$$\mathbb{E}_{t_0}\Big[d_tV\Big] = V_\infty - V + \boldsymbol{\eta}[n]\Big(V[n] - V_\infty\Big).$$

I calcoli per il secondo momento sono i seguenti:

$$\mathbb{E}_{t_0}\Big[V_{ij}(t_0+dT)V_{pq}(t_0+dT)\Big] =$$

$$= \sum_{k,k'=0}^{n-1} \lambda(n,k)\lambda(n,k')\Big\{V_{\infty,ij}V_{\infty,pq}$$

$$+\delta_{k,k'}\big(V_{\infty,ip}V_{\infty,jq}+V_{\infty,iq}V_{\infty,jp}\big)\Big\}+$$

$$+\Big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\Big)V_{\infty,ij}\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{pq}+$$

$$+\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{ij}\Big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\Big)V_{\infty,pq}+$$

$$+\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{ij}\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{pq} =$$

$$= \big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\big)^2 V_{\infty,ij}V_{\infty,pq}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda(n,k)^2\Big(V_{\infty,ip}V_{\infty,jq}+V_{\infty,iq}V_{\infty,jp}\Big)+$$

$$+\Big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\Big)V_{\infty,ij}\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{pq}+$$

$$+\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{ij}\Big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\Big)V_{\infty,pq}+$$

$$+\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{ij}\Big(\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{pq} =$$

$$= \Big(\big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\big)V_\infty+\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{ij}$$

$$\Big(\big(1-\boldsymbol{\eta}[n]-\lambda_\infty\big)V_\infty+\boldsymbol{\eta}[n]V[n]+\lambda_\infty\hat{V}_\infty\Big)_{pq}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda(n,k)^2\big(V_{\infty,ip}V_{\infty,jq}+V_{\infty,iq}V_{\infty,jp}\big).$$

Definendo la funzione

$$g(dT)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda(n,k)^2$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{t_0}\Big[V_{ij}(t_0+dT)V_{pq}(t_0+dT)\Big]\\
&=\mathbb{E}_{t_0}\Big[V_{ij}(t_0+dT)\Big]\mathbb{E}_{t_0}\Big[V_{pq}(t_0+dT)\Big]\\
&\quad+g(dT)\big(V_{\infty,ip}V_{\infty,jq}+V_{\infty,iq}V_{\infty,jp}\big).
\end{aligned}
$$

La funzione $g(dT)$ è una funzione di λ, quantità usata nella stima della covarianza. Nella pratica, la covarianza assunta V_∞ per i rendimenti non è nota, perciò viene sostituita con la previsione $\hat{V}_\infty$.

Il processo dei rendimenti descritto permette di calcolare il primo e secondo momento di covarianza il che porta a derivare momenti per d_tV. Per l'incremento di covarianza, alcuni calcoli portano a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t_0}\Big[d_tV_{ij}d_tV_{pq}\Big] &= dH_{ij}dH_{pq}+g(dT)\big(H_{ip}H_{jq}+H_{iq}H_{jp}\big)\\
dH=\mathbb{E}_{t_0}\big[d_tV\big] &= V_\infty - V + \boldsymbol{\eta}[n]\big(V[n]-V_\infty\big)\\
H &= V_\infty.
\end{aligned}
$$

In questa espressione H e dH sono matrici che possono essere calcolate e valutate grazie al set di informazioni note al tempo t_0 e dai parametri assunti per il processo dei prezzi; la matrice dH rappresenta l'attesa condizionata della varianza.
In questo modo si può calcolare il quadrato del costo totale di transazione che diventa

$$
\mathbb{E}_{t_0}[{T_c}^2] = s^2\sum_k\sum_{i,j,p,q}\frac{\partial\omega_k}{\partial V_{ij}}\Big[dH_{ij}dH_{pq}+g(dT)\big(H_{ip}H_{jq}+H_{iq}H_{jp}\big)\Big]\frac{\partial\omega_k}{\partial V_{pq}}. \tag{2.22}
$$

Subito si nota che $\mathbb{E}[{T_c}^2]$ è proporzionale a s^2 e che dipende da $\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial V}$. Il parametro s è una misura del costo di transazione e si può vedere come il parametro che controlla la regolarizzazione della covarianza.

