

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Righe spettrali:
Formazione, shift, allargamento.**

Tesi di laurea

Presentata da:
Vieri Bartolini

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

*We all know what light is;
but it is not easy to tell
what it is.*

(Samuel Johnson)

Sommario

All'inizio del XIX secolo gli astronomi iniziarono a comprendere quanto persino le stelle più vicine a noi siano effettivamente distanti dal Sole, e credettero che sarebbe stato impossibile avere informazioni riguardanti la composizione chimica di quest'ultime. Oggi conosciamo con precisione i componenti delle stelle e anche della materia diffusa nell'universo grazie all'analisi degli spettri e delle righe spettrali. Il primo a scoprire l'esistenza di queste righe fu l'astronomo e fisico tedesco Joseph von Fraunhofer che nel 1814, utilizzò un prisma per diffrangere un fascio di luce solare su di un muro. Egli si accorse che, oltre ai già noti colori dell'arcobaleno, era possibile osservare molte righe scure. Misurò con precisione la lunghezza d'onda di ogni riga e le ordinò in base alla loro intensità. Catalogò 570 righe che sono note ancora oggi come *linee di Fraunhofer*. Ripetendo l'esperimento con della luce proveniente da Betelgeuse, egli si accorse che lo spettro osservato era molto differente da quello solare per cui suppose, correttamente, che queste righe fossero in qualche modo correlate con la composizione chimica delle stelle. Questo fu confermato a metà dello stesso secolo con gli esperimenti di Kirchhoff e Bunsen che studiarono la luce emessa da alcuni metalli durante il loro bruciamento. I due scienziati si accorsero che in certi casi la lunghezza d'onda della luce emessa combaciava perfettamente con le linee di Fraunhofer. Questo provò che le righe osservate dal fisico tedesco erano una diretta conseguenza della composizione atomica del Sole. La comprensione della formazione di queste righe spettrali arrivò nel XX secolo con la meccanica quantistica. In questo elaborato verranno affrontati i meccanismi alla base della formazione delle righe spettrali, cosa provoca lo spostamento (shift) delle lunghezze d'onda, cosa impedisce ad esse di essere infinitamente sottili (allargamento) e infine verrà analizzata nello specifico la riga a 21 *cm* dell'idrogeno neutro.

Indice

1	Introduzione	1
2	Formazione delle righe spettrali	2
2.1	Modello atomico di Bohr	2
2.2	Transizioni	3
2.2.1	Tipi di transizioni e coefficienti di Einstein	3
2.2.2	<i>Relazioni di Einstein</i>	4
2.3	Transizioni radiative e regole di selezione	4
2.3.1	Numeri quantici	4
2.3.2	Transizioni di dipolo elettrico	5
2.3.3	Regole di selezione per il dipolo elettrico	5
2.3.4	Regole di selezione per il quadrupolo elettrico	5
2.3.5	Regole di selezione per il dipolo magnetico	6
2.4	Legge di Kirchhoff generalizzata	6
2.4.1	Casi interessanti	7
2.5	Transizioni collisionali	7
2.5.1	Densità critica	8
2.6	Cenni sulle transizioni molecolari	8
3	Shift e allargamento delle righe spettrali	9
3.1	Shift delle righe spettrali	9
3.1.1	Effetto Doppler	9
3.1.2	Alcune applicazioni astrofisiche del Doppler shift	10
3.2	Allargamento delle righe spettrali	10
3.2.1	Allargamento naturale o di Lorentz	10
3.2.2	Allargamento collisionale	11
3.2.3	Allargamento Doppler	11
3.2.4	Profilo di Voigt e curva di crescita	12
4	La riga di HI	14
4.1	L'importanza della riga a 21 cm	14

Capitolo 1

Introduzione

Le informazioni che abbiamo degli oggetti astronomici oltre il nostro sistema solare, derivano essenzialmente dallo studio della radiazione elettromagnetica che giunge a noi. Graficando l'intensità della radiazione incidente rispetto alla lunghezza d'onda, λ (o alla frequenza ν), si ottiene lo spettro della sorgente che ha emesso questa radiazione. Dallo studio degli spettri (spettroscopia) e delle righe spettrali, possiamo ricavare dati fondamentali che forniscono indicazioni su:

- La composizione dell'oggetto osservato; conoscendo a quale atomo, ione o molecola, corrisponde una data transizione.
- Il moto relativo di una sorgente rispetto all'osservatore; grazie all'effetto Doppler.
- La temperatura e la densità di una regione; poichè ad ogni riga corrisponde una transizione da precisi livelli energetici.
- L'abbondanza di una specie atomica; in quanto l'intensità di una riga spettrale è collegata al numero di atomi che la producono.
- La pressione e la densità; che possono essere determinate dall'allargamento collisionale.
- I campi magnetici; che possono essere osservati tramite lo *splitting* di una riga spettrale in più componenti.

Lo studio delle righe spettrali è di fondamentale importanza in molti ambiti dell'astrofisica, dalla composizione stellare al redshift cosmologico, fino alla curva di rotazione delle galassie. In questo elaborato, inizialmente verrà discussa la formazione delle righe spettrali, i tipi di transizioni, l'equilibrio termico e le leggi che lo governano. Nel capitolo successivo, verrà introdotto il concetto di *Doppler shift* e le relative cause e successivamente verranno affrontati i tipi di allargamento delle righe spettrali. Infine vi sarà un breve excursus sulla riga a 21 *cm* dell'idrogeno neutro. La piena comprensione di questi argomenti, richiederebbe uno studio approfondito di meccanica quantistica, fisica nucleare, fluidodinamica e altri campi della fisica, indi per cui questo breve trattato non può essere esauriente ma mira a dare una conoscenza basilare sulle caratteristiche più importanti delle righe spettrali.

