

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Effetti del campo
gravitazionale sulla
Condensazione di Bose

Relatore:
Prof. Loris Ferrari

Presentata da:
Fabrizio Pavan

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Lo scopo delle tesi è quello di stimare e quantificare gli effetti della gravità sulla BEC, confrontando i risultati delle equazioni con le stime effettuate usando il Limite del Continuo. Nonostante sia rigorosamente impossibile avere una Condensazione di Bose in tre dimensioni in presenza di gravità, si utilizzerà il Limite del Continuo per calcolare le grandezze fisiche fondamentali che descrivono la Condensazione di Bose-Einstein (densità degli stati, temperatura critica fittizia e potenziale chimico). Si effettuerà poi un confronto tra Limite del Continuo e equazioni esatte, per verificare la loro compatibilità, elencando gli effetti del campo gravitazionale sul potenziale chimico.

Indice

Introduzione	2
1 Impossibilità di realizzare una BEC in presenza di gravità	5
1.1 Limite del Continuo	5
1.2 Condensato di bosoni non interagenti	7
1.3 Gas di bosoni nel campo gravitazionale	9
1.4 Il problema della densità degli stati	12
2 Limite del Continuo in presenza di gravità	14
2.1 Condizioni di validità del Limite del Continuo	14
2.2 Densità degli Stati	15
2.3 Temperatura di Condensazione e Temperatura Critica (fittizia) T_f dovuta alla gravità	17
2.4 Andamento del potenziale chimico μ vicino alle temperature critiche	18
3 Stima del potenziale chimico μ alla temperatura critica (fittizia) T_f	20
3.1 Espressione generale del potenziale chimico	20
3.2 Sviluppo in serie della funzione $F(\lambda, \xi)$	23
3.3 Equazione trascendente in $\lambda = \beta_f \Delta\mu$	24
4 Andamento del potenziale chimico in presenza della gravità	27
4.1 Confronto tra μ reale e il limite del continuo vicino alla T_f	27
4.2 Andamento globale del potenziale chimico μ	29
Conclusioni	31

Introduzione

Negli ultimi venti anni del XX secolo un progresso straordinario nel campo della fisica delle basse temperature è stato reso possibile dallo sviluppo di metodi che impiegano il laser per raffreddare gas di atomi sino alle temperature più basse mai raggiunte: pochi milionesimi di grado Kelvin. Questo ha consentito misure sempre più precise e ha aperto la via a ulteriori progressi, culminati con la realizzazione sperimentale della condensazione di Bose-Einstein.

La condensazione di Bose-Einstein è un fenomeno puramente quantistico previsto già nel 1924, e conseguenza della natura ondulatoria delle particelle. Le particelle di un gas si possono immaginare come 'pacchetti' la cui estensione è data dalla lunghezza d'onda di de Broglie.

Alla temperatura ambiente, la lunghezza d'onda di de Broglie è molto piccola ed è poco probabile che due particelle vengano a trovarsi a una distanza minore di tale lunghezza; vale dunque l'approssimazione semi-classica che rende possibile la descrizione del sistema attraverso la meccanica statistica classica. Quando invece la temperatura viene abbassata al livello in cui la lunghezza d'onda di de Broglie diventa confrontabile con la distanza tra le particelle, i pacchetti d'onda iniziano a sovrapporsi e il principio di indistinguibilità della meccanica quantistica assume un ruolo fondamentale, tanto da produrre una degenerazione quantistica.

Si hanno comportamenti diversi a seconda che le particelle abbiano uno spin intero o semi-intero: le particelle con spin intero sono bosoni e il loro comportamento è descritto dalla statistica quantistica di Bose-Einstein; le particelle con spin semi-intero sono invece fermioni e seguono la statistica quantistica di Fermi-Dirac.

Quando la temperatura T di un gas di bosoni scende al di sotto di un valore critico T_B , la maggior parte delle particelle (la totalità nel limite in cui T raggiunge lo zero assoluto) si accumula nello stato di energia più basso del sistema (detto anche stato fondamentale) e il gas subisce quindi una transizione di fase che prende il nome di Condensazione di Bose-Einstein (anche detta BEC, dall'inglese Bose-Einstein Condensation).

L'importanza fondamentale di questa transizione di fase, sta nel poter immaginare, che un singolo stato quantico (o al limite un numero piccolo e limitato di stati quantici) può dare origine a fenomeni macroscopici, per il fatto che in esso è presente un numero enorme di bosoni. Per esempio è abbastanza immediato comprendere che la Condensazione

di Bose può dare luogo ad una forma di *superfluidità* (dopo l'osservazione del comportamento superfluido dell'elio ^4He , London propose nel 1938 che tale fenomeno potesse essere la manifestazione della Condensazione di Bose-Einstein degli atomi di elio).

A differenza di una normale corrente, in cui un campo esterno agisce sulle particelle individualmente, in modo tale che queste si muovano incoerentemente l'una dall'altra, il condensato si comporta come un unico blocco di Bosoni identici, nello stesso stato, che, una volta sollecitato da opportune forze, si muove come un corpo unico. Nel primo caso, ogni particella dissipa singolarmente parte dell'energia acquisita attraverso il campo, mentre il condensato la dissipa soltanto in forma collettiva, il che avviene con probabilità trascurabile. Dunque un condensato, messo in moto, si trasforma in un superfluido che continua muoversi quasi indefinitamente.

Seguirono poi altri esperimenti: nel 1995, il primo condensato gassoso fu prodotto da Eric Cornell e Carl Wieman al laboratorio NIST-JILA dell'Università del Colorado mediante tecniche di raffreddamento a laser usando un gas di rubidio che hanno permesso di portare degli atomi a circa 170 nanokelvin (poi gli stessi Cornell e Wieman, assieme a Wolfgang Ketterle, hanno vinto il Premio Nobel per la fisica nel 2001, grazie al loro studio delle proprietà fondamentali dei condensati).

Attualmente lo studio dei condensati congiunge vasti campi della fisica: la fisica atomica, la fisica dei molti corpi, l'ottica quantistica. Nel novembre del 2010 è stato osservato il primo condensato di Bose-Einstein di fotoni.

E' importante sottolineare che i vari esperimenti con lo scopo di studiare i condensati di Bose-Einstein sono stati tutti realizzati in condizioni che approssimano l'assenza di gravità (tipicamente con laboratori montati su velivoli in caduta libera nel campo di gravità terrestre). Il motivo fondamentale è che la presenza della gravità rende del tutto impossibile la realizzazione della transizione di fase.

Lo scopo principale di questo elaborato consiste nel mostrare che, nonostante in presenza di gravità non si abbia una vera e propria BEC in termini rigorosi, l'effetto della gravità terrestre sui Bosoni è tuttavia sufficientemente piccolo confrontato con l'energia termica a temperature anche bassissime. Il che rende ragionevole utilizzare il Limite del Continuo includendo la gravità e studiare un sistema che ben si avvicina ad un Condensato di Bose-Einstein.

Nel Capitolo 1, discuteremo delle ragioni fisiche che rendono impossibile la realizzazione della transizione di fase in presenza della forza peso, ma esponendo poi le ragioni che rendono del tutto sensato l'utilizzo dell'approssimazione del continuo in presenza della gravità.

Il Capitolo 2 per l'appunto si occuperà del calcolo, nel limite del continuo includendo la forza peso, delle grandezze fisiche che caratterizzano la Condensazione di Bose-Einstein (densità degli stati, temperatura critica fittizia T_f e andamento del potenziale per temperature vicino a quest'ultima).

Nel Capitolo 3 si effettuerà poi il calcolo del potenziale chimico μ alla temperatura critica

in presenza di gravità calcolata nel Capitolo 2. Vedremo come questo valore, sebbene non sia rigorosamente nullo come avviene in una e vera e propria BEC, sia effettivamente piccolissimo e approssimabile a zero, a maggior ragione confrontato con l'energia termica alla temperatura critica $k_B T_f$.

Nel Capitolo 4 si studierà invece le conseguenze che ha la presenza della gravità sull'andamento del potenziale chimico con l'equazione vera, confrontando il tutto con l'approssimazione del continuo.

Capitolo 1

Impossibilità di realizzare una BEC in presenza di gravità

In un corso universitario nel descrivere la condensazione di Bose si considera solitamente un gas di bosoni *liberi*, vale a dire non soggetti ad alcun potenziale, contenuti all'interno di un contenitore di volume V .

Data l'assenza di campi esterni e la presenza di un volume di confinamento, si ha che lo spettro energetico è *totalmente* discreto, composto dagli stati $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_\alpha < \dots$, permessi ai bosoni. Dunque per qualunque coppia di livelli energetici contigui esiste un certo *gap* finito (per un gas di particelle libere il gap diminuisce man mano che si va ad energie maggiori).

Come verificheremo in seguito, la condizione necessaria rappresentata dal fatto che la Densità degli Stati in Energia nel limite del continuo deve tendere a zero abbastanza velocemente per $\epsilon_0 \rightarrow 0$ affinché si abbia la condensazione, non è rispettata in presenza di gravità.

