

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

LA COMPrensIONE DEI NODI CONCETTUALI
DELLA CINEMATICA DI BASE:
UNO STUDIO CON STUDENTI DEL CORSO DI
LAUREA IN SCIENZE BIOLOGICHE

Relatore:

Prof.ssa Olivia Levrini

Correlatore:

Prof. Enrico Campari

Presentata da:

Lorenzo Miani

Anno Accademico 2018/2019

Abstract

Questo lavoro si pone l'obiettivo di confrontare le conoscenze e le competenze di un gruppo di studenti universitari riguardo le funzioni lineari nella cinematica unidimensionale $[x(t)]$ e nella matematica $[y(x)]$ con quelle di una classe belga di studenti di 14-15 anni.

Dapprima si presenta una panoramica sui principali argomenti della cinematica e sulle difficoltà riscontrate nella ricerca in Didattica della Fisica.

Si procede quindi con la presentazione dell'articolo di Ceuppens, Bollen, Deprez, Dehaene e De Cock "*9th grade students' understanding and strategies when solving $x(t)$ problems in 1D kinematics and $y(x)$ problems in mathematics*" (2019), da cui è stato tratto lo strumento di indagine.

Questo riguarda un questionario composto da 24 domande, 12 di matematica e 12 di cinematica, costruite in forte analogia formale.

Si passa in seguito a descrivere il campione di studenti considerato nel nostro studio, ovvero 28 studenti del primo anno del corso di Scienze Biologiche dell'Università di Bologna, e il contesto dell'indagine, ovvero il modulo di Laboratorio del corso di Fisica.

I risultati dello studio sono riportati nel terzo capitolo. Dato il ristretto numero del campione e i metodi di selezione, i dati non sono stati analizzati seguendo metodi statistici ma utilizzando un approccio fenomenologico. Nonostante la differenza di età e di contesto, il principale risultato riguarda una concordanza coi risultati dell'indagine belga: le domande che presentano maggiori difficoltà riguardano la cinematica. Gli studenti mostrano di padroneggiare i concetti di pendenza e di intercetta in matematica ma non sanno riconoscerne il significato fisico in rappresentazioni formali di moti. Particolari difficoltà sono quindi emerse nel concetto di pendenza negativa.

The scientist does not study nature because it is useful to do so.
He studies it because he takes pleasure in it,
and he takes pleasure in it because it is beautiful.
If nature were not beautiful it would not be worth knowing,
and life would not be worth living.

Henry Poincaré

Ai miei genitori

Indice

Introduzione	7
Risultati dalla ricerca in didattica della fisica sulla cinematica	8
1.1 Nodi concettuale e passaggi fondamentali nello studio di un moto	8
1.2 Velocità e accelerazione	9
1.3 Rappresentazione grafica in cinematica	12
1.4 Rapporto tra matematica e fisica	15
1.4.1 Il concetto di limite.....	15
1.5 Metodi e strategie di insegnamento	17
1.5.1 Laboratorio.....	17
1.5.2 Problem Solving	18
1.5.3 Tecnologia	18
Progettazione di uno studio empirico: contesto, strumenti e metodi..	20
2.1 Il contesto e il campione degli studenti	20
2.2 Interviste di gruppo	22
2.3 Il questionario.....	22
Analisi dell'indagine e principali risultati	26
3.1 Difficoltà di interpolazione.....	27
3.2 Difficoltà relative al segno	28
3.3 Difficoltà nell'impostazione del problema	29
3.4 Confronto dei risultati	30
Conclusioni	33
Appendice A	34
Appendice B	35
Appendice C	47
Bibliografia	48

Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro è indagare le difficoltà che possono incontrare gli studenti del primo anno di Scienze Biologiche nello studio della cinematica.

Nella prima parte della tesi è riportata una panoramica dei principali risultati ottenuti dalla ricerca in Didattica della fisica sulle difficoltà incontrate dagli studenti nello studio del moto. Gli studi riguardano indagini condotte sia con studenti di scuola secondaria sia con studenti universitari. I principali riferimenti utilizzati per la panoramica sono: Besson, 2015; Woolnough, 2000; McDermott, Rosenquist & van Zee 1987; Karam, 2015; Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac, Ivanjek, 2012.

Negli ultimi paragrafi si fa cenno ad una riflessione storico-didattica sul concetto di limite e alla presentazione di un esperimento ideato e svolto dal Prof. Campari E. e da me volto a misurare il valore dell'accelerazione di gravità attraverso l'uso di uno smartphone.