Capitolo 2

Formazione delle righe spettrali

2.1 Modello atomico di Bohr

Nel 1885 il matematico svizzero Johann J. Balmer, osservando l'emissione di un gas di idrogeno, opportunamente scaldato, si accorse che alcune righe spettrali avevano frequenze date dalla formula: $\nu_n = cR \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$ con $n = 3, 4, 5, \dots$ e R chiamata costante di Rydberg con un valore di $R = 109677,576 \text{ cm}^{-1}$. Successivamente vennero osservate altre sequenze di righe spettrali dell'idrogeno che vennero riassunte nella formula empirica di Rydberg-Ritz:

$$\nu_{m,n} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad n = m + 1, m + 2, m + 3, \dots \quad (2.1)$$

Un'interpretazione fisica di questi processi fu proposta nel 1913 dal fisico danese Niels Bohr che per giustificare la stabilità atomica del modello planetario di Rutherford, adottò una serie di ipotesi:

- Un atomo ha un insieme discreto di stati stazionari con energia E_1, E_2, E_3, \dots
- L'emissione e l'assorbimento di radiazione per un atomo non avviene in forma continua, secondo l'elettrodinamica classica, ma solo quando l'elettrone passa da un'orbita stazionaria ad un'altra.
- Nel passaggio da un'orbita stazionaria E_m ad un'altra E_n un elettrone emette o assorbe un fotone di energia $h\nu = |E_m - E_n|$
- Un elettrone in uno stato stazionario descrive un'orbita circolare governata dalle leggi della meccanica classica, che però non sono valide nelle transizioni da uno stato stazionario ad un altro.
- Le orbite stazionarie vengono determinate dalla condizione che il modulo del momento angolare orbitale $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ dell'elettrone sia quantizzato, cioè sia un multiplo intero di \hbar : $|\mathbf{l}| = n\hbar$

Si può ricavare una formula per i livelli energetici delle varie orbite che risulta essere:

$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$. L'energia per ionizzare un atomo di idrogeno, cioè "strappare" l'elettrone all'attrazione del protone, è: $E_{ion} = E_\infty - E_1 = 13.59 \text{ eV}$ che risulta essere in perfetto accordo con i dati sperimentali.

2.2 Transizioni

Quando si osserva una riga spettrale, questa può essere causata da transizioni atomiche o molecolari. Una transizione atomica avviene quando un elettrone (e^-) passa da un livello energetico ad un altro, emettendo o assorbendo un fotone di energia $h\nu$ pari alla differenza energetica dei due livelli. Questo processo può avvenire per via radiativa o collisionale.

2.2.1 Tipi di transizioni e coefficienti di Einstein

Le transizioni radiative si suddividono in tre tipi:

- Emissione spontanea; un e^- passa da uno stato eccitato *upper* (U) a uno con energia più bassa *lower* (L) emettendo un fotone di energia: $E_{UL} = h\nu_{UL}$, producendo una riga spettrale in emissione.
- Assorbimento; un fotone di energia $E_{LU} = E_{UL} = h\nu_{LU}$ viene assorbito da un e^- in uno stato L, questo porta l'elettrone in uno stato eccitato U.
- Emissione stimolata; un fotone avente energia pari alla differenza tra i due livelli energetici stimola un e^- in uno stato U a spostarsi verso uno stato L emettendo contemporaneamente un fotone della stessa energia.

Per ogni tipo di transizione esiste un coefficiente correlato con la probabilità di transizione per unità di tempo di quel determinato processo. Questi coefficienti si chiamano **coefficienti di Einstein**. Presi due livelli energetici U e L, i coefficienti di Einstein A e B sono così definiti:

- Emissione spontanea; A_{UL} è la probabilità di transizione per unità di tempo per andare da un livello U a uno L con l'emissione di un fotone, misurata in s^{-1} ; inoltre, il tempo di vita medio dello stato eccitato è definito come:
$$\tau = \frac{1}{A_{UL}}$$
- Assorbimento; $B_{LU}\bar{J}$ è la probabilità di transizione per unità di tempo per andare da un livello L a uno U attraverso l'assorbimento di un fotone.
- Emissione stimolata; $B_{UL}\bar{J}$ è la probabilità di transizione per unità di tempo per andare da uno stato U a uno L con l'emissione di un fotone indotto dalla radiazione incidente.

È importante notare che per l'assorbimento e l'emissione stimolata, la probabilità di transizione non è semplicemente il coefficiente di Einstein B ma è necessario introdurre \bar{J} che rappresenta la densità di fotoni con frequenza ν_{UL} tali che la loro energia associata sia pari alla differenza di energia tra i livelli U e L .

La differenza tra due livelli energetici non è infinitamente sottile ma è descritta dalla **Line Profile Function** $\Phi(\nu)$ che ha un picco alla frequenza ν_{UL} . Essa rappresenta la probabilità che i fotoni con frequenze $\nu \simeq \nu_{UL}$ possano causare transizioni. Essendo una probabilità, essa deve rispettare la seguente relazione: $\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1$. Se si introduce la distribuzione spettrale dei fotoni J_ν allora $\bar{J} \equiv \int_0^\infty J_\nu \Phi(\nu) d\nu$. Inoltre, è possibile osservare che se J_ν varia lentamente al variare di ν , la LPF agisce come una δ di Dirac

2.2.2 Relazioni di Einstein

All'equilibrio termodinamico, presi due livelli energetici 1 e 2 ($E_1 < E_2$), il numero di transizioni per unità di tempo e di volume dallo stato 2 deve essere uguale al numero di transizioni verso lo stato 1. Dette n_1 e n_2 le densità numeriche degli atomi nei rispettivi livelli, si ottiene: $n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J}$.