Tuttavia una condizione sufficiente (rispettata anche dalle particelle libere in base quanto detto sopra) per avere una temperatura critica finita e quindi una BEC è che tra il primo livello eccitato ϵ_1 e il livello fondamentale ϵ_0 esista un gap finito. In presenza di gravità tale gap non esiste in generale. Tuttavia vedremo, che in regime di gravità debole, tale gap può essere adeguatamente approssimato. Considerando inoltre che gli stati energetici in presenza di gravità si infittiscono sempre di più al crescere dell'energia, rende del tutto plausibile svolgere il Limite del Continuo per studiare un sistema fisico molto vicino ad un Condensato di Bose canonico.

1.1 Limite del Continuo

Nel limite in cui il volume di confinamento V del sistema diventa arbitrariamente grande, i livelli energetici del sistema tendono ad infittirsi, il che rende praticamente necessaria

un'approssimazione chiamata Limite del Continuo. Essa consiste, sotto la condizione che i livelli energetici siano abbastanza vicini tra di loro, di trasformare tutte le sommatorie che appaiono nelle varie formule in integrali.

$$V \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

$$\epsilon_\alpha \rightarrow \epsilon \quad (1.2)$$

$$g_\alpha \rightarrow g(\epsilon; T, V) d\epsilon \quad (1.3)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \dots \rightarrow \int_0^{\infty} \dots \quad (1.4)$$

La funzione $g(\epsilon; T, V)$ è chiamata Densità degli stati in energia. La quantità differenziale $g(\epsilon; T, V)d\epsilon$ rappresenta dunque il numero di stati quantici che hanno energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$.

Può capitare a volte che lo spettro considerato non subisca il deconfinamento per $V \rightarrow \infty$ (come vedremo per il caso dello spettro dovuto alla gravità).

In generale la condizione di validità del limite del continuo si esprime come:

$$\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll 1 \quad (1.5)$$

dove nella formula precedente, $\beta = 1/k_B T$, con T che rappresenta la temperatura e k_B è la costante di Boltzmann (con $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg K⁻¹). In sostanza si richiede che il salto quantico tra il primo stato eccitato ϵ_1 e lo stato fondamentale ϵ_0 sia molto più piccolo dell'energia termica $k_B T$.

Per quanto riguarda la densità degli stati $g(\epsilon)$, dobbiamo tenere conto che, dati n parametri Lagrangiani (q_1, \dots, q_n) che descrivono lo stato classico, il Principio di Indeterminazione divide lo spazio delle fasi in ipercubi di volumi h^n , dove h è la costante di Planck (dove $h = 6.603 \times 10^{-27}$ erg sec). Senza addentarci troppo nei particolari, è data in generale dall'equazione:

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^n} \frac{d}{d\epsilon} \int_{h(\mathbf{r}, \mathbf{p}) < \epsilon} d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (1.6)$$

che rappresenta la densità degli stati in energia.

Possiamo analizzare un'ultima considerazione sul limite del continuo applicato al gas di bosoni liberi, non soggetti a potenziali, riguardante lo spettro energetico. Dal momento che, in assenza di campi esterni, non ci sono zone privilegiate della regione in cui si muovono i bosoni, l'indeterminazione sulla componente x della posizione risulta semplicemente $\Delta x \approx V^{1/3}$. Dal principio di Heisenberg si avrà allora che la minima indeterminazione sulla componente p_x dell'impulso sarà pari a $\Delta p_x \approx \hbar/V^{1/3}$. In perfetta

analogia, lo stesso ragionamento vale anche per le altre due componenti $\Delta y = \Delta z \approx V^{\frac{1}{3}}$ da cui si avrà che $\Delta p_y = \Delta p_z \approx \hbar/V^{\frac{1}{3}}$.

Ma questo implica che l'energia cinetica, a causa delle fluttuazioni quantistiche delle componenti di \mathbf{p} , non può essere rigorosamente zero, ma dipende dalle fluttuazioni stesse.

Tuttavia per il livello fondamentale ϵ_0 si avrà che:

$$\epsilon_0 \approx \frac{(\Delta \mathbf{p})^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mV^{\frac{2}{3}}}. \quad (1.7)$$

Come si può vedere, il livello fondamentale di una particella libera in un volume V decresce come $V^{-\frac{2}{3}}$. Di conseguenza nel limite del continuo (dove si applica il limite $V \rightarrow \infty$) si può allora porre il livello fondamentale $\epsilon_0 = 0$, considerando l'energia come una variabile continua compresa nell'intervallo $0 \leq \epsilon < \infty$.

1.2 Condensato di bosoni non interagenti

In questa sezione rivedremo i concetti fondamentali della statistica di Bose-Einstein che portano al fenomeno del condensato.

Consideriamo un generico spettro energetico $\epsilon_0 = 0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_\alpha < \dots$ e con g_α che rappresenta la molteplicità dell' α -esimo livello energetico. Abbiamo già accennato che i bosoni sono particelle che possono occupare lo stesso stato quantico in numero arbitrario, quindi nel conteggio delle popolazioni che occupano gli stati dobbiamo considerare anche l'occupazione multipla di un singolo livello energetico. Dunque la popolazione di un generico livello ϵ_α è data dall'espressione:

$$n_\alpha = \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1} \quad (1.8)$$

da cui segue l'equazione di conservazione del numero totale di particelle:

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} - 1} \quad (1.9)$$

dove μ rappresenta il potenziale chimico.

Fissato il numero di bosoni N , la (1.9) rappresenta l'equazione per il potenziale chimico μ . Analizzando la (1.8) e la (1.9), possiamo già trovare le caratteristiche principali del potenziale chimico μ per un gas di bosoni. Osservando la (1.8) per $\alpha = 0$, notiamo che $\mu \leq 0$ (altrimenti si avrebbe l'assurdo risultato che $n_0 < 0$). Inoltre differenziando la (1.9) per T , troviamo anche $\partial\mu/\partial T \leq 0$, cioè μ è una funzione non crescente della

temperatura.

La (1.9) può anche essere messa nella forma:

$$N = n_0(T) \left[1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g_{\alpha}}{g_0} e^{-\beta\epsilon_{\alpha}} \frac{1 - e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_{\alpha})}} \right] \quad (1.10)$$

si vede quindi che $T \rightarrow 0$ si ha $n_0 = N$, che esprime l'ovvio risultato che a $T = 0$, quando l'intero gas raggiunge lo stato di minima energia, tutti i bosoni finiscono nel livello fondamentale (condensato). Questo può essere scritto in forma equivalente: sia

$$\rho(T, \Delta) = \sum_{\epsilon_{\alpha} < \Delta} \frac{n_{\alpha}}{N} \quad (1.11)$$

la frazione di bosoni con energia minore di Δ . Allora in base all'equazione si ha che $\rho(T, \Delta) = 1$ per $T \rightarrow 0$ e per ogni Δ . Eseguire il Limite del Continuo, non modifica ovviamente il risultato.

Supponiamo adesso che il limite del continuo sia fatto *prima* del limite $T \rightarrow 0$, e che ne risulti una densità degli stati:

$$g(\epsilon) = N\widehat{g}(\epsilon) \quad (1.12)$$

Applicando il limite del continuo alle equazioni (1.9) e (1.11) otteniamo:

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\widehat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \rho(T, \Delta) &= \int_0^{\Delta} \frac{\widehat{g}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon \leq \\ &\leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\Delta} \frac{\widehat{g}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \leq k_B T \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\Delta} \frac{\widehat{g}(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon = k_B T \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Delta, \xi) \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove la prima disuguaglianza segue dal fatto che μ è non positivo, la seconda segue dalla relazione $e^x - 1 \geq x$ per $x \geq 0$. Inutile sottolineare che se $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Delta, \xi)$ è infinito, le disuguaglianze precedenti sono soddisfatte senza alcuna condizione.

Se, invece, la funzione $f(\Delta, 0)$ è finita:

$$f(\Delta, 0) = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon < \infty \quad (1.15)$$

allora l'equazione (1.14) da $\lim_{T \rightarrow 0} \rho(T, \Delta) = 0$ e quindi la frazione di bosoni con energia più piccola di *qualunque* valore positivo Δ , risulterebbe zero per $T = 0$, ossia i bosoni sarebbero "spariti" a $T = 0$. Questo assurdo risultato mostra innanzitutto che il limite

del continuo e il limite $T \rightarrow 0$ non sono interscambiabili se $f(\Delta, 0) < \infty$. Per capirne la ragione, basta osservare che l'equazione (1.14) sarebbe perfettamente consistente con il caso discreto, se si assumesse che l'integrale che vi appare rappresentasse il numero di bosoni con energia *strettamente positiva*, escludendo, quindi, il livello fondamentale (in cui per l'appunto sono spariti tutti i bosoni). La conclusione è che sotto la condizione (1.15), il limite del continuo cancella un'informazione cruciale vale a dire, l'esistenza di un livello fondamentale che può ricevere un numero estensivo di bosoni, nonostante la sua molteplicità finita g_0 .