Nella seconda parte della tesi viene descritto lo studio effettuato su un gruppo di studenti del corso di Scienze Biologiche dell'Università di Bologna per i quali ho svolto l'attività di tutor durante il corso di Fisica grazie al bando 150 ore offerto dalla E.R.G.O. L'attività è stata svolta sotto la supervisione dei professori Marulli F., Campari E., e Vignali C. e assieme al tutor Gesuato A. e agli studenti Rinaldi F., Zangrandi F. e Casavecchia B. Lo studio si avvale di un questionario costruito e utilizzato da Ceuppens et al. (2019), finalizzato a confrontare il livello di comprensione di studenti di 15 anni delle funzioni lineari $[x(t)]$ della cinematica unidimensionale, con la comprensione delle analoghe funzioni matematiche $[y(x)]$. I risultati dello studio dei ricercatori belgi mostrano una netta differenza nelle reazioni degli studenti, mostrando che le difficoltà in cinematica non sono di natura tecnico-formale.

Nella terza parte vengono presentati i risultati dello studio e, nello specifico, si analizzano le differenti tipologie di difficoltà riscontrate dagli studenti, che vengono raggruppate in 4 diversi gruppi: difficoltà di calcolo, di interpolazione, di segno e di impostazione del problema. I risultati confermano che gli studenti universitari hanno difficoltà molto simili agli studenti di scuola secondaria per quanto riguarda la cinematica e che la trattazione del rapporto matematica-fisica richiede interventi didattici mirati, in quanto nella parte matematica i risultati sono molto differenti.

Capitolo 1

Risultati dalla ricerca in didattica della fisica sulla cinematica

1.1 Nodi concettuale e passaggi fondamentali nello studio di un moto

La cinematica è uno dei pilastri fondanti della fisica classica in cui tutti gli studenti di scuola secondaria di secondo grado si imbattono, indipendentemente dall'indirizzo scelto, nel corso del loro curriculum.

Non richiedendo infatti un livello di conoscenze matematiche avanzato, questo argomento viene trattato solitamente tra il primo e il terzo anno di scuola superiore. Per questo motivo diventa quindi fondamentale analizzare quali sono le difficoltà più comuni e i nodi concettuali principali con i quali gli studenti hanno a che fare, per evitare di creare delle lacune che con il tempo portano gli studenti ad allontanarsi dalla materia o a portare avanti nozioni sbagliate.

Si procede quindi con un'introduzione ai concetti principali trattati generalmente in un corso di cinematica e con un'analisi dettagliata dei maggiori problemi riscontrati dalla ricerca in didattica della fisica.

Il primo passaggio importante per iniziare a descrivere un moto è definire le grandezze necessarie e sufficienti per lo studio, l'indagine e la comprensione del fenomeno. È quindi importante far capire sin da subito ciò che è importante e cosa invece è superfluo.

Ad esempio, come mostrato nel progetto di tirocinio SSIS *“La descrizione del moto”* di Giordano M., gli obiettivi principali in un primo approccio alla descrizione di un moto sono capire la necessità di scegliere un riferimento spaziale e temporale per descrivere il moto in una, due o tre dimensioni, poi conoscere e comprendere la definizione di posizione di un corpo rispetto ad un dato sistema di riferimento e le definizioni di spostamento e intervallo temporale e in seguito passare alla descrizione in un grafico $x(t)$ del moto studiato.

Bisogna perciò far capire quali sono “gli occhiali dello scienziato”, ovvero abituare l'occhio critico dello studente davanti ad un certo fenomeno.

Formalizzare un fenomeno a partire dall'osservazione di un moto reale comporta scelte, ripuliture e schematizzazioni non immediate che in un primo momento possono sembrare forzate, come il passaggio dalle 3-dimensioni ad una sola, il trascurare delle forze di attrito e delle dimensioni effettive dei corpi in gioco, ma sono parte integrante del fare fisica e del descrivere con strumenti formali “semplici” un qualcosa che semplice non è affatto, ovvero la realtà.

Una volta definiti questi passaggi, il passo successivo è definire il concetto di sistema di riferimento.

Generalmente un sistema di riferimento viene definito come un insieme di coordinate a partire dal quale viene studiato un certo fenomeno fisico. Affinché il sistema così definito sia utile e utilizzabile, le coordinate scelte devono essere rapportabili con il fenomeno fisico analizzato e con ciò che si vuole studiare.

Diventa perciò molto importante saper distinguere quali grandezze fisiche devono essere prese in considerazione e quali invece possono essere tralasciate. Questo aspetto apre uno dei problemi più delicati: se ad esempio si studia il moto di un treno, è importante distinguere di quale colore sia il treno oppure bisogna concentrarsi solo su alcuni aspetti, come la traiettoria che questo percorre? Come la descrivo?

