Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

ANALISI DI FOURIER SUI GRUPPI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
NICOLA ARCOZZI

Presentata da:
DAVIDE DEL GATTO

Sessione Unica
Anno Accademico 2018-2019

Alla mia famiglia

Introduzione

Nei corsi istituzionali abbiamo introdotto uno strumento fondamentale per l'analisi matematica: la Trasformata di Fourier. Dopo averla definita e aver dimostrato le sue principali proprietà, abbiamo avuto una prova della sua potenza quando, attraverso di essa, siamo riusciti a risolvere il problema di Cauchy per l'equazione del calore. Scopo di questa tesi è generalizzare la Trasformata di Fourier per poterla applicare a funzioni di $L^1(G)$, dove G è un gruppo topologico localmente compatto e T_2, creando le giuste premesse per esempio per lo studio dell'analisi armonica astratta.
Nel primo capitolo definiremo il concetto di gruppo topologico: nella prima parte vedremo il forte legame esistente tra la struttura topologica e quella di gruppo, mentre nella seconda dimostreremo l'esistenza e l'unicità della misura di Haar, risultato centrale di questa tesi che useremo ampiamente nel terzo e quarto capitolo.
Nel secondo capitolo introdurremo il concetto di Algebra di Banach, ovvero un'algebra dotata di una metrica rispetto alla quale è completa, di cui studieremo in particolare gli ideali massimali e la loro corrispondenza con un tipo particolare di funzioni (i funzionali lineari moltiplicativi). Dopodichè definiremo la Trasformata di Gelfand, che ci permette, in un certo senso, di rendere gli elementi astratti dell'Algebra più concreti e maneggevoli associandoli a delle funzioni.
Nel terzo capitolo entreremo nel cuore della tesi: restringeremo la nostra attenzione ai gruppi abeliani, studieremo le proprietà dell'integrale definito in maniera astratta usando la misura di Haar e mostreremo come $L^1(G)$ possa essere visto come un'algebra di Banach utilizzando come operazione di moltiplicazione la convoluzione; introdurremo il gruppo duale Γ di G e quindi potremo finalmente definire la Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(G)$, verificando che essa è proprio la Trasformata di Gelfand vista nel

capitolo precedente; concluderemo con una serie di esempi, in particolare la prova che se $G = \mathbb{R}$ la Trasformata di Fourier coincide con quella di cui abbiamo parlato inizialmente, e un'introduzione alla Trasformata di Fourier-Stieltjes per misure complesse a variazione totale limitata che altro non è che un'ulteriore estesione di quanto fatto fino ad ora.
Il quarto capitolo si apre con la prova del Teorema di Bochner, un risultato molto profondo, importante per l'analisi armonica e altri ambiti più applicativi come la statistica, che mostra lo stretto legame esistente tra misure non negative e funzioni definite positive. Si passerà poi alla dimostrazione di due risultati classici, il Teorema di Inversione e il Teorema di Plancherel: il primo fornisce condizioni sufficienti affinchè la Trasformata di Fourier si possa invertire, mentre il secondo permette di stabilire un'isometria tra $L^2(G)$ e $L^2(\Gamma)$ attraverso l'estensione della Trasformata di Fourier a funzioni di $L^2(G)$. Il capitolo si chiude con la prova del Teorema di Dualità di Pontryagin, grazie al quale abbiamo la conferma di un risultato già intuibile in precedenza e cioè che dal punto di vista algebrico e topologico G e il suo biduale sono equivalenti.
In appendice abbiamo scelto di riportare, senza dimostrazione, alcuni risultati di teoria della misura che, pur non costituendo il fulcro della tesi, sono parte fondamentale delle conoscenze pregresse necessarie per la piena comprensione dell'argomento e sono ingredienti indispensabili per la maggior parte delle dimostrazioni.

Indice

Capitolo 1

Topologia generale dei gruppi LCA e misura di Haar

Notazione. Per la stesura di questo capitolo i nostri rifermimenti principali sono stati [8, cap.2] e [6, cap.11]; quindi, fedeli ad essi, useremo per i gruppi la notazione.

1.1 Topologia generale dei gruppi topologici

In questa sezione analizzaremo la topologia generale dei gruppi topologici; in particolare il nostro obbiettivo è che possa emergere il legame tra la struttura di gruppo e la topologia generale che viene data all'insieme.

Definizione 1.1.1. Un *gruppo topologico* è un gruppo dotato di una topologia tale che l'applicazione $f : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ da $G \times G$ in G sia continua.

Introduciamo due applicazioni importanti che sono legate alla struttura i gruppo:

Notazione. Indichiamo con $p : (x, y) \mapsto xy$ la mappa prodotto e con $i : x \mapsto x^{-1}$ la mappa di inversione. Indicheremo poi sempre con e l'elemento neutro del gruppo G che stiamo considerando.

Diamo una caratterizzazione della continuità dell'applicazione sopra citata:

Proposizione 1.1.1. *L'applicazione $f : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ è continua se e solo se le applicazioni $p : (x, y) \mapsto xy$ e $i : x \mapsto x^{-1}$ sono continue.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che la composizione di applicazioni continue è ancora continua:
$\Rightarrow$) Ricordando che $\forall x \in G$, $x \times G$ è omeomorfo a G (indichiamo l'omemomorfismo che lega lo spazio alla fibra con Om) e che la restizione di un'applicazione continua a un sottospazio topologico è ancora continua si ha che, posto $I = f\Big|_{\{e\}\times G} : (e, y) \mapsto y^{-1}$, $i = I \circ Om$; definiamo ora l'applicazione $k : (x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ che è continua per componenti per quanto visto sopra; basta ora osservare che $p = f \circ k$.
$\Leftarrow$) L'applicazione k sopra definita in queste ipotesi è ancora continua quindi basta osservare che $f = p \circ k$. $\square$

Introduciamo ora le seguenti:

Notazione. Siano $A, B \subseteq G$ poniamo:

$$AB = \{xy : x \in A, y \in B\}$$

Utilizzeremo a volte A^2 al posto di AA e aB invece che $\{a\}B$. Poniamo inoltre

$$A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}$$

Infine definiamo due applicazioni:

$$l_a : x \mapsto ax$$

$$r_a : x \mapsto xa^{-1}$$

Definizione 1.1.2. Sia $A \subseteq G$, A si dice simmetrico se $A = A^{-1}$

Proposizione 1.1.2. *Sia G un gruppo topologico; si hanno le seguenti proprietà:*

1. *Dato $a \in G$, le applicazioni l_a, r_a sono degli omeomorfismi da G in sé.*
2. *Se $\{U_\alpha\}$ è un sistema fondamentale di intorni dell'identità, allora $\forall a \in G$, $\{aU_\alpha\}$, $\{U_\alpha a\}$, $\{U_\alpha^{-1}a\}$, $\{aU_\alpha^{-1}\}$ sono sistemi fondamentali di intorni per a.*
3. *Dato U intorno di e, esiste un intono simmetrico V di e tale che $V^2 \subseteq U$.*

Dimostrazione. 1. l_a non è altro che la composizione tra l'immesione di G in $\{a\} \times G$ e la restizione dell'applicazione p a $\{a\} \times G$ per cui è continua; inoltre la sua inversa è $l_a^{-1} = l_{a^{-1}}$ che è continua e questo conclude; per l'applicazione r_a il ragionamento è del tutto analogo.

2. L'unica cosa da osservare è che l'applicazione i è un omeomorfismo da G in sé; infatti è biunivoca (ovvio per la definizione di gruppo) e la sua inversa è sé stessa. Il resto segue dal fatto che gli omeomorfismi sono delle applicazioni aperte e dal punto precedente.

3. Dato U intorno di e, poichè l'applicazione p è continua, $p^{-1}(U)$ è un intorno di (e, e); per definizione di topologia prodotto esistono due intorni di e, V e V' tali che $V \times V' \subseteq p^{-1}(U)$; posto ora $W = V \cup V'$, W è intorno di e e si ha $p(W) = W^2 \subseteq U$; se W non fosse simmetrico possiamo sempre scegliere $W \cup W^{-1}$, il quale è ovviamente simmetrico e intorno di e .

□

Osservazione 1.1.1. Il secondo punto del Teorema precedente ci permette di affermare che, conosciuta la topologia in un intorno del neutro (che potremmo pensare come una sorta di origine), attraveso delle "traslazioni" (anche se in questo contesto abbiamo usato la notazione moltiplicativa per l'operazione di gruppo, questa parola rende meglio l'idea) possiamo conoscere di fatto la topologia intorno ad un qualsiasi altro punto e questo ci dà un'idea del forte legame che si crea tra struttura topologica e struttura di gruppo.

Esempio 1.1.1. Elenchiamo ora una serie di esempi banali che ci permettano di fissare il concetto di gruppo topologico:

1. Un qualsiasi gruppo con la topologia discreta, per esempio $(\mathbb{Z}_n, +)$.

2. $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ con la metrica euclidea.

3. $(SO2, \circ)$, $(SO3, \circ)$ con la topologia indotta dall'immersione rispettivamente in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^6$.

Corollario 1.1.3. *Sia G un gruppo topologico, $A, B \subseteq G$;*

1. *Se A è aperto, allora AB è aperto $\forall B \subseteq G$.*

2. *Se A e B sono compatti, allora anche AB lo è.*

3. *Se $H \subseteq G$ è un sottogruppo di G allora $\overline{H}$ è anch'esso un sottogruppo.*

4. *Un sottogruppo* $H \subseteq G$ *è chiuso se solo se* G/H*, con la topologia quoziente è uno spazio di Hausdorff.*

5. *Se* H *è un sottogruppo normale allora* G/H *con la topologia quoziente è un gruppo topologico*

6. G *è di Hausdorff se e solo se* $\{e\}$ *è chiuso.*

7. *Un sottogruppo aperto è anche chiuso.*

Dimostrazione. 1. Osserviamo che

$$AB = \bigcup_{b \in B} Ab.$$

Ma Ab è aperto $\forall b \in B$ per quanto visto nella proposizione precente e questo conclude.

2. Segue immediatamente dal fatto che $p(A \times B) = AB$ e che l'immagine di un compatto mediante un'applicazione continua è compatta.

3. Per mostrare che $\overline{H}$ è un sottogruppo è sufficiente mostrare che $\forall x, y \in \overline{H}$, $xy^{-1} \in \overline{H}$; dati dunque $x, y \in \overline{H}$; sia U un intorno di xy^{-1}; per la continuità dell'applicazione p esistono V e W intorni rispettivamente di x e y^{-1} tali che $V \times W \subseteq p^{-1}(U)$ e quindi tali che $VW = p(V \times W) \subseteq U$. Siccome $x, y^{-1} \in \overline{H}$, $\exists\, \tilde{x} \in H \cap V$ e $\tilde{y} \in H \cap W$ e dunque $\tilde{x}\tilde{y} \in H \cap U$ che dunque è non vuota e quindi $xy^{-1} \in \overline{H}$.

4. Prima di tutto osserviamo il seguente fatto: preso $H \subseteq G$ sottogruppo, posto $Omeo(G) = \{f : G \to G : f \textit{ sia un omemorfismo}\}$ (che con la composizione è chiaramente un gruppo), considero:

$$\begin{aligned} \rho : H &\longrightarrow Omeo(G) \\ h &\longmapsto l_h \end{aligned}$$

ρ è chiaramente un omomorfismo di gruppi e poichè l'orbita di $x \in G$ è xH, posso vedere il quoziente G/H come un'azione di gruppi. Il vantaggio sta nel fatto che la proiezione canonica $\pi : G \longrightarrow G/H$ è aperta ([3, cap.6]), dal punto di vista

topologico; quindi:
$\Rightarrow$) siano $x, y \in G$ tali che $\pi(x) \neq \pi(y)$; allora $y \notin xH$ e dunque $e \notin xHy^{-1}$. per la proposizione precedente, usando il fatto che gli omemorfismi sono applicazioni chiuse si ha che xHy^{-1} è chiuso e siccome $e \notin xHy^{-1}$ allora $e \in (xHy^{-1})^c$ che è aperto e quindi esiste V intorno simmetrico di e tale che $V^2 \subseteq (xHy^{-1})^c$ e quindi $V^2 \cap xHy^{-1} = \emptyset$. A questo punto osserviamo che $\pi(Vx)$ e $\pi(Vy)$ sono intorni (perchè π è aperta) disgiunti; infatti se non lo fossero $\exists\, z \in VxH \cap VyH$ per cui $\exists v_1, v_2 \in V$ e $h \in H$ tale che $v_1xh = v_2y$; ma allora sarebbe $xhy^{-1} = v_1^{-1}v_2 \in V^2 \cap xHy^{-1}$ che è assurdo per quanto detto prima. Il quoziente è dunque di Hausdorff. $\Leftarrow$) Siccome G/H è di Hausdorff e i punti sono chiusi $[e]$ è chiuso e $H = \pi^{-1}([e])$ che è dunque chiuso per la continuità di π.

5. Ricordiamo che se H è un sottogruppo normale allora G/H è un gruppo e che la proiezione canonica $\pi : G \to G/H$ è un omomorfismo. Ora siano $x, y \in G$ e sia U un intorno di $\pi(xy^{-1})$; per continuità $\pi^{-1}(U)$ è un intorno di xy^{-1} in G . Usando la continuità dell'applicazione $f : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ esistono due intorni V e W rispettivamente di x e y tali che $VW^{-1} = f(V \times W) \subseteq \pi^{-1}(U)$; usando ancora il fatto che l'applicazione è aperta $\pi(V)$ e $\pi(W)$ sono intorni di $\pi(x)$e $pi(y)$; poichè l'applicazione è un omomorfismo si ha che $\pi(VW^{-1}) = \pi(V)\pi(W^{-1}) \subseteq U$. Allora denotando con

$$\begin{aligned} \bar{f} : G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (xH, yH) &\longmapsto xy^{-1}H \end{aligned}$$

si ha che $\pi(V) \times \pi(W) \subseteq \bar{f}^{-1}(U)$, quindi $\bar{f}$ è continua e il quoziente è un gruppo topologico.

6. $\Rightarrow$) Ovvio perchè in uno spazio di Hausdorff i punti sono chiusi.
$\Leftarrow$) $\{e\}$ è chiaramente un sottogruppo di G ed essendo anche normale e chiuso $G/\{e\}$ è un gruppo topologico di Hausdorff (vedi i due punti precedenti). La proiezione su quoziente è chiaramente un isomorfismo di gruppi (dunque è biunivoca), inoltre è continua e aperta; quindi è un omomorfismo e da questo possiamo concludere che G è di Hausdorff.

7. Ricordando che le classi date da u sottogruppo formano una partizione dell'insieme e la proposizione precedente si ha che, dato $H \subseteq G$ sottogruppo aperto, allora
$$H^c = \bigcup_{x \notin H} xH$$
e quindi è un'unione di aperti. H è dunque chiuso.

. $\square$

Definizione 1.1.3. Un gruppo topologico G si dice *LCA* (dall'inglese locally compact Hausdorff) se è di Hausdorff e localmente compatto.

Notazione.
- D'ora in avanti diremo che uno spazio topologico è T_2, come usualmente viene fatto in letteratura, per indicare il fatto che tale spazio è di Hausdorff.
- Dato uno spazio topologico X localmente compatto e T_2, denotiamo con $C_c(X)$ l'insieme
$$C_c(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} \,:\, supp(f)\,\text{è compatto}\}$$

Definizione 1.1.4. Data una funzione continua su un gruppo topologico G , definiamo la *traslata sinistra* (risp.*destra*) di f rispetto ad un elemento y di G come l'applicazione $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$ (risp.$R_y f(x) = f(xy)$). Una funzione f continua su G a valori reali o complessi si dice *uniformemente continua a sinistra* (risp. a *destra*) se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, V$un intorno di e tale che $\|L_y f - f\|_\infty < \varepsilon$, $\forall y \in V$.

Da qui in avanti, G indicherà sempre un gruppo LCA.

Proposizione 1.1.4. *Se $f \in C_c(G)$ allora f è uniformemente continua a destra e a sinistra.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'uniforme continuità a destra, quella a sinistra si prova in maniera del tutto analoga. Chiamiamo K il supporto di f e sia $\varepsilon > 0$; per la continuità di f e la proposizione 1.1.2, dato un $x \in K$ esiste un intorno U_x di e tale che $\forall y \in U_x$: $|f(xy) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ e per il punto 3 della proposizione 1.1.2 esiste V_x intorno simmetrico di e tale che $V_x V_x \subseteq U_x$. Allora $\{xV_x\}_{x \in K}$ è un ricoprimento di K e per compattezza esistono $x_1, \ldots, x_n \in K \,:\, K \subseteq \bigcup_1^n x_j V_{x_j}$. Definito $V = \bigcap_1^n V_{x_j}$, questo è chiaramente un intorno di e; mostriamo che esso è proprio l'intorno che cerchiamo. Infatti se $x \in K$

allora $\exists j : x \in x_j V_{x_j}$ e cioè $x_j^{-1}x \in V_{x_j}$ e dunque $xy = x_j(x_j^{-1}x)y \in x_j U_{x_j} \, \forall y \in V$ per come è definito V_{x_j}; quindi:

$$|f(xy) - f(x)| \leq |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Infine se $x \notin K$ si ha che $f(x) = 0$ e dunque o $f(xy) = 0$ se $(xy \notin K)$ o si ha come prima che $x_j^{-1}xy \in V_{x_j}$ per qualche j se $xy \in K$; in questo caso, usando le proprietà di V_{x_j}, $x_j^{-1}x = x_j^{-1}xyy^{-1} \in U_{x_j}$ perchè $x_j^{-1}xy \in V_{x_j}$ e $y^{-1} \in U_{x_j}$; quindi $|f(x_j) - f(x)| = |f(x_j)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ e usando la stessa disuguaglianza di prima $|f(xy)| < \varepsilon$ $\square$

1.2 La misura di Haar

Ciò che vogliamo fare in questo capitolo è dotare i gruppi topologici di una misura che sia legata all'operazioni definita su di essi. Per le definizini e i teoremi di teoria della misura si faccia riferimento all'appendice A.

Definizione 1.2.1. Dato G LCA, una *misura di Haar sinistra* (risp *destra*) è una misura di Radon su G non nulla che sia invariante per traslazioni sinistra (risp. destre) e cioè $\mu(xE) = \mu(E)$ (risp. $\mu(Ex) = \mu(E)$), $\forall x \in G$, $\forall E$ boreliano.

Riferendosi all'appedice A, la scelta di restringere il nostro campo di studio ai gruppi LCA risulta chiara: infatti la teoria della misura offre strumenti molto utili e interessanti che possono essere sfruttati solo se gli spazi su cui si lavora sono T_2 e localmente compatti, e alcuni di essi (in particolare il Teorema di Rappresentazione di Riesz A.1.1) saranno cruciali per provare l'esistenza e l'unicità (vedremo in quale senso) della misura di Haar.

Notazione. Useremo la seguente notazione:

$$C_c^+ = \{f \in C_c(G) \, : \, f \geq 0, \, \|f\|_\infty > 0\}$$

Proposizione 1.2.1. *Sia G un gruppo LCA; valgono allora se seguenti affermazioni:*

1. *Una misura di Radon μ su G è una misura di Haar sinistra se e solo se la misura $\check{\mu}$ definita da $\check{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ è una misura di Haar destra.*

2. *Una misura di Radon μ su G è una misura di Haar sinistra se e solo se $\int f \, d\mu = \int L_y f \, d\mu$, $\forall f \in C_c^+$, $y \in G$.*

3. *Se μ è un misura di Haar sinistra su G, allora $\mu(U) > 0$ con $U \subseteq G$ aperto non vuoto, e $\int f \, d\mu > 0$, $\forall f \in C_c^+$.*

4. *Se μ è una misura di Haar sinistra su G allora $\mu(G) < \infty$ se e solo se G è compatto.*

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$) Il fatto che $\dot{\mu}$ sia una misura è ovvio. Verifichiamo che sia una misura di Haar destra. Preso $x \in G$, $\dot{\mu}(Ex) = \mu((Ex)^{-1}) = \mu(x^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \dot{\mu}(E)$. $\Leftarrow$) Si prova in modo analogo all'implicazione precedente.

2. $\Rightarrow$) provatolo per le funzioni caratteristiche per cui è banale data l'invarianza per traslazioni, lo si può poi provare per le funzioni semplici e quindi usare i teoremi di approssimazione con questo tipo di funzioni per provare quanto richiesto [1]. $\Leftarrow$) ovvio perchè vale per le funzioni caratteristiche.

3. Siccome μ è regolare non nulla per definizione esiste almeno un compatto K con misura positiva (altrimenti μ sarebbe una misura nulla); se dunque U è un aperto non vuoto allora $\{kU \,:\, k \in K\}$ è un ricoprimento aperto e quindi per compattezza U ricopre K usando finite traslazioni sinistre e quindi necessariamente $\mu(U) \geq 0$, altrimenti $\mu(K) = 0$ per la subadditività della misura e l'invarianza per traslazioni; inoltre se f è come in ipotesi, consideriamo $U = \{x \,:\, f(x) \geq \frac{1}{2} \|f\|_\infty\}$ che ha sicuramente misura positiva in quanto $f \in C_c^+$ e si ha subito che $\int f \, d\mu \geq \frac{1}{2} \|f\|_\infty \mu(U) > 0$.

4. Se G è compatto, per definizione di misura di Radon ha misura finita; supponiamo che G non sia compatto e sia V un intorno compatto dell'origine il quale ha misura positiva per quanto visto del punto precedente; questo sicuramente non può ricoprire con traslazioni finite G altrimeni G sarebbe compatto (perchè sarebbe unione finita di compatti che è compatta), e quindi esiste una successione

[1] In generale vale che le proprietà che possiamo provare per le funzioni caratteristiche, possono essere estese usando i teoremi di Beppo-Levi e Convergenza Dominata di Lebesgue e alcuni argomenti di approssimazione per funzioni semplici. Maggiori dettagli teorici riguardanti questa tecnica dimostrativa, che a volte in letteratura prende il nome di *Procedura standard* (e noi ci riferiremo ad essa con questo nome) si possono reperire in [7, cap.2, Osservazione 2.2.21], dove, anche se si fa riferimento solo a spazi di probabilità, il concetto è del tutto analogo.