Se si risolve per \bar{J} e tenendo conto del fatto che all'equilibrio termodinamico, il rapporto fra le densità numeriche è dato dalla legge di Boltzmann: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu_{12}}{kT}}$ (dove g_1 e g_2 sono detti pesi statistici); è possibile ricavare la seguente equazione:

$$\bar{J} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\left(\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}}\right) e^{(h\nu_{12}/kT)} - 1} \quad (2.2)$$

Essendo all'equilibrio termodinamico, è possibile dimostrare che questa equazione per \bar{J} deve essere uguale alla legge di Planck per la radiazione di corpo nero. Affinchè queste due equazioni siano uguali, i coefficienti di Einstein devono rispettare le seguenti relazioni, chiamate **relazioni di Einstein**:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}$$

Queste relazioni sono estensioni della legge di Kirchoff ($j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$). Le relazioni di Einstein connettono processi microscopici con l'assorbimento e emissione, come si vedrà nel paragrafo 2.4.

2.3 Transizioni radiative e regole di selezione

La probabilità di una data transizione radiativa determina una suddivisione fra le righe spettrali in: *permesse*, *(semi-)proibite* e *proibite*. Prima di affrontare i vari tipi di transizione è necessario introdurre i numeri quantici.

2.3.1 Numeri quantici

In meccanica quantistica, un sistema è caratterizzato dai **numeri quantici**, i cui principali sono:

- $n(= 1, 2, 3, 4...)$: numero quantico principale; definisce l'energia di un dato livello e dipende solo dalla distanza fra l'elettrone e il nucleo.
- $l(= 0, 1, 2, \dots, n - 1)$: numero quantico azimutale; è legato al momento angolare orbitale e definisce la forma dell'orbitale.
- $m(= -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l)$: numero quantico magnetico; è legato alla terza componente del momento angolare orbitale e definisce il numero di orientazioni possibili di un dato orbitale in caso di campi magnetici.
- $s(= \pm \frac{1}{2})$: numero quantico di spin: è legato a strutture ancora più piccole dell'atomo (come gli elettroni) ed è legato al momento di dipolo magnetico di spin.

Per la trattazione che segue, è utile distinguere i vari momenti angolari presenti in meccanica quantistica:

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$: momento angolare orbitale.
- \vec{S} : momento angolare di spin.
- $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$: momento angolare totale.

2.3.2 Transizioni di dipolo elettrico

Le onde elettromagnetiche sono irradiate alla stessa frequenza di una carica oscillante, il cui termine di dipolo è: $d(t) = qx_0 \cos(\omega t)$. Utilizzando il formalismo della meccanica quantistica, il dipolo nucleo-elettrone, per una generica transizione da uno stato U a uno L, in 3D, può essere scritto come segue:

$$\vec{d}^{UL}(t) = e^- \cdot \vec{R}^{UL}(t) \exp(-2\pi i(E_U - E_L)/h) \quad (2.3)$$

con $\vec{R}^{UL} = \int \vec{r} \psi_U \psi_L^* d\tau$. La potenza emessa durante la transizione di dipolo è data dalla formula di Larmor: $P(t) = \frac{2\dot{d}(t)^2}{c^3}$. Se si esegue la media rispetto al tempo di questa quantità, essa dovrà essere proporzionale al numero di transizioni per unità di tempo moltiplicato per la differenza di energia dei due livelli: $A_{UL} \cdot h\nu_{UL}$. Eguagliando queste due quantità, in 3D, si ottiene la seguente espressione per il coefficiente di Einstein A_{UL} :

$$A_{UL} = \frac{64\pi^4 \nu^3}{3hc^3} |\vec{d}^{UL}|^2 \quad (2.4)$$

2.3.3 Regole di selezione per il dipolo elettrico

Le righe permesse soddisfano le regole di selezione per il dipolo elettrico. Queste regole di selezione derivano da alcune restrizioni sulle armoniche sferiche nel caso di approssimazione di dipolo, in meccanica quantistica. Le transizioni che non soddisfano queste regole di selezione sono possibili come transizioni di quadrupolo che affronteremo in seguito. Le regole di selezione per il dipolo elettrico sono le seguenti:

- $\Delta n \neq 0$ arbitrario;
- $\Delta l = \pm 1$ cambio della parità;
- $\Delta L = 0, \pm 1$ con L che non può rimanere 0 durante la transizione;
- $\Delta S = 0$;
- $\Delta J = 0, \pm 1$ anche J non può restare 0 durante la transizione.

2.3.4 Regole di selezione per il quadrupolo elettrico

Quando almeno una delle regole di selezione per il dipolo elettrico è violata, il termine cosiddetto di quadrupolo potrebbe non essere nullo. Queste transizioni sono dette (semi-)proibite poichè hanno probabilità di transizione A_{UL} molto inferiore rispetto al caso del dipolo ($\frac{A_{Quadrupolo}}{A_{Dipolo}} \approx 3 \cdot 10^{-8}$) ma possono essere comunque rilevanti. Le regole di selezione per il quadrupolo elettrico sono le seguenti:

- Δn arbitrario;
- $\Delta l = 0, \pm 2$ non c'è cambio della parità;

- $\Delta L = 0, \pm 1, \pm 2$ con L che non può rimanere 0 durante la transizione;
- $\Delta S = 0$;
- $\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$ anche J non può restare 0 durante la transizione.

2.3.5 Regole di selezione per il dipolo magnetico

Quando anche le regole di selezione per il quadrupolo elettrico sono violate, può essere considerato il termine di dipolo magnetico che si riferisce alle transizioni delle strutture iperfini dell'atomo. Queste transizioni, dette proibite, hanno A_{UL} molto inferiore rispetto al caso del quadrupolo ($\frac{A_{DipoloMagnetico}}{A_{Quadrupolo}} \approx 5 \cdot 10^{-5}$) ma sono estremamente rilevanti in astrofisica, poichè la variazione dello spin dell'elettrone nell'atomo di idrogeno è ciò che causa la riga a 21 cm che verrà affrontata in dettaglio nell'ultimo capitolo. Le regole di selezione per il dipolo magnetico sono le seguenti:

- $\Delta n = 0$;
- $\Delta l = 0$;
- $\Delta L = 0$;
- $\Delta S = 0, \pm 1$;
- $\Delta J = 0, \pm 1$ con J che non può restare 0 durante la transizione.