A questo proposito è cruciale definire in modo preciso il concetto di punto materiale: un corpo può essere modellizzato come un punto materiale se di quel corpo ci interessa studiare solo il suo moto traslatorio, ovvero se le sue dimensioni non influenzano, per il problema in esame, il tipo di movimento che si sta studiando.

Trattando i corpi come punti materiali vengono automaticamente eliminate tutte le informazioni

superflue allo studio del moto, permettendo così allo studente di avere una situazione più semplice da analizzare.

Capire quando un corpo può essere trattato come punto materiale diventa perciò una condizione necessaria per analizzare il problema con l'obiettivo di formalizzarlo.

Passaggi di questo tipo (dal moto reale alla sua schematizzazione e formalizzazione) vengono solitamente tenuti nascosti in quanto, nella maggior parte degli esercizi che gli studenti si trovano ad affrontare, la situazione da studiare è già schematizzata in partenza e non lascia spazio all'esplorazione del fenomeno in sé. Quando invece si passa dal lavorare sugli esercizi classici ad un approccio più libero come quello del *problem solving* oppure l'analisi dati in laboratorio queste peculiarità della descrizione fisica del mondo vengono fuori.

Non è semplice guidare gli studenti attraverso questi passaggi. Nel lavoro di Giordano prima citato si descrive un'esperienza in cui ad alcuni studenti viene chiesto di rappresentare la seguente situazione:

“Un uomo esce di casa, cammina lungo un viale, si ferma al bar, poi corre fino in fondo al viale per imbucare una lettera e torna indietro. Per fare tutto questo impiega circa 15 minuti.”

Le diverse rappresentazioni fornite dagli studenti (una classe seconda dell'Istituto Tecnico Commerciale Salvemini di Casalecchio) evidenziano come ognuna di queste sia molto diverse dall'altra, in quanto ogni studente si era concentrato su un differente aspetto della consegna. Molti di loro hanno rappresentato graficamente elementi per loro importanti come la lettera da imbucare oppure il bar in cui l'uomo si ferma.

Il lavoro svolto da Giordano si è quindi concentrato sullo sviluppo di un metodo critico di rappresentazione in cui apparissero solamente gli elementi fondamentali per una comprensione profonda del fenomeno.

Una volta concentratisi sulla descrizione degli elementi fondamentali è stato introdotto il concetto di tempo e perciò di velocità.

1.2 Velocità e accelerazione

Il concetto di velocità ricopre un ruolo fondamentale nello studio della cinematica.

In base al valore che questa assume nel tempo si possono distinguere, oltre al moto vario, due tipologie di moti “regolari”:

- moto rettilineo uniforme;
- moto rettilineo uniformemente accelerato.

Anche qui bisogna prestare attenzione alle assunzioni che vengono fatte per studiare il problema, come la scelta del sistema di riferimento e del modo per misurare l'intervallo di tempo e lo spostamento.

La peculiarità del moto rettilineo uniforme, ovvero la costanza della velocità, permette una facile rappresentazione di questo attraverso i grafici spazio-tempo e velocità-tempo, data la linearità di entrambe le relazioni che legano le grandezze rappresentate. Dai grafici, in questo caso è possibile ricavare anche le relazioni algebriche che esprimono le equazioni del moto e ragionare sulle due diverse forme di rappresentazione.

Utilizzare diversi tipi di grafici e confrontarli ($x(t)$, $v(t)$) permette agli studenti di avere una visione ampia delle grandezze che caratterizzano il fenomeno allo stesso momento e riflettere sulle caratteristiche dei grafici.

Un problema relativo alla velocità è quello della velocità media. Un errore commesso molto spesso dagli studenti è quello di considerare solamente la media aritmetica e di trascurare tutte le altre, anche quando questa scelta porta a risultati sbagliati.

Consideriamo un problema classico, tratto da “Didattica della fisica” di Ugo Besson (2015):

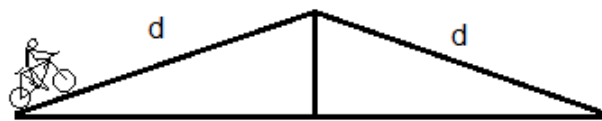


Fig. 1.1 Un ciclista percorre una strada con un tratto in salita e un tratto in discesa di uguale lunghezza d . In salita va alla velocità di 20 km/h e in discesa a 60 km/h. Trovate la velocità media del ciclista.

In questo tipo di problema gli studenti calcolano il risultato facendo la media aritmetica tra le due velocità senza considerare i due differenti tempi di percorrenza.