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $x_n \notin \cup_1^{n-1} x_j V$ per ogni n. Sia ora U un intorno simmetrico dell'origine tale che $UU \subseteq V$. Se $m > n$ e $x_n U \cap x_m U$ è non vuota, allora esiste $u \in U \,:\, x_m u \in x_n U \cap x_m U$ e quindi $x_n^{-1} x_m u \in U$; essendo U simmetrico si ha che $x_m \in x_n UU \subseteq x_n V$ e questa è una contraddizione per la definizione di x_m. Dunque gli insiemi $\{x_n U\}_{n=0}^{\infty}$ sono disgiunti ed essendo μ una misura di Haar sinistra e ricordando il punto precedente, allora $\mu(G) \geq \mu(\cup_1^{\infty} x_m U) = \infty$.

□

Vogliamo ora provare a costruire su un gruppo G qualunque una misura di Haar; il Teorema di Rappresentazione di Riesz A.1.1 ci mostra il legame che esiste tra funzionali lineari positivi definiti su $C_c(G)$ e misure di Radon su G, per cui una strategia che potremmo tentare definire una misura partendo proprio da queste funzioni.

Definizione 1.2.2. Siano $f, \phi \in C_c^+$; il *numero di copertura di Haar di f rispetto a ϕ* è:

$$(f : \phi) = inf\{\sum_1^n c_j \;:\; f \leq \sum_1^n c_j L_{x_j}\phi, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N} \text{ e } x_1, \ldots, x_n \in G\} \qquad (1.1)$$

Proposizione 1.2.2. *Supponiamo che f, g, $\phi \in C_c^+$; allora*

1. *L'insieme nella 1.1 è non vuoto.*
2. $(f : \phi) > 0$.
3. $(f : \phi) = (L_x f : \phi)$ *per ogni* $x \in G$.
4. $(cf : \phi) = c(f : \phi)$ *per ogni* $c > 0$.
5. $(f + g : \phi) \leq (f : \phi) + (g : \phi)$.
6. $(f : \phi) \leq (f : g)(g : \phi)$.

Dimostrazione. 1. Consideriamo $\{x \,:\, \phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|_\infty\}$; questo aperto è sicuramente non vuoto e quindi finite traslazioni sinistre di tale insieme ricoprono il supporto di f e da ciò segue immediatamente che

$$f \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} \sum_1^n L_{x_j}\phi, \text{ per qualche } x_1, \ldots, x_n \in G.$$

2. Supponiamo che esistano $x_1, \dots, x_n \in G$ e $c_1, \dots, c_n$ tali che $\sum_1^n c_j < \frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}$ e $f \leq \sum_1^n c_j L_{x_j}\phi$, allora si ha che $\|f\|_\infty \leq \sum_1^n c_j \|\phi\|_\infty < \|f\|_\infty$ assurdo.

3. Si ha che $f \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$ se e solo se $L_x f \leq \sum c_j L_{xx_j}\phi$.

4. ovvio.

5. Se $f \leq \sum_1^m c_j L_{x_j}\phi$ e $g \leq \sum_{m+1}^n c_j L x_j$ allora $f + g \leq \sum_1^n c_j L_{x_j}\phi$ e il risultato segue immediatamente.

6. Se $f \leq \sum c_j L_{x_j}\phi$ e $g \leq \sum d_k L_{y_k}\phi$ allora $\sum_{j,k} c_j d_k L_{x_j y_k}\phi$; poiché $\sum_{j,k} c_j d_k = (\sum_j c_j)(\sum_k d_k)$, il risultato segue.

□

Consideriamo f_0, $\phi \in C_c^+$ fissate; definiamo la funzione

$$\begin{aligned} I_\phi : C_c^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto I_\phi(f) = \frac{(f : \phi)}{(f_0 : \phi)} \end{aligned}$$

Questa funzione, per quanto visto nella proposizione precedente è quasi un funzionale lineare su C_c^+, ma per il momento risulta essere solo subadditivo e lineare rispetto a scalari positivi.. Inoltre soddisfa la seguente disuguaglianza (usando la proposizione sopra):

$$(f_0 : f)^{-1} \leq \frac{(f : \phi)}{(f_0 : f)(f : \phi)} \leq I_\phi(f) \leq \frac{(f : f_0)(f_0 : \phi)}{(f_0 : f)} \leq (f : f_0) \tag{1.2}$$

Quello che mostriamo ora è che la funzione I_ϕ è quasi additiva se il supporto di ϕ è piccolo:

Proposizione 1.2.3. *Siano f_1, $f_2 \in C_c^+$ e $\varepsilon > 0$, allora esiste un intorno V dell'unità tale che $I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + \varepsilon$ se supp$(\phi) \subseteq V$.*

Dimostrazione. Fissiamo $g \in C_c^+$ tale che $g = 1$ in $supp(f_1+f_2)$ e sia δ un numero positivo di cui chiariremo dopo la funzione. Poniamo $h = f_1 + f_2 + \delta g$ e $h_i = f_i/h$, $(i = 1, 2)$. É immediato che $h_i \in C_c^+$ e quindi per la proposizione 1.1.4 esiste un intorno dell'unità tale che $\forall x, y \, : \, y^{-1}x \in V$ vale che $|h_i(x) - h_i(y) < \delta|$ (si è usata qui l'uniforme continuità a destra). Se $\phi \in C_c^+$, $supp(\phi) \subseteq V$, e $h \leq \sum_1^n c_j L_{x_j}\phi$, allora $|h_i(x) - h_i(x_j)|$ ogniqualvolta $x_j^{-1}x \in supp(\phi)$, quindi

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leq \sum_j c_j\phi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leq \sum_j c_j\phi(x_j^{-1}x)[h_i(x_j) + \delta;]$$

questo ci permette di affermare che:

$$(f_i : \phi) \leq c_j[h_i(x_j) + \delta],$$

e poichè $h_1 + h_2 \leq 1$,

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq \sum_j c_j[1 + 2\delta].$$

Ora possiamo scegliere $\sum_j c_j$ arbitrariamente vicino a $(h : \phi)$, quindi la disuguaglianza diventa

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq (h : \phi)[1 + 2\delta],$$

utilizzando poi la proposizione 1.2.2 e dividendo entrambi i membri per $(f_0 : \phi)$ si ha che:

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq (1 + \delta)I_\phi(h) \leq (1 + 2\delta(I_\phi(f_1 + f_2) + \delta I_\phi(g));$$

svolgendo i prodotti si ha che

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + 2\delta I_\phi(f_1 + f_2) + \delta(1 + 2\delta)I_\phi(g);$$

Per concludere basta ricordare la (1.2) e scegliere δ in modo tale che

$$2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < \varepsilon.$$

□

Fatte queste premesse, possiamo passare alla dimostrazione del primo risultato importante di questa tesi:

Teorema 1.2.4 (Esistenza della misura di Haar). *Su G è sempre possibile definire una misura di Haar sinistra.*

Dimostrazione. Consideriamo gli intervalli $X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$, $f \in C_c^+$, e sia $X = \Pi_{f \in C_c^+} X_f$. Per il lemma di Tychonoff[2] questo spazio è compatto e di Hausdorff, e può essere visto come l'insieme delle funzioni che ad ogni $f \in C_c^+$ associano un numero reale in X_f, e quindi X contiene tutti i funzionali del tipo I_ϕ con $\phi \in C_c^+$. Ora per ogni V intorno compatto dell'origine poniamo $K(V) = \overline{\{I_\phi : supp(\phi) \subseteq V\}}$ (chiusura topologica in X); questa famiglia di chiusi gode della proprietà di intersezioni finite perché dati $V_1, \ldots, V_n$ intorni compatti dell'origine si ha che $\cap_1^n K(V_j) \supseteq K(\cap_1^n V_j)$ e quindi per la caratterizzazione degli insiemi compatti esiste $I \in \cap K(V)$, dove V è un intorno compatto dell'origine. Quindi siccome I sta nella chiusura di ognuno degli insiemi del tipo $\{I_\phi : supp(\phi) \subseteq V\}$, allora ogni intorno di I interseca tali insiemi; ricordando la topologia standard del prodotto infinito di spazi topologici questo avviene se e solo se per qualunque V intorno compatto dell'origine $f_1, \ldots, f_n \in C_c^+$, $\varepsilon > 0$ fissati esiste $\phi \in C_c^+ \ : \ |I_\phi(f_j) - \mathrm{I}\ (f_j)| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$. Dunque usando i due risultati precedenti possiamo facilmente mostrare che

- I è ovviamente non nullo per il fatto che i numeri di copertura sono strettamente positivi e che $I \in X$.

- I è additivo: infatti fissato l'intorno V di cui si parla nel risultato 1.2.3, le funzioni $f_1,\ f_2,\ f_1 + f_2 \in C_c^+$ e $\varepsilon > 0$, per quanto appena detto, esiste $\phi \in C_c^+$ con $supp(\phi) \subseteq V\ :\ |I(f_i) - I_\phi(f_i)| < \varepsilon$ e $|I(f_1 + f_2) - I_\phi(f_1 + f_2)| < \varepsilon$; a questo punto:

$$\begin{aligned}|I(f_1 + f_2) - \mathrm{I}\ (f_1) - I(f_2)| \leq |I(f_1 + f_2) - I_\phi(f_1 + f_2)| \\ + |I(f_1) - I_\phi(f_1)| + |I(f_2) - I_\phi(f_2)| \\ + |I_\phi(f_1 + f_2) - I_\phi(f_1) - I_\phi(f_2)| \leq 4\varepsilon;\end{aligned}$$

  siccome ε è arbitrario si ha l'additività.

- I è lineare rispetto alla moltiplicazione per scalari positivi: sia ora $c > 0$, prendiamo un qualsiasi intorno dell'origine V, e fissiamo $f \in C_c^+$; allora sappiano che esiste

[2]per un risultato di questo fatto, e anche per la caratterizzazione degli insiemi compatti di cui si parla sotto si può consultare [3, cap.3, par.3]

$\phi \in C_c^+$, $supp(\phi) \in V$: $|I(f) - I_\phi(f)| < \varepsilon$, $|I(cf) - I_\phi(cf)|$ e quindi vale che:

$$|I(cf) - cI(f)| \leq |I(cf) - I_\phi(cf)| + c|I(f) - I_\phi(f)| + \underbrace{|I_\phi(cf) - cI_\phi(f)|}_{=0 \text{ per la proposizione 1.2.2}} \leq \varepsilon + c\varepsilon$$

Per ε arbitrario e questo conclude.

- I è invariante per traslazioni sinistre: questo si dimostra come il punto precedente e usando sempre 1.2.2.

Inoltre per estenderlo a $C_c(G)$ è sufficiente considerare il funzionale $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$. Il teorema si conclude utilizzando il Teorema di Rappresentazione di Riesz A.1.1 e osservando che, siccome il funzionale è invariante per traslazioni sinistre e non nullo, allora lo sarà anche la misura ad esso associata. □

Il teorema seguente aggiunge un'importante proprietà alla misura di Haar perchè ne dimostra in un certo senso l'unicità.

Teorema 1.2.5 (Unicità della misura si Haar). *Siano μ, ν misure di Haar sul gruppo G, allora esiste una costante $\lambda > 0$ tale che $\mu = \lambda \cdot \nu$.*

Dimostrazione. Per provare il risultato, siccome le misure di Haar sono misure di Radon, è sufficiente dimostrare che date f, $g \in C_c^+$, il rapporto $r_f = \int f d\mu / \int f d\nu$ è uguale al rapporto $r_g = \int g d\mu / \int g d\nu$, perchè tutte le funzioni caratteristiche aventi come supporto un insieme compatto fanno parte di C_c^+. Fissato un intorno simmetrico dell'unità V_0, consideriamo gli insiemi $A = [supp(f)]V_0 \cup V_0[supp(f)]$ e $B = [supp(g)]V_0 \cup V_0[supp(g)]$ che sono compatti per quanto visto nel corollario 1.1.3. Inoltre fissato $y \in V_0$ le funzioni $x \mapsto f(xy) - f(yx)$ e $x \mapsto g(xy) - g(yx)$ sono supportate rispettivamente in A e B; infatti se $f(xy) - f(yx) \neq 0$ allora necessariamente $f(xy) \neq 0$ o $f(yx) \neq 0$ e quindi, sfruttando il fatto che V_0 è simmetrico e quindi $y^{-1} \in V_0$, $x \in [supp(f)]V_0$ o $x \in V_0[supp(f)]$ (per l'altra la dimostrazione è analoga). Sfruttando ora la proposizione 1.1.4 f e g sono uniformemente continue sia a destra che a sinistra, quindi esiste un intorno simmetrico compatto dell'unità V (che possiamo supporre incluso in V_0 [3]) tale che $\sup_x |f(xy) -$

[3] Il risultato di topologia generale che stiamo utilizzando e che utilizzeremo anche più avanti a volte senza ricordarlo, è il fatto che in uno spazio localmente compatto e T_2 ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti; per una prova di questo si può vedere [3, teorema 3.5.9]

$f(yx)| < \varepsilon$ e $\sup_x|g(xy) - g(yx)| < \varepsilon$; prendiamo ora $h \in C_c^+$ con $supp(h) \in V$ e $h(x) = h(x^{-1})$ (basta prendere $s \in C_c^+$ con $supp(s) \subseteq V$, e porre $h = s(x) + s(x^{-1})$). Allora

$$\begin{aligned}\int hd\nu \int fd\mu &= \int\int h(y)f(x)d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int h(y)\Big(\int f(x)d\mu(x)\Big)d\nu(y) = \int h(y)\Big(\int f(xy)d\mu(x)\Big)d\nu(y)\\ &= \int\int h(y)f(yx)d\mu(x)d\nu(y),\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il Teorema di Fubini (lecito perchè le funzioni integrande sono a supporto compatto) e l'invarianza per traslazione della misura di Haar, grazie alla quale possiamo dimostrare, usando la Procedura standard (vedi la nota 1 a pagina 8), che per $f \in L^1(G)$

$$\int_G f(x)d\,\mu(x) = \int_G f(x+y)\,d\mu$$

$\forall y \in G$. Poichè $h(x) = h(x^{-1})$ allora sempre sfruttando i due risultati appena citati:

$$\begin{aligned}\int hd\mu \int fd\nu &= \int\int h(x)f(y)\,d\mu(x)d\nu(y) =\\ &= \int\int h(y^{-1}x)f(y)\,d\mu(x)d\nu(y) = \int\int h(x^{-1}y)f(y)\,d\mu(x)d\nu(y) =\\ &= \int\int h(y)f(xy)\,d\mu(x)d\nu(y).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\left|\int hd\nu \int fd\mu - \int hd\mu \int fd\nu\right| \leq \int\int h(y)|f(xy) - f(yx)|d\mu(x)d\nu(y) \leq \varepsilon\mu(A)\int hd\nu$$

dove quanto detto si è ottenuto ricordando che $supp(h) \subseteq V \subseteq V_0$. Con medesimi calcoli si ha anche che

$$\left|\int hd\nu \int gd\mu - \int hd\mu \int gd\nu\right| \leq \varepsilon\mu(B)\int hd\nu.$$

Dividiamo ora le disuguaglianze rispettivamente per $(\int hd\nu)/(\int fd\nu)$ e $(\int h\nu)(\int gd\nu)$ e quindi per la disuguaglianza triangolare otteniamo che

$$\left|\frac{\int fd\mu}{\int fd\nu} - \frac{\int gd\mu}{\int gd\nu}\right| \leq \varepsilon\left(\frac{\mu(A)}{\int fd\nu} + \frac{\mu(B)}{\int gd\nu}\right).$$

Poichè ε è arbitrario, il teorema è concluso. $\square$

Capitolo 2

Algebre di Banach

In questo capitolo vogliamo introdurre la Teoria delle Algebre di Banach che sarà molto utile nel seguito. Inizieremo dando nella prima sezione alcune nozioni generali utili in diversi contesti; poi definiremo il concetto di funzionale lineare moltiplicativo e studieremo la relazione tra questi ultimi e gli ideali dell'algebra, mettendo in luce l'interazione tra strutture algebriche e analitiche; infine ci occuperemo della Trasformata di Gelfand che ci permette di associare ad un'algebra di enti astratti un'algebra di funzioni, oggetti con cui abbiamo grande familiarità.

2.1 Definizione, esempi e proprietà elementari

Definizione 2.1.1. Un'*algebra di Banach complessa* è un'algebra B sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ dotato di una norma $\|\cdot\|$ per la quale vale che:

- $(B, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.
- Vale
$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \tag{2.1}$$

Esempio 2.1.1. Facciamo ora una serie di esempi per renderci conto di quanti degli insiemi che usualmente incontriamo possano essere pensati come Algebre di Banach:

- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ è banalmente un algebra di Banach.

- Consideriamo (X, τ) uno spazio topologico compatto (come può essere per esempio $\mathbb{T}$, o un qualsiasi sottinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$) e si consideri $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ dove:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$
su cui consideriamo l'usuale somma e prodotto puntuale; questa risulta essere un'algebra di Banach.

- Analogamente all'esempio precendente se (X, τ) è localmente compatto possiamo considerare $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ dove:
$$C_0(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists \, K_\varepsilon \subseteq X \text{ per cui } |f(x)| \leq \varepsilon, \, \forall x \notin K\}$$
e anche questa è un'algebra di Banach.

- Dato $(B, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e consideriamo l'insieme degli operatori di lineari da B in $\mathbb{C}$ con l'usuale somma e prodotto puntuali si verifica facilmente che è un'algebra di Banach.

Un'algebra è una struttura molto complessa dal punto di vista algebrico dal momento che in essa interagiscono la struttura di spazio vettoriale e di anello. Di fatto quindi possiamo guardarla sua interezza, studiandone le proprietà globali che interessano il legame tra queste due strutture, ma volendo possiamo isolarne una e porci delle domande inerenti solo ad essa.
Quindi, visto che un'algebra di Banach è un anello, ci potremmo per esempio domandare quali degli esempi precedenti siano communtativi (tutti) e quali abbiano unità (tutte tranne la terza).

Enunciamo ora alcune proposizione di carattere generale, per la cui dimostrazione si rimanda a [4]:

Proposizione 2.1.1. *Sia B un'algebra di Banach, e supponiamo che B non abbia unità. Allora è sempre possibile detereminare un'algebra di Banach B' tale che:*

- *B' ha unità.*

- *B' è isometricamente immersa in B'*

Proposizione 2.1.2. *Sia B un'algebra normata sul campo dei complessi $\mathbb{C}$. Allora esiste un'algebra di Banach B_1 in cui B è isometricamente immersa.*

Per la proprietà (2.1) di cui gode la norma, risulta evidente che il prodotto è continuo rispetto a entrambi i fattori. Quello che vorremmo stabilire è se vale una sorta di viceversa:

Proposizione 2.1.3. *Sia B un'algerba sui complessi $\mathbb{C}$ con una norma $\|\cdot\|$ tale che*

- $(B, \|\cdot\|)$ *è uno spazio di Banach*
- *il prodotto è continuo rispetto a entrambi i fattori*

Allora esiste una norma equivalente $\|\cdot\|'$ per cui (2.1) è valida.

Considerando la struttura di anello di un'algebra di Banach è spesso interessante studiare il quoziente rispetto a un'ideale, per cui risulta utile la seguente:

Osservazione 2.1.1. Vediamo in questo caso una proprietà che riguarda sia la struttura di spazio vettoriale sia quella di anello. Sia B un'algebra di Banach con unità, $I \subseteq B$ un ideale di B. Questo é un sottospazio vettoriale in quanto è per definizione un sottogruppo abeliano e inoltre, preso $\alpha \in \mathbb{C}$, si ha che l'elemento $\alpha \in B$ (perchè l'algebra ha unità), quindi $\forall x \in I,\ \alpha x \in I$; dunque I è anche chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari. Dalla teoria degli spazi di Banach sappiamo che dato X spazio di Banach e $M \subseteq B$ sottospazio vettoriale chiuso, si può dare una struttura di spazio di Banach al quoziente X/M usando la norma:

$$\|v\|_M = \inf_{m \in M} \|v - m\|_X$$

(per la dimostrazione di questo fatto si può consultare [1, p.78]) In particolare questo procedimento si applica nel caso in cui si abbia $M = I$ con I ideale chiuso di un algebra di Banach. Questo rende interessante la seguente:

Proposizione 2.1.4. *Sia B un'algebra di Banach communtativa con unità e sia I un ideale chiuso di B . Il quoziente B/I munito della norma definita sopra è un'algebra di Banach.*

Dimostrazione. Si veda [4, p.198] □

2.2 Ideali massimali e funzionali lineari moltiplicativi

D'ora in avanti tutte le algebre di Banach che considereremo saranno commutative. Non è da dare per scontato invece le presenza dell'unità.

Come in tutti gli anelli, in un'algebra di Banach con unità possiamo definire il concetto di invertibiltà di un elemento. Vediamo come quest'ultimo si lega alla struttura metrica che esite sull'algebra.

Notazione. D'ora in avanti, per dire che l'algebra di Banach B che stiamo considerando ha unità scriveremo che $1 \in B$.

Proposizione 2.2.1. *Sia B un'algebra di Banach, $1 \in B$ e sia $x \in B$ tale che $\|x-1\| < 1$. Allora x è invertible e si ha che:*

$$x^{-1} = \sum_{o}^{\infty} (1-x)^j \tag{2.2}$$

Dimostrazione. L'idea nasce fondamentalmente dalle serie geometriche. Per (2.1), $\|(1-x)^j\| \leq \|1-x\|^j$. Dunque la serie di 2.2 converge assolutamente e quindi converge in B per la caratterizzazione degli spazi di Banach (vedi [1, p.71]). Scrivendo $x = 1-(1-x)$ si ha che:

$$x \sum_{j=0}^{\infty} (1-x)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (1-x)^j - \sum_{j=0}^{\infty} (1-x)^{j+1} = 1$$

□

Proposizione 2.2.2. *Sia $x \in B$ invertibile e $y \in B \ : \ \|y-x\| < \|x^{-1}\|^{-1}$. Allora y è invertibile e si ha che:*

$$y^{-1} = x^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1-x^{-1}y)^j \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Usando la (2.1) si ha che $\|1-x^{-1}y\| = \|x^{-1}x - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\| \, \|x-y\| \overset{hp}{<} 1$.