2.4.2 La Lagrangiana

La Lagrangiana finale è semplicemente composta dalla varianza, che rappresenta il rischio al quadrato, dalla radice quadrata dei costi di transazione, dalla radice quadrata dei costi di transazione attesi dovuti alla aleatorietà delle posizioni e dal vincolo di normalizzazione

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal V\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}s^2(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0})^\intercal(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[{T_c}^2] + \lambda\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\omega_0^+}. \tag{2.23}$$

Il costo atteso di transazione $\mathbb{E}[{T_c}^2]$ nella Lagrangiana porta ad una dipendenza della funzione da $\mathcal{L}(\boldsymbol{\omega}, \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial V}, V)$, dove V è nota.
Questa equazione può essere risolta numericamente aggiungendo vincoli arbitrari sui pesi. La struttura della Lagrangiana è simile alla formulazione del problema di Markowitz eccetto per il termine corrispondente al finanziamento dell'allocazione tramite il portafoglio di base a lungo termine. La soluzione ha la stessa forma analitica in entrambi i casi, ma la covarianza è modificata da un termine che effettivamente la regolarizza: il costo di transazione per giungere al portafoglio ottimale.

2.5 Soluzione Autoconsistente senza vincoli

Giunti a questo punto della trattazione, è molto utile introdurre delle approssimazioni che permettano di ricavare una soluzione analitica. Come si vedrà, quest'ultima richiama la soluzione di Markowitz, ma con l'importante differenza legata alla regolarizzazione.
Una strategia di approssimazione è quella di utilizzare un'espansione in s, dove s è il costo di transazione. Si considerano solo termini dell'ordine di s^2, trascurando quelli di ordine superiori.
Il costo di transazione ${T_c}^2$ è già dell'ordine di s^2, perciò servono solo termini dell'ordine di s^0.
Si definiscono

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}} &= V + s^2(\mathbb{I} + \mathcal{A}), \\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}} &= \frac{V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

con l'operatore $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ simmetrico e definito successivamente. Il vettore $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}+\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ è normalizzato e vale la condizione $\boldsymbol{\iota}^{\intercal}\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}+\boldsymbol{\mathcal{A}}} = 1$.
La deviazione $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ dipende esplicitamente dall'inverso della covarianza grazie alla forma

$$\boldsymbol{\delta\omega_0^+} = \boldsymbol{\delta v_0} + \boldsymbol{\delta v_2},$$

dove $\boldsymbol{\delta v_0}$ dipende da V all'ordine di s^0, mentre $\boldsymbol{\delta v_2}$ dipende da V all'ordine di s^2. La dipendenza di $\boldsymbol{\delta v_0}$ da V è data da

$$\boldsymbol{\delta v_0} = a\boldsymbol{\varphi}_{\mathbb{I}+\boldsymbol{\mathcal{A}}},$$

in cui il numero reale $a = a(V)$ e l'operatore simmetrico $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ sono parametri liberi.

2.5.1 Il termine di Fluttuazione

Al punto corrente, si valuta la sensibilità dell'allocazione rispetto alle fluttuazioni nella covarianza. Per piccole fluttuazioni d_tV della covarianza V si ha

$$(V + d_tV + s^2\Omega)^{-1} =$$

$$\begin{aligned} &= \big\{(V + s^2\Omega)(\mathbb{I} + (V + s^2\Omega)^{-1}d_tV)\big\}^{-1} \simeq \\ &\simeq \big(\mathbb{I} - (V + s^2\Omega)^{-1}d_tV\big)(V + s^2\Omega)^{-1} = \\ &= (V + s^2\Omega)^{-1} - (V + s^2\Omega)^{-1}d_tV(V + s^2\Omega)^{-1}. \end{aligned}$$

Nel caso qui analizzato, $\Omega = \mathbb{I} + \mathcal{A}$ dipende anche da V, ma la sua dipendenza è dell'ordine di s^2 e viene trascurata. Quindi, la derivata dell'inverso della matrice di covarianza è dato dal coefficiente di d_tV, vale a dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{pq}}{\partial V_{ij}} &= -\frac{1}{2}\big\{(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{pi}(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{jq} + \\ &+ (V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{pj}(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{iq}\big\} + \mathcal{O}(s^2) \qquad \forall i, j. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Per la componente $\boldsymbol{\delta v_0}$ dell'allocazione, la derivata risulta essere

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\delta v_0})_k}{\partial V_{ij}} = \frac{1}{2}\{-(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{ki}(\boldsymbol{\delta v_0})_j - (V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{kj}(\boldsymbol{\delta v_0})_i\}+ \\ +(\boldsymbol{\delta v_0})_k \frac{(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}})_{ij}}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota}}$$

usando l'equazione (2.25).