Un'altra importante conseguenza della (1.15) è che la funzione

$$F(\beta) = \int_0^\infty \frac{\widehat{g}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (1.16)$$

assume valori finiti per ogni β reale e positivo: Si vede inoltre che $F(\beta)$ è non crescente e si ha inoltre che $\lim_{\beta \rightarrow 0} F(\beta) = \infty$ e $\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) = 0$. Dunque esiste sempre ed una sola temperatura T_B che soddisfa l'equazione:

$$1 = \int_0^\infty \frac{\widehat{g}(\epsilon)}{e^{\beta_B \epsilon} - 1} d\epsilon. \quad (1.17)$$

Ricordando dunque la (1.13), la (1.17) implica che $\mu(T_B) = 0$. Considerando anche che $\mu \leq 0$ e $\partial\mu/\partial T \leq 0$, la condizione $\mu(T_B) = 0$ implica che $\mu(T) = 0$ per ogni $T < T_B$. In conclusione si ha una transizione brusca da $\mu < 0$ per $T > T_B$ a $\mu = 0$ per $T < T_B$, in cui il potenziale chimico μ si annulla con continuità. Questo processo critico è chiamato Condensazione di Bose-Einstein. Ricordiamo che tutto questo vale sotto la condizione che $f(\Delta, 0) < \infty$. Viceversa, se $f(\Delta, 0) = \infty$, non avviene alcuna transizione, a temperatura finita, perché si deve avere necessariamente $T_B = 0$. Concludendo dunque la (1.15) rappresenta la condizione necessaria e sufficiente per avere la condensazione di Bose nel limite del continuo. In sostanza, la condizione (1.15) dice che non è sufficiente che la densità degli stati $g(\epsilon)$ vada a zero, ma deve farlo abbastanza rapidamente affinché l'integrale converga.

1.3 Gas di bosoni nel campo gravitazionale

In questa sezione tratteremo il problema di un gas di bosoni soggetti al potenziale gravitazionale. Considerando la gravità diretta nella stessa direzione ma verso opposto rispetto all'asse z di un sistema di riferimento, l'Hamiltoniana del problema di una singola particella è chiaramente:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgz \quad (1.18)$$

nella quale poniamo:

$$\mathbf{R} = (x, y, z) \equiv (\mathbf{r}, z), \quad \mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z) \equiv (\mathbf{p}, p_z) \quad (1.19)$$

il gas di bosoni è supposto chiuso in una scatola cubica di lato L . Dato che siamo interessati a considerare il sistema nel limite termodinamico, useremo per risolvere il problema lo stesso approccio utilizzato nella referenza [1].

Imponiamo dunque le seguenti condizioni al contorno:

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z), \quad \psi(x, y, z) = \psi(x, y + L, z), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, z = 0)}{\partial z} = \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, z = L)}{\partial z} = 0 \quad (1.21)$$

e inoltre svolgiamo il limite $L \rightarrow \infty$. Una volta svolte queste operazioni, le autofunzioni e gli autovalori dell'Hamiltoniana H assumono la forma:

$$\psi_{\alpha, \mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{h} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{h} \sqrt{\frac{\kappa}{a'_\alpha} \frac{\text{Ai}(\kappa z + a'_\alpha)}{\text{Ai}(a'_\alpha)}} \quad (1.22)$$

$$\epsilon_{\alpha, \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E_g a'_\alpha \quad (1.23)$$

con $\alpha=0, 1, 2, \dots$.

Nelle equazioni(1.22) e (1.23) $\text{Ai}(x)$ è la funzione di Airy, e gli a'_α sono i valori tali per cui annullano $\text{Ai}'(x)$, la derivata della funzione di Airy. Inoltre i parametri κ e E_g sono pari a:

$$\kappa = \left(\frac{8\pi^2 m^2 g}{h^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad E_g = \frac{mg}{\kappa} = \left(\frac{mg^2 h^2}{8\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.24)$$

Come possiamo notare, nonostante il limite $L \rightarrow \infty$ (il quale equivale alla condizione del limite del continuo $V \rightarrow \infty$), guardando l'equazione (1.23) abbiamo a che fare con uno spettro *misto*. Il primo termine rappresenta la parte continua e non rappresenta altro che l'energia cinetica traslazionale delle particelle nelle direzioni x e y . Mentre il secondo termine della (1.23) rappresenta la parte discreta dello spettro ed è il termine che descrive la presenza del termine di potenziale gravitazionale nell'Hamiltoniana (1.18). Come si può vedere in Figura 1.1 ,dove è riportato il grafico della funzione $\text{Ai}'(x)$, gli zeri a'_α della funzione sono tutti negativi.

Dunque, considerando la (1.23), si vede subito che i livelli energetici $\epsilon_{(\alpha, \mathbf{p})}$ sono positivi. Inoltre si può notare anche che gli a'_α diventano sempre più vicini muovendosi verso le x negative. Come conseguenza i livelli energetici si infittiscono sempre di più andando verso energie elevate.

Dato che lo spettro non è totalmente continuo, l'equazione (1.13) che esprime la conservazione numero N di bosoni nel limite del continuo dovrà tener conto anche della parte

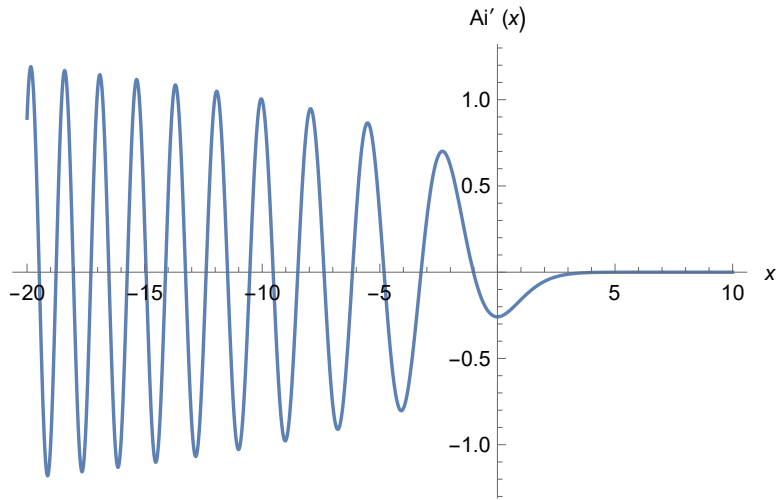


Figura 1.1: grafico della funzione $Ai'(x)$: si può notare come gli zeri della funzione siano tutti negativi e inoltre la distanza tra di essi diminuisce andando verso le x negative

discreta. Di conseguenza, in presenza di gravità, l'equazione del potenziale chimico μ esprime come:

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{g_{2D}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon+\epsilon_{\alpha}-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (1.25)$$

dove $g_{2D}(\epsilon)$ è la densità degli stati delle particelle libere in 2 dimensioni (dato che la parte continua della (1.23) dipende da p_x e p_y). L'equazione (1.25) rappresenta l'equazione che permette di ricavare il potenziale chimico reale. Essa sarà studiata nel dettaglio nel Capitolo 3 e nel Capitolo 4, per calcolare il potenziale chimico μ dimostrando come sia piccolissimo e con le formule ricavate applicando il limite del continuo.

1.4 Il problema della densità degli stati

In questa Sezione elencheremo le ragioni principali che fanno comprendere a pieno perché la Condensazione di Bose sia impossibile in presenza di gravità.

Come abbiamo visto nella Sezione 1.2, in generale affinché si realizzi la condensazione di Bose nel limite del continuo per una dato spettro energetico, l'integrale della (1.15):

$$f(0, \Delta) = \int_0^\Delta \frac{g(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon \quad (1.26)$$

deve essere convergente. Calcoliamo dunque la densità degli stati $g_{2D}(\epsilon)$ presente nella (1.25). Utilizzando l'equazione (1.6), per particelle libere in 2 dimensioni (nel nostro caso nelle direzioni x e y) con $p_x^2 + p_y^2 < 2m\epsilon$, si ha la seguente densità degli stati:

$$g_{2D}(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \frac{d}{d\epsilon} \int_A dx dy \int_{\mathbf{p}^2 < 2m\epsilon} dp_x dp_y = \frac{2\pi mA}{h^2} = g_{2D} \quad (1.27)$$

abbiamo dunque a che fare con una densità degli stati costante. Nella Sezione 1.3 avevamo ricavato lo spettro considerando le particelle racchiuse in un volume (sempre con $V \rightarrow \infty$ perché interessati al limite termodinamico) soggette alla gravità. Si nota subito che il ragionamento effettuato nella Sezione 1.1, cioè che nel limite del continuo si può porre $\epsilon_0 = 0$, non è possibile per lo spettro della (1.23). Infatti considerando:

$$\epsilon_{\mathbf{p},\alpha} = \epsilon + \epsilon_\alpha = \epsilon - E_g a'_\alpha \quad (1.28)$$

effettuando il limite $V \rightarrow \infty$, il deconfinamento dello spettro avviene solo in parte e riguarda esclusivamente il primo termine della (1.14) (il termine $\epsilon = \mathbf{p}^2/2m$ che rappresenta la parte continua dello spettro descrive una "specie" di energia cinetica lungo le direzioni x e y).

Il termine $\epsilon_\alpha = -E_g a'_\alpha$ è totalmente indipendente da x, y, p_x e p_y , dunque non viene minimamente toccato dal limite $V \rightarrow \infty$. In particolare il livello fondamentale ϵ_0 non va a zero effettuando tale limite.