Dal teorema precedente usato su $x^{-1}y$ si ha che: $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (1-x^{-1}y)^j$ e la tesi dunque segue facilmente. □

Notazione. Useremo in seguito queste notazioni:

- Data B un'algebra di Banach, $1 \in B$, denoteremo con U l'insieme degli elementi invertibili.
- Dati (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$, indicheremo con
$$B(x,\ r) = \{y \in X\ :\ d(x, y) < r\}$$

Corollario 2.2.3. *Sia B un'algebra di Banach, $1 \in B$, U è un aperto e l'applicazione $x \mapsto x^{-1}$ è continua.*

Dimostrazione. Il fatto che sia aperto è ovvio dal teorema precedente, perchè se $x \in U$ allora $B(x,\ \|x^{-1}\|^{-1}) \subseteq U$.
Ora sia $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $u,\ :\ y_n \to x,$ con $x \in U$, quindi da un certo indice in poi avremo che $\|x - y_n\| \leq 1/2\,\|x^{-1}\|^{-1}$ e quindi usando la proposizione 2.2.2
$$\left\|y_n^{-1} - x^{-1}\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|x^{-1}\right\|^{j+1} \|x - y_n\|^j \leq 2\left\|x^{-1}\right\|^2 \|x - y_n\| \to 0.$$
□

Definizione 2.2.1. Sia B un'algebra di Banach, $1 \in B$, dato $x \in B$ si definisce *insieme risolvente di* x e si indica con $R_B(x)$ (o $R(x)$ se è chiara l'algebra di Banach su cui stiamo lavarondo):
$$R_B(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ x - \lambda \in U\}$$

Proposizione 2.2.4. *Sia B un'algebra di Banach, $1 \in B$, $\forall x \in B$, $R(x)$ è un aperto di $\mathbb{C}$ è la funzione $F(\lambda) = (x - \lambda)^{-1}$ è una funzione olomorfa su $R(x)$ a valori nello spazio di Banach B .*

Dimostrazione. Se $\lambda_0 \in R(x)$, e $|\lambda - \lambda_0| < \|(x - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ allora si ha che $\|x - \lambda - x + \lambda_0\| = |\lambda - \lambda_0| < \|(x - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ e quindi si ha che $(x - \lambda)$ è invertibile per la proposizione 2.2.2 e questo prova che $R(x)$ è aperto; inoltre sempre per la proposizione2.2.2 si ha che:
$$(x-\lambda)^{-1} = (x-\lambda_0)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(1-(x-\lambda_0)^{-1}(x-\lambda_0+\lambda_0-\lambda))^j = -\sum(x-\lambda_0)^{-j-1}(\lambda_0-\lambda)^j$$
che non è altro che l'espansione di $(x - \lambda)^{-1}$ in serie di potenze con coefficienti in B intorno a λ_0. □

Osservazione 2.2.1. Nel teorema precedente avremmo dovuto definire la nozione di funzione olomorfa a valori in uno spazio di Banach, ma non è nel nostro interesse affrontare la teoria di queste funzioni, quindi ci limitiamo a sostenere che per i nostri scopi esiste una teoria equivalente a quella già nota per funzioni olomorfe a valori complessi (per questa osservazione si veda [1, p.189])

Proposizione 2.2.5. *Sia B un'algebra di Banach, $1 \in B$ e sia $x \in B$; si ha necessariamente che $R(x) \neq \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $R(x) = \mathbb{C}$. Allora per $|\lambda| \to \infty$

$$\left\|(x-\lambda)^{-1}\right\| = |\lambda|^{-1} \left\|\frac{x}{\lambda} - 1^{-1}\right\| \sim |\lambda|^{-1} \to 0$$

Per il Teorema di Liouville per le funzioni di variabile complessa si ha che $(x - \lambda) = 0$ che è impossible. $\square$

Teorema 2.2.6 (Gelfand-Mazur)**.** *Sia B un'algebra di Banach, $1 \in B$, commutativa tale che B sia un campo. Allora B è canonicamente isomorfo a $\mathbb{C}$ come campo.*

Dimostrazione. Dal risultato precedente si ha che, scelto $x \in B$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda \notin R(x)$; allora $x - \lambda$ non è invertibile; ma l'unico elemento non invertibile di un campo è lo zero e quindi $x = \lambda$. identificando l'unità di B con il numero 1, B è canonicamente indentificato con $\mathbb{C}$. $\square$

Adesso entriamo seriamente nel vivo della questione, rivolgendo la nostra attenzione sullo studio degli ideali dell'algebra, concentrandoci in particolare sugli ideali massimali. Anzitutto conviene enunciare un risultato di esistenza che vale in un contesto generale:

Lemma 2.2.7 (Krull-Zorn)**.** *Sia A un anello con unità diverso dall'anello banale avente almeno un ideale I proprio. Allora I è contenuto in un ideale massimale.*

Dimostrazione. Siamo costretti ad utilizzare il lemma di Zorn perchè putroppo non disponiamo in questo caso di una dimostrazione costruttiva. Considero

$$\Sigma = \{J \subseteq A \ : \ J \text{ è un ideale proprio di A, } I \subseteq J\}$$

Quest'insieme è non vuoto perchè $I \in \Sigma$. Conderiamo su Σ l'ordine parziale che viene dato dalla relazione di inclusione e sia $\mathscr{C} \subseteq \Sigma$ una catena di Σ. Le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate perchè un maggiorante per $\mathscr{C}$ è l'unione di tutti i suoi elementi (che ovviamente è un ideale e non contiente unità perchè tutti gli ideali nell'unione sono propri, quindi nessuno di essi contiene l'unità). La tesi è dimostrata. □

Osservazione 2.2.2.

1. Il Lemma di Krull-Zorn non ci soddisfa completamente in realtà, perchè buona parte del prossimo capitolo riguarda l'algebra $L^1(G)$ (su cui definiremo la convoluzione come operazione di prodotto) che non sempre ha unità.

2. Possiamo in realtà già dare condizioni che ci permette di indebolire le ipotesi del Lemma 2.2.7. Considero un anello A privo di unità e I un suo ideale per il quale $\exists\ u \in \mathrm{A}\ :\ (u, \mathrm{I})$, (l'ideale generato da u ed I) sia tutto A. In questo caso u non appartiene a nessun ideale proprio contenente I , e quindi ripercorrendo la dimostrazione appena vista, gli elementi della catena $\mathscr{C}$ non possono contenere u e quindi nemmeno la loro unione che risulta dunque essere un ideale massimale che contiene I.

Definizione 2.2.2. Sia B un'algebra di Banach e $I \subseteq B$ un ideale proprio. Esso di dice *regolare* se B/I (che spesso indicheremo anche con $B\, mod \mathrm{I}$) ha unità.

Osservazione 2.2.3.

1. Il quoziente B/I ha unità se e solo se $\exists\ u \in B\ :\ \forall x \in B,\ x - ux \in I$.

2. Chiaramente se l'algebra di Banach ha unità allora ogni ideale è regolare perchè $[1] \in B/I$ è l'unità del quoziente (banale ricordando come è definito il quoziente di un anello per un suo ideale).

Tenendo presentare l'osservazione 2.2.2 e quella appena fatta, la seguente proposizione diventa piuttosto semplice da dimostrare:

Proposizione 2.2.8. *Sia B un'algebra di Banach e sia I un suo ideale regolare. Allora I è contenuto in un ideale massimale a sua volta regolare.*

Dimostrazione. Essendo I regolare sia u l'elemeto citato nella definizione 2.2.3. Ora necessariamente K=$(u,\ I)$ è l'intera algebra perchè se $x \in B,\ ux \in K,\ x - ux \in I$ e

$ux \in K$, ma siccome K è un ideale allora $x - ux + ux = x \in K$. L'osservazione 2.2.2 conclude.
L'ideale massimale è ancora regolare perchè la classe di u è ancora l'unità quando si va a considerare il quoziente. □

Per ora abbiamo agito solo dal punto di vista algebrico; è quindi giunta l'ora di far intervenire anche in questo contesto le proprietà metriche e topologiche di cui un'algebra di Banach è dotata:

Proposizione 2.2.9. *Sia B un'algebra di Banach e sia I un ideale di B . Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se B ha unità, allora la distanza di un ideale proprio da 1 è uno. In particolare la chiusura di un ideale proprio è ancora un ideale proprio e gli ideali massimali sono chiusi.*

2. *se I è un ideale regolare e u è l'unità modI allora $1 \leq d(u, I)$; in particolare si ha che gli ideali massimali regolari sono chiusi.*

Dimostrazione. 1. Usando la proposizione 2.2.1, siccome l'ideale è proprio (non contiene elementi invertibili) e $0 \in I$ la prima parte è verificata. Per la seconda occorre osservare che la chiusura di un ideale è un ideale. Siano $x, y \in \bar{I}$ e siano $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq I, \; : \; x_n \to x, \; y_n \to y$; si ha che $\|y - x + x_n - y_n\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0$; allora $x - y \in I$ e dunque $\bar{I}$ è un sottogruppo abeliano. Ora sia $x \in I, \; y \in B$ e sia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $B \; : \; x_n \to x$; allora si ha che $\|x_n y - xy\| \leq \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0$ e quindi $xy \in \bar{I}$ e quindi $\bar{I}$ è un ideale. Usando la massimalità con ciò che abbiamo appena provato, si conclude la dimostrazione della prima parte.

2. Facciamo vedere che se $v \in B, : \; \|u - v\| < 1$ allora $(I,u)=B$ e quindi $v \notin B$; infatti preso $x \in B$:

$$x = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (u - v)^j x - u \sum_{j=0}^{\infty} (u - v)^j x \Big) + v \sum_{j=0}^{\infty} (u - v)^j x,$$

(dove ho considerato $(u - v)^0 x = x$). Ora, poichè u è l'unità modI si ha che $\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (u-v)^j x - u \sum_{j=0}^{\infty} (u-v)^j x \Big) \in I$ e il terzo termine è un multipolo di v quindi è nell'ideale generato. Questo ci permette di concludere perchè la chiusura di un ideale regolare massimale è ancora un ideale alla quale u non appartiene per quanto appena mostrato e quindi essa è un ideale proprio e regolare; per massimalità, poichè la chiusura contiene l'ideale di partenza, deve coincidere con esso che dunque è chiuso.

□

A questo punto introduciamo una classe di applicazioni che saranno centrali nel resto del capitolo:

Definizione 2.2.3. Sia B un'algebra di Banach, un *funzionale lineare moltiplicativo* (espressione che abbrevieremo con la sigla mlf) è un omomorfismo lineare w non banale (quindi non identicamente nullo) su $\mathbb{C}$.

Non abbiamo richiesto la continuità di tali operatori perchè in effetti la possiamo provarla, riuscendo anche a dare una stima sulla norma:

Proposizione 2.2.10. *Sia B un'algebra di Banach, e sia $w : B \longrightarrow \mathbb{C}$ un mlf; allora w è continuo e $\|w\| \leq 1$.*

Dimostrazione. Sia M=$Ker\, w$. Siccome w è un omomorfismo di anelli, M è un ideale; mostriamo che è massimare e regolare.
Osserviamo che w è suriettivo. Infatti, essendo non banale, $\exists\, x \in B : w(x) = \lambda_0 \neq 0$; sia ora $\lambda \in \mathbb{C}$; si ha che

$$w\left(\frac{\lambda x}{\lambda_0}\right) = \frac{\lambda}{\lambda_0} w(x) = \lambda$$

Essendo dunque un omomorfismo di anelli suriettivo, gli ideali di B che contengono M sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali di $\mathbb{C}$ che è un campo, perciò questi sono solo $\mathbb{C}$ e l'ideale banale; gli unici ideali di B contenenti M sono allora sé stesso e B , per cui la massimalità è provata (vedi [2, proposizione 4.19]).
Per quanto riguarda la regolarità, considero $u \in B, : w(u) = 1$; siccome abbiamo che $x - ux \in$ M$, \forall x \in B$ allora u è l'unità del quoziente $B/$M. M è dunque massimale e regolare, perciò è anche chiuso.
Essendo l'omomorfismo suriettivo, applicazione che passa al quoziente (che con la norma

canonica è uno spazio di Banach, essendo M un ideale chiuso) è dunque un isomorfismo di campi, ed in particolare è una biezione che induce una nuova norma su $\mathbb{C}$ che indicheremo con $\|\cdot\|'$. Per concludere dobbiamo considerare che $\|\lambda\|' = \|1\|' |\lambda|$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ (dove 1 è l'unità dell'algebra quoziente) e, usando la definizione di norma quoziente, deve essere $\|u\|_M = \|1\|'$; dalla proposizione 2.2.9 e ricordando la definizione di norma quoziente, si ha che $\|1\|' \geq 1$; da questo segue che $|\lambda| \leq \|\lambda\|'$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ e infine quindi $\forall x \in B$, $|w(x)| \leq \|w(x)\|' \underbrace{=}_{\text{(def norma indotta)}} \|x\|_M \underbrace{\leq}_{\text{(def norma quoziente)}} \|x\|$. □

Adesso siamo in grado di dimostrare il risultato centrale di questa sezione:

Teorema 2.2.11 (Corrispondenza tra mlf e ideali massimali regolari)**.** *Sia B un'algebra di Banach, la mappa $w \mapsto Ker\,w$ definisce una corrispondenza biunivoca tra i mlf su B e gli ideali regolari massimali.*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che è iniettiva: sia M il nucleo di w e w'. Ovviamente se $x \in$ M allora $w(x) = w'(x)$. Se $x \notin$ M e supponiamo $w(x) \neq w'(x)$; è chiaro che $x^2 - w\,(x)x$, $x^2 - w\,'(x)x \in$ M e quindi $(w(x) - w'(x))x \in$ M, ma essendo M uno spazio vettoriale e $w(x) \neq w'(x)$ si ha che $x \in$ M e il che è assurdo.
Ora se consideriamo M un ideale massimale regolare come visto nella proposizione 2.2.9 questo è chiuso; il quoziente $B/$M è un'algebra di Banach (perchè M è chiuso) e un campo (perchè M è massimale). Allora per il Teorema di Gelfand-Mazur 2.2.6 $B/$M è canonicamente isomorfo a $\mathbb{C}$; infine poichè la proiezione $\pi : B \longrightarrow B/$M è un omomorfismo di anelli, essa è anche un mlf con nucleo M; quindi l'applicazione $w \mapsto Ker\,w$ è anche suriettiva. □

Da questo teorema segue una semplice caratterizzazione degli elementi invertibili:

Corollario 2.2.12. *Sia B un'algebra di Banach;* $1 \in B$*, un elemento $x \in B$, $x \in U$ se e solo se $w(x) \neq 0$, $\forall$ w che sia mlf su B .*

Dimostrazione. Se $x \in U$ allora si ha che $1 = w(1) = w(xx^{-1}) = w(x)w(x^{-1})$ e quindi $w(x) \neq 0$ qualsiasi sia w mlf su B . Se $x \notin U$ considero $xB = \{xb \,:\, b \in B\}$ che è a questo punto un ideale (ovvio), ma è anche proprio perchè $1 \notin xB$; xB è quindi contenuto in un ideale massimale regolare M e possiamo considerare il mlf w il cui nucleo è M. Poichè $x = x \cdot 1$ allora $x \in xB \subseteq$ M e quindi $w(x)$=0 e questo conclude la dimostrazione. □

2.3 Algebre di funzioni

Introduciamo ora il concetto di *algebra di funzioni*, utile in diversi ambiti, di cui ci occupiamo adesso in moo da rendere più concreti i risultati che abbiamo appena ottenuto.

Definizione 2.3.1. Sia X uno spazio topologico T_2 e localmente compatto e sia B un'insieme di funzioni da X in $\mathbb{C}$ tali che B con la somma e il prodotto puntuali sia un'algebra sul campo dei complessi $\mathbb{C}$. L'algebra B viene definita un' *algebra di funzioni* su X.

Ora assumeremo un punto di vista piuttosto diverso rispetto a quello adottato finora: studiare la struttura di algebra di cui B è dotato ci permette di ricavare delle nozioni utili riguardanti le interazioni tra i suoi elementi, ma di fatto, considerando questi oggetti come dei punti, viene del tutto dimenticata la loro natura intrinseca che è quella di essere delle funzioni; ciò che intendiamo fare adesso invece è permettere a questa natura di emergere nuovamente, mostrando come le proprietà particolari di queste funzioni, come il valore che esse assumono in un dato punto, ci diano delle informazioni sulla struttura globale e cioè sull'algebra di cui fanno parte.

Sia $x \in$X e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} w_x : & B \longrightarrow \mathbb{C} \\ & f \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

A meno che la valutazione di tutte le $f \in B$ in x sia nulla, F è di fatto un funzionale lineare moltiplicativo, per cui se l'algebra B è dotata di una norma $\|\cdot\|$ grazie alla quale $(B,\|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach allora si ha, per quanto visto in precedenza, che $|f(x)| \leq \|f\|, \forall\, x \in \mathrm{X},\ f \in B$

Definizione 2.3.2. Sia B un'algebra di funzioni su X spazio topologico T_2 localmente compatto; diciamo che l'algebra è *separata* se $\forall x_1,\ x_2 \in \mathrm{X},\ x_1 \neq x_2,\ \exists\, f \in B\ :\ f(x_1) \neq f(x_2)$; cioè $w_{x_1} \neq w_{x_2}$.

Dunque se B è un'algebra separata e $,\forall x \in B,\ \exists\, f \in B\ :\ f(x) \neq 0$ allora l'applicazione $x \mapsto w_x$ è iniettiva, perciò X è identificato con un sottoinsieme di mlf. Chiaramente con questo non vuol dire che tutti i mlf siano di questo tipo, ma sotto determinate ipotesi questo in effetti è vero; diamo prima due definizioni:

Definizione 2.3.3. Un'algebra di funzioni B su uno spazio X si dice *autoaggiunta* su X se $\forall f \in$ X, $\bar{f} \in B$ dove $\bar{f}$ è la funzione tale che $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Definizione 2.3.4. Un'algebra di funzioni B su uno spazio X si dice *chiusa rispetto all'inversione* se $1 \in B$ e $\forall f \in B$: $f(x) \neq 0 \, \forall x \in$ X allora, denotanto $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ che in questo caso è ben definita, $f^{-1} \in B$.

Osservazione 2.3.1. Dunque nelle algebre di funzioni chiuse rispetto all'inversione le funzioni prive di singolarità hanno inverso moltiplicativo.

Teorema 2.3.1. *Sia B un'algebra di funzioni su uno spazio X compatto e T_2 che sia separata, autoaggiunta e chiusa rispetto all'inversione. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di X e i funzionali lineari moltiplicativi.*

Dimostrazione. Per quanto visto precedentemente l'applicazione $x \mapsto w_x$ è iniettiva perchè B è separata; vediamo che questa è anche suriettiva. Sappiamo che un mlf per il teorema 2.2.11 è identificato dal suo nucleo per cui tutto quello che dobbiamo mostrare è che dato un mlf $\exists \, x \in B$ tale che $Ker \, w_x$ coincida con il nucleo del funzionale dato. Indichiamo con $M_x = Ker \, w_x = \{f \in B : f(x) = 0\}$. Sempre per il Teorema 2.2.11 si ha una corrispondenza biunivoca tra mlf e ideali massimali regolari per cui la dimostrazione di riduce a dimostrare che gli ideali massimali regolari sono del tipo M_x e per mostrare ciò e sufficiente provare che ogni ideale proprio è contenuto in almeno uno degli M_x; fatto ciò se si considera un ideale massimale regolare si ha, per la massimalità che esso coincide con il particolare M_x che lo contiene. Per cui sia I un ideale proprio dell'algebra e assumiamo che $I \not\subseteq M_x \; \forall x \; in$X; allora $\forall x \in$ X $\exists f \in I : f(x) \neq 0$. Per la continuità di f, $\exists \, O_x$ intorno di x per cui $\forall y \in O_x$, $f(y) \neq 0$. Questi intorni determinano un ricoprimento aperto di X, per cui esistono $x_1, \ldots, x_n$ e $O_1, \ldots, O_n$, $f_1, \ldots, f_n$: X $= \bigcup_{k=1}^{n} O_k$ e $f_k(y) \neq y \; \forall y \in O_k$. Consideriamo dunque la funzione $\psi = \sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k f_k$ che sta in I perchè I è un ideale e l'algebra è autoaggiunta; ψ è chiaramente positivo per cui ammette elemento inverso. Allora I $=$ B e siamo giunti ad un assurdo. $\square$

2.4 La Trasformata di Gelfand

Consideriamo B un'algebra di Banach e sia $\mathfrak{M}$ l'insieme dei suoi ideali massimali regolari. Denoteremo con B^* il duale di B e con U^* la palla unitaria nel duale. Per il Teorema 2.2.11 possiamo identificare $\mathfrak{M}$ con un sottoinsieme di U^* su cui sono definite due importanti topologie: la topologia indotta dalla norma del duale e la topologia debole stella. La seconda è quella per noi più interessante perchè è quella maggiormente legata alle proprietà algebriche di B.
Vediamo subito un primo risultato

Teorema 2.4.1. *Sia B un'algebra di Banach; $\mathfrak{M} \cup 0$ è chiuso in U^*con la topologia debole stella. Se $1 \in B$, allora $\mathfrak{M}$ è chiuso.*

Dimostrazione. Per provare la prima parte, mostriamo che se $u_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$, allora si ha che $u_0(xy) = u_0(x)u_0(y)$ $\forall x, y \in B$ e quindi $u_0 \in \mathfrak{M}$ o $u_0 = 0$. Ricordando quale sia una base di intorni per un punto nella topologia debole stella, consideriamo l'intorno:

$$N = \{u \in U^* \mid |u(x) - u_0(x)| < \varepsilon,\ |u(y) - u_0(y)| < \varepsilon,\ |u(xy) - u_0(xy)| < \varepsilon\};$$

poichè $u_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$ esiste $w \in \overline{\mathfrak{M}}$ che sta anche in N e dunque: $|u_0(xy) - u_0(x)u_0(y)| = |u_0(xy) - w(xy) + w(xy) - u_0(x)u_0(y)| \leq |u_0(xy) - w(xy)| + |w(x)w(y) - u_0(x)u_0(y)| \leq \varepsilon + |w(x)w(y) + w(x)u_0(y) - w(x)u_0(y) - u_0(x)u_0(y)| \leq \varepsilon + |w(x)w(y) + w(x)u_0(y)| + |w(x)u_0(y) - u_0(x)u_0(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon|w(x)| + \varepsilon|u_0(y)| \leq \varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|)$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitraria, $u_0(xy) = u_0(x)u_0(y)$.
Per provare la seconda parte è sufficente mostrare che se $1 \in B$, allora $0 \notin \overline{\mathfrak{M}}$. Infatti, poichè $\forall w \in \mathfrak{M}$, $w(1) = 1$, l'intorno $\{u \in U^* \mid |u(1)| < \frac{1}{2}\}$ è un intorno di 0 che lo separa da $\mathfrak{M}$. □

Siccome un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto, si ha subito che $\mathfrak{M} \cup 0$ è compatto e, se $1 \in B$, lo è anche $\mathfrak{M}$; ne segue dunque che:

Corollario 2.4.2. *Se $1 \in B$, $\mathfrak{M}$ con la topologia debole stella è compatto; in generale è T_2 e localmente compatto.*

Dimostrazione. La prima parte è già provata. Siccome $\{0\}$ è un chiuso di $\mathfrak{M} \cup 0$ allora $\mathfrak{M}$ è aperto in $\mathfrak{M} \cup 0$; ma quest'ultimo è un compatto T_2 quindi per ogni punto esiste un sistema fondamentale di intorni compatti (vedi la nota 3 a pagina 13) e questo prova il fatto che $\mathfrak{M}$ è localmente compatto; infine esso è T_2 perchè è un sottospazio di uno spazio T_2. □

Consideriamo ora un $x \in B$, $M \in \mathfrak{M}$ e sia w_M il funzionale lineare ad esso corrispondente. Prendiamo l'applicazione $\widehat{x}(M) = w_M(x)$: per definizione, la topologia debole stella è la topologia più debole su $\mathfrak{M}$ che rende continue tutte le funzioni del tipo $\{\widehat{x}(M) \,:\, x \in B\}$.