2.4 Legge di Kirchhoff generalizzata

Esiste una relazione tra i coefficienti di Einstein e i coefficienti di assorbimento ed emissione, introdotti con la legge di Kirchhoff. Se si assume che l'emissione è distribuita con la stessa LPF dell'assorbimento (assunzione che risulta essere spesso corretta in astrofisica), è possibile ricavare la relazione che lega il coefficiente di emissione al coefficiente di Einstein A: $j_\nu = \frac{h\nu_{UL}}{4\pi} n_2 A_{21} \Phi(\nu)$.

Per quanto concerne il coefficiente di assorbimento, è necessario calcolare l'energia totale assorbita per unità di tempo e di volume e, attraverso pochi passaggi algebrici, è possibile ricavare la relazione che lega il coefficiente di assorbimento al coefficiente di Einstein B: $\alpha_\nu = \frac{h\nu_{UL}}{4\pi} n_1 B_{12} \Phi(\nu)$. In realtà, a questa formula è necessario aggiungere il contributo dell'emissione stimolata che in questa trattazione può essere considerata come un *assorbimento negativo*. Per cui la formula corretta per il coefficiente di assorbimento è: $\alpha_\nu = \frac{h\nu_{UL}}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \Phi(\nu)$

Grazie a queste definizioni, è possibile scrivere l'equazione del trasporto radiativo in termini dei coefficienti di Einstein:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu = \frac{h\nu_{UL}}{4\pi} n_2 A_{21} \Phi(\nu) - \frac{h\nu_{UL}}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \Phi(\nu) I_\nu \quad (2.5)$$

Usando le *relazioni di Einstein* e ricordando che la funzione sorgente S_ν può essere ottenuta con il rapporto tra il coefficiente di emissione e quello di assorbimento, è possibile ricavare una **legge di Kirchhoff generalizzata**:

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1} \quad (2.6)$$

2.4.1 Casi interessanti

Questa legge può essere utilizzata per analizzare l'emissione in astrofisica da parte di una sorgente termica, non termica e un cosiddetto MASER.

- **Emissione termica (LTE)** : Se la materia è in equilibrio termico con se stessa, ovvero se la temperatura all'interno della sorgente è spazialmente uniforme e temporalmente costante, è noto che il rapporto tra le popolazioni dei due stati è dato dalla legge di Boltzmann: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$. In questo caso la materia è detta essere in *equilibrio termodinamico locale (LTE)* e la funzione sorgente risulta essere uguale alla brillantezza di corpo nero:

$$S_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2.7)$$

- **Emissione non termica** : Questa emissione tratta tutti gli altri casi in cui la legge di Boltzmann non è più valida. Per un plasma, per esempio, questa emissione avviene quando le particelle che irradiano non hanno una distribuzione di velocità di tipo *Maxwelliano* o se le popolazioni non hanno una distribuzione di Maxwell-Boltzmann : $f(v)dv \simeq v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$. Questo è il caso dell'emissione di **sincrotrone** o di **Inverse Compton**
- **Inversione di popolazione (Maser)** : Dalla legge di Boltzmann, è possibile dimostrare che, all'equilibrio termico vale la relazione : $\frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}$. In questo caso si parla di *popolazioni normali*. In particolari condizioni anomale, è possibile avere più atomi nello stato eccitato e si parla perciò di *popolazioni invertite*: $\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}$. Questo crea un effetto per cui l'intensità della radiazione aumenta lungo il raggio. Questo fenomeno si dice **MASER** (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) o **LASER** se si verifica nella banda ottica.

2.5 Transizioni collisionali

Le interazioni meccaniche tra le particelle possono alterare lo stato energetico degli elettroni legati. Da un'analisi del bilancio energetico, si può osservare che una parte dell'energia in un urto elastico tra particelle, viene utilizzata per eccitare gli elettroni che poi si diseccitano emettendo un fotone. Si può definire una sezione d'urto (σ_{UL}) che dipende dalla velocità relativa delle particelle (v), dal potenziale elettrostatico e dalla densità di particelle dei partner collisionali (N_p): $\sigma_{UL}(E) = \left(\frac{h^2}{8\pi m_e E}\right) \cdot \left(\frac{\Omega_{UL}}{g_U}\right)$ Dove E è l'energia dell'elettrone, che dipende da v e Ω_{UL} è chiamata *forza/efficienza collisionale*. Nel caso della diseccitazione collisionale le formule sono identiche con i pedici U ed L invertiti. L'efficienza collisionale è definita così:

$$\Omega_{UL} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}E_{UL}} g(l, Z) f_{ij}(Z) G(T) \quad (2.8)$$

Dove la funzione $g(l, Z)$ dipende dalla configurazione elettronica, la funzione $f_{ij}(Z)$ dipende dalla geometria e $G(T)$ è il *fattore di Gaunt* che dipende debolmente dalla temperatura. Per una data energia, il numero totale di collisioni per unità di

tempo e di volume, è : $C(E) = N_p v \sigma_E$. All'equilibrio termodinamico, bisogna considerare la distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann, per cui è necessario cambiare l'espressione di $\sigma(E)$ in $\sigma(v)$. Si possono quindi definire i **rate di eccitazione/diseccitazione collisionale** Q_{UL}/Q_{LU} così: $Q_{UL} = \langle v \cdot \sigma_{UL}(v) \rangle = \langle v \rangle \cdot \langle \sigma \rangle$. All'equilibrio termico, dove le eccitazioni bilanciano le diseccitazioni, considerando come partner collisionali gli elettroni liberi (i partner collisionali più comuni), è possibile ricavare la seguente formula per i rate:

$$Q_{LU} = \frac{h^2}{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Omega_{LU}}{g_L} = 8.63 \times 10^{-6} \frac{\Omega_{LU}}{T^{\frac{1}{2}} g_L} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \quad (2.9)$$