In questo caso si ottiene il risultato corretto attuando una media pesata con i tempi di percorrenza, che coincide con la media armonica:

$$v_{aritmetica} = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad v_{pesata} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2}{t_1 + t_2} = \frac{2d v_1 v_2}{d v_1 + d v_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad v_{armonica} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Oltre alle 3 prima citate ci sono molti altri tipi di media, come la media geometrica, la media quadratica e la media quartica, le quali vengono spesso ignorate dagli studenti ma che possono essere molto utili per comprendere le diverse modalità di analisi che possono essere fatte a partire dallo stesso set di dati iniziali.

Citando sempre Besson,

“Una discussione sulle medie è didatticamente interessante anche perché porta a riflettere sul fatto che in fisica si possono costruire differenti grandezze fisiche per descrivere e studiare una data situazione e un dato fenomeno.”

Una volta definito il concetto di velocità come rapporto tra degli intervalli si può proseguire con la definizione della velocità istantanea. In questo caso si possono scegliere delle strade differenti che utilizzano registri diversi e complementari: quello grafico e quello algebrico. Per quanto riguarda quello grafico si può rendere l’idea di velocità istantanea andando a fare uno zoom su un particolare tratto di traiettoria nel grafico spazio-tempo in modo da rendere molto piccoli i due intervalli considerati (Fig 1.2).

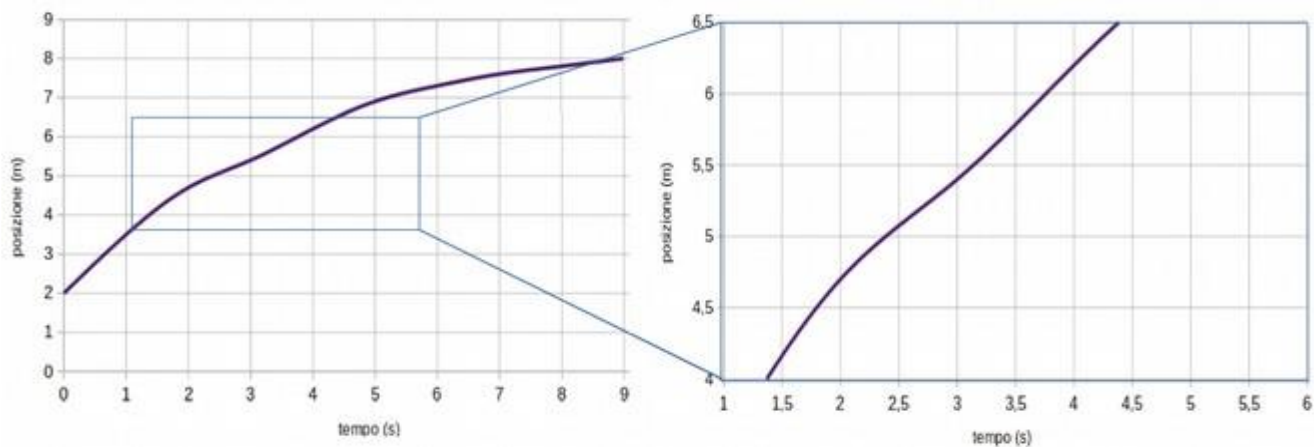


Fig. 1.2 Esempio di zoom realizzato su una certa sezione di un grafico. Si noti come effettuando lo zoom la curva assume un andamento quasi lineare.

Una volta effettuato questo ingrandimento in maniera tale da avere almeno un tratto di moto uniforme si può procedere con il calcolo della velocità nell'intervallo di tempo ottenuto dopo l'ingrandimento e definire quindi il valore trovato come velocità istantanea (McDermott et al., 1986).

Dal punto di vista algebrico si può ottenere lo stesso risultato introducendo il concetto di limite, come viene fatto nel PSSC:

“Con la parola limite s'intende qui il risultato che si ottiene prendendo t_1 e t_2 così vicini fra loro che usando un intervallo ancora più piccolo compreso tra t_1 e t_2 non si abbia una variazione apprezzabile del valore del rapporto”.

Considerando però che il concetto di limite non viene introdotto prima del quarto anno di scuola superiore usarlo a questo punto potrebbe essere fuorviante per l'obiettivo da raggiungere. A questo proposito un focus sul concetto di limite viene effettuato nel paragrafo 1.4.2.

Introdurre il concetto di velocità istantanea diventa molto utile per evitare la confusione che viene generalmente fatta quando si va a calcolare il valore della velocità a partire da un grafico: come mostrato dagli articoli di Ceuppens et al. (2019) molti studenti eseguono il rapporto tra i singoli valori delle coordinate piuttosto che tra gli intervalli.