Grazie alla linearità e all'assunzione fatta relativamente agli ordini di s per $(\boldsymbol{\delta v_0})_k$, la derivata di $\boldsymbol{\omega_0^+}$ è

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial V_{ij}} = \frac{\partial \delta\omega^+_{0,k}}{\partial V_{ij}} = \frac{\partial \delta v_{0,k}}{\partial V_{ij}} + \mathcal{O}(s^2).$$

La forma sopra ricavata per la sensibilità del peso ω_k rispetto alla covarianza può essere inserita nell'espressione del costo di transazione indotto dalle fluttuazioni, eq. (2.22). Le fluttuazioni di $d_t\boldsymbol{\omega}$ possono essere esplicitate come una forma quadratica di $\boldsymbol{\delta v_0}$, passando al costo di transazione

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t_0}[T_c{}^2] &= s^2 \boldsymbol{\delta v_0}^{\intercal}\mathcal{A}\boldsymbol{\delta v_0} \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_{MR} + 2g(dT)\mathcal{A}_{x-cov} \end{aligned} \tag{2.26}$$

dove gli operatori $\mathcal{A}$ sono espressioni in V, H, dH. Le esplicite espressioni di essi sono

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{MR} = (V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}dH - k_{MR}\mathbb{I})^{\intercal}(V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}dH - k_{MR}\mathbb{I}); \\ k_{MR} = \frac{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}dHV^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota}}; \\ \mathcal{A}_{x-cov} = \tfrac{1}{2}HV^{-2}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}H + \tfrac{1}{2}\theta H + k^2_{x-cov}\mathbb{I}+ \\ -\tfrac{1}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota}}\{HV^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}HV^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}+ \\ +V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}HV^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}H\} \\ con \quad \theta = tr(HV^{-2}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}); \\ k_{x-cov} = \frac{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}HV^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^{\intercal}V^{-1}_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\iota}}. \end{gathered}$$

Un'analisi dell'espressione (2.26) è istruttiva per comprendere la questione. L'operatore $\mathcal{A}$ è uniforme, di grado 2 rispetto ad H e dH e di grado -2 rispetto a V. Questi gradi sono il risultato della struttura iniziale, delle derivate e della norma L^2. In sostanza, il

problema di allocazione è controllato da V, che rappresenta il termine usuale generatore del rischio nella derivazione di Markowitz, da $s^2V^{-2}H^2$, presente nel costo atteso per via delle fluttuazioni, e da $s^2\mathbb{I}$, termine del costo di transazione.
Il problema che sorge è quello legato ai piccoli autovalori presenti nella matrice di covarianza, corrispondenti ad un portafoglio con basso rischio. I piccoli autovalori di V portano grandi contributi in V^{-1}; si ha che V^{-1} è bilanciata da H nel termine $s^2v^{-2}H^2$. Sono da distinguere due casi, che dipendono dal fatto che i piccoli autovalori presenti in V ed in H appartengano allo stesso sottospazio oppure no. Nel caso in cui i piccoli autovalori di V non condividano lo stesso sottospazio di quelli di H, il prodotto $V^{-2}H$ risulta grande, portando una forte regolarizzazione ai piccoli autovalori di V. Ciò significa che V contiene combinazioni di asset con basse varianze, mentre H vede queste come rischiose; il che porta a grandi contributi in $\mathcal{A}$, che vengono quindi soppressi nella procedura di ottimizzazione. D'altro canto, quando, in un dato sottospazio, sia V che H hanno piccoli autovalori, il prodotto $V^{-2}H^2$ in questo sottospazio è di ordine 1 apportando un contributo normale in $\mathcal{A}$. Il risultato è che alcune combinazioni di asset portano a combinazioni con piccole varianze e questa valutazione vale sia per V che per H. In sintesi, i contributi di V^{-2} regolarizzano la covarianza V con un peso fissato dalle fluttuazioni di covarianza H.