Questa formula varia se consideriamo partner collisionali differenti come HI o H_2

2.5.1 Densità critica

Utilizzando l'equilibrio statistico dettagliato e considerando il caso più semplice di un atomo con due livelli energetici $U = 2; L = 1$, è possibile osservare che esiste un rapporto fra le transizioni radiative e collisionali che è strettamente legato al LTE:

$$\frac{A_{21}}{N_p Q_{21}} \quad (2.10)$$

Attraverso alcune considerazioni, è possibile notare che nel caso in cui le transizioni radiative siano trascurabili (ovvero se $N_p Q_{21} \gg A_{21}$), per cui dominano le collisioni, il sistema è in equilibrio termodinamico locale. Nel caso di transizioni proibite, il contributo della densità dei partner collisionali è di estrema importanza per stabilire se un sistema si trova in LTE o no. Proprio per questa motivazione, è stato introdotto il concetto di **densità critica**, che è la densità per cui il rapporto tra transizioni radiative e collisionali è 1:

$$N_e^{cr} = \frac{A_{21}}{Q_{21}} \text{ tale che } \frac{A_{21}}{N_e^{cr} Q_{21}} = 1 \quad (2.11)$$

2.6 Cenni sulle transizioni molecolari

Oltre che dalle transizioni atomiche, le righe spettrali possono essere generate anche dalle molecole. Le molecole hanno una struttura tridimensionale, capace di oscillare intorno a una distanza di equilibrio e, inoltre, possono cambiare il loro asse di rotazione o la loro velocità, muovendosi attraverso i vari livelli energetici. Esistono tre tipi di transizioni molecolari:

- **Elettroniche**; gli e^- possono variare il loro livello energetico.
- **Vibrazionali**; Le molecole possono variare il loro numero quantico vibrazionale v . I livelli energetici possono essere valutati attraverso il *potenziale di Morse*. La differenza di energia dei livelli diminuisce all'aumentare di v .
- **Rotazionali**; I livelli delle energie rotazionali sono all'interno di quelli vibrazionali ed esprimono la velocità con cui una molecola ruota intorno al centro di massa.

Capitolo 3

Shift e allargamento delle righe spettrali

3.1 Shift delle righe spettrali

Lo shift delle righe spettrali è un fenomeno che si verifica quando una determinata riga ha un valore della lunghezza d'onda o della frequenza diverso da quello osservato in laboratorio. Questo è dovuto ad un effetto fisico chiamato effetto Doppler.

3.1.1 Effetto Doppler

L'effetto Doppler si verifica quando una sorgente di suoni o di luce ed un osservatore hanno un moto relativo di avvicinamento o di allontanamento lungo la congiungente fra i due. Esso si manifesta con un cambiamento apparente della frequenza o della lunghezza d'onda del segnale percepito dall'osservatore. La formula che lega la velocità della sorgente o dell'osservatore alla lunghezza d'onda è:

$$\pm \frac{v}{c} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (3.1)$$

Dove $\Delta\lambda$ è la differenza fra la lunghezza d'onda osservata e quella a riposo e il segno dipende dalla direzione della velocità della sorgente rispetto all'osservatore ed è, per convenzione, positivo se la sorgente si allontana e negativo se si avvicina. Nel caso della luce, l'effetto Doppler si manifesta con una variazione della frequenza (o della lunghezza d'onda) verso il rosso (redshift) o verso il blu (blueshift) nella zona del visibile dello spettro elettromagnetico. Il redshift si ha quando l'osservatore e la sorgente di luce si allontanano l'uno rispetto all'altra per cui la radiazione viene ricevuta con una frequenza più bassa (lunghezza d'onda più alta) di quella avuta all'istante della emissione. Il blueshift si ha invece quando l'osservatore e la sorgente di luce si avvicinano l'uno rispetto all'altra. Questa formulazione è corretta solo nel caso in cui la velocità della sorgente sia non relativistica (ovvero $v \ll c$). Se $v \simeq c$, per effetti di relatività ristretta, la (3.1) si modifica nel seguente modo: $\frac{\lambda_{oss}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}}$ con $\beta = \frac{v}{c}$.

3.1.2 Alcune applicazioni astrofisiche del Doppler shift

L'effetto Doppler della luce, è molto importante in astrofisica e soprattutto in spettroscopia, poichè dà ulteriori informazioni sulle sorgenti che hanno emesso la radiazione. Nel 1929, Edwin Hubble, studiando le velocità di recessione di migliaia di oggetti celesti, attraverso il *Doppler shift*, notò che oggetti più distanti si allontanano da noi con velocità maggiore. Questo lo portò alla stesura della famosa formula di Hubble: $V_r = H_0 D$ con V_r = velocità di recessione; $H_0 \simeq 70 \frac{km}{s \cdot Mpc}$ = Costante di Hubble e D = Distanza della sorgente. In cosmologia, vi è una variabile z , denominata *redshift cosmologico*, che è definita a partire dall'effetto Doppler: $\frac{v}{c} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = z$. Combinando questa equazione proprio con la legge di Hubble, si possono ottenere delle relazioni fondamentali che sono alla base dello studio dell'evoluzione dell'universo. Un'ulteriore applicazione dell'effetto Doppler si trova nello studio delle cosiddette binarie spettroscopiche. Questo sistema stellare è caratterizzato da due stelle che ruotano intorno al loro centro di massa. Dall'osservazione dello spettro di questo sistema si nota uno spostamento periodico delle righe spettrali che suggerisce quindi un sistema di stelle binarie, come illustrato in Fig (3.1). Lo stesso processo è utilizzato per la ricerca di pianeti extrasolari. In questo caso le masse dei due oggetti sono molto differenti.