Proposizione 2.4.3. *Se* $1 \in B$, *allora la mappa* $x \mapsto \widehat{x}$ *è un omomorfismo di norma uno da* B *in* $C(\mathfrak{M})$. *Inoltre se non si suppone che* B *abbia unità, la mappa appena citata è un omomorfismo da* B *in* $C_0(\mathfrak{M})$.

Dimostrazione. Per la prima parte, le proprietà algebriche sono ovvie e quanto detto sopra prova che le applicazione $\widehat{x}$ sono continue su $\mathfrak{M}$; inoltre $\forall x \in B$, $M \in \mathfrak{M}$, $|\widehat{x}(M)| \leq \|x\|$ per la proposizione 2.2.10. Da questo segue immediatamente che $\|\widehat{x}\|_\infty = \sup_{M\in\mathfrak{M}}|\widehat{x}(M)| \leq \|x\|$; ma $\left\|\widehat{1}\right\| = 1$ e questo conclude la prima parte.
Se non supponiamo che B abbia unità, $\{f \in U^* \,:\, |\widehat{x}(f)| \geq \varepsilon\}$ è un chiuso di U^* non contenente 0 e quindi $K_\varepsilon(x) = \{M \in \mathfrak{M} \,:\, |\widehat{x}(M)| \geq \varepsilon\} = \{f \in U^* \,:\, |\widehat{x}(f)| \geq \varepsilon\} \cap (\mathfrak{M} \cup \{0\})$ è un chiuso di $\mathfrak{M} \cup \{0\}$ che è compatto e dunque è anch'esso un compatto. Siccome è tutto contenuto in $\mathfrak{M}$, $K_\varepsilon(x)$ è un compatto di $\mathfrak{M}$. Ripercorrendo il ragionamento fatto prima l'omomorfismo, ha norma al più uno e l'immagine è contenuta in $C_0(\mathfrak{M})$. □

La mappa $x \mapsto \widehat{x}$ è chiamata *rappresentazione di Gelfand*, l'immagine di B mediante tale omomorfismo si denota con $\widehat{B}$, il funzionale $\widehat{x}$ è detta *Trasformata di Gelfand* di x. Come detto nell'incipit del capitolo, la forza di questa rappresentazione è che ci permette di associare agli oggetti astratti dell'algebra B di partenza un'ente matematicamente ben noto (una funzione), preservando la struttura di algebra tra i rappresentati.

Definizione 2.4.1. Data B un'algebra di Banach, si definisce *radicale di* B, $\mathrm{Rad}(B)$, l'intersezione di tutti gli ideali massimali regolari di B.

Osservazione 2.4.1. $\mathrm{Rad}(B)$ è il nucleo della rappresentazione di Gelfand: infatti se $x \in \mathrm{Rad}(B)$, qualunque mlf calcolato in x è nullo in quanto x appartiente al nucleo di tutti gli mlf.

Definizione 2.4.2. Un'algebra di Banach si dice *semisemplice* se Rad(B)=$\{0\}$ o equivalentemente se la rappresentazione di Gelfand è una mappa iniettiva.

Definizione 2.4.3. Si definisce *norma spettrale* di un elemento $x \in B$

$$\|x\|_{spec} = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |\widehat{x}(M)|$$

La norma spettrale può essere calcolata in maniera esplicita in modo semplice a partire dalla norma di x:

Proposizione 2.4.4. *Data un'algebra di Banach B, si ha che* $\forall x \in B$

$$\|x\|_{spec} = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [4, p.207]. □

Per poter determinare in quali spazi la norma spettrale sia equivalente alla norma data, proviamo il seguente teorema:

Teorema 2.4.5. *Sia B un'algebra di Banach; condizione necessaria e sufficiente affinchè la norma orginaria definita su B $\|\cdot\|$ si equivalente alla norma spettrale $\|\cdot\|_{spec}$ è che esista una costante K : $\|x\|^2 \leq K \|x^2\|$ $\forall x \in B$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Siccome esiste K_1 : $\|\cdot\| \leq K \|\cdot\|_{spec}$ allora

$$\|x\|^2 \leq K_1^2 \|x\|_{spec}^2 \underbrace{\leq}_{\text{(per definizione di norma spettrale)}} K_1^2 \|x^2\|_{spec} \underbrace{\leq}_{\text{(per la prop. 2.4.3)}} K_1^2 \|x^2\|$$

$\forall x \in B$.
$\Leftarrow$) Per la proposizione 2.4.3 si ha subito che $\|x\|_{spec} \leq \|x\|$; inoltre per ipotesi $\|x\| \leq K^{\frac{1}{2}} \|x^2\|^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \ldots 2^{-n}} \left\|x^{2^n}\right\|^{2^{-n}}$ e per la proposizione 2.4.4 $\|x\| \leq K \|x\|_{spec}$. □

Vedendo ora $\widehat{B}$ come un'algebra di funzioni nel senso precedentemente trattato ($\mathfrak{M}$ è sempre compatto o localmente compatto, quindi quanto appena detto è del tutto lecito) diamo la seguente definizione:

Definizione 2.4.4. Data un'algebra di Banach B, essa si dice *autoaggiunta* se lo è $\widehat{B}$ su $\mathfrak{M}$ come algebra di funzioni.

Ci possiamo infine chiedere se $\widehat{B}$ separa i punti:

Proposizione 2.4.6. *L'algebra $\widehat{B}$ separa i punti.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano M_1, $M_2 \in \mathfrak{M}$ e che $\forall \hat{x} \in \widehat{B}$, $\hat{x}(M_1) = \hat{x}(M_2)$; ma questo accade, per la definizione della Trasformata di Gelfand, se e solo se $w_{M_1}(x) = w_{M_2}(x)$ quindi i due ideali coincidono perchè coincidono i mlf che rappresentano.

$\square$

Capitolo 3

Introduzione all'analisi di Fourier sui gruppi

Notazione.

- In questo e nel prossimo capitolo seguiremo l'impostazione di [9], quindi passeremo alla notazione additiva per i gruppi diversamente da quanto fatto nei capitoli precedenti (l'unità del gruppo sarà quindi indicata con 0) e inoltre tutti i gruppi che considereremo, a meno di specifiche, saranno abeliani. Per questo non ha più senso parlare di misure di Haar sinistre e destre e nemmeno di funzioni traslate a destra o sinistra perchè questi concetti sono assolutamente equivalenti; per cui diremo semplicemente misura di Haar e, fissato $y \in G$, indicheremo la traslata della funzione f di definita su G con $f_y(x) = f(x - y)$.
- Quando parliamo in generale di misura di Haar su G , essa verrà indicato a meno di specifiche con m.

3.1 $L^1(G)$ e convoluzioni

Obbiettivo di questa prima parte è strutturare $L^1(G)$ ad algebra di Banach definendo su di essa un'operazione che svolga il ruolo di prodotto, per poter applicare i risultati visti nel capitolo precedente.

Cominciamo facendo alcune osservazioni riguardanti l'uniforme continuità nel caso abeliano, dando innanzitutto una definizione valida per funzioni in spazi metrici. In questa prima parte G indica un gruppo qualsiasi.

Definizione 3.1.1. Sia (M, δ) uno spazio metrico, G un gruppo LCA, $f : G \to M$; fè *uniformente continua*, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, V$ intorno dell'unità $:$ $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$ se $y - x \in V$ o equivalentemente $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, V$ intorno dell'unità $:$ $\forall x \in G$ $\delta(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ se $h \in V$.

É evidente che il concetto è del tutto analogo a quanto visto nel primo capitolo, ma in questo caso si perde la distinzione tra uniforme continuità destra e sinistra, per il fatto che il gruppo è abeliano e si possono considerare sempre intorni simmetrici dell'origine.

Come ci si può aspettare vale il seguente risultato:

Proposizione 3.1.1. *Siano G , M, f come nella definizione sopra; allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in G$ e U intorno di $f(x)$ in M; siccome $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, V$ intorno dell'unità $:$ $\forall x \in G$ $\delta(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ se $h \in V$ allora $x + V \subseteq f^{-1}(U)$, e dunque $f^{-1}(U)$ è un intorno di ogni suo punto, quindi è aperto.

$\square$

Adesso vediamo qualche risultato che garantisca l'inversione di questa affermazione.

Proposizione 3.1.2. *Sia $E \subseteq G$ compatto, (M, δ) metrico e $f : G \to M$ continua; allora f è uniformemente continua su E.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, $\exists\, W_x$ intorno dell'unità $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ se $y \in E \cap (x + W_x)$, e inoltre $\exists\, V_x$ intorno simmetrico dell'unità tale che $V_x + V_x \subseteq W_x$; poiché E è compatto esistono $x_1, \ldots, x_n$ tali che gli insiemi $x_1 + V_{x_1}, \ldots, x_n + V_n$ ricoprano E. Sia quindi $V = \bigcap_i V_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$; se $y - x \in V$, con $x, y \in E$, allora $x \in x_i + V_{x_i}$ per qualche i, $y \in x + V \subseteq x_i + V_{x_i} + V \subseteq x_i + W_{x_i}$ e quindi

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(y)) < \varepsilon.$$

$\square$

Definizione 3.1.2. Un gruppo topologico G si dice *discreto* se ha cardinalità finata o al più numerabile e la topologia su di esso è quella discreta.

Osservazione 3.1.1. Dato un gruppo topologico discreto che sia anche localmente compatto e T_2, $\forall x,\, y \in G$, si ha che $m(x) = m(y) \neq 0$ per l'invarianza per traslazioni. Allora si può scegliere la misura m normalizzata, cioè in modo tale che $m(x) = 1\,, \forall x \in G$

Da qui in avanti, a meno che non sia indicato, G indica nuovamente un gruppo LCA.

Osservazione 3.1.2. Consideriamo G e la m misura di Haar e $m'(E) = m(-E)$ per ogni E boreliano; m' è chiaramente una misura di Haar per cui $\exists\, \lambda > 0\, :\, m' = \lambda m$, ma tale $\lambda = 1$ e per vederlo basta considerare un boreliano simmetrico. Per cui $m(E) = m(-E)$.

Osservazione 3.1.3. Scelta la misura di Haar m su G e consideriamo lo spazio di Banach $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$; è evidente che, per l'invarianza di m, la L^p-norma sarà invariante per traslazioni (vedi la nota 1 a pagina 8), quindi

$$\|f_x\|_p = \|f\|_p\,.$$

Proposizione 3.1.3. *Sia $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(G)$. Allora la mappa $x \mapsto f_x$ è uniformemente continua da G in $L^p(G)$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$; ricordando che $C_c(G)$ è denso in $L^p(G)$ allora $\exists\, g \in C_c(G)\, :$ $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$ e inoltre l'uniforme continuità di g sul suo supposto implica che esiste un intorno dell'unità tale che

$$\|g - g_x\|_\infty < [m(K)]^{-1/p}\varepsilon/3 \qquad \forall x \in V$$

Da questo segue che $\|g - g_x\|_p < \varepsilon/3$ e quindi

$$\|f - f_x\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_x\|_p + \|g_x - f_x\|_p < \varepsilon.$$

Infine se $y - x \in V$, $f_x - f_y = (f - f_{y-x})_x$ e quindi $\|f_x - f_y\|_p = \|(f - f_{y-x})_x\|_p = \|(f - f_{y-x})\|_p < \varepsilon$. □

Notazione. Siccome come misura su un gruppo G useremo sempre la misura di Haar che è unica nel senso che abbiamo visto, non avremo bisogno di specificare rispetto a quale misura stiamo integrando quindi in generale se $f \in L^1(G)$ scriveremo

$$\int_G f(x)\, dx$$

quando integriamo su G .

Date queste proprietà generali passiamo alla definizione dell'operazione di convoluzione:

Definizione 3.1.3. Date $f,\ g : G \to \mathbb{C}$, $x \in G$, si definisce *convoluzione di f e g in x*:

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)\,dy \tag{3.1}$$

avendo ovviamente come clausola cha l'integrale in (3.1) esista.

Proposizione 3.1.4. *Siano $f,\ g$ funzioni Borel-misurabili*

1. *Dato $x \in G$ per cui si può fare la convoluzione allora $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.*
2. *Se $f \in L^1(G)$ e $g \in L^\infty(G)$, allora $(f * g)$ è limitata e uniformemente continua.*
3. *Se $f,\ g \in C_c(G)$ allora $f * g \in C_c(G)$ e $supp(f * g) \subseteq supp(f) + supp(g)$.*
4. *Se $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$ allora $f * g \in C_0(G)$.*
5. *Se $f, g \in L^1(G)$ allora la convoluzione è possibile per quasi ogni x, $f * g \in L^1(G)$ e vale che*
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 . \tag{3.2}$$
6. *Se $f, g, h \in L^1(G)$ allora vale che $(f * g) * h = f * (g * h)$, cioè la convoluzione è associativa.*

Dimostrazione.

1. $(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(-y)g(y+x)dy$, ma usando l'osservazione 3.1.2 $\int f(-y)g(y+x)dy = \int f(y)g(-y+x)dy = (g * f)(x)$.
2. Innanzitutto osserviamo che $|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|f_x\|_1 \|g\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ e quindi la limitatezza è provata. Per quanto riguarda l'uniforme continuità se $x, z \in G$,
$$|(f * g)(x) - (f * g)(z)| \leq \int |f(x-y) - f(z-y)||g(y)|dy \leq \|f_{-x} - f_{-z}\|_1 \|g\|_\infty$$
e per la proposizione 3.1.3 la quantità $\|f_{-x} - f_{-z}\|_1$ può essere resa arbitrariamente piccola, per cui l'uniforme continuità è provata.

3. Siccome $g(y) = 0$ se $y \notin supp(g)$ e $f(x-y) = 0$ se $x-y \notin supp(f)$ allora $(f*g)(x) = 0$ se $x \notin supp(f) + supp(g)$, per cui essendo $supp(f) + supp(g)$ compatto, anche $f * g \in C_c(G)$.

4. Sfruttando sempre il fatto che $C_c(G)$ è denso in $L^p(G)$, considero due successioni $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ che convergano rispettivamente a f e g nelle norme dei rispettivi spazi. Allora si ha:

$$\begin{aligned}|(f*g)(x) - (f_n * g_n)(x)| &\leq \int |(f - f_n)(x-y)g(y)|dy + \int |f_n(x-y)(g-g_n)(y)|dy \\ &\leq \|f - f_n\|_q \|g\|_p + \|f_n\|_q \|g - g_n\|_p .\end{aligned}$$

   Ricordando che se una successione è convergente allora è limitata e quanto detto sopra si ha che $f_n * g_n \to f * g$ uniformemente, ma per il punto precedente $f_n * g_n$ è a supporto compatto per ogni n, quindi $f * g \in C_0(G)$.

5. Siccome la composizione di una funzione continua con una funzione Borel-misurabile è ancora Borel-misurabile, fissato $x \in G$ la funzione f(x-y) è Borel-misurabile e quindi lo è anche $f(x-y)g(y)$ come funzione definita su $G \times G$; Ora, usando il Teorema di Fubini, si ha che

$$\int_G \int_G |f(x-y)g(y)| \, dxdy = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

   La funzione $\phi(x) = \int_G |f(x-y)g(y)| \, dy$ sta dunque in $L^1(G)$ e quindi per quasi ogni $x \in G$, $\phi(x) < \infty$ e quindi $(f * g)(x)$ esiste per quasi ogni x. Inoltre dalla disuguaglianza triangolare $|(f * g)(x)| \leq \phi(x)$ e quindi $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ e questo completa la prova.

6. Basta usare il Teorema di Fubini, tenendo in considerazione che tale uguaglianza per il punto precedente vale per quasi ogni x:

$$
\begin{aligned}
(f*(g*h))(x) &= \int_G f(x-z)(g*h)(z)\,dz \\
&= \int_G \int_G f(x-z)g(z-y)h(y)\,dydz \\
&= \int_G \int_G f(x-z-y)g(z)h(y)\,dydz \qquad \text{(si ottine ponendo } z' = z-y) \\
&= \int (f*g)(x-y)h(y)\,dy = ((f*g)*h)(x).
\end{aligned}
$$

□

La proposizione appena dimostrata ci permette di affermare che:

Teorema 3.1.5. *$L^1(G)$ è un'algebra di Banach se si usa la convoluzione come moltiplicazione. Inoltre se G è un gruppo discreto, allora $L^1(G)$ ha unità.*

Dimostrazione. La prima parte è del tutto evidente per la proposizione precedente. Per quanto riguarda la seconda, osseviamo che se G è discreto (usiamo la misura di Haar normalizzata) allora la convoluzione tra $f,\ g \in L^1(G)$ può essere scritta:

$$(f*g)(x) = \sum_{y \in G} f(x-y)g(y);$$

ora consideriamo la funzione $e\ :\ e(0) = 1,\ e(x) = 0\ \forall x \neq 0$ che evidentemente è una funzione di $L^1(G)$, inoltre $(f*e)(x) = x$ e quindi e è l'unità dell'algebra. □

In generale se G non è discreto $L^1(G)$ non ha unità, ma è sempre possibile creare delle *unità approssimate*:

Teorema 3.1.6. *Sia $f \in L^1(G)$, $\varepsilon > 0$, allora esiste un intorno V di 0 tale che se u è una funzione di Borel non negativa, nulla al di fuori di V e tale che $\int u\,dx = 1$ allora:*

$$\|f - f*u\|_1 < \varepsilon$$

Dimostrazione. Per la proposizione 3.1.3, esiste un intorno V di 0 tale che $\forall y \in V,\ \|f - f_y\|_1 < \varepsilon$; ma se u soddisfa l'ipotesi allora

$$(f*u)(x) - f(x) = \int_G [f(x-y) - f(x)]u(y)\,dy$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|f * u - f\|_1 &= \int_G \left| \int_G [f(x-y) - f(x)]u(y)\, dy \right| dx \\ &\leq \int_V |u(y)| \int_G |f(x-y) - f(x)|\, dxdy \qquad \text{(usando Fubini)} \\ &= \int_V \|f - f_y\|_1 \, u(y)\, dy < \varepsilon \qquad \text{(usando la definizione di } u\text{)} \end{aligned}$$

□

3.2 Il Gruppo Duale Γ e la Trasformata di Fourier

In questa sezione affronteremo lo studio di due concetti fondamentali per la tesi: il gruppo duale e la Trasformata di Fourier.

Notazione. Denoteremo con $\mathbb{T}$ il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi norma unitaria.

Definizione 3.2.1. Un *carattere* di G è un omomorfismo di gruppi $\gamma : G \to \mathbb{T}$.
Il *gruppo duale* di G, che indicheremo con la lettera Γ o $\widehat{G}$, è l'insieme dei caratteri continui di G; esso può essere strutturato a gruppo usando come operazione:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x).$$

Notazione. Di qui in avanti porremo sempre

$$\gamma(x) = (x, \gamma)$$

e quindi scriveremo $(x + y, \gamma) = (x, \gamma)(y, \gamma)$ e $(x, \gamma_1 + \gamma_2) = (x, \gamma_1)(x, \gamma_2)$.

Osservazione 3.2.1. Per il fatto che γ è un omomorfismo di G su $\mathbb{T}$ allora vale immediatamente che $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall x \in G$:

- $(0, \gamma) = (x, 0) = 1.$
- $(-x, \gamma) = (x, -\gamma) = (x, \gamma)^{-1} = \overline{(x, \gamma)}.$

Date queste poche definizioni possiamo passare alla dimostrazione del risultato centrale di questa sezione, che ci permette di mettere in corrispondenza biunivoca gli ideali massimali di $L^1(G)$ con le caratteristiche di G.

Teorema 3.2.1. *Le mappe*

$$\begin{aligned} w_\gamma : L^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)\,dx \end{aligned}$$

con $\gamma \in \Gamma$ fissato, sono tutti e soli i funzionali lineari moltiplicativi di $L^1(G)$

Dimostrazione. Quello che vogliamo fare è determinare una corrisipondenza biunivoca tra i caratteri di G e i funzionali moltiplicativi di $L^1(G)$ tramite la mappa

$$\begin{aligned} C_{duale} : \Gamma &\longrightarrow \mathfrak{M} \\ \gamma &\longmapsto w_\gamma \end{aligned}$$

che dobbiamo quindi dimostrare essere iniettiva e suriettiva.

Passo 1 Innanzitutto facciamo vedere che tutte le mappe di questo tipo sono mlf di $L^1(G)$.

$$\begin{aligned} \widehat{(f*g)}(\gamma) &= \int_G (f*g)(x)(-x,\gamma)\,dx = \int_G (-x,\gamma)\,dx \int_G f(x-y)g(y)\,dy \\ &= \int_G (-x,\gamma)(y,\gamma)\,dx \int_G f(x-y)g(y)(-y,\gamma)\,dy \\ &= \int_G g(y)(-y,\gamma)\,dy \int_G f(x-y)(-x+y,\gamma)\,dx = \hat{g}(\gamma)\hat{f}(\gamma). \end{aligned}$$

Quindi la mappa è un funzionale moltiplicativo per una qualunque $\gamma \in \Gamma$ fissato, e inoltre è chiaramente lineare. Infine siccome $|(-x,\gamma)| = 1$ allora $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ per qualche $f \in L^1(G)$. Questo ci permette di concludere che effettivamente la mappa è un mlf.

