

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Effetto Doppler e applicazioni astrofisiche**

Tesi di laurea

Presentata da:

**Benedetta Casavecchia**

Relatore:

**Chiar.mo Prof.**

**Daniele Dallacasa**

---

**Appello II**

**Anno accademico 2018-2019**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Effetto Doppler</b>	<b>3</b>
1.1 Caso non relativistico . . . . .	3
1.1.1 Osservatore e Sorgente in quiete . . . . .	3
1.1.2 Osservatore in moto e Sorgente in quiete . . . . .	4
1.1.3 Sorgente in moto e Osservatore in quiete . . . . .	4
1.1.4 Osservatore e Sorgente in moto . . . . .	5
1.2 Caso relativistico . . . . .	5
<b>2 Applicazioni astrofisiche</b>	<b>7</b>
2.1 Allargamento delle righe spettrali . . . . .	7
2.1.1 Allargamento Doppler . . . . .	8
2.1.2 Curva di Crescita . . . . .	9
2.2 Ricerca di Esopianeti . . . . .	10
2.2.1 Funzione di Massa di un Esopianeta . . . . .	11
2.3 Stelle Binarie . . . . .	13
2.4 Redshift . . . . .	13
2.4.1 Redshift Cosmologico . . . . .	14

# Introduzione

L'elaborato tratterà l'Effetto Doppler in maniera generale esaminando in primo luogo gli aspetti teorici e, successivamente, mettendo in luce alcune sue applicazioni astrofisiche. Nel primo capitolo si analizza il fenomeno in regime classico e relativistico. Nella trattazione classica, ovvero quando la velocità di propagazione dell'onda è molto inferiore alla velocità della luce (es. onde acustiche), è necessario distinguere 4 casi che evidenzino come sorgente ( $S$ ) ed osservatore ( $O$ ) possano essere in moto relativo fra loro. Partendo dalla situazione più semplice in cui sia l'osservatore sia la sorgente sono a riposo si arriverà ad ottenere una formula generale in cui  $S$  e  $O$  sono entrambi in moto rispetto al mezzo di propagazione dell'onda con velocità  $v_S$  e  $v_O$ . Per quanto riguarda il regime relativistico, viene presa in esame la radiazione elettromagnetica; in questo caso al posto delle due velocità  $v_S$  e  $v_O$  è necessario conoscere solamente la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento  $v$ . Un aspetto importante della trattazione relativistica è la presenza di due Effetti Doppler: uno *longitudinale* e uno *trasversale*.

Nel secondo capitolo vengono esposte alcune applicazioni astrofisiche dell'Effetto Doppler. Il filo conduttore di questa seconda parte è un graduale passaggio da sistemi più piccoli, in cui il fenomeno viene trattato a livello atomico, fino a raggiungere scale dell'ordine delle dimensioni dell'Universo. La prima applicazione presa in esame è l'allargamento delle righe spettrali, mostrando come esse possano aumentare la loro larghezza al crescere della velocità radiale delle particelle all'interno di una nube di gas. Successivamente, si vuole dimostrare come l'Effetto Doppler sia estremamente utile per la scoperta di Esopianeti e come possa essere applicato per ricavare informazioni rilevanti circa la massa e la densità del pianeta, partendo dalla misura dello spostamento delle righe spettrali della stella attorno alla quale orbita. Un'ulteriore trattazione inerente i sistemi binari riguarda il caso di due stelle ruotanti attorno ad un centro di massa sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale; in questo caso si vuole mostrare come calcolare  $m \sin \theta$  quando è possibile apprezzare lo spostamento delle righe spettrali di entrambi i corpi. Infine, si spiega come l'Effetto Doppler sia stato utile per il calcolo del tasso di espansione dell'Universo e di come il *reshift cosmologico* venga impiegato nella misura del *look back time*.

# Capitolo 1

## Effetto Doppler

L'Effetto Doppler è il fenomeno fisico che descrive la variazione della frequenza osservata di un'onda quando la sorgente emittente e l'osservatore sono in moto relativo fra di loro. Un'onda può essere vista come una perturbazione che si propaga in un mezzo o nel vuoto; esempi di onde sono: il suono, le onde sismiche, le increspature su una superficie liquida immobile, la luce e tanti altri. Per poter descrivere una qualsiasi perturbazione di questo tipo è necessario introdurre i concetti di frequenza e lunghezza d'onda; il primo parametro descrive il numero di oscillazioni complete effettuate dalla perturbazione in un certo intervallo di tempo, mentre il secondo rappresenta la minima distanza che separa due punti dell'onda che sono in fase tra loro (es. due picchi consecutivi). I due parametri  $\nu$  e  $\lambda$  sono correlati dalla relazione:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \tag{1.1}$$

dove  $v$  rappresenta la velocità di propagazione dell'onda.

### 1.1 Caso non relativistico

Si consideri un'onda che si propaga con una velocità molto inferiore a quella della luce, ad esempio il suono; la presenza di un mezzo materiale all'interno del quale le onde acustiche si propagano fa sì che sia possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale il mezzo risulti fermo. L'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato rende necessaria la trattazione del fenomeno in 4 casi distinti.