A questo punto si può effettuare il passaggio da moto uniforme, in cui la velocità rimane invariata, a moto uniformemente accelerato, dove la velocità varia in maniera costante nel tempo.

In questo caso la grande difficoltà riscontrata negli studenti (McDermott et al., 1987) sta nell'aver una chiara distinzione tra i concetti di velocità, velocità istantanea e accelerazione.

Quando si ha a che fare con il moto di un corpo la cui velocità varia nel tempo è facile incorrere in una confusione se non ci si è soffermato sul definire queste distinzioni.

Intendiamo perciò come velocità istantanea il valore della velocità ad un dato istante di tempo, la quale può assumere valori diversi al cambiare di t , mentre come accelerazione bisogna considerare il rapporto tra dei valori diversi di velocità e l'intervallo di tempo in cui questi valori vengono presi.

Infatti, come mostrato nell'articolo di McDermott et al. (1987), si tende a confondere il valore assunto dalla velocità nel tempo con il valore dell'accelerazione, e quindi se due corpi in un dato istante hanno la stessa velocità, allora si ritiene che questi abbiano anche stessa accelerazione.

Per facilitare la comprensione degli studenti si può sin da subito introdurre il moto dei corpi in caduta libera, in quanto presente nella vita di tutti i giorni per tutti gli studenti.

Su di un corpo lanciato verso l'alto agiscono per tutta la durata del suo moto la forza di gravità e la spinta di Archimede. Tralasciando quest'ultima, si può studiare quindi il moto come uniformemente

accelerato, considerando come accelerazione quella di gravità.

Si riscontra sia in questo lavoro (capitolo 3) che in altre opere (Besson 2015, McDermott et al., 1987) una difficoltà degli studenti con il segno da attribuire alla velocità del corpo e alla sua accelerazione una volta definito il sistema di riferimento.

Nonostante la problematica sul segno esuli dalla comprensione fisica del problema poiché dipendente da una convenzione esterna al fenomeno, è importante chiarire le relazioni che ci sono tra il moto del corpo e le grandezze in gioco.

Scegliendo l'asse positivo delle x rivolto verso l'alto si ha una velocità positiva ma decrescente nella fase di salita, e una negativa ma crescente in valore assoluto nella fase di discesa.

L'accelerazione di gravità invece è sempre rivolta verso il basso, e in questo caso ha sempre verso negativo rispetto alla scelta del sistema di riferimento fatta.

La discordanza e la concordanza tra i segni delle grandezze genera un conflitto negli studenti, che non riescono a spiegare il moto del corpo nella fase di salita senza una forza agente in quel verso. Infatti, le difficoltà riguardanti la comprensione del Primo Principio della dinamica e la concezione comune del cosiddetto "capitale di forza" portano gli studenti ad attribuire al moto di un corpo una forza agente su di esso nello stesso verso.

Nel caso della salita di un grave verso l'alto, secondo gli studenti, il corpo persevera nel suo moto finché la forza impressa su di esso non si "consuma" nel tempo sotto l'azione della forza di gravità. Sebbene questo sia un problema legato alla dinamica più che alla cinematica, è importante chiarire questi aspetti sin dall'inizio, in quanto il cosiddetto imprinting iniziale influenza poi gli studenti nell'apprendimento degli argomenti successivi.

Chiarire anche l'origine dell'accelerazione di gravità, ovvero la legge di gravitazione universale, può aiutare nella spiegazione del moto del corpo e quindi del suo corretto studio.

1.3 Rappresentazione grafica in cinematica

Un mezzo molto utile per migliorare la qualità dell'apprendimento e per verificare le conoscenze apprese dagli studenti è quello della rappresentazione grafica dei fenomeni sopra descritti.

Gli studenti dimostrano infatti un miglioramento netto del proprio rendimento dopo aver sostenuto un corso di fisica basato sull'utilizzo dei grafici rispetto ad un corso basato solo sull'algebra o sul calcolo (Woolnough, 2000).

Per lavorare sui grafici infatti lo studente deve padroneggiare simultaneamente una buona conoscenza delle grandezze fisiche legate alla cinematica quali tempo, spazio, velocità o accelerazione, delle relazioni che intercorrono tra queste e quindi degli andamenti delle funzioni che vanno a rappresentare i differenti moti.

In più, lavorare sullo stesso fenomeno fisico analizzandolo sotto diversi aspetti (es. moto uniformemente accelerato su grafici spazio-tempo, velocità-tempo, accelerazione-tempo) aiuta lo studente a distinguere tra loro le varie grandezze (Besson, 2015).