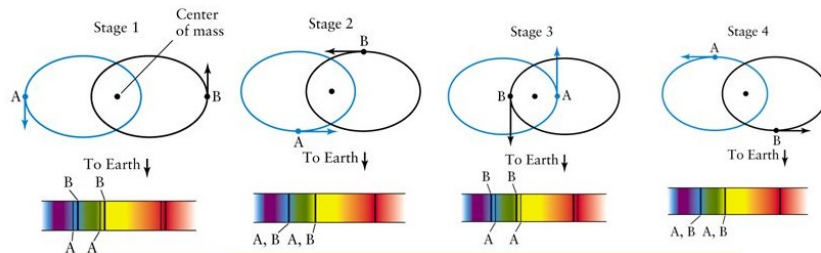


Figura 3.1: Un esempio di un sistema di binarie spettroscopiche.

3.2 Allargamento delle righe spettrali

Come già citato nel paragrafo 2.2.1, la differenza tra due livelli energetici non è infinitamente sottile ma è descritta dalla **Line Profile Function**, pertanto la radiazione emessa in una transizione non è perfettamente monocromatica. Questo è dovuto ad alcuni effetti che provocano un allargamento della riga spettrale.

3.2.1 Allargamento naturale o di Lorentz

Dalla meccanica quantistica è noto che se due osservabili non commutano, non potranno essere determinati simultaneamente ma il prodotto delle loro incertezze dovrà essere maggiore di un dato valore. Questo è noto come *Principio di Heisenberg*. L'energia e il tempo sono due osservabili non commutanti e il prodotto delle loro incertezze deve essere sempre maggiore o uguale a \hbar . Se consideriamo transizioni da un livello Upper a un livello Lower, sappiamo che il tempo di vita medio nello stato

eccitato è: $\Delta t \simeq \frac{1}{A_{UL}}$ e che la differenza di energia tra i due livelli è: $\Delta E = \hbar\Delta\nu$. Per cui dal principio di Heisenberg energia-tempo, risulta che:

$$\Delta E\Delta t \geq \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \Delta E\Delta t = \frac{h\Delta\nu}{A_{UL}} \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta\nu \geq \frac{A_{UL}}{2\pi} \quad (3.2)$$

La minima larghezza permessa è quindi direttamente proporzionale al coefficiente di Einstein A_{UL} . La LPF per questo tipo di allargamento è una Lorentziana data da:

$$\Phi(\nu) = \frac{\frac{\gamma}{4\pi^2}}{(\nu - \nu_0) + \left(\frac{\gamma}{4\pi^2}\right)^2}. \quad \text{Dove } \gamma = \sum_U A_{LU} \text{ è il tasso di decadimento spontaneo da uno stato U.}$$

3.2.2 Allargamento collisionale

Le collisioni fra atomi provocano delle perturbazioni negli orbitali che hanno come effetto quello di produrre un ulteriore allargamento della riga spettrale. Se si definisce n_{coll} la frequenza di collisioni per unità di tempo che un atomo subisce, la LPF per l'allargamento collisionale, è ancora una curva di Lorentz descritta dalla

$$\text{seguinte formula: } \Phi(\nu) = \frac{\frac{\Gamma}{4\pi^2}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}.$$

Con $\Gamma = \gamma + n_{coll}$. Il contributo dell'allargamento collisionale e naturale è spesso indicato come *Damping Profile*.

3.2.3 Allargamento Doppler

L'allargamento Doppler è causato dall'agitazione termica delle particelle all'interno di una sorgente. Queste, essendo in moto rispetto all'osservatore, presentano un redshift o un blueshift, in base alla direzione del loro moto. La velocità radiale, in base alla (3.1) applicata alle frequenze, risulta essere: $v_r = c\frac{\nu_{oss} - \nu_0}{\nu_0}$. La forma dello spettro della riga viene modificata mentre l'energia resta invariata. Se la sorgente è all'equilibrio termodinamico, le velocità delle particelle seguono la **distribuzione**

di Maxwell-Boltzmann: $N(v_r)dv_r \simeq N_0 v_r^2 e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}} dv_r$. Da qui, sapendo che la velocità media è pari a v_r , si può vedere che l'allargamento della riga spettrale dipende dalla radice della temperatura in questo modo: $\Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ con m massa delle particelle. La LPF per l'allargamento Doppler è una gaussiana descritta dalla seguente formula: $\Phi(\nu) = (\Delta\nu\sqrt{\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{(\nu_{oss} - \nu_0)^2}{(\Delta\nu)^2}\right)$. Inoltre, se la sorgente è ferma rispetto all'osservatore, il centroide (ovvero la frequenza *naturale*) resta invariato, se invece la sorgente è in moto, anche il centroide sarà redshiftato (o blueshiftato) e questo causa un'asimmetria nella riga spettrale. Oltre al moto casuale degli atomi, l'allargamento Doppler della riga, può avere il contributo dato alla presenza di moti di gas su larga scala: la turbolenza. La larghezza della riga viene modificata e viene

inserita anche la velocità media di turbolenza v_{turb} : $\Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{turb}^2}$. Questo effetto diventa importante nei profili delle righe di stelle giganti e supergiganti. L'allargamento Doppler può essere causato anche dalla rotazione della sorgente di

radiazione intorno al proprio asse. Infatti una stella, per esempio, che ruota velocemente avrà una riga spettrale più larga rispetto ad una che ruota più lentamente. Questo effetto è dovuto al fatto che la componente radiale della velocità di rotazione, è anch'essa influenzata dall'effetto Doppler. Questo fenomeno è mostrato chiaramente in Fig (3.2).