#### 1.1.1 Osservatore e Sorgente in quiete

Una sorgente posta in un sistema di riferimento  $S$  produce in un intervallo di tempo  $\Delta t$  un'onda che si propaga con velocità  $v$  e che contiene  $N$  fronti d'onda, con  $N = v\Delta t/\lambda_{em}$ . L'osservatore, situato in un sistema di riferimento  $S'$  in quiete rispetto ad  $S$  osserverà  $N$  fronti d'onda nell'intervallo  $\Delta t$  e misurerà una frequenza  $\nu_{oss}$  uguale a quella emessa dalla sorgente secondo la relazione:

$$\nu_{oss} = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\lambda\Delta t} = \frac{v}{\lambda} = \nu_{em} \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Osservatore in moto e Sorgente in quiete

Si considera un osservatore in movimento rispetto alla sorgente con velocità costante  $v_O$ ; in un intervallo di tempo  $\Delta t$  esso riceverà un numero di fronti d'onda pari a  $v\Delta t/\lambda_{em}$  più ulteriori  $v_O\Delta t/\lambda_{em}$  fronti d'onda causati dal moto relativo fra i due sistemi. In questo caso la frequenza  $\nu_{oss}$  percepita dall'osservatore sarà:

$$\nu_{oss} = \frac{v\Delta t/\lambda_{em} \pm v_O\Delta t/\lambda_{em}}{\Delta t} = \frac{v \pm v_O}{\lambda_{em}} = \frac{v \pm v_O}{v/\nu_{em}} = \nu_{em} \left(1 \pm \frac{v_O}{v}\right) \quad (1.3)$$

dove si prende il segno positivo nel caso in cui l'osservatore si avvicina alla sorgente e negativo quando si allontana.

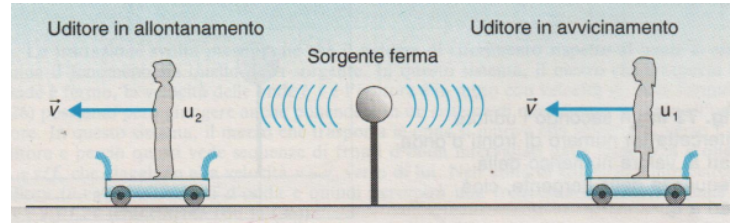


Figura 1.1: Rappresentazione di onde emesse da una sorgente immobile al centro con un osservatore in allontanamento  $u_2$  e uno in avvicinamento  $u_1$

### 1.1.3 Sorgente in moto e Osservatore in quiete

Supponiamo che l'osservatore sia in quiete rispetto al mezzo di trasmissione e che la sorgente gli vada incontro con velocità  $v_S$ . In  $S'$  si avrà che  $\lambda_{oss}$  dell'onda registrata risulterà minore di  $\lambda_{em}$  e il suo valore sarà pari a  $\lambda_{oss} = v/\nu_{em} - v_S/\nu_{em}$ . Quando la sorgente è in movimento si avrà quindi un frequenza:

$$\nu_{oss} = \frac{v}{\lambda_{oss}} = \nu_{em} \frac{v}{v - v_S} \quad (1.4)$$

che risulta essere maggiore di  $\nu_{em}$ .

In generale quando l'osservatore è a riposo e la sorgente si muove con velocità  $v_S$  la frequenza registrata vale:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \frac{v}{v \mp v_S} \quad (1.5)$$

con segno  $-$  se la sorgente si avvicina all'osservatore e con segno  $+$  se si allontana.



Figura 1.2: Rappresentazione di onde emesse da una sorgente in moto verso un osservatore  $u_1$  e in allontanamento dall'osservatore  $u_2$ .

### 1.1.4 Osservatore e Sorgente in moto

I casi precedenti possono essere sintetizzati in un'unica formula che descrive la frequenza  $\nu_{oss}$  registrata in  $S'$  quando osservatore e sorgente si muovono lungo la direzione  $S - O$ :

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S} \quad (1.6)$$

La convenzione dei segni prevede che al numeratore il segno positivo indichi un osservatore che si avvicina alla sorgente ( $- \rightarrow$  osservatore in allontanamento), mentre al denominatore il segno negativo è per una sorgente che si dirige verso l'osservatore ( $+ \rightarrow$  una sorgente che va nella direzione opposta).

Se si analizza il moto relativo fra la sorgente e l'osservatore si può notare che l'Effetto Doppler è un fenomeno che riguarda la componente di velocità lungo la direzione  $S - O$ , che deve essere diversa da zero: si considerano dunque  $v_{S,r} = v_S \cos\theta$  e  $v_{O,r} = v_O \cos\theta$ . In conclusione, nel caso in cui la sorgente si muova in una direzione che forma un angolo con la congiungente S-O, la frequenza registrata in  $S'$  è:

$$\nu_{oss} = \frac{\nu_{em}}{1 \pm \frac{v_s}{v} \cos\theta} \quad (1.7)$$

## 1.2 Caso relativistico

Se si vuole studiare l'Effetto Doppler rispetto alla luce, la meccanica classica non è più sufficiente. La luce non può essere analizzata come è stato fatto col suono principalmente per due motivi:

- può viaggiare anche nel vuoto, a differenza delle altre onde che hanno bisogno di un mezzo di propagazione;
- è invariante per sistemi di riferimento inerziali.