Inoltre, si vede che la densità degli stati non tende a zero, per $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ (si veda Figura 2.1), il che dimostra che la condizione necessaria per avere una transizione a T finita (cioè la convergenza dell'integrale (1.15)), non è soddisfatta.

Questo conferma il risultato della referenza [1]: la forza peso esclude la condensazione di Bose-Einstein a temperatura T finita.

Tuttavia dato che $E_g \propto g^{\frac{2}{3}}$, per $g \rightarrow 0$, lo spettro energetico diventa sempre più denso e lo stato fondamentale ϵ_0 si avvicina sempre di più allo zero. Dunque, è del tutto ragionevole, studiare una BEC "approssimata" in presenza di un campo gravitazionale debole nel limite del continuo. Questo sarà lo scopo del Capitolo 2, dove calcoleremo

grandezze come la densità degli $g(\epsilon)$, la temperatura critica T_f e l'andamento del potenziale chimico per temperature prossime alla T_f , applicando il limite del continuo in presenza di gravità, considerando dunque uno spettro traslato $\epsilon - \epsilon_0$ totalmente continuo. Valuteremo poi nel Capitolo 3 il valore vero $\mu(T_f)$ tramite l'equazione (1.25). Nonostante tale valore non può essere rigorosamente zero, mostreremo che esso è molto piccolo. Vedremo infatti che la differenza tra il livello fondamentale ϵ_0 e il potenziale chimico μ alla T_f è molto minore dell'energia termica $k_B T_f$, vale a dire $\beta_f(\epsilon_0 - \mu) \ll 1$.

Capitolo 2

Limite del Continuo in presenza di gravità

In questo capitolo, come già accennato in precedenza, applicheremo il Limite del Continuo allo spettro (1.23), senza dunque considerare la sua natura discreta. Stabiliremo sotto quali condizioni questa trattazione risulta una buona approssimazione del caso reale.

Ricaveremo quindi la densità degli stati in presenza di gravità. Calcoleremo dunque una temperatura di condensazione T_f "fittizia" in presenza di gravità che confronteremo con la temperatura critica reale T_B in assenza di gravità. Questo ci permetterà poi di studiare l'andamento del potenziale chimico μ vicino a quelle temperature.

2.1 Condizioni di validità del Limite del Continuo

Nella Sezione 1.1 abbiamo descritto le caratteristiche principali del Limite del Continuo, descrivendone le caratteristiche principali. Nonostante questa approssimazione sia costruita "ad hoc" per un spettro energetico che subisca il deconfinamento per $V \rightarrow \infty$ (cioè i livelli energetici si infittiscono sempre di più e il livello fondamentale $\epsilon_0 \rightarrow 0$ per $V \rightarrow \infty$), la relazione (1.5) stabilisce una condizione qualitativa che definisce, per quali temperature, il Limite del Continuo è una buona approssimazione anche per uno spettro che non subisca il deconfinamento.

Vediamo dunque per quali temperature possiamo utilizzare il Limite del Continuo per approssimare lo spettro energetico della (1.23). Mettendo l'equazione (1.23) nella condizione (1.5) otteniamo:

$$\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0) = \beta E_g(a'_0 - a'_1) \ll 1 \quad (2.1)$$

cioè il Limite del Continuo ha validità, in presenza di gravità, per temperature:

$$T \gg \frac{E_g}{k_B}(a'_0 - a'_1) \quad (2.2)$$

dove E_g è data dalla relazione (1.24) e a'_0, a'_1 sono i due valori più grandi che annullano la funzione $\text{Ai}'(x)$. Usando la (1.24), per bosoni di massa $m = 10^{-23}$ g e usando il valore medio dell'accelerazione gravitazione $g = 981$ cm/s², troviamo che $E_g \approx 1.74912 \times 10^{-24}$ erg. Sapendo quindi anche che $(a'_0 - a'_1) \approx 2.2294$, troviamo che il Limite del Continuo è una buona approssimazione per temperature:

$$T \gg 2.82 \times 10^{-8} \text{ K}. \quad (2.3)$$

Temperature così basse, in effetti, non hanno alcuna possibilità pratica di realizzazione, almeno allo stato attuale dello sviluppo tecnologico (attualmente si raggiungono, per minime frazioni di secondo e su dimensioni dell'ordine del micron, temperature intorno ai 10^{-7} K).

Come possiamo comprendere dalla (2.3), il Limite del Continuo, non è solo un'ottima approssimazione alle temperature ordinarie, ma risulta essere anche abbastanza preciso alle temperature bassissime nelle quali avviene la Condensazione di Bose (tipicamente dell'ordine di $10^{-2} - 1$ K).

2.2 Densità degli Stati

Avendo verificato le condizioni di validità del Limite del Continuo nella Sezione 2.1, possiamo dunque calcolare alcune grandezze fisiche introdotte nel Capitolo 1. Quindi in questa sezione calcoleremo la Densità degli Stati (in Energia) $g(\epsilon)$ per un singolo bosone utilizzando l'equazione (1.6).

Calcoliamo innanzitutto la $g_{3D}(\epsilon)$ per particelle libere (ognuna di queste descritta dall'Hamiltoniana $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$). Utilizzando la (1.6), la densità degli stati per una particella libera avente energia $\mathbf{p}^2/2m < \epsilon$ è pari da:

$$\begin{aligned} g_{3D}(\epsilon) &= \frac{1}{h^3} \frac{d}{d\epsilon} \int_V d\mathbf{r} \int_{\mathbf{p}^2 < 2m\epsilon} d\mathbf{p} = \frac{V}{h^3} \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{4}{3} \pi (2m\epsilon)^{\frac{3}{2}} \right] = \\ &= \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \epsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Con procedimento analogo, si calcola la $g(\epsilon)$ includendo la gravità. L'unica sostanziale

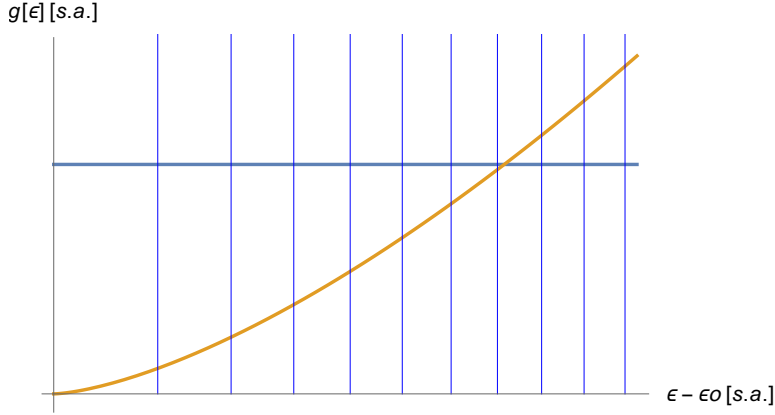


Figura 2.1: in arancione è rappresentata la densità degli stati nel LC comparata con la densità degli stati vera, graficata in blu. Si può notare come la densità degli stati nel LC tenga conto dell'infittirsi degli stati aumentando l'energia

differenza rispetto al caso delle particelle libere è che l'hamiltoniana corrispondente è funzione anche della coordinata spaziale z , a causa del termine di potenziale gravitazionale.

Utilizzando quindi l'espressione (1.6) della densità degli stati $g(\epsilon)$ per l'hamiltoniana della (1.18), dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
 g(\epsilon) &= \frac{1}{h^3} \frac{d}{d\epsilon} \int_A dx dy \int_{h(p,z) < \epsilon} dz d\vec{p} = \\
 &= \frac{A}{h^3} \frac{d}{d\epsilon} \int_0^{\frac{\epsilon}{mg}} dz \int_{p^2 < 2m(\epsilon - mgz)} d\vec{p} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

dato che l'integrale dell'impulso è pari al volume di una sfera di raggio $p = \sqrt{2m(\epsilon - mgz)}$:

$$g(\epsilon) = \frac{A}{h^3} \frac{d}{d\epsilon} \int_0^{\frac{\epsilon}{mg}} \left[\frac{4}{3} \pi (2m)^{\frac{3}{2}} (\epsilon - mgz)^{\frac{3}{2}} \right] dz \quad (2.6)$$

da cui otteniamo la densità degli stati energetici, considerando un potenziale con gravità:

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi A (2m)^{\frac{3}{2}}}{3h^3 mg} \epsilon^{\frac{3}{2}} \quad (2.7)$$

In figura 2.1 si capisce bene poiché la (2.7) approssima la densità degli stati reale rappresentata dalla (1.27). Al crescere di ϵ gli stati si infittiscono sempre di più, il che rende del tutto ragionevole che la densità degli stati in presenza di gravità vada come $\epsilon^{\frac{3}{2}}$.