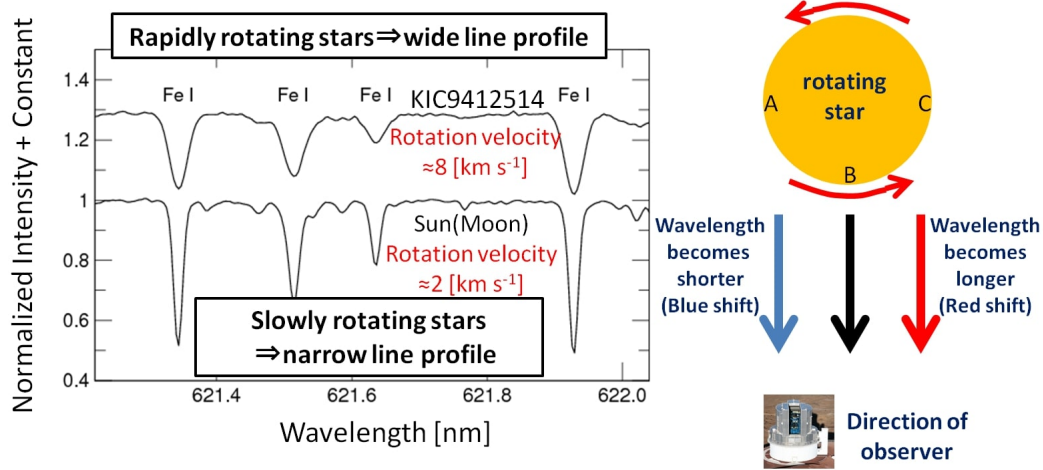


Figura 3.2: Allargamento Doppler della riga spettrale dovuto alla rotazione di una stella intorno al proprio asse.

3.2.4 Profilo di Voigt e curva di crescita

L'intensità di una riga spettrale, può essere misurata attraverso lo studio di una grandezza denominata larghezza equivalente W , così definita: $W = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda$. Dove F_λ e F_c sono i flussi relativi della riga e del continuo. La larghezza equivalente è quindi la larghezza (misurata in Å) di un rettangolo di altezza unitaria con area uguale a quella sottesa dalla riga spettrale rispetto al continuo. La parte centrale della riga spettrale viene chiamata **core** mentre le regioni adiacenti vengono chiamate **wings**. La struttura di una riga è ben illustrata nella Fig (3.3).

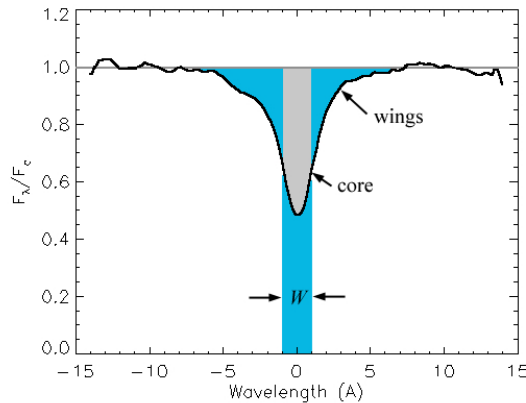


Figura 3.3: Struttura di una riga spettrale.

Esistono altre grandezze che parametrizzano la forma di una riga come per esempio la FWHM(Full Width at Half Maximum) che è la larghezza della riga spettrale misurata nel punto in cui l'intensità della riga è metà dell'intensità totale di quest'ultima: $(\Delta\lambda)_{\frac{1}{2}} = \frac{F_e - F_\lambda}{F_c - F_{\lambda_0}} = \frac{1}{2}$. L'insieme degli allargamenti Doppler e di *damping* costituiscono il profilo di Voigt. L'allargamento Doppler domina nel *core* della riga spettrale mentre il profilo di smorzamento domina nelle ali. Il profilo di Voigt è una combinazione di una Gaussiana e di una Lorentziana come mostrato in Fig (3.4).

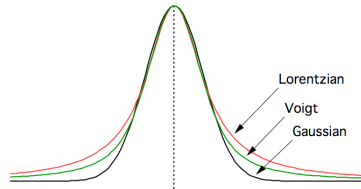


Figura 3.4: Il profilo di Voigt comparato a una gaussiana e ad una lorentziana.

Dallo studio dell'intensità di una riga spettrale è possibile ricavare il numero di atomi in grado di produrre quella data riga (N_a). Maggiore è questo numero, maggiore sarà la larghezza equivalente di una riga e il profilo sarà sempre più profondo (nel caso di riga in assorbimento). Questo andamento è descritto da una relazione funzionale tra la larghezza equivalente W e il numero di atomi assorbenti N_a chiamata **curva di crescita**. All'interno della curva di crescita si possono distinguere tre regimi, evidenziati in Fig (3.5):

1. Regime lineare: $W \propto N_a$ predomina l'allargamento Doppler.
2. Regime piatto (o di saturazione): $W \propto \sqrt{\ln N_a}$ il core è saturo e il contributo delle ali è trascurabile.
3. Regime di smorzamento: $W \propto \sqrt{N_a}$ l'incremento di W è determinato dalle ali, quindi domina l'allargamento collisionale.

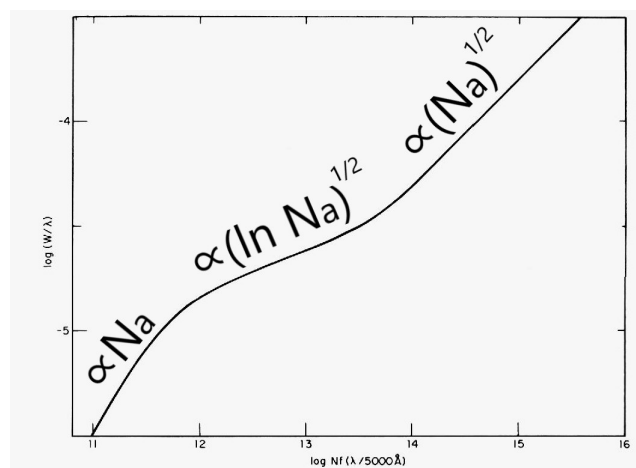


Figura 3.5: Andamento della curva di crescita.