I quattro casi analizzati nel paragrafo precedente si riducono ad un unico caso in cui l'osservatore è fermo nel suo sistema  $S'$  che si muove con velocità  $v$  rispetto al sistema  $S$  dove è situata la sorgente. In Relatività Ristretta per capire come variano le coordinate spaziali e temporali quando si effettua un cambio di sistema di riferimento è necessario

applicare le trasformazioni di Lorentz. Sapendo che  $\nu = 1/t$  e prendendo  $\lambda = c/\nu$  come coordinata spaziale otteniamo la seguente trasformazione:

$$\frac{1}{\nu_{oss}} = \frac{1}{\nu_{em}} \frac{(1 - \beta \cos\theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \nu_{oss} = \nu_{em} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\theta} \quad (1.8)$$

dove  $\beta = v/c$ . Il  $\cos\theta$  è stato inserito tenendo conto della *Formula 1.7*. Se  $v \ll c$  si può considerare solo il primo termine dello sviluppo binomiale:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\theta} \simeq \frac{\nu_{em}}{1 - \beta \cos\theta} \simeq \nu_{em}(1 + \beta \cos\theta) \quad (1.9)$$

Se  $\theta = 0^\circ$  (sorgente in avvicinamento) o  $\theta = 180^\circ$  (sorgente in allontanamento) si ottengono le stesse relazioni del caso classico; mentre se  $\theta = 90^\circ$ , si avrebbe  $\nu_{oss} = \nu_{em}$ .

Se  $v$  è vicina alla velocità della luce vanno considerati anche i termini di secondo ordine. A questo punto è conveniente considerare separati gli effetti che si avrebbero se  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$  e quelli in cui  $\theta = 90^\circ$ . Il primo caso è detto *Effetto Doppler longitudinale* e in regime relativistico è:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} = \nu_{em} \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} \quad (1.10)$$

Se invece si pone  $\theta = 90^\circ$ , si ha:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.11)$$

Si osserverebbe quindi una frequenza  $\nu_{oss}$  più piccola di  $\nu_{em}$ . Questo fenomeno, chiamato *Effetto Doppler trasversale*, venne confermato sperimentalmente da Ives e Stilwell nel 1938/1941, e da Otting nel 1939. Esso può essere visto come una conferma della dilatazione relativistica del tempo; se si considerasse la sorgente come un insieme di orologi in movimento, un osservatore vedrebbe un numero di oscillazioni minore rispetto a quelle registrate in  $S$ .



# Capitolo 2

## Applicazioni astrofisiche

L'Effetto Doppler ricopre un ruolo di fondamentale importanza in ambito astrofisico poichè è uno dei principali strumenti che i ricercatori utilizzano per estrapolare informazioni importanti riguardanti: corpi celesti, sistemi binari, galassie o l'espansione dell'Universo. Questi oggetti sono emettitori di onde elettromagnetiche in moto relativo rispetto alla Terra e, studiando i loro spettri elettromagnetici, si possono avere informazioni sulla loro velocità relativa, composizione chimica, temperatura... Sperimentalmente il fenomeno si manifesta con uno spostamento delle righe spettrali rispetto a quelle ottenute in laboratorio; esse possono presentarsi traslate verso frequenze più basse (redshift) quando la sorgente si sta allontanando, o verso frequenze più alte (blueshift) se si ha un corpo in avvicinamento.

### 2.1 Allargamento delle righe spettrali

L'Effetto Doppler ha una notevole applicazione anche in campo microscopico. Quando avviene una transizione elettronica dovuta alla cattura o al rilascio di un fotone è possibile osservare questo passaggio nello spettro dell'oggetto in esame. Le righe spettrali tuttavia, non sono infinitamente sottili poichè la transizione non è mai del tutto monocromatica. La *line profile function* (LPF)  $\Phi(\nu)$  descrive il cambiamento di stato dell'atomo; essa è composta da un "core" con un picco ad una certa frequenza caratteristica di quella transizione e da due "wings" laterali. L'allargamento della riga può essere causato da tre fenomeni distinti:

- **Allargamento intrinseco:** diretta conseguenza del Principio di Indeterminazione di Heisenberg ( $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ ), questo effetto fa sì che nessuna riga spettrale possa essere infinitamente sottile poichè il piccolo intervallo di tempo in cui l'elettrone si trova nello stato eccitato fa sì che  $\Delta E \neq 0$ ;
- **Allargamento collisionale:** esso si manifesta con una leggera alterazione dell'emissione causata dall'urto dell'atomo con altre particelle durante la transizione;
- **Allargamento Doppler:** dovuto all'agitazione termica.

### 2.1.1 Allargamento Doppler

Si prende in esame una nube di gas ferma rispetto all'osservatore; le particelle all'interno della nube sono in agitazione termica e ciascuna di esse possiede una velocità radiale che è negativa se la particella si allontana o positiva se si avvicina. Ricordando che  $\nu_{em}$  è la frequenza emessa, mentre  $\nu_{oss}$  è quella osservata, la variazione fra le due  $\Delta\nu$  è pari a:

$$\Delta\nu = \nu_{oss} - \nu_{em} = \frac{\nu_{em}v_r}{c} \quad (2.1)$$

dove si è fatto uso della *Formula 1.3*.