Passo 2 Quello che facciamo ora è mostrare la suriettività di C_{duale}, e cioè che preso h un mlf di $L^1(G)$, allora esiste un carattere del gruppo tale che h si possa scrivere come sopra. Innanzitutto siccome h è un funzionale limitato su $L^1(G)$ allora esiste una $\phi \in L^\infty(G)$ con $\|\phi\|_\infty = \|h\|_1 \leq 1 \,:\, h(f) = \int_G f(x)\phi(x)\,dx \;\forall f \in L^1(G)$[1]. Se $f,\, g \in L^1(G)$ si ha che

$$\begin{aligned}\int_G h(f)g(y)\phi(y)\,dy = h(f)h(g) = h((f*g)) = \int_G ((f*g))(x)\phi(x)\,dx \\ = \int_G g(y)\,dy \int_G f(x-y)\phi(x)\,dx = \int_G g(y)h(f_y)\,dy\end{aligned}$$

per quasi ogni $y \in G$. Osserviamo inoltre che, la proposizione 3.1.3 e la continuità di h, l'applicazione $h(f_y)$ è continua su G qualunque sia f fissata ed essendo h non nulla si ha la possibilità di scegliere una f tale che $h(f) \neq 0$, per cui ϕ coincide quasi ovunque con una funzione continua; dunque possiamo considerarla continua nel passaggio alle classi di equivalenza e quindi l'uguaglianza sopra vale per tutti gli y. Sostituendo y con $x+y$ e f con f_x si ha che $h(f)\phi(x+y) = h(f_{x+y}) = h((f_x)_y) = h(f_x)\phi(y) = h(f)\phi(x)\phi(y)$ e quindi finalmente si ha:

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y).$$

Per finire basta ricordare che per quanto sopra $|\phi(x)| \leq 1 \,\forall x \in G$ e inoltre il fatto che $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$ implica che necessariamente $|\phi(x)| = 1$, altrimenti o $|\phi(x)|$ o $|\phi(-x)|$ è maggiore di 1.

Passo 3 Resta da provare l'iniettività di C_{duale}; supponiamo di avere due caratteristiche $\gamma_1,\, \gamma_2$ tali che $\forall f \in L^1(G),\, \hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$; questo implica che $(-x, \gamma_1) = (-x, \gamma_2)$ per quasi ogni $x \in G$, ma siccome i caratteri sono continui e gli aperti non vuoti hanno misura non nulla, allora $\{x \in G \,:\, (-x, \gamma_1 - \gamma_2) \neq 0\}$ è necessariamente vuoto e quindi esse coincidono.

□

Ricordando il fatto che gli mlf di un'algebra di Banach sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali di quest'ultima, siamo riusciti a stabilire l'identificazione promessa.

Definizione 3.2.2. Data $f \in G$ la *Trasformata di Fourier* di f è la funzione $\hat{f}$ definita su Γ da

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)\,dx.$$

[1] Questo è un risultato classico di analisi funzionale riguardante il duale di spazi L^p; per approfondire si può far riferimento a [1, cap.3]

L'insieme di tutte queste funzioni viene denotato con $A(\Gamma)$.

Per le corrispondenze che abbiamo definito nel teorema precedente, $\hat{f}$ non è altro che la Trasformata di Gelfand di f e se consideriamo su Γ la topologia indotta dalle funzioni in $A(\Gamma)$, cosa del tutto lecita vista la corrispondenza esistente tra Γ e $\mathfrak{M}$, sappiamo che $A(\Gamma)$ è una sottoalgebra di $C_0(\Gamma)$ che separa i punti. Nel prossimo teorema elenchiamo le proprietà principali di quest'algebra:

Teorema 3.2.2. *1. $A(\Gamma)$ è una sottoalgebra di $C_0(\Gamma)$ autoaggiunta che separa i punti e quindi è densa in $C_0(\Gamma)$ per il Teorema di Stone-Weierstrass.*

2. $\widehat{(f * g)} = \hat{f}\hat{g}$.

3. $A(\Gamma)$ è invariante per traslazioni (cioè se $\hat{f}(\gamma) \in A(\Gamma)$ allora anche $\hat{f}(\gamma - \gamma_0) \in A(\Gamma), \forall \gamma_0 \in \Gamma$) e per moltiplicazioni per (x, γ) (cioè se $\hat{f}(\gamma) \in A(\Gamma)$, allora per ogni $x \in G$, $(x, \gamma)\hat{f}(\gamma) \in A(\Gamma)$).

4. Considerata come mappa da $L^1(G)$ a $C_0(\Gamma)$ è limitata e dunque continua perchè si ha che $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

5. Per $f \in L^1(G)$ e $\gamma \in \Gamma$, $(f * \gamma)(x) = (x, \gamma)\hat{f}(\gamma)$.

Dimostrazione. 1. Basta far vedere che è autoaggiunta, perchè il resto viene dalle proprietà della Trasformata di Gelfend viste nel capitolo precedente: se $f \in L^1(G)$ allora $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \in L^1(G)$ e si ha che $\hat{\tilde{f}}(\gamma) = \int_G \overline{f(-x)}(-x, \gamma)\, dx = \int_G \overline{f(-x)(x, \gamma)}\, dx = \overline{\int_G f(-x)(x, \gamma)\, dx} = \overline{\int_G f(x)(-x, \gamma)\, dx} = \overline{\hat{f}(\gamma)}$.

2. Dimostrato nel Passo 1 del teorema 3.2.1.

3. Sia $f \in L^1(G)$ e $\gamma_0 \in \Gamma$, poniamo $g(x) = f(x)(x, \gamma)$; allora

$$\hat{g}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, -\gamma_0)(-x, \gamma)\, dx = \int_G f(x)(-x, \gamma - \gamma_0)\, dx = \hat{f}(\gamma - \gamma_0),$$

e dunque quest'ultima appartiene a $A(\Gamma)$. Sia ora $x \in G$ e poniamo $g = f_{-x}$; allora

$$\begin{aligned}\hat{g}(\gamma) &= \int_G f(y + x)(-y, \gamma)\, dy \\ &= (x, \gamma) \int_G f(y + x)(-x - y, \gamma)\, dy = (x, \gamma)\hat{f}(\gamma),\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata l'invarianza per traslazioni.

4. Evidente dalla disuguaglianza triangolare e dal fatto che γ è un carattere.

5. $(f * \gamma)(x) = \int_G (x - y, \gamma) f(y)\, dy = (x, \gamma) \int_G (-y, \gamma) f(y)\, dy = (x, \gamma) \hat{f}(\gamma)$

□

Vogliamo ora studiare più nel dettaglio la topologia che stiamo considerando su Γ. Per cominciare vediamo un primo risultato che ci introduce al concetto di dualità:

Teorema 3.2.3. *Se G è discreto, allora Γ è compatto; se G è compatto allora Γ è discereto.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che se G è discreto allora $L^1(G)$ ha unità per i teoremi 3.1.5 e 2.4.2 Γ è compatto. Per la seconda parte innanzitutto consideriamo m tale che $m(G) = 1$, cosa che è lecita perchè essendo G compatto necessariamente $m(G) < \infty$; osserviamo a questo punto che:

$$\int_G (x, \gamma)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = 0 \\ 0 & \text{se } \gamma \neq 0 \end{cases}$$

Il primo caso è del tutto evidente. Per quanto riguarda il secondo se $\gamma \neq 0$, allora $\exists\, x_0 \in G \,:\, (x_0, \gamma) \neq 1$ e quindi

$$\int_G (x, \gamma)\, dx = (x_0, \gamma) \int_G (x - x_0, \gamma)\, dx = (x_0, \gamma) \int_G (x, \gamma)\, dx.$$

Inoltre la funzione $f(x) = 1, \forall x \in G$ sta in $L^1(G)$ in quanto $m(G) = 1$ e si ha che $\hat{f}(0) = 1,\ \hat{f}(\gamma) = 0$ se $\gamma \neq 0$ per quanto appena detto. Ora, considerando esplicitamente come intorno dell'origine $\{\gamma \in \Gamma \,:\, |\hat{f}(\gamma)| > \varepsilon,\, 0 < \varepsilon < 1\} = \{0\}$ è un aperto, e siccome la topologia è invariante per traslazioni allora Γ è discreto. □

Per il momento Γ è soltanto un gruppo su cui è definita la topologia che abbiamo prima ricordato; in realtà il prossimo teorema ci permette di affermare che con essa Γ è proprio un gruppo topologico.

Teorema 3.2.4. *1. (x, γ) è una funzione continua su $G \times \Gamma$.*

2. *Fissati K e C sottinsiemi compatti rispettivamente di G e Γ e posto $U_r := |1-z| < r$, poniamo*
$$N(K,r) = \{\gamma\,:\,(x,\gamma) \in U_r\,\forall x \in K\};$$
$$N(C,r) = \{x\,:\,(x,\gamma) \in U_r\,\forall \gamma \in C\};$$
Tali insiemi sono aperti rispettivamente di G e Γ.

3. *$N(K,r)$ e i traslati sono una base per la topologia di Γ.*

4. *Γ è LCA.*

Dimostrazione. 1. Abbiamo già visto precedentemente nella dimostrazione del teorema 3.2.2 la seguente uguaglianza:
$$\hat{f}(\gamma)(x,\gamma) = \hat{f}_x(\gamma)$$
semplicemente scritta in una forma alternativa; se dimostriamo che il membro di destra è una funzione continua su $G \times \Gamma$ per ogni $f \in L^1(G)$ abbiamo raggiunto l'obbiettivo. Fissiamo $x_0 \in G$, $\gamma_0 \in \Gamma$; usando la proposizione 3.1.3 e la continuità di $\hat{f}_{x_0}$ possiamo affermare che esistono un intorno V di x_0 e un intorno W di γ_0 tali che:
$$\|f_x - f_{x_0}\|_1 < \varepsilon,\ |\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \varepsilon$$
$\forall x \in V$, $\forall \gamma \in W$. Usando poi il fatto che $|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma)| \leq \|f_x - f_{x_0}\|_1$ visto sempre nel teorema 3.2.2 si ha che
$$|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| \leq |\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma)| + |\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \varepsilon$$
.

2. Per far vedere che $N(K,r)$ è aperto facciamo vedere che scelto un suo elemento γ_0, l'insieme è un suo intorno. Dal punto precedente, scelto $x_0 \in G$ esistono un intorno V di x_0 e un intorno $\gamma_0 \in \Gamma$ tali che $\forall x \in V$, $\forall \gamma \in W$ $(x,\gamma) \in U_r$. Siccome K è un compatto, esistono un numero finito di questi V che ricoprono K e se W^* è l'intersezione dei rispettivi W è chiaro che $W^* \subseteq N(K,r)$; ma W^* è un intorno di γ_0 per cui lo è anche $N(K,r)$. Dimostrazione analoga si fa per l'altro insieme.

3. Per far vedere questo punto non dobbiamo far altro che scegliere $\gamma_0 \in \Gamma$, un suo intorno V e mostrare che esistono un compatto K di G e $r > 0$ tale che $\gamma_0 + N(K, r) \subseteq V$. In realtà, per le proprietà della topologia che stiamo considerando, per cui il traslato di un aperto è un aperto, è sufficiente farlo per $\gamma_0 = 0$. Considerando la classica base di intorni della topologia debole stella, per cui esistono $f_1, \ldots, f_n \in L^1(G)$ tali che

$$\bigcap_1^n \{\gamma : |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| < \varepsilon\} \subseteq V.$$

Ma, ricordando che le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^1(G)$, possiamo suppore che $f_1, \ldots, f_n$ siano nulle al di fuori di un compatto K; inoltre posto $r < \varepsilon \max_i \|f_i\|_1$ se $\gamma \in N(K, r)$

$$|\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| \leq \int_K |(-x, \gamma) - 1||f_i(x)|\, dx \leq r \|f_i\|_1 < \varepsilon.$$

Ne segue che $N(K, r) \subseteq V$, come volevamo.

4. Per dimostrare l'ultimo punto basta osservare semplicemente che $[\gamma' + N(K, r/2)] - [\gamma'' + N(K, r/2)] \subseteq \gamma' - \gamma'' + N(K, r)$ perchè scelte $\phi' \in [\gamma' + N(K, r/2)]$ e $\phi''[\in \gamma'' + N(K, r/2)]$ si ha che $(x, \phi' - \gamma') \in U_{r/2}$ e $(x, \phi'' - \gamma'') \in U_{r/2}$ e quindi $|1 - (x, \phi' - \phi'' - \gamma' + \gamma'')| < |1 - (x, \phi' - \gamma')| + |(x, \phi' - \gamma')||1 - (x, \phi'' - \gamma'')| < r$ (osservazione: ho aggiunto e tolto $(x, \phi' - \gamma')$) e quindi la mappa $(\gamma', \gamma'') \mapsto \gamma' - \gamma''$ è effettivamente continua per la carattizzazione della continuità topologica che fa uso degli intorni. Non c'è altro da dimostrare perchè nel capitolo precedente, nel teorema 2.4.2 avevamo già verificato che Γ con questa topologia è localmente compatto e la topologia debole stella è in generale T_2.

$\square$

3.3 Esempi

Dopo i risultati teorici della sezione precedente, vogliamo presentare alcuni esempi concreti di calcolo esplicito del gruppo duale per mostrare quali siano le tecniche utilizzate per affrontare questo tipo di problemi.

Esempio 3.3.1 (La Trasformata di Fourier per funzioni di $L^1(\mathbb{R})$)**.** Abbiamo parlato fino ad adesso della Trasformata di Fourier delle funzioni di $L^1(G)$ senza specificare esattamente di quale gruppo stessimo parlando; abbiamo visto nei corsi istituziali la Trasformata di Fourier per funzioni di $L^1(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}$ è un gruppo con la somma, è localmente compatto e T_2 con la topologia della metrica euclidea e la misura di Lebesegue è invariante per traslazioni; cerchiamo di determinare gli elementi del il gruppo duale (che continueremo ad indicare con Γ) al fine di verificare se effettivamente la nozione di Trasformata di Fourier che conosciamo coincide con quella appena definita. In questo esempio, visto che i caratteri sono delle funzioni complesse a variabile reale, torneremo alla notazione $\gamma(x)$ al posto di (x,γ).
Sia $\gamma \in \Gamma$; siccome essa è continua e per definizione si ha che $\gamma(0) = 1$ allora $\exists\, \delta > 0$: $\int_0^\delta \gamma(t)\, dt = \alpha \neq 0$. Inoltre

$$\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t)\ (\forall x,\, t \in \mathbb{R}),$$

e questo implica che:

$$\alpha \cdot \gamma(x) = \gamma(x) \int_0^\delta \gamma(t)\, dt = \int_0^\delta \gamma(x+t)\, dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\, dt.$$

Siccome γ è continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale γ è differenziabile. Quindi, fissato $x \in \mathbb{R}$, e deriviamo $\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t)$ e poniamo $t = 0$; otteniamo che il carattere che stiamo analizzando deve risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \gamma'(x) = A\gamma(x) \\ \gamma'(0) = A \end{cases}$$

Una soluzione è del tipo e^{iyx} per un qualche y e, poichè la soluzione di questo problema di Cauchy è unica, ne esiste una sola possibile. Possiamo concludere che esiste un isomorfismo di gruppi ovvio tra Γ e $\mathbb{R}$, perchè di fatto quello che abbiamo mostrato è che i caratteri di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli quelli del tipo e^{iyx}, $y \in \mathbb{R}$, per cui il duale di $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$. Verifichiamo inoltre che la topologia di Gelfand sul duale è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$: per $r > 0$ e $n = 1, 2, 3, \ldots$ $V(n,r) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, |1 - e^{ixy}| < r \text{ con } |x| \leq n\}$ è chiaramente un sistema fondamentale di intorni per 0 in Γ perchè i compatti di $\mathbb{R}$ sono chiusi e limitati; infatti se considero in intorno del tipo $N(K,r)$ come visto nel teorema

3.2.4, allora $\exists\, n\, :\, K \subseteq |x| \leq n$ per cui se $y \in V(n,r)$ allora necessariamente $y \in N(K,r)$ e quindi $V(n,r) \subseteq N(K,r)$; ma $y \in V(n,r)$ se e solo se $|y| < (2/n) arcsin(r/2)$; quindi $V(n,r)$ sono aperti euclidei e quindi le due topologie coincidono.
Concludiamo osservando che la Trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ si scrive come

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iyx}\, dx$$

che è la classica Trasformata di Fourier.

Esempio 3.3.2 (l'esempio di $G = \mathbb{T}$)**.** Consideriamo $\mathbb{T}$, che può essere visto come il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo unitario o il guppo additivo dei numeri reali modulo 2π; questi sono isomorfi come gruppi topologici (vedi la definizione 4.4.1) se sul primo si considera la topologia indotta dal piano complesso e sul secondo si considera la topologia quoziente. I caratteri di $\mathbb{T}$ si ottengono di fatto tenendo conto di quanto visto nell'esempio precedente: se considero la composizione

$$\theta : \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{T}$$

dove π è la proiezione canonica e γ è un carattere di $\mathbb{T}$ si ha necessariamente che θ è un carattere di $\mathbb{R}$ (le due funzioni sopra sono continue e omeomorfismi di gruppi). Ne deriva che esiste $y \in \mathbb{R}\, :\, \theta(x) = e^{iyx}$, ma siccome π fa si che $\theta(x + 2\pi) = \theta(x)$ allora $y \in \mathbb{Z}$ e questo gruppo è banalmente isomorfo a $\mathbb{Z}$. Questo ci permette di concludere che ogni carattere di $\mathbb{T}$ può essere scritto come $\gamma(x) = e^{ixy}$ con $y \in \mathbb{Z}$. Notiamo inoltre che, per teorema 3.2.3, la topologia su $\mathbb{Z}$ è quella discreta perchè $\mathbb{T}$ è compatto.

Esempio 3.3.3 (Un primo esempio di dualità: il gruppo duale di $\mathbb{Z}$)**.** Ora poniamo $G = \mathbb{Z}$; se γ è un carattere di questo gruppo si ha che $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\, :\, (1,\gamma) = e^{i\alpha}$, ma allora $(n,\gamma) = e^{in\alpha}$, per cui il carattere è completamente determinato da α. Inoltre se $\beta = \alpha + 2\pi$, allora $e^{i\beta} = e^{i\alpha}$, quindi la mappa $\gamma \leftrightarrow e^{i\alpha}$ (dove α rappresenta una classe di $\mathbb{R}$ modulo 2π che è dunque isomorfo a $\mathbb{T}$) è un isomorfismo di gruppi tra Γ e $\mathbb{T}$. Verifichiamo inoltre che la topologia di Gelfand sia la stessa indotta dalla metrica euclidea: un sistema fondamentale di intorni di 1 per la metrica euclidea indotta è $\{|1 - z| < r, r > 0, z \in \mathbb{T}\}$; scelto $K = \{1\}$, K è un compatto di $\mathbb{Z}$ e si ha $(1,z) = z$, quindi $N(K,r) = \{|1 - z| < r,\, r > 0,\, z \in \mathbb{T}\}$. Ricordiamo che con questa topologia $\mathbb{T}$

è compatto, confermando ancora il teorema 3.2.3. La Trasformata di Fourier in questo caso sarà:

$$\hat{f}(e^{i\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\alpha}.$$

Considerando quello che abbiamo visto nell'esempio precedente, abbiamo verificato un fatto che dimostreremo poi alla fine di questo capitolo in generale, e cioè che il gruppo duale del duale è il gruppo di partenza.

Esempio 3.3.4 (Il gruppo duale di $\mathbb{Z}_n$)**.** Concludiamo ora con un esempio leggermente più algebrico che riguarda il calcolo del gruppo duale di $\mathbb{Z}_n$ con n fissato. Ricordiamo anzitutto due fatti che riguardano gli omomorfismo tra gruppi ciclici:
dati G e G' gruppi con unità e ed e', G ciclico di generatore g, sia $\phi : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi, allora

1. ϕ è univocamente determinata da $\phi(g)$ perchè preso un qualunque $f \in G$, $\exists\, m \in \mathbb{N} : g^m = f$ e quindi essendo ϕ un omomorfismo si ha che $\phi(f) = \phi(g^m) = \phi(g)^m$.

2. ovviamente $Im(\phi)$ è un sottogruppo ciclico di G' e l'ordine di $\phi(g)$ divide l'ordine di g perchè se d è l'ordine di quest'ultimo allora $e' = \phi(e) = \phi(g^d) = \phi(g)^d$.

Ora passiamo a dimostrare quanto promesso:

Passo 1: Mostriamo che il gruppo duale di $\mathbb{Z}_n$ è isomorfo come gruppo al gruppo degli endomorfismi di $\mathbb{Z}_n$ che indichiamo con $End(\mathbb{Z}_n)$. Infatti presa $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(1)$ è una radice n-esima dell'unità perchè infatti, per quanto visto nel punto 2 sopra, $1 = \gamma(1) = \gamma(n) = \gamma(1)^n$, ma se $I(n)$ è il gruppo delle radici n-esime dell'unità sappiamo che $\mathbb{Z}_n \cong I(n)$ e quindi si ottiene la tesi in maniera banale.

Passa 2: Quello che dobbiamo fare è mostrare che $End(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$ e per farlo è sufficiente mostrare che è un gruppo ciclico di ordine n. Infatti, ricordando quanto detto nel punto 1 sopra si ha che $End(\mathbb{Z}_n)$ ha esattamente n elementi in quanto l'immagine di 1 può essere scelta solo fra n valori. Infine il gruppo è chiaramente ciclico con la composizione perchè sia $\phi \in End(\mathbb{Z}_n) : \phi(1) = 1$ sia $\gamma\ inEnd(\mathbb{Z}_n) : \gamma(1) = m$ allora $\phi^m = \gamma$ e questo conclude.

In questo teorema abbiamo scelto come gruppo di partenza $\mathbb{Z}_n$ che è discreto e compatto (perchè dicreto e finito) e il suo duale è $\mathbb{Z}_n$ che, come previsto dal risultato 3.2.3 è tautologicamente discreto e compatto.

Con una dimostrazione del tutto analoga si dimostra che dato G un gruppo finito ciclico di ordine n, il suo duale è isomorfo a G.