2.3 Temperatura di Condensazione e Temperatura Critica (fittizia) T_f dovuta alla gravità

Nella Sezione precedente abbiamo ricavato la densità degli stati $g(\epsilon)$, rispettivamente per bosoni liberi e bosoni soggetti alla forza peso. Le due densità degli stati rispettano entrambe la condizione (1.15), dunque è possibile calcolare per entrambe la rispettiva temperatura di condensazione, usando la relazione (1.17), che riscriviamo nella seguente forma:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_B \epsilon} - 1} d\epsilon. \quad (2.8)$$

Mettendo la densità degli stati (2.4) nell'equazione (2.9) otteniamo:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta_B \epsilon} - 1} d\epsilon = \\ &= \frac{2\pi V (2mk_B T_B)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x - 1} dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove l'integrale della (2.10) vale:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (2.10)$$

in cui ζ è la funzione Zeta di Riemann, definita come:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \quad (2.11)$$

Considerando la (2.11), dalla (2.10) si ottiene la temperatura di condensazione T_B per particelle libere:

$$T_B = \frac{h^2}{2k_B \pi m} \left[\frac{N}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right) V} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (2.12)$$

dove nella (2.13) $\zeta(3/2) = 2.612\dots$

Analogamente, possiamo utilizzare la (2.9), per quantificare la temperatura critica, che indicheremo con T_f , dovuta all'effetto della gravità. Utilizzando la densità degli stati (2.8) nella (2.9), otteniamo:

$$N = \frac{4\pi A (2m)^{\frac{3}{2}}}{3h^3 mg} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta_f \epsilon} - 1} d\epsilon =$$

$$= \frac{4\pi A (2m)^{\frac{3}{2}}}{3h^3 mg} (k_B T_f)^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x - 1} dx \quad (2.13)$$

dove l'integrale della (2.14) è pari a:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x - 1} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{5}{2}\right). \quad (2.14)$$

Dalla (2.14) otteniamo dunque la temperatura critica T_f :

$$T_f = \frac{1}{k_B} \left(\frac{g^2 h^6}{8m\pi^3 \zeta^2\left(\frac{5}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{N}{A} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.15)$$

2.4 Andamento del potenziale chimico μ vicino alle temperature critiche

In questa Sezione sfrutteremo alcuni risultati della referenza [2], unite al calcolo delle temperature critiche effettuato nella sezione 2.3 .

Sfruttando le relazioni (1.13) e (1.17), per temperature $T > T_B$, vicinissime a T_B , si può ricavare un'espressione del potenziale chimico μ , per una densità degli stati $g(\epsilon) \propto \epsilon^\gamma$.

In sostanza è possibile valutare l'andamento a zero del potenziale chimico μ , dove l'andamento dipende dall'esponente γ di ϵ nella densità degli stati.

Per $\gamma > 1$ (come è il caso della densità degli stati in presenza di gravità), si trova la seguente espressione del potenziale chimico μ :

$$\mu = -k_B T_f (\gamma + 1) \frac{I(\gamma)}{J(\gamma)} \left(\frac{T}{T_f} - 1 \right) \quad (2.16)$$

dove $I(\gamma)$ e $J(\gamma)$ sono due funzioni integrali così definite:

$$I(\gamma) = \int_0^\infty \frac{x^\gamma}{e^x - 1} dx, \quad J(\gamma) = \int_0^\infty \frac{x^\gamma e^x}{(e^x - 1)^2} dx. \quad (2.17)$$

Dunque nel caso gravitazionale abbiamo che $g(\epsilon) \propto \epsilon^{\frac{3}{2}}$ e quindi il potenziale chimico, vicino alla temperatura critica (fittizia) T_f , ha un andamento lineare. Usando quindi la (2.16) e ricordando che $I\left(\frac{3}{2}\right)$ è data dalla (2.14), abbiamo che:

$$\mu = -k_B T_f \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{J\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{T}{T_f} - 1 \right) \quad (2.18)$$

dove $J(\frac{3}{2}) = 3.473\dots$.

Differente invece l'andamento del potenziale chimico μ per temperature vicine alla temperatura di condensazione T_B . Infatti sempre nella referenza [2] si dimostra per valori di $\gamma < 1$ vale la relazione:

$$\mu = -k_B T_B \left[(\gamma + 1) \frac{I(\gamma)}{i(\gamma)} \left(\frac{T}{T_B} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.19)$$

dove nella (2.19):

$$i(\gamma) = \int_0^\infty \frac{y^\gamma}{(y+1)y} dy \quad (2.20)$$

dato che $i(\frac{1}{2}) = \pi$, ricordando la (2.11) e sostituendo $\gamma = \frac{1}{2}$ nella (2.19) si ottiene:

$$\mu = -k_B T_B \left[\frac{3\zeta(\frac{3}{2})}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{T_B} - 1 \right) \right]^2 \quad (2.21)$$

notiamo che per le particelle libere, il potenziale chimico μ approssima lo zero con un andamento proporzionale a $(T - T_B)^2$.

Capitolo 3

Stima del potenziale chimico μ alla temperatura critica (fittizia) T_f

In questo Capitolo svilupperemo l'equazione (1.25) per valutare il termine $\beta_f(\epsilon_0 - \mu)$. Mostreremo quindi che la differenza tra il livello fondamentale ϵ_0 e il potenziale chimico μ è molto minore dell'energia termica $k_B T_f$, ricavando poi $\Delta\mu = \epsilon_0 - \mu$ per diversi valori di $\frac{N}{A}$.

3.1 Espressione generale del potenziale chimico

Studiamo adesso l'equazione del potenziale chimico μ considerando il nostro spettro $\epsilon + \epsilon_\alpha$ in parte continuo (per la libertà delle particelle nelle direzioni in x e y) e in parte discreto (dato invece dalle condizioni al contorno lungo z). Questa equazione che ci permette di calcolare μ non è altro che l'espressione che esprime il numero di bosoni, che in generale per uno spettro misto è pari a:

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g'_\alpha \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon + \epsilon_\alpha - \mu)} - 1} d\epsilon \quad (3.1)$$

dove g'_α rappresenta la molteplicità dello spettro discreto degli ϵ_α , mentre $g(\epsilon)$ è la densità degli stati traslazionali ϵ . Nel nostro caso preso in esame abbiamo che $g'_\alpha = 1$ per ogni α , cioè lo spettro discreto è non degenere. Per quanto riguarda invece la densità degli stati $g(\epsilon)$ della parte continua dello spettro energetico ϵ , abbiamo visto nella Sezione 1.4 che si calcola per mezzo della formula (1.6), ricordando che esse sono libere nelle direzioni x e y . Per particelle con energia $\frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} < \epsilon$, la densità degli stati è pari a:

$$g(\epsilon) = g_{xy}(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \frac{d}{d\epsilon} \int_A dx dy \int d\vec{p} = \frac{A}{h^2} \frac{d}{d\epsilon} \pi(2m\epsilon) = \frac{2\pi mA}{h^2} = g_0 \quad (3.2)$$

Così l'equazione (3.1) assume la forma:

$$N = g_0 \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon+\epsilon_\alpha-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (3.3)$$

l'integrale della parte continua dell'equazione (3.3) si risolve senza troppi problemi. Infatti ponendo $e^{\beta(\epsilon_\alpha-\mu)} = \kappa_\alpha$ e operando la sostituzione $x = \beta\epsilon$, l'integrale nella (3.3) è semplicemente pari a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_\alpha e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon &= k_B T \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_\alpha e^x - 1} dx = \\ &= k_B T \ln\left(\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha - 1}\right) = k_B T \ln\left(\frac{e^{\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}}{e^{\beta(\epsilon_\alpha-\mu)} - 1}\right) = \\ &= k_B T \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}}\right) = -k_B T \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

sostituendo il risultato dell'integrale nell'equazione (3.3), otteniamo l'equazione per ricavare il potenziale chimico μ :

$$N = -g_0 k_B T \sum_{\alpha=0}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right) = -\frac{2\pi m A}{h^2} k_B T \sum_{\alpha=0}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_\alpha-\mu)}\right). \quad (3.5)$$

Per quantificare il valore vero $\mu(T_f)$, studiamo ora l'equazione (3.5) alla temperatura critica T_f , calcolata utilizzando il limite del continuo. Tuttavia dato la difficoltà nel trovare una soluzione esatta conviene esplicitare il primo termine della sommatoria, cioè quello relativo allo stato fondamentale ϵ_0 , mentre i restanti li approssimiamo con un integrale nel limite del continuo, partendo dal primo stato eccitato ϵ_1 . Inoltre nel limite del continuo si stabilisce che $\epsilon_0 = 0$, dunque dovremo anche considerare nella $g(\epsilon)$ gli stati ϵ traslati verso il basso di ϵ_0 . Troveremo poi la soluzione dell'equazione (3.5) alla T_f tenendo conto che il limite del continuo ci assicura che $\beta_f(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll 1$ e ipotizzando che $\beta_f(\epsilon_0 - \mu) = \beta_f \Delta\mu \ll 1$. Utilizzando questa approssimazione, otteniamo l'equazione:

$$N \simeq -g_0 k_B T_f \ln\left(1 - e^{-\beta_f(\epsilon_0-\mu)}\right) + \int_{\epsilon_1}^{\infty} \frac{g(\epsilon - \epsilon_0)}{e^{\beta_f(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (3.6)$$

Possiamo inoltre esprimere il numero di bosoni N , sempre nel limite del continuo, per mezzo dell'equazione per ricavare la temperatura critica di condensazione T_f :

$$N = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_f \epsilon} - 1} d\epsilon \quad (3.7)$$

dove la densità degli stati $g(\epsilon)$ che compare nelle formule precedenti è logicamente quella che abbiamo calcolato nel limite del continuo per un'hamiltoniana $h = \frac{p^2}{2m} + mgz$, pari

a:

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi A (2m)^{\frac{3}{2}}}{3h^3 mg} \epsilon^{\frac{3}{2}} = G\epsilon^{\frac{3}{2}} \quad (3.8)$$

nell'integrale che compare nell'equazione (3.6) effettuiamo la sostituzione $\epsilon - \epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ (così facendo l'estremo inferiore passa da ϵ_1 a $\epsilon_1 - \epsilon_0 = \Delta\epsilon_1$):

$$\int_{\epsilon_1}^{\infty} \frac{g(\epsilon - \epsilon_0)}{e^{\beta_f(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon \rightarrow \int_{\Delta\epsilon_1}^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_f(\epsilon + \Delta\mu)} - 1} d\epsilon = G \int_{\Delta\epsilon_1}^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta_f(\epsilon + \Delta\mu)} - 1} d\epsilon \quad (3.9)$$

ponendo $\epsilon_0 - \mu = \Delta\mu$, otteniamo dunque l'equazione da studiare per valutare la discrepanza tra il livello fondamentale ϵ_0 e il potenziale chimico alla temperatura critica:

$$G \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon}{e^{\beta_f \epsilon} - 1} = -g_0 k_B T_f \ln\left(1 - e^{-\beta_f \Delta\mu}\right) + G \int_{\Delta\epsilon_1}^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon}{e^{\beta_f(\epsilon + \Delta\mu)} - 1} \quad (3.10)$$

Calcoliamo adesso gli integrali dell'equazione (3.10).

Il primo termine dell'equazione (3.10) non è altro che l'integrale (2.14) già calcolato una volta effettuato la sostituzione $x = \beta\epsilon$:

$$G \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon}{e^{\beta_f \epsilon} - 1} = G(k_B T_f)^{\frac{5}{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{e^x - 1} = G(k_B T_f)^{\frac{5}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (3.11)$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, operiamo innanzitutto la sostituzione $t = \beta_f(\epsilon + \Delta\mu)$ ($\epsilon = k_B T_f(t - \beta_f \Delta\mu) \rightarrow d\epsilon = k_B T_f dy$), ottenendo:

$$G \int_{\Delta\epsilon_1}^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon}{e^{\beta_f(\epsilon + \Delta\mu)} - 1} = G(k_B T_f)^{\frac{5}{2}} \int_{\beta_f(\Delta\epsilon_1 + \Delta\mu)}^{\infty} \frac{(t - \beta_f \Delta\mu)^{\frac{3}{2}}}{e^t - 1} dt \quad (3.12)$$

ponendo nella (3.12) $\lambda = \beta_f \Delta\mu$ e $\xi = \beta_f \Delta\epsilon_1$, definiamo la funzione:

$$F(\lambda, \xi) = \int_{\lambda + \xi}^{\infty} \frac{(t - \lambda)^{\frac{3}{2}}}{e^t - 1} dt \quad (3.13)$$

possiamo dunque riscrivere l'equazione (3.10) (ponendo sempre $\lambda = \beta_f \Delta\mu$ e dividendo entrambi i membri per $k_B T_f$) nella forma compatta:

$$G(k_B T_f)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - F(\lambda, \xi) \right] = -g_0 \ln\left(1 - e^{-\lambda}\right) \quad (3.14)$$

3.2 Sviluppo in serie della funzione $F(\lambda, \xi)$

Nella Sezione (3.1) abbiamo definito la seguente funzione $F(\lambda, \xi)$ delle grandezze $\lambda = \beta_f \Delta\mu$ e $\xi = \beta_f \Delta\epsilon_1$:

$$F(\lambda, \xi) = \int_{\lambda+\xi}^{\infty} \frac{(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}}{e^t - 1} dt. \quad (3.15)$$

Tuttavia questo integrale risulta troppo complesso per trovare una soluzione esplicita (vale a dire una funzione di $\beta_f \Delta\mu$ e $\beta_f \Delta\epsilon_1$). Conviene dunque espandere in serie l'espressione (3.13), considerando le nostre condizioni di partenza $\beta_f \Delta\mu \ll 1$ e $\beta_f \Delta\epsilon_1 \ll 1$. Questo equivale ad espandere la funzione $F(\lambda, \xi)$ un intorno del punto $(\lambda, \xi) = (0, 0)$. Come abbiamo già detto la funzione della (3.13) è abbastanza complicata, quindi ci limiteremo a espandere $F(\lambda, \xi)$ al primo ordine, cioè la esprimeremo nella forma:

$$F(\lambda, \xi) = F(0, 0) + \frac{\partial F(0,0)}{\partial \lambda} \lambda + \frac{\partial F(0,0)}{\partial \xi} \xi + \dots \quad (3.16)$$

Calcoliamo dunque i vari termini dell'espansione in serie:

$F(0, 0)$ è semplicemente pari all'integrale già calcolato nella (2.14):

$$F(0, 0) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{e^t - 1} dt = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (3.17)$$

calcolando la derivata di $F(\lambda, \xi)$ rispetto a λ troviamo:

$$\frac{\partial F(\lambda, \xi)}{\partial \lambda} = -\frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{e^{\lambda+\xi} - 1} - \frac{3}{2} \int_{\lambda+\xi}^{\infty} \frac{(t-\lambda)^{\frac{1}{2}}}{e^t - 1} dt \quad (3.18)$$

la quale calcolata nel punto $(\lambda, \xi) = (0, 0)$ è pari semplicemente:

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial \lambda} = -\frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t - 1} dt = -\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (3.19)$$

Calcolando la derivata parziale di $F(\lambda, \xi)$ rispetto a ξ otteniamo:

$$\frac{\partial F(\lambda, \xi)}{\partial \xi} = -\frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{e^{\lambda+\xi} - 1} \quad (3.20)$$

e naturalmente sostituendo i valori $\lambda = 0$ e $\xi = 0$, si ha, come abbiamo già visto nella (18), l'annullarsi di tale derivata:

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.21)$$

Inoltre espandere in serie di Taylor il termine $\xi^{\frac{3}{2}}$ che rappresenta il numeratore della (3.20) sarebbe del tutto inutile dato che si ha che:

$$\begin{aligned} (\xi^{\frac{3}{2}})_{\xi=0} &= \left(\frac{d\xi^{\frac{3}{2}}}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0 \\ \left(\frac{d^2\xi^{\frac{3}{2}}}{d\xi^2} \right)_{\xi=0} &= \left(\frac{d^3\xi^{\frac{3}{2}}}{d\xi^3} \right)_{\xi=0} = \dots = \infty \end{aligned} \quad (3.22)$$

Conviene dunque aggirare questo problema definendo la variabile $\eta = \xi^{\frac{3}{2}}$, e ridefinire $F(\lambda, \xi)$ come una nuova funzione $\tilde{F}(\lambda, \eta)$:

$$F(\lambda, \xi) = \int_{\lambda+\xi}^{\infty} \frac{(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}}{e^t-1} dt = \int_{\lambda+\eta^{\frac{2}{3}}}^{\infty} \frac{(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}}{e^t-1} dt = \tilde{F}(\lambda, \eta) \quad (3.23)$$

e dunque nello sviluppo in serie di $F(\lambda, \xi)$ espandere in funzione di η al posto della variabile ξ . Ciò equivale a fare la seguente sostituzione nell'equazione (3.16) :

$$\frac{\partial F_{(0,0)}}{\partial \xi} \xi \rightarrow \frac{\partial \tilde{F}_{(0,0)}}{\partial \eta} \eta = \frac{\partial \tilde{F}_{(0,0)}}{\partial \eta} \xi^{\frac{3}{2}} \quad (3.24)$$

calcolando dunque la derivata di $\tilde{F}(\lambda, \eta)$ fatta rispetto a η nel punto $(\lambda, \eta) = (0, 0)$, otteniamo infine:

$$\frac{\partial \tilde{F}_{(\lambda, \eta)}}{\partial \eta} = -\frac{2}{3} \frac{\eta^{\frac{2}{3}}}{e^{\lambda+\eta^{\frac{2}{3}}}-1} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{F}_{(0,0)}}{\partial \eta} = -\frac{2}{3} \quad (3.25)$$

Dunque sostituendo i vari termini calcolati, otteniamo il seguente sviluppo di $F(\lambda, \xi)$:

$$F(\lambda, \xi) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \lambda - \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (3.26)$$

3.3 Equazione trascendente in $\lambda = \beta_f \Delta \mu$

Dopo aver sviluppato la funzione $F(\lambda, \xi)$ nella Sezione (3.2), possiamo sostituire l'espressione (3.26) nella (3.14), trovando l'equazione:

$$g_0 \ln\left(1 - e^{-\lambda}\right) = -G(k_B T_f)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \lambda + \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.27)$$