All'equilibrio termico la distribuzione di velocità corrisponde alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$N(v_r)dv_r \simeq N_0 v_r^2 e^{-mv_r^2/2kT} dv_r \quad (2.2)$$

Grazie alla relazione:

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = kT \quad (2.3)$$

si ha che

$$v_r = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.4)$$

Sostituendo il risultato appena ottenuto nella *Formula 2.1*

$$\Delta\nu = \frac{\nu_{em}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \Rightarrow \Delta\nu \propto \sqrt{T} \quad (2.5)$$

la *line profile function* diventa:

$$\Phi(\nu) = (\Delta\nu\sqrt{\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{(\nu_{oss} - \nu_{em})^2}{(\Delta\nu)^2}\right) \quad (2.6)$$

Il profilo della riga spettrale ha la forma di una gaussiana con un picco in  $\nu_0 \equiv \nu_{em}$ , chiamato *centroide* e che non si sposta se la nube è ferma rispetto all'osservatore. Se la nube dovesse avvicinarsi, il centroide si sposterebbe verso frequenze più alte e la riga assumerebbe una forma asimmetrica con un blueshift accentuato e un redshift più tenue. Partendo dalla seguente relazione:

$$\Delta\lambda/\lambda = v_r/c \quad (2.7)$$

e tenendo conto della *Formula 2.4* si può ricavare la *Full Width at Half-Maximum* (FWHM).

$$(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = 2\frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.8)$$

Un calcolo più approfondito della FWHM con l'ulteriore aggiunta della velocità di spostamento  $v_{sp}$  della nube ci fornisce il seguente risultato:

$$(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = 2\frac{\lambda}{c}\sqrt{\left(\frac{2kT}{m} + v_{sp}^2\right)} \ln 2 \quad (2.9)$$

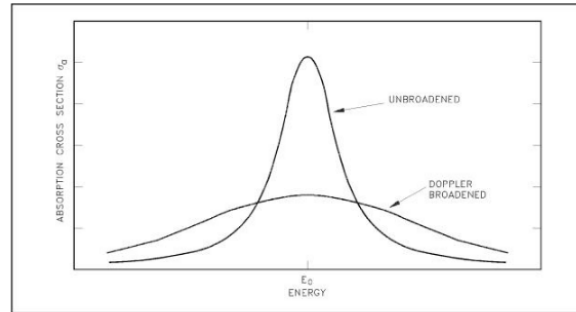


Figura 2.1: Riga in emissione di un gas in due casi: la riga con il picco più alto rappresenta un gas a basse  $T$  e con particelle lente mentre la seconda curva rappresenta lo stesso gas a  $T$  elevate, nel quale le particelle si muovono più velocemente

L'Allargamento Doppler va ad incidere soprattutto sul core della riga spettrale; l'allargamento è proporzionale alla radice della temperatura (*Formula 2.5*), quindi gas più caldi presenteranno righe più larghe rispetto a gas freddi dove è presente meno agitazione termica.

L'Effetto Doppler fornisce importanti informazioni sull'oggetto in esame, infatti lo studio di alcune anomalie delle righe spettrali può indicare se un disco di polveri è in rotazione o se la stella presenta turbolenze nell'atmosfera, come avviene per le Giganti o Supergiganti Rosse. Quando un oggetto ruota su sé stesso presenta un estremo in avvicinamento e quello opposto in allontanamento rispetto all'osservatore; questa rotazione costante è visibile per Effetto Doppler poichè, nel primo caso, l'estremità dell'oggetto allargherà la riga verso frequenze più alte mentre, nel secondo caso, verso frequenze più basse. Più il corpo ruota velocemente e maggiore sarà l'allargamento della riga spettrale; in questo modo è possibile misurare la velocità di rotazione.

### 2.1.2 Curva di Crescita

L'allargamento Doppler interessa soprattutto il core della LPF e la forma della riga spettrale può fornire informazioni sulla densità delle particelle e sull'abbondanza dell'elemento che è in grado di effettuare quella transizione.

Si definisce  $N_a$  come il numero di atomi in grado di effettuare una certa transizione elettronica e si vuole vedere come cambia il profilo della riga spettrale all'aumentare di  $N_a$ . Se si aggiungono ulteriori atomi di quell'elemento la profondità della riga è in crescente aumento fino a quando il nucleo diventa completamente opaco. Questo fenomeno riguardante il core Doppler può essere descritto geometricamente e si può notare che la profondità ( $W$ ) aumenta linearmente con  $N_a$ .

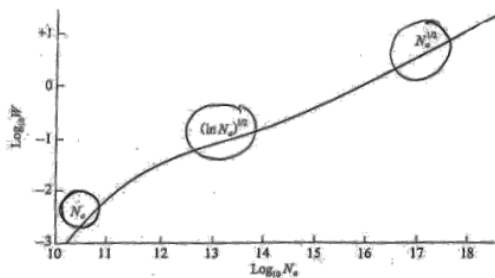


Figura 2.2: Grafico rappresentante la Curva di Crescita della riga K del Ca II. All'aumentare di  $N_a$  la dipendenza di  $W$  dal numero di particelle cambia.