Riuscire a comprendere le caratteristiche del moto di un certo corpo partendo dal grafico che lo descrive è un'abilità che gli studenti apprendono con il tempo ma che torna utile molto spesso anche in ambiti non strettamente collegati con la fisica.

I problemi riscontrati maggiormente nello studio della cinematica attraverso la lettura grafica sono legati all'interpolazione dei dati e al significato attribuito all'andamento delle funzioni rappresentate. Sulle difficoltà riscontrate nelle connessioni tra grafici e fisica è stato scritto uno degli articoli fondativi della ricerca in didattica della fisica, l'articolo del gruppo di Seattle guidato da Lillian McDermott del 1987 (McDermott et al., 1987).

Lo studio esamina due categorie di difficoltà individuate: difficoltà nel connettere i grafici con i concetti fisici e difficoltà nel collegare i grafici con il mondo reale.

Secondo gli autori, i problemi riscontrati dagli studenti con i grafici non possono essere semplicemente attribuiti ad una scarsa preparazione in matematica. L'analisi degli errori rivela infatti che molti di questi derivano dall'incapacità di creare connessioni tra la rappresentazione

grafica e ciò che deve essere rappresentato.

Analizzando diverse tipologie di esercizi si evince come gli studenti spesso non sappiano, ad esempio, quali informazioni circa il moto reale estrapolare dalla pendenza o dall'altezza di un grafico. Ad esempio, in un grafico che rappresenti la posizione di due corpi nel tempo, per calcolare la differenza di velocità viene analizzata non la differenza tra le pendenze ma la differenza nell'altezza sul grafico (Fig. 1.3).

Fig. 1 Positions versus time graph for problem 1. Students must decide whether the slope or the height of the graph gives the required information.

(a) At the instant $t=2$ s, is the speed of the object A greater than, less than or equal to the speed of object B? Explain your reasoning.

(b) Do objects A and B ever have the same speed? If so, at what times? Explain your reasoning.

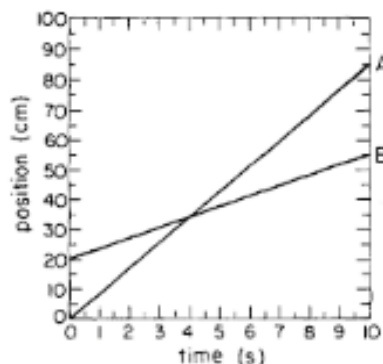


Fig 1.3 Esercizio tratto dallo studio di McDermott et al., (1987).

In questo esercizio per rispondere alla parte a) è necessario riconoscere che le pendenze delle linee rappresentano le velocità dei due oggetti e che la linea A cresce più rapidamente della B. Essendo la pendenza della linea A maggiore di quella della B, la velocità dell'oggetto A è maggiore di quella dell'oggetto B. Nonostante ciò molti studenti non danno la risposta corretta. Molte risposte sbagliate sembrano dovute al fatto che molti studenti non riescono a trarre informazioni sulla velocità a partire dall'altezza. Al tempo $t=2$ s la linea B si trova sopra quella A, e molti studenti si concentrano sulla differenza tra le due altezze, invece di guardare le pendenze.

Altre difficoltà vengono riscontrate nel confronto tra grafici differenti riguardanti lo stesso fenomeno o nel trasformare informazioni narrative in rappresentazioni grafiche.

Le categorie principali in cui questi errori sono stati suddivisi sono 5, e vengono qui riportate in quanto alcune di loro sono state riscontrate nello studio descritto nel capitolo 2:

- rappresentare un moto continuo tramite una linea continua;
- separare la forma del grafico dalla forma del moto;
- rappresentare una velocità negativa in un grafico velocità-tempo;
- rappresentare un'accelerazione costante in un grafico accelerazione-tempo;
- distinguere tra differenti tipi di grafici dello stesso moto.

Un problema riscontrato molto spesso è legato alla pendenza di una curva nei grafici e al significato che a questa viene attribuito: alcuni studenti, sempre secondo l'articolo di McDermott et al. (1987) confondono la pendenza della linea di un grafico con la descrizione spaziale del moto, oppure hanno difficoltà nel rappresentare un moto uniforme su un percorso a livelli con un grafico $x(t)$ molto inclinato. Tutto ciò è riportato in Fig.1.4.