2.5.2 L'equazione stazionaria per l'allocazione

Si considera la Lagrangiana definita come in equazione (2.23). La proiezione nel sottospazio perpendicolare della derivata rispetto a $\boldsymbol{\delta\omega_0^+}$ porta all'equazione

$$P_\perp\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\delta\omega_0^+}}\right) = P_\perp\big\{\, V\boldsymbol{\omega_{LT}} + V\boldsymbol{\delta\omega_0^+} + s^2(\boldsymbol{\delta\omega_0^+} - \boldsymbol{\delta\omega_0}) + \\ + s^2\mathcal{A}\boldsymbol{\delta v_0} + \lambda\boldsymbol{\iota}\big\} = 0.$$

L'equazione tra parentesi si può riscrivere come

$$V\boldsymbol{\delta\omega_0^+} + s^2\boldsymbol{\delta\omega_0^+} + s^2\mathcal{A}\boldsymbol{\delta v_0} = \\ = -\lambda\boldsymbol{\iota} + s^2\boldsymbol{\delta\omega_0} - \alpha\, V\boldsymbol{\omega_{LT}}$$

che può essere fattorizzata nel seguente modo

$$
\begin{aligned}
(V + s^2(\mathbb{I} + \mathcal{A}))\boldsymbol{\delta v_0} + (V + s^2\mathbb{I})\boldsymbol{\delta v_2} = \\
= -\lambda\boldsymbol{\iota} + s^2\boldsymbol{\delta\omega_0} - \alpha V\boldsymbol{\omega_{LT}}.
\end{aligned}
$$

Questa equazione vettoriale può essere scomposta in due parti

$$
\begin{aligned}
V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}\boldsymbol{\delta v_0} = -\lambda\boldsymbol{\iota}, \\
(V + s^2\mathbb{I})\boldsymbol{\delta v_2} = s^2\boldsymbol{\delta\omega_0} - \alpha V\boldsymbol{\omega_{LT}}.
\end{aligned}
$$

Usando l'uguaglianza $(V + s^2\mathbb{I})^{-1}\ V = \mathbb{I}$ - $s^2(V + s^2\mathbb{I})^{-1} = \mathbb{I}$ - $s^2V_{\mathbb{I}}^{-1}$, le soluzioni sono

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta v_0} = -\lambda V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}, \\
\boldsymbol{\delta v_2} = s^2V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\delta\omega_0} - \alpha(1 - s^2V_{\mathbb{I}}^{-1})\boldsymbol{\omega_{LT}} = \\
= -\alpha\boldsymbol{\omega_{LT}} + s^2V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}).
\end{aligned}
$$

La condizione $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta\omega_0^+} = \boldsymbol{\iota}^\intercal(\boldsymbol{\delta v_0} + \boldsymbol{\delta v_2}) = 0$ conduce a due condizioni: $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta v_0} =$ - β e $\boldsymbol{\iota}^\intercal\boldsymbol{\delta v_2} = \beta$. Moltiplicando entrambe le soluzioni per $\boldsymbol{\iota}$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
-\beta = -\lambda\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}, \\
\beta = -\alpha + s^2\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}).
\end{aligned}
$$

Il parametro β può essere eliminato tra le due equazioni portando alla soluzione per il moltiplicatore di Lagrange

$$
\lambda = \frac{1}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}\left\{-\alpha + s^2\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}})\right\}.
$$

La soluzione per $\boldsymbol{\delta v_0}$ è

$$
\boldsymbol{\delta v_0} = \frac{V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}(\alpha - s^2\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}).
$$

Perciò, la soluzione risulta essere

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta\omega_0^+} = \boldsymbol{\delta v_0} + \boldsymbol{\delta v_2} = \\
= \alpha \frac{V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}} - s^2 \frac{V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}} \boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}) + \\
-\alpha\boldsymbol{\omega_{LT}} + s^2 V_{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}) = \\
= \alpha \left\{ \frac{V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}} - \boldsymbol{\omega_{LT}} \right\} + s^2 \left\{ \mathbb{I} - \frac{V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}^\intercal}{\boldsymbol{\iota}^\intercal V_{\mathbb{I}+\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{\iota}} \right\} \\
V_{\mathbb{I}}^{-1}\boldsymbol{\delta\omega_0} + \alpha\boldsymbol{\omega_{LT}}.
\end{aligned}
$$