La relazione  $W \propto N_a$  rappresenta il primo regime della Curva di Crescita; esso è chiamato **Regime Lineare** ed è influenzato dall'Allargamento Doppler. Gli altri regimi sono chiamati **Piatto** ( $W \propto \sqrt{\ln N_a}$ ) e **di Smorzamento** ( $W \propto \sqrt{N_a}$ ). L'obiettivo della Curva di Crescita è quello di determinare il numero  $N_a$  di atomi che ha determinato una certa riga spettrale. Infine, grazie all'*Equazione di Boltzmann* e all'*Equazione di Saha* è possibile calcolare il numero totale di atomi di quell'elemento.

## 2.2 Ricerca di Esopianeti

La scoperta e lo studio di nuovi pianeti è un settore di ricerca che si sta notevolmente sviluppando negli ultimi decenni. L'osservazione di altri sistemi stellari con pianeti orbitanti attorno alla stella centrale ci permette di poter fare supposizioni sulla loro possibile origine ed evoluzione; tutte informazioni utili per comprendere meglio come si è creato anche il nostro Sistema Solare. Lo studio di corpi extrasolari ha permesso la scoperta di pianeti di varie tipologie che si discostano dai Gioviniani e dai Terrestri presenti nel nostro Sistema Solare; esempi di questi pianeti sono i mini-Nettuni e le super-Terre. La ricerca di esopianeti tuttavia ha anche un altro importantissimo obiettivo: la scoperta di tracce di vita o di materia organica fuori dal sistema solare per poter comprendere meglio che cosa sia la vita, in quali condizioni si sviluppa e come ha avuto origine sulla Terra. I metodi utilizzati per rilevare gli esopianeti sono molteplici, ma di particolare importanza è il "Metodo Doppler" (o "delle velocità radiali"). Grazie allo studio delle righe in assorbimento infatti, è possibile osservare un loro spostamento dovuto alla rotazione della stella attorno al centro di massa a causa dell'attrazione gravitazionale provocata da uno o più pianeti.

I sistemi binari o multipli composti da due o più corpi (come ad esempio due stelle o una stella con pianeti) che orbitano attorno ad un centro di massa spesso non sono otticamente risolvibili e non è possibile distinguere i singoli oggetti che li compongono. Questo avviene perché la distanza fra i corpi di un sistema binario o multiplo è molto minore rispetto a quella che intercorre fra la Terra e questi oggetti e i nostri strumenti attualmente non sono in grado di risolvere sorgenti troppo lontane. Tuttavia, se il piano orbitale del sistema è orientato in modo tale che i corpi che lo compongono abbiano una componente radiale della velocità di rotazione, allora per trovare esopianeti si può applicare il "Metodo Doppler". Guardando lo spettro della stella si registrerebbe un periodico spostamento delle righe spettrali in assorbimento dovuto alla presenza di uno o più pianeti orbitanti.

Fino ad ora sono stati scoperti 4044 esopianeti, di cui 763 tramite rilevamento Doppler. Questa tecnica è molto efficace per pianeti di grandi dimensioni come i Gioviniani o i Nettuniani. I telescopi che hanno dato il contributo maggiore sono: il Keck Telescopes alle Hawaii e La Silla Observatory in Chile.

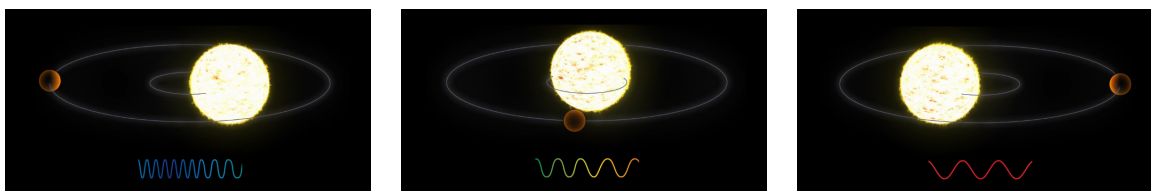


Figura 2.3: Variazione della frequenza dell'onda a causa dell'Effetto Doppler dovuto al movimento della stella sotto l'attrazione gravitazionale del pianeta.

### 2.2.1 Funzione di Massa di un Esopianeta

Grazie all'analisi delle righe spettrali e ad alcune approssimazioni è possibile ricavare la massa e la velocità degli oggetti in esame. Si consideri per semplicità un sistema binario stella-pianeta con orbite circolari; in questo caso non sarà possibile osservare le righe in assorbimento dei due corpi ma si avranno solo quelle della stella poichè più grande e più luminosa del pianeta.

Per poter calcolare la Funzione di Massa di un Esopianeta si considerino i seguenti dati:

- $a_S, a_P \Rightarrow$  raggio orbitale della stella e del pianeta;
- $m_S, m_P \Rightarrow$  massa della stella e del pianeta;
- $v_S \Rightarrow$  velocità della stella osservata ( $v_S = v \sin \theta$ , con  $v$  la velocità reale della stella,  $\theta$  l'angolo fra la linea di vista che congiunge l'osservatore con il sistema binario e la normale al piano su cui orbita il sistema);
- $P \Rightarrow$  periodo di rivoluzione.