Vogliamo poi fare un accenno al duale di del prodotto di gruppi; innanzitutto osserviamo che, se consideriamo una famiglia di gruppi $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ con I insieme di indici, il prodotto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ dotato della somma definita componente per componente è anch'esso un gruppo e, con la topologia prodotto è ovvimente un LCA. Distinguiamo il caso del prodotto finito da quelle del prodotto infinito:

Teorema 3.3.1 (Il duale del prodotto finito di gruppi)**.** *Dati $G_1, \ldots, G_n$ il duale di $G_1 \times \ldots \times G_n$ è isomorfo a $\widehat{G_1} \times \ldots \times \widehat{G_n}$ con la topologia prodotto.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \widehat{G_1} \times \ldots \times \widehat{G_n}$ definisce un carattere: basta infatti porre $((x_1, \ldots, x_n), \xi) = (x_1, \xi_1) \cdot \ldots \cdot (x_n, \xi_n)$; se considero poi un carattere ξ di $G_1 \times \ldots \times G_n$ allora $\xi_j(x_j) = ((1, \ldots, x_j, \ldots, 1), \xi)$ è un carattere di G_j per cui i caratteri di $G_1 \times \ldots \times G_n$ sono tutti e soli del tipo visto sopra e quindi il duale di $G_1 \times \ldots \times G_n$ e $\widehat{G_1} \times \ldots \times \widehat{G_n}$ sono isomorfi come gruppi.
Vediamo ora se la topologia prodotto è proprio quella del duale usando il teorema 3.2.4 e osservando che è sufficiente restringere la nostra attenzione all'unità. Innanzitutto gli insiemi del tipo $N(K_1, r_1) \times \cdots \times N(K_n, r_n)$ con $K_1, \ldots, K_n$ compatti rispettivamente di $G_1, \ldots, G_n$, $r_1, \ldots, r_n > 0$, sono una base di intorni nell'unità della topologia prodotto; facciamo vedere che essi sono intorni anche nella topologia del duale e questo è evidente perchè fissato $K_j \subseteq G_j$ compatto e $r_j > 0$ si ha che $N(\{e_1\} \times, \ldots K_j \ldots \{e_n\}, r_j) = \widehat{G_1} \times N(K_j, r_j) \times \ldots \times \widehat{G_n}$ e inoltre l'intersezione finita di intorni di un punto è ancora intorno di quel punto. Per finire facciamo vedere che sono un sistema fondamentale di intorni dell'origine: infatti scelti K compatto di $G_1 \times \ldots \times G_n$, $r > 0$ e fissati $r_1, \ldots, r_n > 0 : r_1 + \ldots r_n = r$, allora $K_j = \pi_j(K)$ è compatto tramite la proiezione canonica j-esima

(per continuità) e se $\xi \in N(K_1, r_1) \times \cdots \times N(K_n, r_n)$ si ha che $\forall x \in K$

$$\begin{aligned}|1 - (x, \xi)| &= |1 - (x_1, \xi_1) \cdot \cdots \cdot (x_n, \xi_n)| \\ &\leq |1 - (x_1, \xi_1)| + |(x_1, \xi_1)||1 - (x_2, \xi_2) \dots (x_n, \xi_n)| \\ &\leq \cdots \leq r_1 + \cdots + r_n = r,\end{aligned}$$

e quindi $N(K_1, r_1) \times \cdots \times N(K_n, r_n) \subseteq N(K, r)$. $\square$

Notazione. Data la famiglia di gruppi $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$,

$$\bigoplus_{\alpha \in I} \widehat{G_\alpha} = \{\xi \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \; : \; \xi_j = 0 \text{ definitivamente}\}.$$

Teorema 3.3.2. *Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ famiglia di gruppi compatti, allora il duale di $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ è $\bigoplus_{\alpha \in I} \widehat{G_\alpha}$ con la topologia discreta.*

Dimostrazione. Il fatto che la topologia del duale sia discreta è ovvio per il Teorema di Tychonoff e il teorema 3.2.3, restano però da determinare i caratteri; innanzitutto è evidente, come nel teorema precedente che se $\xi \in \bigoplus_{\alpha \in I} \widehat{G_\alpha}$, $(x, \xi) = \prod_{\alpha \in I} (x_\alpha, \xi_\alpha)$ definisce un carattere. Ora se ξ è un carattere di $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ analogamente a quanto fatto nel teorema precedente ξ può essere identificato con un elemento $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} \widehat{G_\alpha}$; quanto dobbiamo fare è far vedere che $\xi_\alpha = 1$ definitivamente. Per la continuità di ξ esiste un intorno V dell'unità di $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ tale che $\forall x \in V$, $|1 - (x, \xi)| < 1$; ora, per la definizione della topologia prodotto, $\forall \alpha \in I$, $\exists\, V_\alpha$ intorno dell'unità di G_α tale che $\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \subseteq V$ e $V_\alpha = G_\alpha$ definitivamente. Siccome i V_α sono intorni dell'unità allora $\xi(V) \supseteq \xi(\widetilde{V_\alpha}) = \xi_\alpha(G_\alpha)$ dove $\widetilde{V_\alpha}$ è il prodotto dei singoletti delle unità ad eccetto di V_α. Quindi $\xi_\alpha(G_\alpha)$ è un sottogruppo di $\mathbb{T}$ contenuto in $\{z \in \mathbb{T} \; : \; |1 - z| < 1\}$ e questo è necessariamente il sottogruppo banale, per cui $\xi_\alpha = 1$. $\square$

3.4 La Trasformata di Fourier- Stieltjes

In questa sezione definiremo la Trasformata di Fourier per le misure di $M(G)$ che in un certo senso, come verificheremo, è una generalizzazione della Trasformata di Fourier vista fino ad ora.

Definizione 3.4.1. Siano μ, $\lambda \in M(G)$ (vedi l'appendice A); consideriamo $\mu \times \lambda$ nella $\sigma -$ algebra di Borel nello spazio prodotto $G \times G$ e, per ogni boreliano E di G considero l'insieme

$$E_{(2)} = \{(x, y) \in G \times G \, : \, x + y \in E\}.$$

Di conseguenza possiamo considerare la funzione dall'insieme dei boreliani nei complessi:

$$(\mu * \lambda)(E) = \mu \times \lambda(E_{(2)})$$

e questa viene chiamata *convoluzione delle misure* μ *e* λ.

Osservazione 3.4.1. $E_{(2)}$ non è altro che la controimmagine di E rispetto all'operazione di somma che essendo continua è anche Borel-misurabile e quindi $E_{(2)}$ è di Borel. La definizione dunque è perfettamente sensata.

Teorema 3.4.1. *1. Se* μ, $\lambda \in M(G)$ *allora* $(\mu * \lambda) \in M(G)$.

2. L'operazione di convoluzione è associativa e commutativa.

3. $\|(\mu * \lambda)\| \leq \|\mu\| \, \|\lambda\|$ *(vedi l'appendice A per la definizione di variazione totale).*

Dimostrazione. 1. Il Teorema di Decomposizione di Jordan A.2.1 ci dice che è sufficiente mostrarlo per misure non negative. Innanzitutto si ha che $(\mu * \lambda)(\emptyset) = (\mu \times \lambda)(\emptyset) = 0$ e inoltre se $E_1, E_2 - \cdots \subseteq E = \bigcup E_i$ a due a due disgiunti allora anche le loro controimmagini saranno a due a due disgiunte e siccome la controimmagine dell'unione è l'unione delle controimmagini si ha che

$$(\mu * \lambda)(E) = \mu \times \lambda(E_2) = \sum \mu \times \lambda((E_i)_{(2)}) = \sum (\mu * \lambda)(E_i);$$

per provare la regolarità, se E è un B boreliano di G, essendo $\mu \times \lambda$ regolare $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \, K$ compatto $(\mu \times \lambda)(K) > (\mu \times \lambda)(E_{(2)}) - \varepsilon$ e quindi se C è l'immagine di K rispetto all'applicazione somma, allora C è compatto perchè la somma è continua, $K \subseteq C_{(2)}$ e $C \subseteq E$; inoltre vale la relazione

$$(\mu * \lambda)(C) = (\mu \times \lambda)(C_{(2)}) \geq (\mu \times \lambda)(K) > (\mu * \lambda)(E) - \varepsilon.$$

Con la stessa tecnica si dimostra anche la disuguaglianza per gli aperti sfruttando il fatto che l'applicazione somma è aperta e che una base degli aperti è quella degli aperti prodotto.

2. Siccome i gruppi che stiamo considerando sono commutativi allora la richiesta $x + y \in E$ e $y + x \in E$ sono equivalenti e quindi si ha che

$$(\lambda * \mu)(E) = \lambda \times \mu = (E_{(2)}) = (\mu \times \lambda)(E_{(2)}) = (\mu * \lambda)(E) :$$

per quanto riguarda l'associatività è sufficiente definire la convoluzione per più di due misure: per ogni E boreliano di G si considera l'insieme

$$E_{(n)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in G \times G \times \cdots \times G \,:\, x_1 + x_2 + \dots x_n \in E\}$$

e si ponga

$$\mu_1 * \mu_2 * \dots \mu_n(E) = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots \mu_n(E_{(n)})$$

e quindi l'associatività discende dal Teorema di Fubini.

3. La definizione di $(\mu * \lambda)$ è equivalente a chiedere che per ogni E boreliano si verifichi che

$$\int_G \chi_E \, d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G \chi_E(x + y) \, d\mu(x) d\lambda(y). \tag{3.3}$$

Usando la Procedura standard si ottiene che per ogni funzione f Borel-misurabile vale che

$$\int_G f \, d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G f(x + y) \, d\mu(x) d\lambda(y). \tag{3.4}$$

Se $|f(x)| \leq 1 \, \forall x \in G$ allora $|\int_G f(x + y) \, d\mu(x)| \leq \|\mu\| \; \forall y \in G$ (vedi anche l'osservazione A.2.2) e quindi $|\int_G f \, d((\mu * \lambda))| \leq \|\mu\| \, \|\lambda\|$; da questo segue la tesi.

□

Corollario 3.4.2. *$M(G)$ è un'algebra di Banach commutativa con unità se si considera la convoluzione come operazione di moltiplicazione.*

Dimostrazione. Per mostrare il risultato è sufficiente far vedere qual'è l'unità; se δ_0 è la Delta di Dirac centrata in 0; per (3.3) si ha che:

$$\begin{aligned}(\mu * \delta_0)(E) &= \int_G \chi_E \, d(\mu * \delta_0) \\ &= \int_G \int_G \chi_E(x + y) \, d\mu(x) \delta_0(y) \\ &= \int_G \int_G \chi_E(x + y) \, d\delta_0(y) d\mu(x) = \int_G \chi_E(x) \mu(x)\end{aligned} \tag{3.5}$$

per quanto visto in teoria astratta dell'integrazione. □

Definizione 3.4.2. Se $\mu \in M(G)$ definiamo la *Trasformata di Fourier-Stieltjes* di μ la funzione su Γ definita da

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, d\mu(x).$$

L'insieme di tutte queste funzioni lo denoteremo con $B(\Gamma)$.

Teorema 3.4.3. *1. Se $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$ allora è limitata e uniformemente continua.*

2. Se $\sigma = (\mu * \lambda)$ allora $\hat{\sigma} = \hat{\mu} \cdot \hat{\lambda}$.

3. $B(\Gamma)$ è invariante per traslazioni, moltiplicazioni per (x, γ), $\forall x \in G$ e per coniugazione complessa (nel senso visto ne teorema 3.2.2).

Dimostrazione. 1. Dalla definizione segue immediatamente per la disuguaglianza triangolare che $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \|\mu\|$ $\forall \gamma \in \Gamma$ e questo prova la limitatezza. Ora, preso $\delta > 0$ la regolarità di $|\mu|$ mostra che esiste un compatto K in G tale che $|\mu|(K') < \delta$ con $K' = K^c$. Dunque presi due caratteri di Γ γ_1, γ_2 abbiamo che:

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| &\leq \int_G |(-x, \gamma_1)||1 - (-x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d|\mu|(x) \\ &= \int_G |1 - (-x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d|\mu|(x) = \int_K + \int_{K'}.\end{aligned}$$

Ora se $\gamma_1 - \gamma_2 \in N(K, \delta)$ definito come nel teorema 3.2.4 allora $\int_K \leq \delta \|\mu\|$ mentre $\int_{K'} \leq 2|\mu|(K') < 2\delta$, quindi per definizione $\hat{\mu}$ è uniformemente continua.

2. Sfruttando (3.4) si ha che:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\gamma) &= \int_G (-z, \gamma)\, d(\mu * \lambda)(z) = \int_G \int_G (-y - x, \gamma)\, d\mu(x) d\lambda(y) \\ &= \int_G (-x, \gamma)\, d\mu(x) \int_G (-y, \gamma)\, d\lambda(y) = \hat{\mu}(\gamma)\hat{\lambda}(\gamma)\end{aligned} \tag{3.6}$$

e questo conclude.

3. Il terzo punto è analogo al teorema 3.2.2; infatti dalla definizione si ha subito che se $\lambda(x) = (x, \gamma)\mu(x)$, allora è evidente dalla definizione che $\hat{\lambda}(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma - \gamma_0)$; se

$\lambda(E) = \mu(E-y)$ usando l'invarianza per traslazioni $\hat{\lambda}(\gamma) = \int_G (-x,\gamma)\, d\mu(x-y) = \int_G (y-x,\gamma)\, d\mu(x) = (y,\gamma) \int_G (-x,\gamma)\, d\mu(x)$; per finire posto $\widetilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$, la Trasformata di Fourier-Stieltjes di $\widetilde{\mu}$ è proprio la complessa coniugata di $\widehat{\mu}$ (basta banalmente sostiutuire).

□

Osservazione 3.4.2 ($L^1(G)$ come sottoalgebra di $M(G)$). Sfruttando i risultati di teoria della misura che si trovano in A.3, possiamo identificare $L^1(G)$ con la sottoalgebra di $M(G)$ delle misure assolutamente continue rispetto alla misura di Haar m attraverso un'isometria stabilita dal Teorema di Radon-Nikodym A.3.1. Inoltre è immediato osservare che $\hat{f}(\gamma) = \hat{\mu}_f(\gamma)\, \forall \gamma \in \Gamma$, dove $\mu_f(E) = \int_E f(x)\, dx$ per ogni E boreliano. Quindi di fatto possimo affermare che la Trasformata di Fourier-Stieltjes estebde la Trasformata di Fourier a $M(G)$.

Concludiamo questo paragrafo con una proposizione che ci sarà utile in seguito:

Proposizione 3.4.4. *Se* $\mu \in M(\Gamma)$ *e se*

$$\int_\Gamma (x,\gamma)\, d\mu(\gamma) = 0$$

per ogni $x \in G$*, allora necessariamente* $\mu = 0$.

Dimostrazione. Presa $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\, d\mu(\gamma) &= \int_\Gamma \int_G f(x)(-x,\gamma)\, dx d\mu(\gamma) \\ &= \int_G f(x)\, dx \int_\Gamma (-x,\gamma)\, d\mu(\gamma) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

e siccome $A(\Gamma)$ è denso in $C_0(\Gamma)$, ne segue che per ogni $\phi \in C_0(\Gamma)$, $\int_\Gamma \phi\, d\mu$ e quindi $\mu = 0$ per il Teorema di Rappresentazione di Riesz complesso A.2.2. □

Capitolo 4

Risultati teorici significativi

4.1 Funzioni definite positive e Teorema di Bochner

In questo capitolo affronteremo un primo risultato importante della teoria dei gruppi topologici localmente compatti e cioè il Teorema di Bochner il quale, oltre a godere di un grande interesse teorico, ha trovato applicazione in ambiti come per esempio la statistica. Cominciamo subito dando la seguente

Definizione 4.1.1. Una funzione $\phi : G \to \mathbb{C}$ si dice definita positiva se per una qualunque scelta di $x_1, \ldots, x_N \in G$ e $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$, si ha che vale

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \overline{c_m} \phi(x_n - x_m) \geq 0. \tag{4.1}$$

Proposizione 4.1.1. *Sia ϕ come sopra; allora si verificano i seguenti fatti:*

- $\phi(0) \in \mathbb{R}$.
- $$\phi(-x) = \overline{\phi(x)}. \tag{4.2}$$
- $$|\phi(x) \leq \phi(0)|. \tag{4.3}$$
- $$|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2\phi(0)\,\mathrm{Re}[\phi(0) - \phi(x-y)] \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Per il primo punto basta avere $N = 1$ e scegliere un qualsiasi $x \in G$.
Per provare la (4.2) poniamo $N = 2$ e scegliamo $x_1 = 0$, $x_2 = x\, c_1 = 1$, $c_2 = c$; per la 4.1 si ha che

$$(1 + |c|)^2\phi(0) + c\phi(x) + \overline{c}\phi(-x) \geq 0; \tag{4.5}$$

in particolare un rapido calcolo mostra che posto $c = 1$ si ha che $\phi(x) + \phi(-x) \in \mathbb{R}$ (quindi hanno parte immaginaria opposta) e posto $c = i$, $i(\phi(x) - \phi(-x)) \in \mathbb{R}$. (quindi hanno stessa parte reale).
Ponendo $c = -\frac{\overline{\phi(x)}}{|\phi(x)|}$ se $\phi(x) \neq 0$ e $c = 0$ se $\phi(x) = 0$ in modo tale che si abbia $c\phi(x) = -|\phi(x)|$, sostituendo in (4.5) si ottiene (4.3).
Per ottenere (4.3) prendiamo $N = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $c_1 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}.\, c_2 = \frac{\lambda|\phi(x)-\phi(y)|}{\phi(x)-\phi(y)}$, $c_3 = -c_2$; un calcolo diretto usando (4.1) mostra che per un qualunque $\lambda \in R$

$$\phi(0)(1 - \lambda^2) + 2\lambda|\phi(x) - \phi(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re}\phi(x - y) \geq 0$$

quindi il discriminante di questo polinomio non può essere mai positivo e questo implica (4.4). □

Osservazione 4.1.1. Da quanto appena visto è immediato per (4.3) che $\phi(0) \geq 0$ e che ϕ è limitata; inoltre da (4.4) ϕ è anche uniformemente continua se è continua in 0 e quindi per verificare la continuità di una funzione definita positiva è sufficiente controllare la continuità nell'origine.

Osservazione 4.1.2. Un'osservazione che ci può permettere di comprendere meglio il significato di funzioni definite positive è questa: sia ϕ una funzione; essa è definita positiva se e solo se fissati $x_1, \cdots, x_n \in G$ qualunque allora la matrice $\Phi = (\phi(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$ è Hermitiana semidefinita positiva. Questa interpretazione matriciale ci permette di comprendere su quali presupposti teorici lo studio di queste funzioni affondi le sue radici.

Esempio 4.1.1. Vogliamo ora fare qualche esempio per di funzione definita positiva che ci tronerà poi utile nelle sezioni successive.

- Consideriamo $f \in L^2(G)$; allora abbiamo immediatamete che $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \in L^2(G)$ e per la proposizione 3.1.4 $\phi = f * \tilde{f}$ è continua; mostriamo che è definita positiva:

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\phi(x_n - x_m) = \sum c_n\overline{c_m}\int_G f(x_n - x_m - y)\overline{f(-y)}\,dy$$
$$= \sum c_n\overline{c_m}\int_G f(x_n - y)\overline{f(x_m - y)}\,dy = \int \left|\sum c_n f(x_n - y)\right|^2 dy \geq 0.$$

- I caratteri di un gruppo sono definiti positivi perchè

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}(x_n - x_m, \gamma) = \left|\sum_n c_n(x_n, \gamma)\right|^2 \geq 0,$$

- Tutte le combinazioni lineari a coefficienti positivi di funzioni definite positive sono funzioni definite positive (immediato dalla definizione).

- Quest'ultimo esempio, come sarà chiaro dal teorema seguente è particolarmente importante: sia $\mu \in M(\Gamma)$, $\mu \geq 0$, la funzione

$$\phi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)\,d\mu(\gamma)$$

  è definita positiva e continua (in particolare uniformemente continua).
  Per mostrare che è definita positiva

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\phi(x_n - x_m) = \int_\Gamma \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}(x_n - x_m, \gamma)\,d\mu(\gamma) =$$
$$= \int_\Gamma \left|\sum_n c_n(x_n, \gamma)\right|^2 d\mu(\gamma) \geq 0.$$

  invece per quanto riguarda l'uniforme continuità, possiamo modificare la dimostrazione del punto 1 del teorema 3.4.3, usando come aperto $N(C, r)$ dove $C \subseteq \Gamma$ compatto; i calcoli sono i medesimi.

Dopo questi primi esempi, vogliamo passare alla dimostrazione del risultato promesso a inizio capitolo che ci permette di caratterizzare le funzioni continue e definite positive. Prima di ciò premettiamo vediamo una proposizione che in parte ci aspettiamo:

Proposizione 4.1.2. *Sia ϕ una funzione definita positiva continua; allora*

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)\, dxdy \geq 0$$

$\forall f \in L^1(G)$

Dimostrazione. Sia $f \in C_c(G)$ con supporto K compatto, allora la funzione $\beta(x,y) = f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)$ è continua con supporto $supp(\beta) \subseteq K \times K$ che è compatto; dunque anche β è continua a supporto compatto e la proposizione 3.1.2 ci permette di affermare che è uniformemente continua in $K \times K$; allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno aperto V_ε dell'origine in $G \times G$ tale che se (x,y), $(x',y') \in K \times K$, $(x-x', y-y') \in V_\varepsilon$ allora $|\beta(x,y) - \beta(x',y')| < \varepsilon$; siano dunque S, T aperti intorni dell'origine tale che $S \times T \subseteq V_\varepsilon$ e poi considero $F = S \cap T$ che è non vuoto perchè S e T sono entrambi intorni dell'origine; si ha chiaramente che $F \times F \subseteq V_\varepsilon$. Ora $\{x+F\}_{x \in K}$ ed essendo compatto esistono $x_1, \ldots, x_n$ che determinano un ricoprimento finito. Interseco ciascuno di questi insiemi con K e poi attraverso intersezioni finite posso renderli a due a due disgiunti ottendo un ricoprimento finito fatto di Boreliani disgiunti $x_1 + E_1, \ldots, x_n + E_n$, osservando che $E_1, \ldots, E_n \subseteq E$ boreliani. Infine osserviamo che $\{(x_i + E_i) \times (x_j + E_j)\}$ è un ricoprimento di $K \times K$ fatto di Boreliani disgiunti. Quindi

$$\int_G \int_G \beta(x,y)\, dxdy = \sum_{i,j} \int_{E_i} \int_{E_j} \beta(x,y)\, dxdy.$$

Inoltre la quantità

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_i - x_j) m(E_i) m(E_j)$$

è non negativa perchè ϕ è definita positiva. questo punto basta osservare che

$$\left| \int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)\, dxdy - \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_i - x_j) m(E_i) m(E_j) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_{E_i} \int_{E_j} |f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y) - f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_i - x_j)|\, dxdy \leq \varepsilon m(K)^2$$

dove abbiamo usato l'uniforme continuità di β, il fatto che $\{(x_i + E_i) \times (x_j + E_j)\}$ sono inisiemi disgiunti la cui unione da $K \times K$, e le disuguaglianze triangolari. Quindi se

$f \in C_c(G)$ l'integrale nella tesi differisce da una quantità positiva di un ε piccolo a piacere e pertanto è positivo; il teorema si conclude osservando che $C_c(G)$ è denso in $L^1(G)$. $\square$

Teorema 4.1.3 (Teorema di Bochner)**.** *Una funzione ϕ è definita positiva e continua su G se e solo se esiste una misura non negativa $\mu \in M(\Gamma)$ tale che*

$$\phi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)\, d\mu(\gamma); \tag{4.6}$$

inoltre tale misura è unica.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo una delle due direzioni è stata mostrata nell'esempio 4.1.1.