Dal momento che stiamo lavorando nelle condizioni in cui $\lambda = \beta_f \Delta\mu \ll 1$, possiamo espandere l'argomento del logaritmo della (3.27) $1 - e^{-\lambda} \approx \lambda$, fermandoci al primo ordine perturbativo. Dunque, dividendo inoltre entrambi i membri per g_0 , l'equazione (3.27) assume la forma:

$$\ln(\lambda) = -a\lambda - b \quad (3.28)$$

La (3.28) rappresenta un'equazione trascendente in λ . Dove i coefficienti a e b sono positivi e dati dalle relazioni:

$$a = \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{1}{hg} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T_f)^{\frac{3}{2}} = \sigma (k_B T_f)^{\frac{3}{2}} \quad (3.29)$$

$$b = \frac{8}{9hg} \sqrt{\frac{2}{m}} \left[E_g(a'_0 - a'_1) \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (3.30)$$

Possiamo notare che B è una costante, mentre $a \propto T_f^{\frac{3}{2}}$ (e dunque $A \propto (N/A)^{\frac{3}{5}}$). Sostituendo i valori, $b \approx 0.471$. Si vede subito che nel calcolo di $\Delta\mu$, $b \ll a$ (per esempio per un valore abbastanza basso di $N/A = 10^{13}$ abbiamo $a \approx 48034$). Dunque possiamo trascurare b e approssimare λ come:

$$\lambda = \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln[\sigma (k_B T_f)^{\frac{3}{2}}]}{\sigma (k_B T_f)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.31)$$

dove esprimiamo $k_B T_f$ usando la (2.15):

$$k_B T_f = \left(\frac{g^2 h^6}{8m\pi^3 \zeta^2(\frac{5}{2})} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{N}{A} \right)^{\frac{2}{5}} = \tau \left(\frac{N}{A} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (3.32)$$

sostituendo quest'ultima equazione nella (3.31) si ottiene:

$$\lambda = \frac{\ln[\sigma \tau^{\frac{3}{2}} \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{3}{5}}]}{\sigma \tau^{\frac{3}{2}} \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{3}{5}}} \quad (3.33)$$

Ricordando che $\lambda = \beta_f \Delta\mu = \Delta\mu / [\tau (N/A)^{3/5}]$, otteniamo l'espressione per $\Delta\mu$:

$$\Delta\mu = \frac{\ln(\alpha \tau^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{5} \ln\left(\frac{N}{A}\right)}{\alpha \tau^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{1}{5}}} \quad (3.34)$$

In tabella sono riportati i valori di $\Delta\mu$ calcolati con la (3.34) messi a confronto con i valori calcolati includendo anche il coefficiente b nel calcolo (tale procedimento è stato effettuato tramite metodo grafico al computer), per diversi valori di $\frac{N}{A}$. Sono dunque stati graficati tali valori in Figura 3.1 in scala logaritmica .

N/A	$\Delta\mu[\text{erg}]$ (includendo b)	$\Delta\mu[\text{erg}]$ (trascurando b)
10^{13}	6.5×10^{-25}	8.8×10^{-25}
10^{14}	4.8×10^{-25}	6.4×10^{-25}
10^{15}	3.5×10^{-25}	4.5×10^{-25}
10^{16}	2.5×10^{-25}	3.2×10^{-25}
10^{17}	1.8×10^{-25}	2.2×10^{-25}
10^{18}	1.2×10^{-25}	1.5×10^{-25}
10^{19}	8.6×10^{-26}	1×10^{-25}
10^{20}	5.9×10^{-26}	7.1×10^{-26}
10^{21}	4×10^{-26}	4.8×10^{-26}
10^{22}	2.7×10^{-26}	3.2×10^{-26}
10^{23}	1.9×10^{-26}	2.2×10^{-26}
10^{24}	1.2×10^{-26}	1.5×10^{-26}
10^{25}	8.3×10^{-27}	9.6×10^{-27}
10^{26}	5.6×10^{-27}	6.4×10^{-27}

Possiamo notare come $\Delta\mu$ sia comunque sempre molto piccolo, il che giustifica la condizione di partenza $\beta_f(\epsilon_0 - \mu) \ll 1$. Inoltre come si può vedere in Figura 3.1, al crescere di $\frac{N}{A}$ il coefficiente b conta poco e $\Delta\mu$ può essere approssimato adeguatamente dall'equazione (3.34).

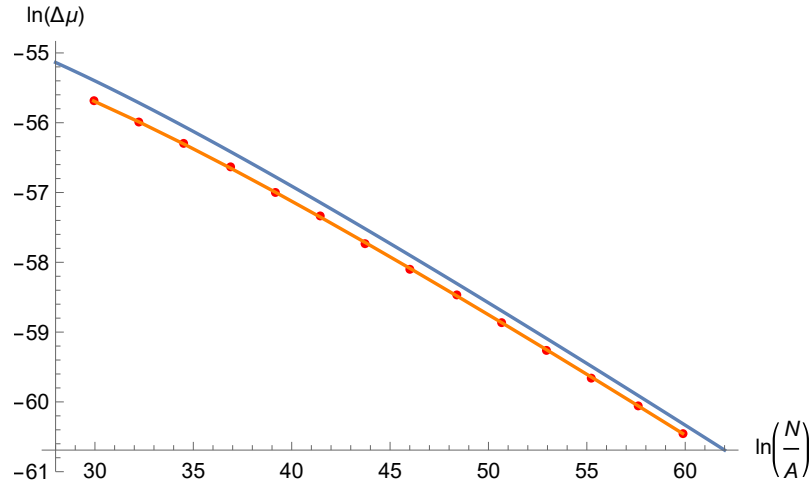


Figura 3.1: i punti riportati in rosso rappresentano i $\Delta\mu$ calcolati per diversi valori di N/A tenendo conto anche del parametro b in scala logaritmica. Mentre in blu è graficata la (3.34). Si nota come all'aumentare di N/A la (3.34) rappresenta un'ottima approssimazione di $\Delta\mu$

Capitolo 4

Andamento del potenziale chimico in presenza della gravità

In questo Capitolo ci incentreremo sullo studio grafico dell'equazione (3.5). Faremo un confronto tra questa equazione e la curva prevista nel limite del continuo per temperature prossime alla T_f , analizzando che il potenziale chimico μ "reale" approssima lo zero (in realtà al valore vero $\mu(T_f)$) con un andamento lineare. Analizzeremo poi diversi grafici della (3.5) per lo stesso valore di $\frac{N}{A}$, ma diverso numero di termini inclusi nella sommatoria. Mostriamo che tali grafici mostrano entrambi un duplice andamento: lineare per temperature basse e parabolica da un certo valore, dipendente dal numero di termini inclusi nella sommatoria. Vedremo inoltre come fissato $\frac{N}{A}$, l'ultimo livello energetico incluso nella sommatoria definisca la grandezza $\frac{N}{V}$ la quale permette di calcolare la temperatura di condensazione T_B per particelle libere.

4.1 Confronto tra μ reale e il limite del continuo vicino alla T_f

In questa Sezione analizzeremo l'andamento del potenziale chimico μ reale per temperature $T > T_f$, vicinissime alla T_f data dalla (2.15). Riscriviamo innanzitutto la (3.5) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} -\beta \frac{h^2}{2\pi m} \left(\frac{N}{A} \right) &= \ln \left(1 - e^{-\beta \Delta \mu} \right) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} \right) = \\ &= \ln \left(1 - e^{-\beta \Delta \mu} \right) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_0 + \epsilon_0 - \mu)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \ln\left(1 - e^{-\beta\Delta\mu}\right) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\beta(\Delta\epsilon_{\alpha} + \Delta\mu)}\right) \quad (4.1)$$

dove nella (4.1) abbiamo posto $\Delta\epsilon_{\alpha} = \epsilon_{\alpha} - \epsilon_0$. Inoltre notando che possiamo scrivere $\beta = 1/(k_B T) = 1/(k_B T_f x) = \beta_f/x$, con $x = T/T_f$, possiamo ulteriormente scrivere la (4.1) nella forma seguente:

$$-\beta_f \frac{h^2}{2\pi m x} \left(\frac{N}{A}\right) = \ln\left(1 - e^{-\beta_f \frac{\Delta\mu}{x}}\right) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\beta_f \frac{\Delta\epsilon_{\alpha}}{x}} e^{-\beta_f \frac{\Delta\mu}{x}}\right) \quad (4.2)$$

Grazie alla (4.2) possiamo graficare $-\beta_f \Delta\mu = \beta_f(\mu - \epsilon_0)$ in funzione della variabile x (vale a dire in funzione dei multipli della temperatura T_f). Inoltre notiamo che il termine $e^{-\beta_f \Delta\epsilon_{\alpha}}$ presente all'interno della sommatoria nella (4.2) rappresenta un fattore di abbattimento che rende i vari termini sempre più piccoli al crescere di α .