Utilizzando la definizione di Centro di Massa

$$\begin{cases} m_S a_S = m_P a_P \\ a_P + a_S = a \end{cases}$$

si ottiene la seguente uguaglianza:

$$a_S = \frac{a m_P}{m_S + m_P}. \quad (2.10)$$

La velocità reale della stella osservata sarà uguale al rapporto fra la circonferenza percorsa e il periodo impiegato per effettuare un giro completo; una volta trovata  $v$  sarà semplice ottenere anche  $v_S$ :

$$v = \frac{2\pi a_S}{P} \Rightarrow v_S = \frac{2\pi a_S \sin\theta}{P} \quad (2.11)$$

Se si tiene conto della *Formula* 2.10 e si vuole esplicitare  $a$ , si ha la seguente relazione:

$$a = \frac{v_S P (m_S + m_P)}{2\pi m_P \sin\theta} \quad (2.12)$$

Infine, ricondando la terza Legge di Keplero

$$\frac{G(m_S + m_P)}{4\pi} = \frac{a^3}{P^2} \quad (2.13)$$

e isolando tutti i termini riguardanti le masse e il  $\sin\theta$ , si ottiene l'**Equazione della Funzione di Massa**

$$\frac{m_P^3 \sin^3\theta}{(m_S + m_P)^2} = \frac{v_S^3 P}{2\pi G} \quad (2.14)$$

Nel caso stella-pianeta ( $m_S \gg m_P$ ), si può attuare l'approssimazione  $m_S + m_P \simeq m_S$  e si può ricavare una relazione più semplice che permette di stimare la massa del pianeta:

$$m_P^3 \sin^3\theta \simeq \frac{v_S^3 m_S^2 P}{2\pi G} \quad (2.15)$$

I termini a destra del  $\simeq$  sono costanti o valori misurabili. Se si considera una stella della quale si conosce la massa (ad esempio stelle appartenenti al diagramma H-R, con Luminosità nota...) sarà sufficiente osservarne il periodo di rivoluzione e misurare la velocità relativa  $v_S$  grazie all'Effetto Doppler tramite la formula:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \left(1 + \frac{v_S}{c}\right) \quad (2.16)$$

da cui

$$v_S = c \frac{\nu_{oss} - \nu_{em}}{\nu_{em}} \quad (2.17)$$

Se si conoscessero anche le dimensioni del pianeta si potrebbe fare un calcolo approssimativo della densità e si potrebbero fare delle supposizioni circa la sua composizione. Densità basse (minori della densità dell'acqua pari a  $1 \text{ g/cm}^3$ ) sono indice di un pianeta gassoso mentre densità alte caratterizzano uno roccioso; infine densità vicine a quelle della Terra possono indicare un pianeta con una superficie coperta da oceani d'acqua o ghiacciai, con la possibilità che presenti tracce di vita.

## 2.3 Stelle Binarie

I sistemi binari sono composti da coppie di stelle che ruotano attorno ad un centro di massa sotto gli effetti della forza di gravità. Esse costituiscono circa il 40% delle stelle nella nostra galassia e sono rilevabili tramite lo spostamento delle righe in assorbimento (in questo caso si parla di "binarie spettroscopiche"). Come si è visto per gli esopianeti, quando è visibile la traslazione delle righe spettrali verso il blu o il rosso di solo uno dei due corpi è possibile ricavare la Funzione di Massa del sistema binario. Tuttavia non sempre la massa di una stella ( $m_2$ ) è trascurabile rispetto all'altra ( $m_1$ ); in questa situazione una volta giunti alla *Formula* 2.14 non è possibile attuare l'approssimazione:  $m_1 + m_2 \simeq m_1$ . Se la massa di una delle due stelle non è determinabile, non si può proseguire con la misura di  $m_1$  o  $m_2$  e il massimo delle informazioni che si può ottenere è il rapporto  $m_2^3 \sin^3 \theta / (m_1 + m_2)^2$ .

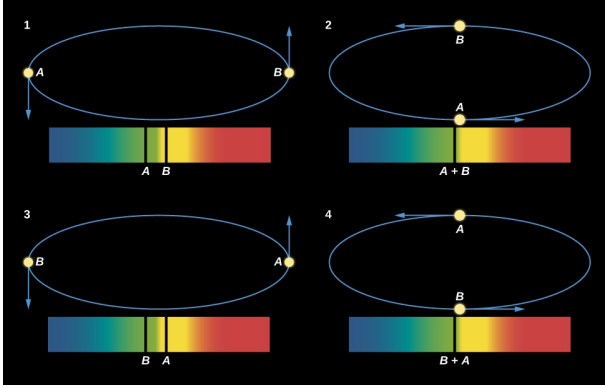


Figura 2.4: Sdoppiamento righe spettrali di un sistema binario dovuto all'Effetto Doppler

Nel caso in cui sono visibili le righe spettrali di entrambe le stelle, si può conoscere la velocità ( $v_1$  e  $v_2$ ) di entrambi i corpi. Se si utilizza la definizione di Centro di Massa e la *Formula* 2.11, si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (2.18)$$

da cui:

$$m_1 = \frac{v_2 m_2}{v_1}. \quad (2.19)$$

Andando a sostituire il risultato appena ottenuto nella Funzione di Massa si arriva al risultato:

$$m_2 \sin^3 \theta = \frac{v_1^3 P \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)^2}{2\pi G} \quad (2.20)$$

dove le velocità  $v_1$  e  $v_2$  sono state misurate grazie all'Effetto Doppler