Passo 1: Innanzitutto osserviamo che non risulta restrittivo suppore $\phi(0) = 1$, perchè per (4.3) $\phi(0)$ è non negativa e $\phi(0) = 0$ se e solo se $\phi(x) = 0, \forall x \in G$; per cui escludendo il caso banale possiamo sempre dividere la funzione di partenza per il suo valore nell'origine, costruire la misura e poi moltiplicare quest'ultima per tale valore e ottenere il risultato voluto; le funzioni considerate saranno comunque tutte definite positive perchè le costanti per cui si moltiplica sono positive.

Passo 2: Consideriamo il funzionale definito su $L^1(G)$:

$$T_\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)\, dx; \tag{4.7}$$

osserviamo che è ben definito perche per (4.3) $\phi \in L^\infty(G)$ ed essendo $\phi(0) = 1$, sempre per (4.3), $\|\phi\|_\infty = 1$; pertanto come operatore è limitato. Definiamo inoltre

$$[f, g] = T_\phi(f * \tilde{g})$$

dove $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$ e quindi si ha che:

$$\begin{aligned}
[f,g] &= \int_G \left(\int_G f(x-y)\tilde{g}(y)\,dy \right) \phi(x)dx = \\
&= \int_G \int_G f(x-y)\overline{g(-y)}\phi(x)\,dxdy = \\
&= \int_G \int_G f(x+y)\overline{g(y)}\phi(x)\,dxdy = \\
&= \int_G \overline{g(y)} \left(\int_G f(x-y)\phi(x)\,dx \right) dy = \\
&= \int_G \overline{g(y)} \left(\int_G f(x)\phi(x-y)\,dx \right) dy = \\
&= \int_G \int_G f(x)\overline{g(y)}\phi(x-y)\,dxdy.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Osserviamo che $[f,g]$ è chiaramente lineare sulla prima componente, $[f,f] \geq 0,\ \forall f \in L^1(G)$ per la proposizione 4.1.2 e infine $[f,g] = \overline{[g,f]}$ perchè

$$\begin{aligned}
[f,g] &= \int_G \int_G f(x)\overline{g(y)}\phi(x-y)\,dxdy \\
&= \int_G \int_G f(x)\overline{g(y)\phi(y-x)}\,dxdy \qquad \text{usando (4.2)} \\
&= \int_G \int_G \overline{\overline{f(x)}g(y)\phi(y-x)}\,dxdy = \\
&= \overline{\int_G \int_G \overline{f(x)}g(y)\phi(y-x)\,dxdy} = \overline{[g,f]}.
\end{aligned}$$

Passo 3: Adesso dimostreremo alcune disuguaglianze; la prima si ottiene osservando che le proprietà appena viste per $[f,g]$ sono le uniche richieste affinchè si possa dimostrare per un'applicazione coniugato lineare su uno spazio vettoriale la disuguaglianza di Schwarz che nel nostro caso scriveremo come:

$$|[f,g]|^2 \leq [f,f][g,g]. \tag{4.9}$$

Ora scegliendo V intorno aperto dell'origine (che dunque ha misura non nulla) e sia $g = \frac{\chi_V}{m(V)}$ allora andando semplicemente a sostiruire si ottiene che

$$[f,g] - T_\phi(f) = \int_G f(x)\frac{1}{m(V)}\int_V [\phi(x-y) - \phi(x)]\,dydx,$$

$$[g,g]-1=\frac{1}{m(V)^2}\int_V\int_V[\phi(x-y)-1]\,dxdy.$$

Ora sfruttando l'uniforme continuità di ϕ e il fatto che posso scegliere l'intorno piccolo a piacere, le due espressioni sopra possono essere rese piccole a piacere (basta ancora andare semplicemente a sostituire). Allora si ha che $\forall\varepsilon>0\ \exists\, g\in L^1(G)\ :\ |T_\phi(f)|^2\leq|[f,g]|^2+\varepsilon\leq[f,f](1+\varepsilon)+\varepsilon$ per cui vale che:

$$|T_\phi(f)|^2\leq[f,f]=T_\phi(f*\tilde{f})\,(\forall f\in L^1(G)). \tag{4.10}$$

Passo 4 Quello che vogliamo fare ora è usare il Teorema di Rappresentazione di Riesz complesso A.2.2, per dimostrare l'esistenza della misura cercata. Per farlo osserviamo anzitutto che $\|T_\phi\|_1=1$ in quanto $\|\phi\|_\infty=1$ come osservato prima; se poniamo $h=f*\tilde{f}$, $h^n=h^{n-1}*h$ e iteriamo l'uso di (4.10) otteniamo che

$$|T_\phi(f)|^2\leq T_\phi(h)\leq\{T_\phi(h^2)\}^{\frac{1}{2}}\leq\cdots\leq\{T_\phi(h^{2n})\}^{2^{-n}}\leq\left\|h^{2^n}\right\|_1^{2^{-n}}$$

che per $n\to\infty$ coincide con il raggio spettrale per la proposizione 2.4.4 la quale corrisponde a $\left\|\hat{h}\right\|_\infty$. Dunque $|T_\phi(f)|^2\leq\left\|\hat{h}\right\|_\infty=\left\|\hat{f}\right\|_\infty^2$ e cioè

$$|T_\phi(f)|\leq\left\|\hat{f}\right\|_\infty. \tag{4.11}$$

Osserviamo che quanto appena detto ci permette di affermare che possiamo considerare T_ϕ come un operatore limitato su $A(\Gamma)$ perchè si ha che se $\hat{f}_1=\hat{f}_2$, allora $T_\phi(f_1)=T_\phi(f_2)$ per (4.11) e, per la densità di $A(\Gamma)$ in $C_0(\Gamma)$, posso estenderlo mantenendo la norma su $C_0(\Gamma)$. Ora finalmente per il Teorema di Rappresentazione di Riesz complesso A.2.2 $\exists\,\mu\in M(\Gamma)\ :\ \|\mu\|=\|T\|_\infty=\|\phi\|_\infty=1$ e

$$T_\phi(f)=\int_\Gamma\hat{f}(-\gamma)\,d\mu(\gamma)=\int_G f(x)dx\int_\Gamma(x,\gamma)\,d\mu(\gamma). \tag{4.12}$$

Paragonando (4.7) e (4.12) abbiamo che l'uguaglianza (4.6) vale per quasi ogni x, ma essendo continue le espressioni su entrambi i lati, l'uguaglianza è vera $\forall x\in G$. Infine $1=\phi(0)=\int_\Gamma d\mu(\gamma)=\mu(\Gamma)\leq\|\mu\|=1$, quindi $\mu(\Gamma)=\|\mu\|$ e questo implica $\mu\geq 0$ (si usa semplicemente il Teorema di Decomposizione di Jordan A.2.1).

Passo 5 Per vedere l'unicità è sufficiente ricordare la proposizione 3.4.4 perchè se esistono due misure μ e μ' che fanno il servizio richiesto, allora necessariamente si ha che $\int_\Gamma(x,\gamma)\,d(\mu-\mu')(\gamma)=f(x)-f(x)=0$, per cui $\mu=\mu'$.

□

Osservazione 4.1.3. Osserviamo che, oltre a caratterizzare le funzioni definite positive continue, il teorema di Bochner 4.1.3 ne stabilisce una corrispondenza biunivoca con le misure non negative di $M(\Gamma)$.

4.2 Il Teorema di Inversione

In questa sezione tenteremo di risolvere il problema dell'inversione della Trasformata di Fourier, cioè cercheremo di individuare un sottoinsieme di $L^1(G)$ sul quale la Trasformata di Fourier sia un'applicazione invertibile. Cominciamo con la seguente definizione:

Definizione 4.2.1. Sia $B(G)$ l'insieme delle funzioni f per cui esiste $\mu \in M(\Gamma)$ tale che

$$f(x) = \int_\Gamma (x,\gamma)\, d\mu(\gamma). \tag{4.13}$$

Osservazione 4.2.1. Usando il Teorema di Decomposizione di Jordan A.2.1 e il Teorema di Bochner 4.1.3 ci si rende conto immediatamente che tutte le funzioni di $B(G)$ si scrivono come combinazioni di funzioni definite positive sul gruppo G .

Notazione. In questa sezione indicheremo con $B^1 = L^1(G) \cap B(G)$ e con μ_f la misura associata alla funzione $f \in B(G)$ come visto della definizione precedente.

Teorema 4.2.1 (Teorema di Inversione della Trasformata di Fourier)**.**

1. *Se $f \in B^1$ allora $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.*
2. *Se la misura di Haar m del gruppo G è fissata, allora si può normalizzare la misura di Haar di Γ in modo tale che valga*

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(x,\gamma)\, d\gamma \qquad (x \in G) \tag{4.14}$$

Dimostrazione. **Passo 1:** In questo primo punto della dimostrazione osserviamo una proprietà di μ_f. Siano $f \in B^1$, $h \in L^1(G)$ allora si ha che

$$(h * f)(0) = \int_G h(-x) f(x)\, dx = \int_\Gamma \hat{h}(\gamma)\, d\mu_f(\gamma), \tag{4.15}$$

dove per ottenere l'espressione sopra abbiamo semplicemente sostituito l'espressione di f e usato il Teorema di Fubini. Presa poi $g \in B^1$ posso considerare il funzionale linerare S definito su $L^1(G)$

$$S(h) = (h * g * f)(0),$$

e sfruttando il fatto che la convoluzione è commutativa e associativa abbiamo che

$$\int_\Gamma \hat{h}\hat{g}\,\mu_f = ((h * g) * f)(0) = ((h * f) * g)(0) = \int_\Gamma \hat{h}\hat{f}\mu_g.$$

Osserviamo inoltre che esso è limitato perchè, ricordando che $A(\Gamma)$ è una sottoalgebra di $C_0(\Gamma)$ e che la misura μ_fè a variazione limitata

$$|S(h)| \leq \int_\Gamma |\hat{h}\hat{g}|\,|\mu_f| \leq \left\|\hat{h}\right\|_\infty \|\hat{g}\|_\infty \|\mu_f\|.$$

Come visto nel Teorema di Bochner 4.1.3 questo funzionale ne induce uno su $A(\Gamma)$ (ed è lecito perchè se $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$, allora $S(f_1) = S(f_2)$) che come già visto possiamo estenderlo, preservando la norma, a $C_0(\Gamma)$ e quindi, per l'unicità garantita alla rappresentazione del funzionale dal Teorema di Rappresentazione di Riesz complesso A.2.2, abbiamo che $\forall f,\, g \in B^1$

$$\hat{f}\mu_g = \hat{g}\mu_f. \tag{4.16}$$

Passo 2 Nel secondo passo definiremo un funzionale T su $C_c(\Gamma)$ che sarà rappresentato dalla misura di Haar su Γ. Consideriamo anzitutto $\psi \in C_c(\Gamma)$ e sia K il suo supporto; $\forall \gamma_0 \in K$ esiste $u \in C_c(G) \,:\, \hat{u}(\gamma_0) \neq 0$; infatti $A(\Gamma)$ è un'algebra che separa i punti per cui esiste una funzione $f \in L^1(G) \,:\, \hat{f}(\gamma_0) \neq 0$, ma ricordando che $C_c(G)$ è denso in $L^1(G)$ allora esiste $u \in C_c(G) \,:\, \|f - u\|_1 < \varepsilon$; allora

$$|\hat{f}(\gamma_0) - \hat{u}(\gamma_0)| = \int_G |f(x) - u(x)|\,dx = \|f - u\|_1 < \varepsilon,$$

per cui si ha che $\hat{u}(\gamma_0) \neq 0$ come si voleva. Per il teorema 3.2.2, la Trasformata di Fourier di $u * \tilde{u}$ è positiva in γ_0 ed è ovunque non negativa. Per la continuità della Trasformata di Fourier e la compettezza di K esistono un numero finito di funzioni $u_1, \ldots, u_n$ tali per cui la funzione $g = u_1 * \widetilde{u_1} + \cdots + u_n * \widetilde{u_n}$ ha $\hat{g} > 0$ su tutto K.

Ricordiamo che $u_i * \widetilde{u_i}$ sono definite positive come visto nell'esempio 4.1.1 per cui lo è anche g e quindi $g \in B^1$. Adesso poniamo

$$T\psi = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{g}}\, d\mu_g, \tag{4.17}$$

che è ben deinito perchè, se al posto di f scelgo una qualunque funzione $f \in B^1$ che non si la cui Trasformata di Fourier è positiva su K allora si ha, usando (4.16)

$$\int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{f}\, d\mu_g = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{g}\, d\mu_f$$

Passo 3 Vediamo quali sono le proprietà di T; innanzituto chiaramente è lineare, poi visto che possiamo scegliere g definita positiva, allora $\mu_g \geq 0$ e quindi se $\psi \geq 0$ anche $T\psi \geq 0$. Inoltre siccome esistono funzioni non nulle in B^1, allora necessariamente si ha che esistono una ψ, μ_f tali che $\int \psi\, d\mu_f \neq 0$ (altrimenti siccome μ_f è una misura regolare avremmo che $\mu_f = 0$). Siccome $\psi\hat{f}$ è continua a supporto compatto possiamo calcolare il valore di T e si ha

$$T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \frac{\psi\hat{f}}{\hat{g}}\, d\mu_g = \int_\Gamma \psi\, d\mu_f \neq 0 \tag{4.18}$$

e dunque T è non nullo. Mostriamo ora che T è invariante per traslazioni. Fissiamo $\psi \in C_c(\Gamma)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, costruiamo la funzione g in modo tale che sia non nulla su K e $\gamma_0 + K$. Ponendo $f(x) = (-x, \gamma_0)g(x)$ allora $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma + \gamma_0)$ e $\mu_f(E) = \mu_g(E - \gamma_0)$. Se $\psi_0(\gamma) = \psi(\gamma - \gamma_0)$ allora

$$T\psi_0 = \int_\Gamma [\psi(\gamma - \gamma_0)/\hat{g}(\gamma)]\, d\mu_g(\gamma) = \int_\Gamma [\psi(\gamma)/\hat{f}(\gamma)\, d\mu_f(\gamma) = T\psi.$$

Pertanto, essendo T invariante per traslazioni, lo sarà anche la misura che lo rappresenta mediante il Teorema di Rappresentazione di Riesz A.1.1 per cui possiamo scrivere

$$T\psi = \int_\Gamma \psi(\gamma)\, d\gamma. \tag{4.19}$$

Passo 4 Concludiamo ora il teorema dimostrando entrambe le affermazioni della tesi. Se fissiamo $f \in B^1$ qualunque si $\psi \in C_c(\Gamma)$ per (4.18) e (4.19) possiamo affermare che:

$$\int_\Gamma \psi\hat{f}\, d\gamma = T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \psi\, d\mu_f$$

e quindi, sempre usando il Teorema di Rappresentazione di Riesz A.1.1 sul funzionale $J(\psi) = T(\psi\hat{f})$ (che è banalmente lineare e limitato su $C_c(\Gamma)$ perchè $|T(\psi\hat{f})| \leq \|\psi\|_\infty \|\mu_f\|$), possiamo concludere che

$$\hat{f}d\gamma = d\mu_f \ \ (f \in B^1). \tag{4.20}$$

Per cui, siccome μ_f è una misura a variazione limitata, la prima affermazione è subito verificata. Per ottenere la seconda è sufficiente sostituire (4.20) in (4.13).

□

4.3 Il Teorema di Plancherel

In questa sezione vogliamo generalizzare un risultato classico che ci permette di estendere la Trasformata di Fourier ad isometria da $L^2(G)$ in $L^2(\Gamma)$, garantendo che questa preservi la norma. Facciamo precedere a questo teorema la dimostrazione di due lemmi preliminari:

Proposizione 4.3.1. *Consideriamo uno spazio topologico X localmente compatto e T2 su cui è definata una misura non negativa. Allora l'insieme $L^1(X) \cap L^2(X)$ è denso in $L^2(X)$*

Dimostrazione. La prova risulta immediata se si osserva che $C_c(X) \subseteq L^1(X) \cap L^2(X)$ e ricordando che $\forall\, 0 \leq p < \infty$ $C_c(X)$ è denso in $L^1(X)$. □

Proposizione 4.3.2. *Sia $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert e V un suo sottospazio. Se $V^\perp = \emptyset$ allora V è denso in $\mathscr{H}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che non sia denso, allora esista $x \in H \ : \ d = d(x, V) > 0$, per cui per il Teorema di Hahn-Banach (si veda [1, corollario 3 p.77]) si avrebbe che esiste $\Lambda \in H^*, : \ \Lambda(x) = d$ e $\Lambda(v) = 0\, \forall v \in V$; per cui l'elemento λ che rappresenta Λ è non nullo $(v, \lambda) = 0\ \forall v \in V$; allora possiamo concludere che $V^\perp \neq \{0\}$ e questo fatto contraddice l'ipotesi. □

Teorema 4.3.3 (Teorema di Plancherel)**.** *La Trasformata di Fourier ristretta a $L^1(G) \cap L^2(G)$ è un'isometria su un sottospazio denso di $L^2(\Gamma)$; per cui essa si estende in modo unico ad un'isometria da $L^2(G)$ su $L^2(\Gamma)$.*

Dimostrazione. **Passo 1:** Innanzittutto proviamo che la Trasformata di Fourier ristretta a $L^1(G) \cap L^2(G)$ è un'isometria; infatti si ha che presa $f \in L^1(G) \cap L^2(G) g = f * \tilde{f}$, allora $g \in L^1(G)$, è continua e definita positiva, inoltre per quanto visto in nel teorema gammaA $\hat{g} = |\hat{f}|^2$, per cui

$$\int_G |f(x)|^2 \, dx = \int_G f(x)\tilde{f}(-x) \, dx = g(0) = \int_\Gamma \hat{g}(\gamma) \, d\gamma = \int_\Gamma |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma,$$

dove abbiamo usato il Teorema di Inversione 4.2.1 per dimostrare la terza uguaglianza, per cui quanto sopra ci dice che $\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2$, e quindi è un'isometria.

Passo:2 Sia Φ l'immagine in $A(\Gamma)$ della Trasformata di Fourier ristretta ad $L^1(G) \cap L^2(G)$ e mostriamo che è un sottospazio denso di $L^2(\Gamma)$. Innanzitutto siccome $L^1(G) \cap L^2(G)$ è invariante per traslazioni (perchè lo è la misura di Haar), allora Φ è invariante per moltiplicazione di (x, γ) (nel senso visto nel teorema 3.2.2), qualunque sia $x \in G$; Dunque sia $\psi \in L^2(\Gamma)$ ortogonale a Φ cioè tale che $\int_\Gamma \phi\overline{\psi} \, d\gamma = 0$, $\forall \phi \in \Phi$, allora si ha anche che

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}(x, \gamma) \, d\gamma = 0 \qquad (\phi \in \Phi, \, x \in G).$$

Per cui, usando la proposizione 3.4.4 e essendo $\phi\overline{\psi} \in L^1(\Gamma)$, la misura $\phi\overline{\psi}$; ma allora $\phi\overline{\psi} = 0$ quasi ovunque, perchè la misura di Haar è non negativa, per ogni $\phi \in \Phi$. Siccome $L^1(G) \cap L^2(G)$ è invariante per la moltiplicazione di (x, γ), $\forall \gamma \in \Gamma$ allora Φ è invariante per traslazione e dunque a ogni γ_0 corrisponde una funzione $\phi \in \Phi$ che è non nulla in un suo intorno: (per mostrarlo è sufficiente osservare che le funzioni di Φ non possono essere tutte nulle altrimenti lo sarebbero anche, per la continuità dell'applicazione Trasformata di Fourier e la densità in $L^1(G)$ di $L^1(G) \cap L^2(G)$, tutte le funzioni di $A(\Gamma)$, che dunque sarebbe un'algebra di funzioni non che separa i punti; allora esiste almeno una funzione in Φ non nulla in un punto di Γ, per la sua continuità non lo è neanche in un suo intorno; l'invarianza per traslazioni conclude. Da questo segue che ψ è nulla quasi ovunque e quindi 0 è l'unico elemento di $L^2(\Gamma)$ ortogonale a Φ che dunque, per la proposizione 4.3.2 è denso il $L^2(\Gamma)$; ricordando che $L^1(G) \cap L^2(G)$ è denso in $L^2(G)$ si ha che la Trasformata di Fourier si può estendere a una funzione da $L^2(G)$ su $L^2(\Gamma)$ come richiesto.

□

Vediamo due conseguenza del Teorema di Plancherel che ci torneranno utili in seguito. Innanzitutto vediamo che la Trasformata di Fourier così definita è un isomorfismo di spazi di Hilbert:

Teorema 4.3.4 (Uguaglianza di Parseval)**.** *Siano $f, g \in L^2(G)$, allora vale*

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}\, d\gamma. \tag{4.21}$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo fatto basta osservare che per polarizzazione:

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2,$$

ed usando il fatto che la Trasformata di Fourier su $L^2(G)$ è un'isometria si ha che:

$$\begin{aligned}\int_G f\overline{g}dx &= \int_G |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2 dx = \\ &= \int_\Gamma |\hat{f}+\hat{g}|^2 - |\hat{f}-\hat{g}|^2 + i|\hat{f}+i\hat{g}|^2 - i|\hat{f}-i\hat{g}|^2 d\gamma = \\ &= \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)} d\gamma.\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3.5. *Sia $f \in A(\Gamma)$ se e solo se esistono F_1, $F_2 \in L^2(\Gamma)$ tale che $f = F_1 * F_2$.*

Dimostrazione. In questa dimostrazione useremo il fatto che se $h \in L^1(X)$, con X localmente compatto su cui è fissata una misura di Radon, allora $h = f \cdot g$ con f, $g \in L^2(X)$[1]. Se prendiamo f, $g \in L^2(G)$ e in (4.21) mettamo $\bar{g}$ al posto di g, otteniamo

$$\int_G f(x)g(x)\, dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(-\gamma)\, d\gamma$$

e se rimpiazziamo $g(x)$ con $\bar{g}(x, \gamma_0)$ otteniamo

$$\int_G f(x)g(x)(-x,\gamma)\, dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma_0 - \gamma)\, d\gamma = (\hat{f} * \hat{g})(\gamma_0).$$

[1]Se $h = 0$ si prendono $f, g = 0$; in caso contario si prende una $f = |h|^{1/2}$ e g definita per casi: $g(x) = 0$ se $h(x) = 0$ e $g(x) = h(x) \cdot |h(x)|^{1/2}/|h(x)|$ altrove.