Conclusioni

Dal punto di vista della consistenza concettuale, il portafoglio finanziario ottenuto seguendo la teoria di Markowitz risulta essere insoddisfacente in quanto, nonostante sia basato su ottime fondamenta teoriche, in assenza di vincoli esogeni non porta a soluzioni ben diversificate e stabili nel tempo. Il fulcro della questione risiede nei piccoli autovalori della matrice di covarianza. Questi ultimi corrispondono ad allocazioni di basso rischio spurie, sensibili al campione utilizzato nella procedura di stima dei parametri. Le origini dei piccoli autovalori sono l'intrinseca natura stocastica dei prezzi e le informazioni limitate che possono essere estratte dai dati storici, che portano alla rumorosità statistica della stima. Perciò, quando si applica la teoria di Markowitz nella sua formulazione più elementare, vi è un limite intrinseco legato al valore ignoto dei parametri veri di rendimento atteso e covarianza tra i titoli dell'universo finanziario.

Come descritto in questo testo, per ottenere soluzioni regolarizzate, si possono aggiungere i costi di transazione al problema di ottimizzazione. I costi di transazione considerati sono di due tipi. Il primo è legato alla variazione della posizione corrente in occasione della ri-allocazione successiva. Questo termine limita in modo naturale l'ampiezza delle variazioni di allocazione, ma non impedisce la formazione di portafogli poco diversificati e caratterizzati da posizioni estremamente lunghe e corte come conseguenza di più ri-allocazioni successive. Per risolvere definitivamente il problema dei piccoli autovalori, causa di questo fenomeno, è necessario introdurre un secondo costo, proporzionale al valore atteso di variazione della covarianza dei rendimenti tra due allocazioni successive. Il termine derivante che compare nella funzione da ottimizzare è proporzionale al quadrato dell'inverso della matrice di covarianza. Questo fatto è sufficiente a garantire la regolarizzazione della soluzione. Pertanto, riconoscere la variabilità temporale della covarianza è essenziale ed è utile ricordare che due sono le cause, di natura estremamente differente, di questo effetto. Il primo è un fatto dinamico, proprio dei mercati finanziari. La volatilità dei titoli è caratterizzata da una forte eteroschedasticità e, tipicamente, periodi di alta volatilità si alternano a periodi di volatilità moderata. Il secondo fatto è puramente statistico. La covarianza vera dei dati non è nota, ma ne è possibile solamente una stima statistica. Questa dipende in modo essenziale dal campione utilizzato. Il fatto che tra due istanti successivi di allocazione si rendano disponibili sul mercato nuove realizzazioni dei rendimenti influisce sulla stima dei parametri. Pertanto, è essenziale introdurre un approccio che mitighi la sensibilità delle allocazioni alla base storica considerata.

Un'ulteriore innovazione della procedura descritta è la separazione tra l'orizzonte di tempo tattico e quello strategico. L'allocazione strategica è definita dagli obbiettivi di rischio e rendimento a lungo termine e rappresenta l'allocazione di riserva da cui attingere per il finanziamento delle allocazioni tattiche. Questa tesi mostra come sia possibile pervenire ad allocazioni tattiche che non soffrano delle difficoltà note per le allocazioni di Markowitz, e senza la necessità di introdurre vincoli aggiuntivi esogeni al problema in esame.

Appendice A

Nozioni finanziarie

In questa appendice si richiamano alcuni termini ed alcuni concetti economici usati nella trattazione.

Definizione 1 (*Mercato Finanziario*).
Il *Mercato Finanziario* è un'aggregazione di scambi finanziari, che si realizzano con la negoziazione di strumenti finanziari. Essi si distinguono per il rendimento, per il rischio, per la scadenza e per la loro utilizzabilità come mezzi di pagamento.

Lo status di società quotata incide sulla disciplina degli strumenti finanziari da emettere attraverso i quali raccogliere risorse finanziarie sul mercato dei capitali.