## 2.4 Redshift

Se un corpo si allontana dall'osservatore si può notare uno spostamento delle righe spettrali verso lunghezze d'onda maggiori, ovvero verso il rosso. Il fenomeno è chiamato *redshift*  $z$  ed è una conseguenza diretta dell'Effetto Doppler. Date  $\lambda_{oss}$  e  $\lambda_{em}$ , si definisce il *redshift* nella seguente maniera:

$$z \equiv \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \Rightarrow z + 1 = \frac{\lambda_{oss}}{\lambda_{em}} \quad (2.21)$$

Quando la sorgente si avvicina all'osservatore si verifica uno spostamento verso il blu chiamato *blueshift* ( $z < 0$ ); invece, nel caso in cui la sorgente si stia allontanando si ha *redshift* e dunque  $z > 0$ .

Si chiama  $v_r$  la velocità di recessione della sorgente, in regime classico ( $v_r \ll c$ ) il redshift può essere definito semplicemente anche come il rapporto fra  $v_r$  e la velocità della luce:

$$z = \frac{v_r}{c} \quad (2.22)$$

Se la sorgente possiede una velocità di recessione prossima a quella della luce, alla *Formula 2.22* va inserito un fattore di Lorentz  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$  come richiesto dalla Relatività Ristretta. Inoltre, se si tiene conto dell'angolo di inclinazione  $\theta$  fra la congiungente Osservatore-Sorgente e la direzione del moto relativo, la definizione corretta di  $z$  diventa:

$$z + 1 = \frac{1 + \frac{v_r \cos \theta}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v_r}{c})^2}} \quad (2.23)$$

Per i moti che si svolgono lungo la congiungente, ovvero quando  $\theta = 0^\circ$ :

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_r}{c}}{1 - \frac{v_r}{c}}} \quad (2.24)$$

Nel caso in cui la sorgente si muova con  $\theta = 90^\circ$  si ha *redshift trasversale*, come già preannunciato nel primo capitolo.

$$z + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_r}{c})^2}} \quad (2.25)$$

### 2.4.1 Redshift Cosmologico

Verso la fine degli anni '20, Hubble si accorse che le righe spettrali di alcune galassie molto lontane erano soggette ad un redshift che aumentava proporzionalmente con la loro distanza. Applicando il **Principio Cosmologico** secondo il quale l'Universo è omogeneo e isotropo su scale relativamente grandi, non esiste un sistema di riferimento privilegiato dove si registra un fenomeno differente, dunque l'Universo si sta espandendo. Data la formula:

$$z = \frac{H_0}{c} d \quad (2.26)$$

dove  $H_0$  è la *costante di Hubble* con valore  $\approx 70 \frac{km}{sMpc}$  e  $d$  la distanza della galassia, si ottiene la **Legge di Hubble**:

$$v_r = H_0 d \quad (2.27)$$



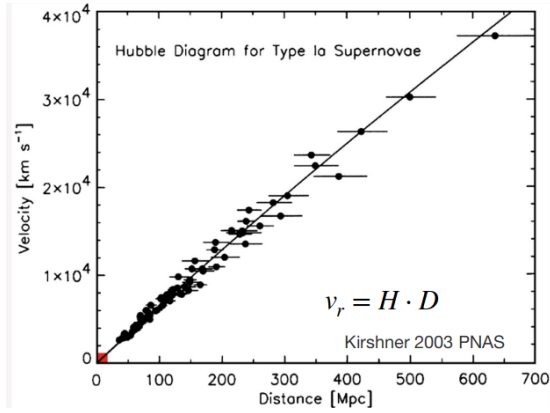


Figura 2.5: Grafico distanza-velocità per supernovae Ia osservate da Jha (29). Il quadratino rosso indica l'intervallo di osservazione del diagramma di Hubble del 1929.

Grazie al *redshift* è possibile misurare il "look back time" ( $t_L$ ), ovvero il tempo che è trascorso da quando la radiazione è stata emessa dalla sorgente ad un certo  $z$  e il momento in cui giunge all'osservatore.

$$t_L = \int_t^{t_0} dt' = \int_z^0 \left( \frac{dt'}{dz'} \right) dz' \quad (2.28)$$

Si definisce il *fattore di scala* "a" come:

$$1/a = 1 + z \quad (2.29)$$

che è utile per il calcolo di  $dt/dz$ .