Capitolo 4

La riga di HI

L'idrogeno è l'elemento più presente nell'universo (circa il 70% della materia barionica è composta da H). All'interno del mezzo interstellare (ISM), gli atomi di idrogeno neutro (HI) si trovano in regioni relativamente fredde ($T \leq 10^3 K$) dove la densità elettronica è trascurabile, per cui i partner collisionali sono altri atomi di HI oppure molecole di H_2 . Nel 1944 Hendrik van de Hulst, predisse che HI dovesse emettere ad una lunghezza d'onda specifica nel radio, a causa di una piccola variazione energetica nel livello fondamentale. Infatti il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno ($n = 1, l = 0, m = 0, s = 1/2, J = 1/2$) ha due configurazioni date dall'orientamento dello spin dell'elettrone rispetto a quello del protone. Il momento angolare dell'elettrone J , sommato vettorialmente al momento angolare del nucleo I , porta al momento angolare totale del sistema F . Nello stato in cui gli spin sono paralleli $F = 1$, mentre nel caso di spin antiparalleli $F = 0$. I pesi statistici dei due stati sono dati dalla formula: $g = 2F + 1$, da cui è facile ricavare che lo stato con energia maggiore (spin paralleli) è degenero e il rapporto tra i due livelli è $g_2 : g_1 = 3 : 1$. La differenza tra i due livelli iperfini è $\Delta E = h\nu = 5.9 \times 10^{-6}$ corrispondente a una frequenza $\nu = 1420.8 MHz$ e ad una lunghezza d'onda $\lambda = 21.1 cm$. Questa transizione è proibita in quanto $A_{21} = 2.9 \times 10^{-15} s^{-1} \Rightarrow t_{rad} = 10^7$, mentre il rate di diseccitazione collisionale è: $Q_{21} \simeq 10^{-10} cm^{-3} s^{-1}$. Questo implica una densità critica molto bassa ($N_p^{cr} \simeq 3 \times 10^{-5} cm^{-3}$), per cui le collisioni riescono a mantenere questa transizione in LTE anche nelle zone più esterne di una galassia a spirale. Essendo in LTE, è possibile calcolare il rapporto tra le popolazioni dei due livelli iperfini attraverso la legge di Boltzmann da cui si ricava che 3/4 di HI si trovano nello stato eccitato. Nonostante la transizione sia proibita, in ambiente astrofisico, è osservabile per l'alta densità di idrogeno neutro presente nei dischi delle galassie a spirale e nelle nubi di HI.

4.1 L'importanza della riga a 21 cm

Questa riga spettrale è probabilmente la singola riga più famosa dell'astronomia ed ha dato contributi fondamentali in molti ambiti. Avendo questa lunghezza d'onda, la riga di HI non viene assorbita dalla polvere interstellare come invece succede alle righe emesse, per esempio, nell'ottico. In cosmologia, la riga di HI ha permesso di ricavare informazioni importanti sulla teoria del Big Bang, in particolare nello studio delle *dark ages* fra i periodi della ricombinazione e della reionizzazione. Nell'ambito

della ricerca di forme di vita intelligenti nell'universo, questa riga viene utilizzata per mandare e/o ricevere segnali radio dato che non viene assorbita dalla polvere. Il famoso *segnale WOW* rilevato nel 1977 da Jerry R. Ehman durante il programma SETI (Search for Extra-Terrestrial Intelligence) aveva una frequenza di circa 1420MHz , la stessa della riga di HI. Infine, grazie allo studio della riga dell'idrogeno neutro nelle galassie a spirale, è stato possibile provare l'esistenza della *materia oscura*. Infatti dall'allargamento Doppler della riga a 21cm è possibile ricavare la velocità di rotazione della galassia. Da questi studi, è stato scoperto che le galassie a spirale sono dei dischi molto sottili circondati da una nube di gas enormemente grande. La curva di rotazione di questo gas resta piatta per distanze molto grandi dal centro e questo è spiegabile solo teorizzando l'esistenza della materia oscura, come mostrato in Fig (4.1).

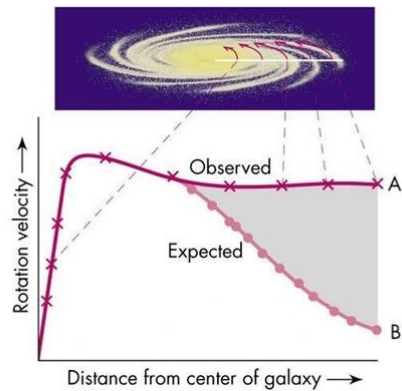


Figura 4.1: *Confronto tra la curva di rotazione di una galassia a spirale attesa e osservata*

Bibliografia

Cimatti A., 2016-2017, *Dispense del corso di astronomia*

Ciotti L., 2019, *Appunti di astrofisica extragalattica*

Condon J., 2016, *Essential radio astronomy*, The National Radio Astronomy Observatory (NRAO) : <https://science.nrao.edu/opportunities/courses/era/>

Dallacasa D., 2018-2019, *Dispense del corso di processi di radiazione e MHD*

Ferraro F. R., 2018-2019, *Dispense del corso di astrofisica stellare*

Karttunen H., Kroger P., 2017, *Fundamental Astronomy*

Ravanini F., 2017, *Dispense del corso di istituzioni di fisica teorica*

Rybicki G., Lightman A., 2005, *Radiative processes in astrophysics*

Tennyson J., 2005, *Astronomical Spectroscopy*