Definizione 2 (*Azione*).
Le *Azioni* sono gli strumenti tramite i quali i mercati finanziari consentono ai soggetti in surplus monetario di offrire risorse economiche a titolo di capitale di rischio alle società. In contropartita, le imprese concedono a coloro che li offrono i diritti di partecipazione al capitale d'impresa.

Definizione 3 (*Obbligazione*).
Le *Obbligazioni* sono strumenti di debito, ossia permettono il trasferimento di risorse finanziarie da soggetti in surplus ad operatori in deficit. Esse attribuiscono il diritto alla

restituzione del capitale.

I titoli sono caratterizzati principalmente da due quantità: il rendimento ed il rischio.

Definizione 4 (*Rendimento*).
Il *Rendimento* di un'attività finanziaria esprime la redditività dell'operazione.

Definizione 5 (*Rischio*).
Il concetto di *Rischio* fa riferimento alla possibilità che il risultato effettivo di una determinata operazione di investimento possa discostarsi dal rendimento atteso stimato.
I rischi rilevanti che sono stati considerati sono i seguenti:

1. *Rischio di Mercato*: effetti imprevisti sul valore di mercato dell'attività finanziaria legati alla variazione dei tassi di interesse, dei tassi di cambio e di altri prezzi.

2. *Rishio di Liquidità*: legato all'idoneità dell'attività finanziaria ad essere convertita in moneta. La liquidità misura il grado di prontezza con cui un'attività può essere convertita in denaro liquido.

3. *Rischio di Fallimento*: legato al rischio che la società che emette i titoli finanziari cada verso il fallimento.

Definizione 6 (*Titolo Privo di Rischio*).
Un *Titolo Privo di Rischio* è un titolo che non ammette alcun rischio sopra citato ed ha rendimento certo .

Appendice B

Elementi di Probabilità Matematica

Definizione 7 (*Spazio Misurabile*).
Uno *Spazio Misurabile* è una coppia (Ω, F) tale che:

1. Ω è un insieme non vuoto;

2. F è una σ-algebra su Ω, ossia F è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di Ω che soddisfi le seguenti proprietà:

   (a) se A $\in F$ allora $A^c \in F$;

   (b) l'unione numerabile di elementi di F appartiene ad F.

Definizione 8 (*Misura*).
Una *Misura* sullo spazio misurabile (Ω, F) è una funzione $\mu : F \to [\ 0\ ,\ +\infty\ ]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. μ è σ-additiva su F, ossia per ogni successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi disgiunti di F vale $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Definizione 9 (*Spazio di Probabilità*).
Uno spazio con misura (Ω, F, μ) in cui $\mu(\Omega) = 1$ è uno *Spazio di Probabilità* e, usando P al posto di μ, si dice che P è una *Misura di Probabilità*.

In uno spazio di probabilità $(\Omega,\ F,\ P)$, ogni elemento $\omega \in \Omega$ è detto *esito*, ogni A $\in$ F è chiamato *evento* e il numero P(A) è la *Probabilità di A*. Inoltre, diciamo che Ω è lo *Spazio Campione* e F è la *σ-algebra degli eventi.*

Definizione 10 (*Variabile Aleatoria*).
Una *Variabile Aleatoria* su $(\Omega,\ F,\ P)$ a valori in $\mathbb{R}^d$ è una funzione
X : $\Omega \to \mathbb{R}^d$ tale che $\mathrm{X}^{-1}(B_d) \subseteq F$, ossia (X $\in$ H) $\in F$ per ogni H $\in B_d$.
Con la notazione X $\in mF$ si specifica che X è *F-misurabile.*

Definizione 11 (*Variabile Aleatoria Integrabile*).
Sia X una variabile aleatoria a valori reali, X : $\Omega \to \mathbb{R}$, tale che X $\in mF$.
Si consideri la parte positiva X^+ e la parte negativa X^- di X.
Se almeno uno tra $\int_\Omega X^+ dP$ e $\int_\Omega X^- dP$ è finito, allora X è *integrabile* e si ha

$$\int_\Omega X\, dP = \int_\Omega X^+ dP + \int_\Omega X^- dP \in [-\infty, +\infty].$$

Definizione 12 (*Valore Atteso*).
In uno spazio di probabilità $(\Omega,\ F,\ P)$, il *Valore Atteso* di una variabile aleatoria integrabile è definito come

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X\, dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega).$$

Definizione 13 (*Varianza*).
Sia X $\in L^2(\Omega,\ P)$ una variabile aleatoria reale.
Si definisce *Varianza* di X il numero reale, non negativo

$$var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Definizione 14 (*Covarianza*).