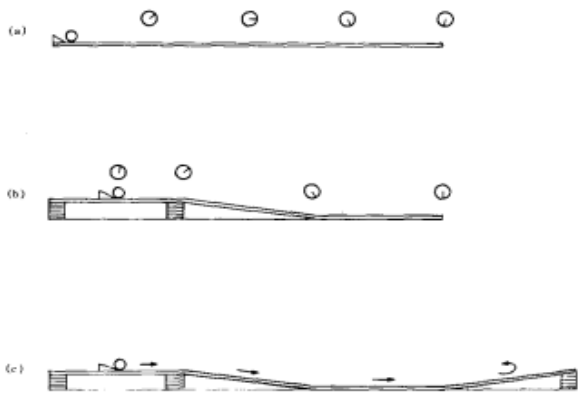


Fig. 6. (a) Experiment in which ball rolls along straight level track. (b) Experiment in which ball rolls along track with level and inclined segments. (c) Experiment in which ball rolls along track with level and inclined segments, with turnaround on last segment.

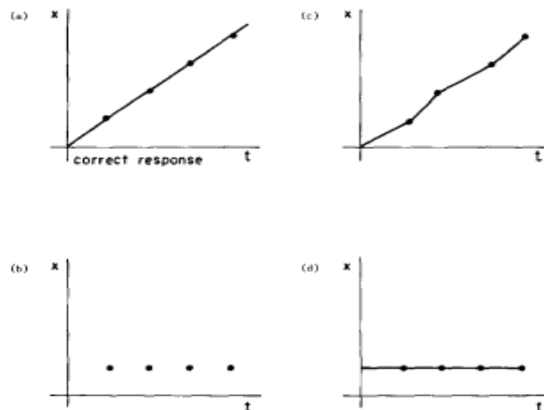


Fig. 7. (a) Correct position versus time graph for motion in Fig. 6(a). (b) Successive displacements are plotted as unconnected points. (c) Lines are drawn between data points. (d) Shape of x vs t graph resembles path of motion.

Fig. 1.4 Schematizzazione dell'apparato da descrivere e rappresentazioni grafiche

L'idea comune è che la forma del grafico debba rispecchiare la forma del percorso e quindi, nel caso di un moto su un piano, disegnano una linea orizzontale.

Come espresso dall'articolo di Planinic et al. (2012), il concetto di pendenza è molto importante nella fisica in quanto molte grandezze sono definite come rapporti e vengono rappresentate con grafici lineari. Allo stesso modo questa assume una grande importanza in matematica in quanto è un prerequisito necessario per lo sviluppo del concetto di derivata.

Nonostante gli studenti abbiano a che fare con il concetto di pendenza sia in matematica sia in fisica non "allineano le proiezioni che hanno di questo concetto", generalmente perché non gestiscono le differenze di contesto.

A dimostrazione di ciò, è evidente dai vari articoli citati e dallo studio riportato in seguito come le conoscenze matematiche non garantiscano una riuscita negli stessi problemi fisici, in quanto davanti a due problemi simili ma riguardanti discipline diverse gli studenti utilizzano metodi risolutivi diversi, o attivano risorse differenti.

Ad esempio, nello studio di Woolnough (2000) viene evidenziato come gli studenti facciano una distinzione tra "mondo reale", "mondo fisico" e "mondo matematico". In relazione al concetto di pendenza, lo studio di Woolnough sottolinea come gli studenti trovino delle difficoltà nel lavorare con le unità di misura associate alla pendenza di una data funzione lineare (cosa non richiesta, ovviamente, quando si studia un grafico in matematica).

Infatti, quando interrogati sul perché non avessero assegnato le unità di misura le spiegazioni mostravano un atteggiamento del tipo:

1. Sì, gli studenti realizzano che le unità di misura dovrebbero essere incluse in fisica;
2. Sì, gli studenti ricordano che l'insegnante ripeteva l'importanza delle unità di misura tutto il tempo;
3. Sì, gli studenti che avevano assegnato le unità di misura erano a conoscenza di quale unità sarebbe stata appropriata;
4. TUTTAVIA, gli studenti pensavano che non avesse senso assegnare un'unità di misura alla pendenza. Ciò era spesso dovuto al fatto che percepivano la pendenza o il gradiente come un concetto matematico.

Questo particolare problema viene evidenziato anche dallo studio riportato nel capitolo 2.

Questi argomenti mostrano che avere dei buoni risultati nello studio della matematica non è un requisito sufficiente per l'ottenimento di risultati simili in fisica, e spesso avere buoni risultati in entrambe le materie non garantisce una concezione articolata e consapevole del fenomeno reale.

Tutti questi studi mostrano la difficoltà ma anche il valore culturale dello studio dei grafici, in quanto terreno di confronto tra matematica e fisica e terreno fertile per l'analisi di un fenomeno, l'individuazione delle grandezze necessarie per descriverlo e, infine, per trovare la relazione matematica da rappresentare che metta in relazione le grandezze scelte nel modo corretto. I grafici, dunque sono un ottimo contesto didattico per riflettere su schematizzazione, modellizzazione e formalizzazione in fisica e sul rapporto tra matematica e fisica.