Da una parte vediamo che tutte le funzioni di $A(\Gamma)$ sono come detto nella tesi, perchè data $\hat{h} \in A(\Gamma)$, allora questa è la Trasformata di Fourier di una certa $h \in L^1(G)$ che, per quanto detto inizialmente, è prodotto di funzioni $f, g \in L^2(G)$ e l'uguaglianza mostra che $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$; d'altra parte l'uguaglianza fa anche vedere che, date $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$, allora $\hat{f} * \hat{g} \in A(\Gamma)$. □

Proposizione 4.3.6. *Sia E un sottoinsieme aperto non vuoto di Γ, allora esiste una $\hat{f} \in A(\Gamma), \hat{f} \neq 0, : \hat{f}(\gamma) = 0$ al di fuori di E.*

Dimostrazione. Siccome E è non vuoto la sua misura di Haar è non nulla e, poichè quest'ultima è regolare, esiste un compatto K in E tale che la sua misura sia positiva; inoltre, siccome la funzione $(x, y) \to x + y$ è continua, la controimmagine di E è un aperto che contiene tutte le coppie del tipo $(k, 0)$, $k \in K$, per cui, essendo G localmente compatto per ogni k esistono un intorno compatto di k, W_k e un intorno V_k compatto dell'origine tali che $W_k \times V_k$ è contenuto nella controimmagine di E. Ora per la compattezza di K esistono $k_1, \ldots, k_n$ che ricoprono K, allora sia V l'intersezione di $V_{k_1}, \ldots V_{k_n}$, essa è compatta perchè intersezione finita di compatti ed è ovvio che $K + V \subseteq E$.
Consideriamo g e h le funzioni caratteristiche rispettivamente di K e V e sia $f = g * h$. Si ha immediatamente che f è nulla al di fuori di $K + E$ e quindi al di fuori i E, inoltre siccome $g, h \in L^2(\Gamma)$ per il teorema precedente $f \in A(\Gamma)$, infine $\int_\Gamma f(\gamma)\, d\gamma = m(K)m(V)$ che sono entrambe non nulle (ricordiamo che gli aperti non vuoti hanno misura non nulla, per cui essendo V un intorno di 0 ha misura non nulla), quindi f non è nulla. □

4.4 Il teorema di Dualità di Pontryagin

Scopo di questa sezione è approfondire lo studio del concetto di dualità per i gruppi LCA; senza approfondirlo e formalizzarlo, ci siamo già precedentemente imbatutti con esso nell'esempio 3.3.3, nel teorema 3.2.3, ecc... Con il teorema 3.2.4 abbiamo provato che Γ è un LCA per cui, se indichiamo con $\hat{\Gamma}$ il duale di Γ, tutto ciò che abbiamo detto sulla coppia $(G\ , \Gamma)$ sarà valido anche per la coppia $(\Gamma, \hat{\Gamma})$. Il Teorema di Dualità di Pontryagin ci permette di stabilire che G e $\hat{\Gamma}$ sono isomorfi nel senso che, come chiarito dalla definizione sotto, sia dal punto di vista della struttura di gruppo e sia quella topologica sono identici.

Definizione 4.4.1. Siano G e G' due gruppi topologici, allora $f : G \to G'$ è un *isomorfismo di gruppi topologici* se è un isomorfismo di gruppi e un omemorfismo.

Come già visto, per parlare di gruppo duale è necessario studiare i caratteri del gruppo di partenza; il valore di un carattere $\hat{\gamma}$ di Γin γ sarà indicato pe il momento con $(\gamma, \hat{\gamma})$. Sempre utilizzando il teorema 3.2.4, siamo in grado di individuare un insieme importante di caratteri di Γ: infatti fissato un elemento $x \in G$ la funzione (x, γ) è un carattere di Γ, perchè è continua essendo la restrizione di una funzione continua e vale che $(x, \gamma_1 + \gamma_2) = (x, \gamma_1) \cdot (x, \gamma_2)$, per cui ogni elemento di G può essere visto come un carattere di Γ e quindi esiste una mappa naturale $\alpha : G \to \Gamma$ definita da

$$(x, \gamma) = (\gamma, \alpha(x)) \qquad (x \in G, \, \gamma \in \Gamma). \tag{4.22}$$

Per la dimostrazione del teorema avremo bisogno di alcuni risultati preliminari; il primo riguarda la topologia generale dei gruppi topologici, mentre il secondo è una conseguenza del Teorema di Inversione.

Proposizione 4.4.1. *Sia H un sottogruppo di G , localmente compatto rispetto alla topologia indotta, allora H è chiuso.*

Dimostrazione. Ricordando la definizione di topologia indotta, è chiaro che gli intorni N dell'origine in H sono tutti e soli quelli per cui esiste U intorno dell'origine in G per il quale $N = U \cap H$. Siccome H è localmente compatto (perchè chiuso in localmente compatto) e T_2 allora ha un sistema fondamentale di intorni compatti, e quindi esiste un intorno U' dell'origine in H tale che $U' \cap H \subseteq U \cap H$; possiamo inoltre supporre, usando quanto detto sopra che $U' \subseteq U$. Sia $U'' \subseteq U'$ intorno compatto dell'origine; siccome un compatto in un T_2 è chiuso, allora U'' è chiuso e quindi lo è anche $U'' \cap H$ in $U' \cap H$ per cui è compatto. Infine considero un intorno simmetrico dell'origine V tale che $VV \in U''$ Ora sia $x \in \bar{H}$ e sia $y \in xV \cap H$; mostriamo che $x \in \overline{yU'' \cap H}$. Osserviamo anzitutto che la simmetria di V ci permette di concludere che $x \in yV$ perchè siccome $\exists \, v \in V \, : \, y = xv$ e V è simmetrico allora $v^{-1} \in V$ e $yv^{-1} = x$. Preso allora $W \subseteq V$ intorno dell'origine in G e preso $h \in xW \cap H$, abbiamo che $h \in yVW \cap H \subseteq H \cap U''$, e questo prova quanto volevamo. Per finire è sufficiente osservare che siccome $y \in H$ allora $yU'' \cap H = y(U'' \cap H)$ che è compatto perché i traslati dei compatti sono compatti e quindi in particolare è chiuso. Per cui $x \in \overline{yU'' \cap H} = yU'' \cap H$ e quindi si ha la tesi. $\square$

Proposizione 4.4.2. Γ *è un'insieme di funzioni su* G *che separa i punti.*

Dimostrazione. Sia V un intorno dell'origine; utilizzando il fatto che essendo G localmente compatto e T_2 allora ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti e per la proposizione 1.1.2 possiamo scegliere un intorno dell'origine compatto W tale che $W - W \subseteq V$; ora consideriamo $f = \chi_W / m(W)^{\frac{1}{2}}$; la funzione $g = f * \tilde{f}$ è quindi reale, continua, definita positiva e nulla al di fuori del compatto $W - W$. Pertanto $G \in B^1$ e quindi ad essa si può applicare il Teorema di Inversione 4.2.1 e inoltre $\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geq 0$

$$\int_\Gamma \hat{g}(\gamma)\, d\gamma = g(0) = 1.$$

La misura $\hat{g}(\gamma)d\gamma$ è una misura regolare su Γ, per cui esiste un compatto C di Γ tale per cui $\int_C \hat{g}(\gamma)d\gamma > \frac{2}{3}$. Consideriamo $x \in N(C, 1/3)$ dove facciamo riferimento al teorema 3.2.4, e se $C' = C^c$ allora

$$\Big(\int_C + \int_C') \hat{g}(\gamma)(x,\gamma)\, d\gamma = g(x);$$

se $\gamma \in N(C, 1/3)$, $|1 - (x, \gamma)| < 1/3$ e dunque necessariamente si ha che $\mathrm{Re}(x, \gamma) > 2/3$ e allora l'integrale su C è maggiore di $2/3 \int_C \hat{g} > 4/9$. Inoltre poichè $|\int_C'| < 1/3$ allora necessariamente $g(x) > 1/9$ per cui $N(C, 1/3) \subseteq V$; questo ci dice che, in analogia con quanto detto su Γ in 3.2.4, gli $N(C, r)$ e i loro traslati sono una base per la topologia su G .

Se $x_0 \in G$, $x_0 \neq 0$, allora siccome lo spazio è T_2, possiamo scegliere V in modo tale che $x_0 \notin V$ e dunque $x_0 \notin N(C, 1/3)$ e quindi $(x_0, \gamma) \neq 1$ per qualche $\gamma \in \Gamma$. L'insieme di funzioni Γsepara allora i punti perchè presi $x_1 \neq x_2$ allora $(x_1 - x_2, \gamma) \neq 1$ per qualche γ e quindi $(x_1, \gamma) \neq (x_2, \gamma)$. □

Teorema 4.4.3 (Teorema di Dualità di Pontryagin)**.** *Dato* G *un gruppo LCA, allora* G *è isomorfo come gruppo topologico a* $\hat{\Gamma}$.

Dimostrazione. **Passo 1** Il primo passo è mostrare che l'applicazione α di cui si è prima parlato è un omomorfismo di gruppi iniettivo; il fatto che sia un omomorfismo viene dal calcolo $(\gamma, \alpha(x + y)) = (x + y, \gamma) = (x, \gamma)(y, \gamma) = (\gamma, \alpha(x))(\gamma, \alpha(y)) = (\gamma, \alpha(x) + \alpha(y))$, mentre il fatto che sia iniettivo è ovvio ricordando la proposizione 4.4.2 qui sopra.

Passo 2 Dimostriamo che α è un omomorfismo con l'immagine e per farlo mostriamo che è un'applicazione aperta. Infatti fissato un compatto C in Γ, $r > 0$ poniamo: $V = \{x \in G : |1 - (x, \gamma)| < r, \forall \gamma \in C\}$, $W = \{\hat{\gamma} \in G : |1 - (\gamma, \hat{\gamma})| < r, \forall \gamma \in C\}$ e per il teorema 3.2.4 gli V e W sono un sistema fondamentale di intorni rispettivamente in G e $\hat{\Gamma}$, e per la definizione di α si ha immediamente che $\alpha(V) = W \cap \alpha(G)$; quindi per la definizione di topologia indotta l'applicazione è continua e anche aperta per cui è un omemomorfismo.

Passo 3 Infine quello che resta da provare è che effetivamente $\alpha(G) = \hat{\Gamma}$. Innanzitutto osserviamo che il fatto che α sia un omemorfismo ci dice che $\alpha(G)$ è localmente compatto perchè la locale compattezza è un invariante topologico; inoltre poichè l'immagine di un omomorfismo di gruppi è un gruppo allora $\alpha(G)$ è un sottogruppo localmente compatto di $\hat{\Gamma}$ e pertanto è chiuso per la proposizione 4.4.1; se riusciamo a dimostrare che è denso abbiamo finito. Supponiamo che non lo sia allora, per 4.3.6, esiste $F \in A(\hat{\Gamma})$ che è nulla in tutti i punti di $\alpha(G)$, ma non è identicamente nulla. Siccome per definizione di $A(\hat{\Gamma})$ esiste una funzione $\phi \in L^1(\Gamma)$ tale per cui:

$$F(\hat{\gamma}) = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma, \hat{\gamma})\, d\gamma$$

e poichè $F(\gamma(x)) = 0$, $\forall x \in G$ ne segue che

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)(-x, \gamma)\, d\gamma = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma, \alpha(x))\, d\gamma = 0$$

e quindi per la proposizione 3.4.4 la misura $\phi\, d\gamma$ è nulla; ma siccome la misura di Haar è non nulla, necessariamente $\phi = 0$ per il Teorema di Radon-Nikodym A.3.1 e dunque, contrariamente a quanto detto, $F = 0$.

$\square$

Appendice A

Misure complesse e complementi di teoria della misura

.

Scopo di questa appendice è presentare, senza riportarne però la dimostrazione, alcuni teoremi di teoria della misura che non sono stati affrontati esplicitamente nei corsi di analisi di questi tre anni, ma che sono stati più volte utilizzati nel nostro percorso e ricordare alcune definizioni. Per le dimostrazioni i questi risultati si può consultare [6, Capitoli 2, 3, 7].

Notazione. X indicherà sempre, a meno di specifiche variazioni, uno spazio topologico localmente compatto e T_2.

A.1 Misure non negative

Definizione A.1.1. Dato uno spazio topologico X, la $\sigma -$algebra dei boreliani è quella generata dalla topologia data. Una misura μ su X si dice di Borel se definita sui boreliani.

Definizione A.1.2. Dato uno spazio topologico X, una misura μ di Borel su X si dice *regolare* se, dato un E boreliano:

- esternamente regolare se:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \,:\, E \subseteq U, U\, aperto\}$$

- internamente regolare se:

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \,:\, K \subseteq E,\, K\, compatto\}$$

Una misura regolare su X si dice *di Radon* se $\forall K \subseteq$ X compatto, $\mu(K) < \infty$, esternamente regolare su tutti i boreliani e internamente regolare su tutti gli aperti.

Definizione A.1.3. Un funzionale lineare I su $C_c(X)$ si dice *positivo* se $I(f) \geq 0$ se $f \geq 0$

Teorema A.1.1 (Teorema di Rappresentazione di Riesz)**.** *Dato un funzionale lineare positivo I su $C_c(X)$, allora esiste un'unica misura di Radon μ su X tale che $I(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c(X)$.*
Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra le misure di Radon su X e i funzionali lieai positivi su $C_c(X)$. In più si ha che:

$$\mu(U) = \sup\{I(f) \,:\, f \in C_c(X),\, f \prec U\},\, \forall U \subseteq X \tag{A.1}$$

dove $f \prec U$ indica che $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ e supp$(f) \subseteq U$. Infine μ soddisfa anche:

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \,:\, f \in C_c(X),\, f \geq \chi_K\},\, \forall K \subseteq X. \tag{A.2}$$

A.2 Misure complesse

Definizione A.2.1. Una *misura complessa* μ sui Boreliani è una funzioni di insiemi a valori complessi che sia $\sigma-$additiva (cioè $\mu(E) = \sum \mu(E_i)$ dove E_i è una famiglia di insiemi numerabili disgiunti la cui unione è E), $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(E) < 0$ se la chiusura di E è un compatto.
Ad ogni misura μ è associata una funzion di insiemi, $|\mu|$ detta *variazione totale* tale che

$$|\mu|(E) = sup \sum |\mu(E_i)| \tag{A.3}$$

dove E_i è una qualunque famiglia finita di boreliani disgiunti la cui unione sia E.

Quello che si può dimostrare è che la variazione totale è una misura e che è regolare. Se poniamo

$$\|\mu\| = |\mu(X)|, \tag{A.4}$$

e definiamo $M(X)$ l'insieme di tutte le misure tali per cui $\|\mu\|$ è finita, $M(X)$ è uno spazio vettoriale sui complessi definendo somma e prodotto per scalari come:

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E), \ \ (\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E)$$

per ogni boreliano E e α numero complesso.
Vale dunque il seguente risultato:

Teorema A.2.1 (Teorema di Decomposizione di Jordan)**.** *Si consideri $\mu \in M(X)$; allora esiste un'unica decomposizione della forma*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

in cui $\mu_i \geq 0$, $\mu_i \in M(X)$ e le coppie (μ_1, μ_2), (μ_3, μ_4) sono mutualmente singolari, cioè concentrate su insiemi disgiunti.

Definizione A.2.2. Una misura $\mu \in M(X)$ si dice *discreta* se è concentrata su un insieme numerabile, mentre si dice *continua* se è nulla su ogni insieme numerabile.

Teorema A.2.2 (Teorema di Rappresentazione di Riesz complesso)**.** *Sia T un funzionale lineare limitato su $C_0(X)$; allora esiste ed è unica la misura $\mu \in M(X)$ tale che*

$$T(f) = \int_X f \, d\mu$$

Osservazione A.2.1. Un'importante conseguenza del teorema A.2.2 è che $M(X)$ è uno spazio di Banach; infatti si può dimostrare che

$$\sup|Tf| = \|\mu\| \qquad (f \in C_0(X), \|f\|_\infty \leq 1) \tag{A.5}$$

e quindi il Teorema di Riesz complesso A.2.2 stabilisce un'isometria tra il duale di $C_0(X)$ e $M(X)$.

Osservazione A.2.2. Se f è integrabile per $\mu \in M(X)$, allora vale la disuguaglianza

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \|\mu\| \cdot \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

A.3 Il Teorema di Radon-Nikodym

Definizione A.3.1. Sia $\mu \in M(X)$ e m misura non negativa su X; μ si dice *assolutamente continua rispetto a m* se $\mu(E) = 0$ per ogni E boreliano tale che $m(E) = 0$.

Osservazione A.3.1. Se $f \in L^1(X, m)$, si può dimostrare che la misura definta da $\mu(E) = \int_E f\, dm$ sta in $M(X)$ ed è ovviamente assolutamente contiuna rispetto a m.

Teorema A.3.1 (Teorema di Radon-Nikodym)**.** *Se $\mu \in M(X)$, m misura non negativa su X allora μ assolutamente continua rispetto a m se e solo se esiste una funzione $f \in L^1(X, m)$:*

$$\mu(E) = \int_E f\, dm$$

per ogni E boreliano.
Si ha inoltre che $\|\mu\| = \int_X |f|\, dm = \|f\|_1$

Osservazione A.3.2. Il Teorema di Radon-Nikodym riesce a stabilire quindi un'isometria tra le misure in $M(X)$ assolutamente continue rispetto ad una misura non negativa m su X e $L^1(X, m)$.

Bibliografia

[1] Barry, Simon, Reed, Michael (1972), *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol 1, Functional Analysis*, Academic Press, New York

[2] Caselli, Fabrizio (2018), *Corso di algebra 2*, dispensa per il corso di Laurea in Matematica, AA 2018-2019.

[3] Francaviglia, Stefano (2018), *Topologia*, CreateSpace Indipendent Publishing Platform.

[4] Katznelson, Yitzhak (1968), *An Introduction to Harmonic Analysis*, 2 ed., Dover Pubblicatios, Inc., New York.

[5] Folland, Gerald B.(2016), *A Course in A Course in Abstract Harmonic Analysis*, 2 ed., CRC Press.

[6] Folland, Gerald B. (1999), *Real Analysis*, 2.ed, Wiley-Interscience Publication, New York.

[7] Pascucci, Andrea (2019), *Teoria della Probabilità*, dispensa per il corso di Laurea in Matematica, AA 2019-2020, versione 25 Agosto 2019.

[8] Ricci, Fulvio (AA 2001-2002), *Analisi Armonica Non Commutativa.*

[9] Rudin, Walter (1962), *Fourier Analysis On Groups*, Interscience Publishers, New York-London.

[10] Rudin, Walter (1987), *Real and Complex Analysis*, 3 ed., McGraw-Hill International Edition, Singapore.

Ringraziamenti

Leggendo un testo di Matematica ho avuto spesso l'impressione che il fiume di idee, teoremi e dimostrazioni racchiuse in esso fossero il frutto di un robot (delirante) del tutto impersonale; ma nella parte finale si trova sempre una pagina almeno, ignorata dai più, dedicata ai ringraziamenti che mostra la parte più affascianante del libro stesso ovvero il percorso fatto di volti, incontri e confronti compiuto dall'autore. Quelle righe conclusive non solo svelano al lettore l'umanità celata dietro quei ragionamenti (spesso alquanto criptici devo dire), ma danno anche all'autore stesso la possibilità di rivivere quel viaggio e far sbocciare la consapevolezza della gratuità di quello che si è ricevuto che permette di ringraziare con cuore sincero. Quindi voglio dedicare un pochino del mio tempo per ricordare tutti coloro che hanno partecipato al raggiungimento di questo traguardo.

In primis un grandissimo grazie va al professor Arcozzi per avermi sopportato nei miei dubbi e aver dato un calcio, con la sua curiosità e fantasia, ai miei schemi mentali.

Poi voglio ringraziare i miei genitori che non si sono mai stancati di volermi bene, cercando di farmi conoscere, non senza difficoltà, l'Amore più grande che dà loro la forza; un grazie a Simo (scrivere qualunque cosa sul nostro rapporto sarebbe riduttivo e occuperebbe ben più della pagina che mi sono prefissato quindi lasciamo stare :)) a Betta, Rachele, Michele e Mattia che con la loro presenza mi hanno aiutato a scoprire concretamente che la vita non è fatta solo di gruppi, varietà ed equazioni differenziali, ma principalmente di piatti da lavare, armadi da sistemare e soprattutto persone, ognuna delle quali custodisce una perla preziosa la cui scoperta richiede il dono di sé. Grazie anche ai miei nonni Ubaldo, Claudina, Armenza e a tutti i miei parenti per l'affetto che mi hanno sempre regalato e che non sono sempre riuscito a restituire.

Un grazie gigantissimo a Mirco Rossi, Nicola MarabiNI e Lanimale che mi hanno obbligato a stare sveglio a giocare a Bang quando volevo andare a letto, ma soprattutto mi hanno permesso di mettermi in gioco in una relazione di amicizia vera in cui condividere tutto me stesso.

Un'altro grazie va all'Anna Faggiotto per la sua costante presenza in tutta la mia vita; ancora voglio ringraziare Fabio, mio compagno di maraffe, Giuditta, chiacchieratrice seriale il cui obbiettivo principale di questi 3 anni è stato non farmi studiare (la ringrazio sopratutto per questo), e Laurina con cui invece ho affrontato una marea di esami.
Un grazie speciale va inoltre la mia comunità: ognuno di voi mi ha in qualche modo arricchito; poi ancora ricordo il Gruppo di Santa che mi ha visto nello pressa degli esami, gli Animali, Gimmi, Ale e gli amici delle superiori.
Ho promesso a me stesso di dedicare una riga di questi ringraziamenti ai tutor e ai dottorandi che ho conosciuto in questi anni: grazie per la pazienza e il tempo che mi avete dedicato nonostante i vostri impegni.
Colgo anche l'occasione per chiedere scusa a tutti per le volte che, preso da me stesso, non ho saputo accogliere, donarmi e mettermi in gioco un pochino di più.
Mi dispiace se ho dimenticato qualcuno, ma la mia smemoratezza e sbadataggine sono ben note; abbiate pazienza ancora una volte e grazie anche a voi.