Date due variabili aleatorie X, Y $\in L^2(\Omega,\, P)$, la *Covarianza* tra X e Y è il numero reale

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Definizione 15 (*Matrice di Covarianza*).

Sia X = $(X_1,\, \ldots,\, X_d) \in L^2(\Omega,\, P)$ una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^d$.

La *Matrice di Covarianza di X* è la matrice *dxd* simmetrica definita come

$$cov(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T].$$

Siccome (cov(X)y) y^{T} = $\mathbb{E}[|($ X - $\mathbb{E}[X])^T$ y$|^2] \geq 0$, $\forall$y $\in \mathbb{R}^d$, la matrice di covarianza è *semi-definita positiva.*

Bibliografia

[1] Saunders, Cornett, Anolli, Alemanni *Economia degli Intermediari Finanziari*, MCGRAW-HILL, 2015

[2] Markowitz, H., *Portolio selection. J. Finance*, 1952, 7(1), 77-91

[3] Bodie, Kane and Marcus, *Investmentes*, MCGRAW-HILL, 2011

[4] Michaud, R., *The Markowitz optimization enigma: Is optimization optimal? Financial Anal. J.*, 1989, 45(1), 31-42

[5] Chopra, V.K. and Ziemba, W.T., *The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. J. Portfolio Manag.*, 1993, 19(2), 6-11

[6] Roy E. Bailey *The Economics of Financial Markets*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

[7] Zumbach, Gilles, *Stochastic regularization for the mean-variance allocation scheme, Quantitative Finance*, 2019

[8] Pascucci A., *Dispensa di Probabilità e Statistica - Teoria della probabilità*, 2019, `http://www.dm.unibo.it/~pascucci/`

Ringraziamenti

Alla fine di questo lavoro, vorrei essere grata alle persone che mi hanno affiancato nella ricerca e nella stesura dell'elaborato ed a tutti coloro con i quali ho condiviso e vissuto questi anni.
Innanzitutto, ringrazio il professore Giacomo Bormetti il quale mi ha accolto con piacere, sebbene non fossi una studentessa di corso. Sono riconoscente per avermi dato questa opportunità: partendo da un'idea confusa di base, ha compreso quale fosse la mia linea e mi ha aiutato a svilupparla del dettaglio con molti approfondimenti. Mi ha sempre affiancato cercando di ottenere il meglio in questo lavoro. Senza il suo appoggio il tutto non esisterebbe, perciò immensamente grazie.
Inoltre, il mio pensiero va al professor Andrea Pascucci, che ha compreso quanto fosse importante il mio disegno di tesi e mi ha indicato la figura più idonea per questo studio.
Ringrazio Laura, Francesca e tutte le altre persone con le quali ho avuto il piacere di percorrere questo corso. Abbiamo condiviso risa, gioie, delusioni, rabbia. Ci siamo supportati verso l'obbiettivo che finalmente è arrivato!
In più, ringrazio immensamente la mia famiglia, mia mamma e mio babbo. Loro mi hanno sempre sostenuto nel cammino ed in ogni decisione che io prendessi. Hanno accettato benevolmente un cambio di università a metà percorso e, successivamente, sono stati entusiasti della nuova strada scelta. Sono sempre stati la mia spalla e senza di loro tutto questo cammino non sarebbe stato possibile. Ringrazio tanto i miei fratelli, Paolo e Federica, per l'appoggio, l'aiuto ed il conforto. Tutti insieme siamo una grande squadra, una grande famiglia!
Ringrazio tutti i miei amici, sia i lontani che i vicini, per condividere insieme ogni momento e traguardo. La forza che mi hanno dato e l'energia ricevuta per iniziare le settimane sono state fondamentali.

Infine, un pensiero lo rivolgo a me stessa: faccio questo ringraziamento per ricordarmi quanta determinazione, costanza e dedizione siano servite in questo cammino.