Considerando ancora una volta la referenza [1], si vede come gli zeri a'_{α} della funzione $\text{Ai}'(x)$ possono essere approssimati per $\alpha \gg 1$ dall'equazione:

$$a'_{\alpha} = -\left[\frac{3\pi(4\alpha - 3)}{8}\right]^{\frac{2}{3}}, \alpha \gg 1 \quad (4.3)$$

Per approssimare adeguatamente gli infiniti termini della sommatoria è necessario fermarsi ad un α abbastanza grande affinché il termine $e^{-\beta_f \Delta\epsilon_{\alpha}}$ sia sufficientemente piccolo. Dunque dato che $T_f \propto \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{2}{5}}$ conviene graficare la (4.2) per valori di $\frac{N}{A}$ ragionevolmente piccoli. Per una $\frac{N}{A} = 10^{14}$ si ha una temperatura critica $T_f = 2.05 \times 10^{-5}$ K. Prendendo poi $\alpha = 440000$ si ha che $e^{-\beta_f \Delta\epsilon_{440000}} \approx e^{-10} \approx 4.54 \times 10^{-5}$, sufficiente per approssimare i restanti termini a zero.

Quest'ultima va messa a confronto con il grafico del potenziale chimico nel limite del continuo rappresentata dall'equazione (2.18), che riscriviamo:

$$\beta_f \mu = -\frac{15}{8} \sqrt{\pi} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{J\left(\frac{3}{2}\right)} (x - 1) \quad (4.4)$$

dove sempre $x = T/T_f$.

In Figura 4.1 sono confrontate quindi l'equazione (4.2) e (4.4), per valori di x prossimi a 1 (quindi per temperature vicine alla T_f). Come possiamo notare per valori di x molto vicini a 1, l'andamento delle due curve è il medesimo, di conseguenza come abbiamo detto la (4.4) approssima in maniera soddisfacente il potenziale chimico μ reale per temperature vicinissime alla temperatura critica T_f .

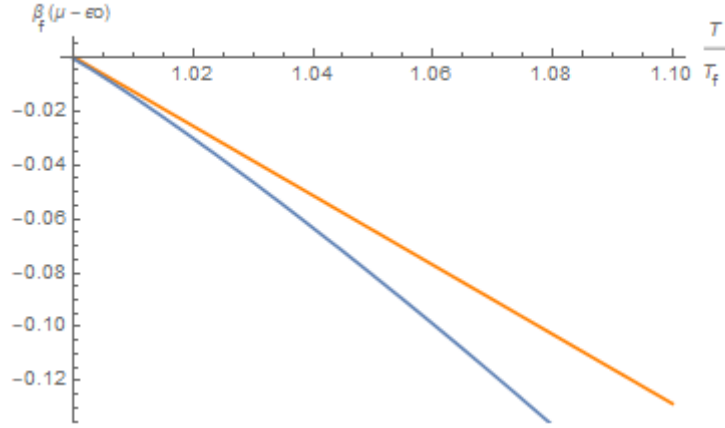


Figura 4.1: Confronto tra le formule esatte e limite del continuo: in blu è graficata $\beta_f(\mu - \epsilon_0)$ considerando i primi 440000 termini della serie nella (4.2). Il grafico è messo in confronto con la curva prevista dal Limite del Continuo in arancione.

4.2 Andamento globale del potenziale chimico μ

Nella Sezione 2.4, applicando il limite del continuo sia nel caso di bosoni liberi e sia soggetti alla gravità, abbiamo messo in evidenza gli andamenti del potenziale chimico μ per temperature vicine alle temperature critiche corrispondenti. Abbiamo messo in evidenza come l'approccio a zero nel limite del continuo del potenziale chimico sia diverso in assenza e in presenza di gravità. Nel primo caso si ha che $\mu \propto (T - T_f)^2$, mentre nel secondo $\mu \propto (T - T_f)$.

I grafici dell'equazione (4.2) mostrano questo duplice andamento: per temperature basse si ha un andamento lineare e a partire da una certa temperatura si evidenzia un comportamento parabolico.

Questo comportamento è chiaramente mostrato dai grafici in Figura 4.2 .

Tuttavia è evidente una caratteristica importante: aumentando il numero di termini della sommatoria l'andamento parabolico si manifesta per temperature sempre più basse. Di conseguenza, il range dell'andamento lineare di μ diventa sempre più piccolo. La ragione fisica di questo comportamento sta nel fatto che troncando la sommatoria ad un certo livello energetico ϵ_n , fissa l'altezza media del contenitore nel quale è rinchiuso il gas.

Considerando il teorema del viriale per un potenziale lineare (come il caso del potenziale gravitazionale nell'hamiltoniana (1.18)) si ha che l'energia cinetica media eguaglia l'energia potenziale media ($\langle K \rangle = \langle U \rangle$). Per cui considerando $mg\langle z_n \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_n$, possiamo calcolare l'altezza media del contenitore:

$$\langle z_n \rangle \approx \frac{\epsilon_n}{2mg} \quad (4.5)$$

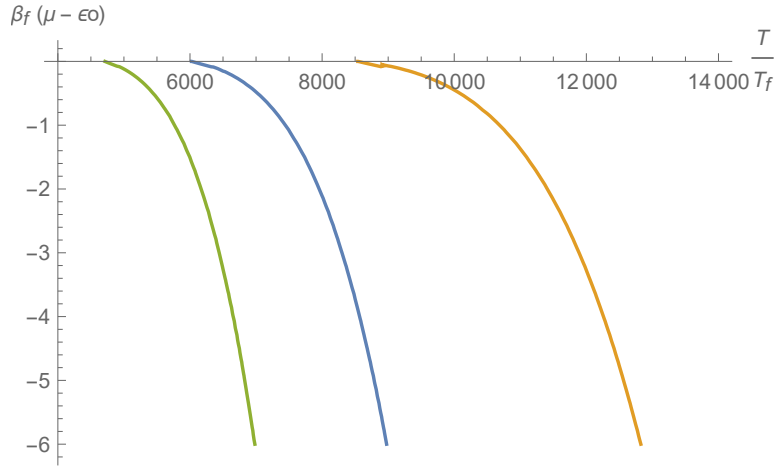


Figura 4.2: grafici dell'equazione (4.2) per una $(\frac{N}{A})=10^{20}$, considerando 1000 termini (in arancione), 1500 termini (in blu) e 2000 termini (in verde). Abbiamo rispettivamente per essi, usando la (4.7), i valori di $\frac{T_B}{T_f}$ pari a circa $x_1 \approx 130.293$, $x_2 \approx 108.795$ e $x_3 \approx 95.732$.

Allora fissata la grandezza fisica $\frac{N}{A}$ possiamo stimare la densità di bosoni $\frac{N}{V}$ come:

$$\frac{N}{V} \approx \frac{N}{A \langle z_n \rangle} \quad (4.6)$$

Riprendendo le equazioni (2.12) e (2.15), possiamo ricavare il valore di $x = \frac{T_B}{T_f}$ tale per cui si passa da un andamento lineare ad un andamento parabolico:

$$\frac{T_B}{T_f} = \left(\frac{h^2 \zeta(\frac{5}{2})}{2\pi m^2 g} \right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{\zeta(\frac{3}{2})} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{A} \right)^{\frac{4}{15}} \left(\frac{1}{\langle z_n \rangle} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.7)$$

la (4.7) fa ben capire poiché man mano che aumentano i numeri di termini nella sommatoria la zona di regime parabolico inizia per valori di temperatura sempre più piccoli.

Conclusioni

Lo scopo principale di questo elaborato era quantificare gli effetti della gravità sulla Condensazione di Bose. Abbiamo visto nel primo Capitolo che la densità degli stati vera per i bosoni soggetti alla forza peso fa divergere l'integrale (1.15). Nonostante ciò, abbiamo visto nella Sezione 2.1 che la differenza tra i livelli energetici ϵ_1 e ϵ_0 è molto minore dell'energia termica $k_B T$ anche per temperature piccolissime, il che rende legittimo l'utilizzo del Limite del Continuo per la trattazione del problema. Abbiamo quindi calcolato la densità degli stati nel continuo in presenza di gravità, grazie alla quale abbiamo ricavato una temperatura di condensazione T_f "fittizia". Si è poi fatto notare che dopo tale temperatura, sempre nel limite del continuo, l'andamento del potenziale chimico è lineare. Nel limite del continuo si ha per definizione $\epsilon_0 = 0$ e $\mu(T_f) = 0$. Dunque nel Capitolo 3 abbiamo stimato la quantità $\beta_f(\epsilon_0 - \mu)$, facendo vedere che essa è sempre molto minore di 1 per diversi valori di $\frac{N}{A}$, confermando che il limite del continuo rappresenta in questo caso un'approssimazione accurata. Infine il Capitolo 4 si incentra sullo studio del potenziale chimico reale data dalla (3.5), concentrandosi sia per temperature vicine alla T_f (evidenziando un comportamento lineare come previsto dal limite del continuo) e sia evidenziando globalmente l'andamento lineare seguito da quello parabolico (caratteristica del potenziale chimico per bosoni liberi). Concludendo, la tesi ha evidenziato le correzioni principali sul fenomeno della condensazione dovuta alla gravità, evidenziando anche come il limite del continuo approssimi in maniera sufficientemente precisa tale fenomeno.

Bibliografia

- [1] R.M. CAVALCANTI, P. GIACCONI, G. PUPILLO, R. SOLDATI, *Bose-Einstein condensation in the presence of a uniform field and a point-like impurity*, Novembre 2001.
- [2] L. FERRARI, *Approaching Bose-Einstein condensation*, 25 Luglio 2011.
- [3] L. FERRARI, *Elementi di Termodinamica Statistica*, 15 Dicembre 2015.