In seguito ad alcuni semplici passaggi algebrici si ottiene il seguente risultato:

$$z = \frac{1}{a} - 1 \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{-\dot{a}}{a^2} = -(1+z)H \quad (2.30)$$

Se si sostituisce nella *Formula 2.28* si arriva ad ottenere un'equazione che lega il *redshift* al look back time.

$$t_L = \int_z^0 \frac{-1}{(1+z')H(z')} dz' \quad (2.31)$$

Per risolvere l'equazione 2.31 è necessario avere un modello "dinamico" di  $H(z)$ , poichè da solo  $z$  determina unicamente quanto più era contratto l'Universo all'epoca in cui la radiazione venne emessa. Se si considera il modello  $\Lambda$ CDM, ad esempio,  $H(z)$  sarà dato dalla relazione:

$$H(z)^2 = \frac{8\pi G}{3} [\rho_M(z+1)^3 + \rho_r(z+1)^4 + \rho_\Lambda] \quad (2.32)$$

con:

$\rho_M$  = densità di energia per la componente di materia (barioni + dark matter);

$\rho_r$  = densità di energia per la componente di radiazione;

$\rho_\Lambda$  = densità di energia per la componente di energia oscura.

L'espansione dell'Universo ha ripercussioni anche sulla misura della magnitudine apparente. Grazie allo studio di "candele standard" si è arrivati al seguente risultato:

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d}{10pc} + K \quad (2.33)$$

dove  $K$  è un fattore di correzione che dipende dall'indice spettrale e dalla banda di osservazione;  $K = 0$  per magnitudini bolometriche, mentre per ogni banda esistono delle tavole di correzione (es. Blanton e Roweis 2007).

$$K = -2.5 \log_{10} \frac{L_{\lambda}(\lambda / (1+z))}{(1+z)L_{\lambda}(\lambda)} \quad (2.34)$$

In aggiunta alle candele standard, la prova definitiva dell'espansione dell'Universo è fornita dalla CMB (*Radiazione Cosmica di Fondo*), ovvero una radiazione di corpo nero isotropa a  $T = 2.7^{\circ}K$  risalente al Big Bang, quando l'Universo era così piccolo e denso da risultare otticamente spesso. Col tempo la radiazione da CMB si è raffreddata e ad oggi ha il proprio picco nella banda delle microonde; essa produce uno spettro che rimane invariato anche puntando gli strumenti in direzioni diverse.

L'Effetto Doppler tuttavia ha un limite, l'espansione accelerata dell'Universo infatti fa sì che ad un certo punto gli oggetti si allontanino dalla Terra con velocità maggiori di quella della luce (come avviene oltre la sfera di Hubble). Dunque l'Universo osservabile è limitato e un osservatore posto sulla Terra potrà misurare la velocità relativa di corpi che si trovano entro l'orizzonte delle particelle, ovvero la massima distanza coperta dalla luce da  $t=0$  fino ad oggi.

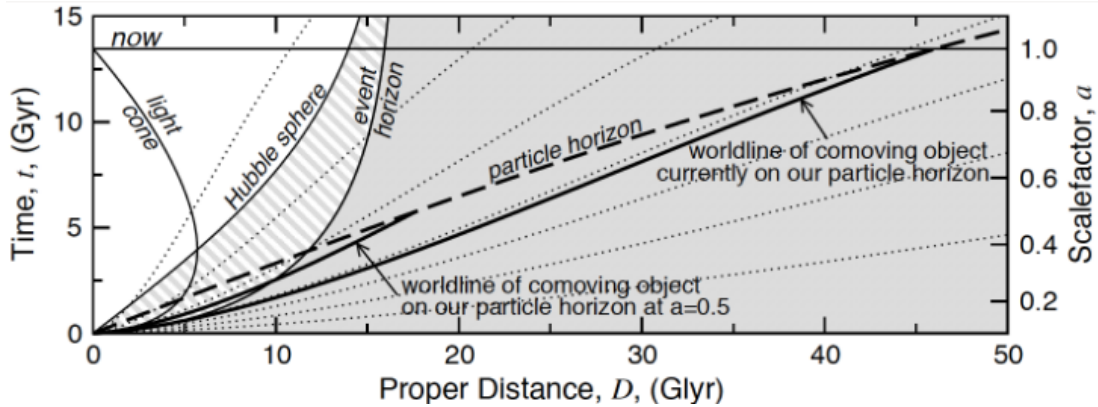


Figura 2.6: Diagramma spazio-tempo con tradizionale descrizione della sfera di Hubble e dell'orizzonte delle particelle. La linea orizzontale in alto rappresenta l'età attuale dell'Universo.

# Bibliografia

- [1] D.Halliday, R.Resnick and K.S.Kran, *Fisica 1*, C.E.A. Quinta edizione
- [2] D.Halliday, R.Resnick and K.S.Kran, *Fisica 2*, C.E.A. Quarta edizione
- [3] R.Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, C.E.A.
- [4] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, Quinta edizione
- [5] C. S. Cockel, *ASTROBIOLOGY: understanding life in the Universe*, WILEY Blackwell
- [6] D. Dallacasa, *Processi di Radiazione e MHD*, Dispense, 2018-2019
- [7] F. R. Ferraro, *Astrosica Stellare*, Dispense, 2018-2019
- [8] R. Orosei, *Astrobiologia*, Dispense, 2018-2019
- [9] F. Vazza, *Astrofisica Extragalattica (Modulo 2)*, Dispense, 2018-2019
- [10] A. Cimatti, *Astronomia*, Dispense, 2016-2017
- [11] J. J. Condon, A. M. Matthews,  *$\Lambda$ CDM Cosmology for Astronomers*, 2018
- [12] T. M. Davis, C. H. Lineweaver, *Expanding Confusion*, 2003