1.4 Rapporto tra matematica e fisica

Secondo Maxwell (1856)

“la filosofia naturale (ovvero la fisica) è e deve essere matematica, ed è la scienza in cui delle leggi ben definite mettono tra loro in relazione delle quantità”

Dalle analisi fatte finora si nota come la matematica e la fisica vengano percepite come due materie completamente separate, nelle quali i concetti non possono essere trasferiti poiché relativi a due “mondi diversi”.

Nello studio di Karam (2015) vengono evidenziate e riassunte alcune problematiche molto nette riscontrate negli anni da vari studi.

Spesso si diffonde, nelle scuole, una percezione dicotomica secondo la quale la matematica risulta essere un mero strumento utilizzato dalla fisica mentre questa solo un contesto per l'applicazione di concetti matematici: se infatti da una parte la matematica viene vista come materia completamente astratta, la fisica assume il ruolo di pura scienza descrittiva.

Nell'articolo vengono quindi elencate alcune possibili soluzioni per ovviare a questo problema, come far concentrare gli studenti sul perché di alcune relazioni e sul fatto che spesso fenomeni molto diversi gli uni dagli altri abbiano equazioni che li descrivono molto simili tra loro, oppure sul come si sia arrivati storicamente a determinare una certa legge o relazione formale: in questo modo potrebbe essere evidenziata la già citata natura retroattiva che c'è tra matematica e fisica.

Concentrarsi sulla relazione esistente tra matematica e fisica porterebbe ad una comprensione più ampia di molti concetti quali pendenza, relazioni tra grandezze o derivate.

Pensare alla matematica e alla fisica come a due discipline distinte è un errore comune nei primi anni di scuola superiore in quanto non si ha ancora un'idea chiara di come le due materie siano strettamente correlate.

Per questo motivo spesso non c'è corrispondenza tra i risultati ottenuti nelle due materie anche quando vengono richieste le stesse conoscenze.

Nella cinematica, un concetto chiave per mostrare quanto le due discipline si siano storicamente co-costruite è quello di limite: uno dei concetti che quando si introduce la cinematica a scuola gli studenti ancora non possiedono ma che andrebbe, nel momento opportuno, introdotto e discusso.

1.4.1 Il concetto di limite

Come esposto dai lavori di Tall (1991), Brousseau (1997) ed altri, i problemi che gli studenti affrontano nell'apprendimento di un concetto si distinguono in tre categorie:

- problemi di natura epistemologica, dovuti ad una difficoltà intrinseca della materia in sé;
- problemi di natura cognitiva, dovuti ai processi di astrazione e concettualizzazione che si rendono necessari nell'apprendimento della materia;
- problemi di natura didattica, dovuti alla natura stessa dell'insegnamento e dell'apprendimento.

Per quanto riguarda il concetto di limite, essendo uno degli argomenti fondamentali della matematica come la conosciamo oggi nonché uno dei temi su cui hanno lavorato tutti i più grandi

matematici dal Seicento in poi, la maggior parte delle difficoltà rientra nella prima delle tre categorie sopra citate.

Infatti, come descritto da Cinti (2013), il concetto stesso di limite è stato al centro dell'attenzione dei maggiori pensatori e scienziati per più di 250 anni, anche se non direttamente.

Partendo da Leibniz fino ad arrivare a Weierstrass la definizione e l'idea del limite in quanto tale è cambiata quasi radicalmente poiché ci si è resi conto della necessità di definire degli assiomi che sviluppassero fondamenta rigorose al metodo del calcolo differenziale sviluppato da Leibniz.

Senza soffermarsi sullo sviluppo storico del concetto di limite possiamo comunque descrivere i passaggi fondamentali che hanno portato alla concezione di limite come la conosciamo oggi.

L'idea di cosa sia un limite è qualcosa che appartiene alla maggior parte delle persone e degli studenti in quanto presente nel linguaggio comune: frasi come “spingersi fino al limite” rendono l'idea di un qualcosa che può essere raggiunto o quantomeno avvicinato, senza che però sia necessario un punto di arrivo.

Questa idea però è fuorviante se si pensa a quello che è il concetto di limite in matematica, ovvero qualcosa che è, non qualcosa che diventa.

La differenza netta tra queste due interpretazioni viene descritta fin dai tempi di Aristotele come infinito potenziale e infinito attuale.

L'infinito potenziale da un senso di dinamicità al limite stesso, lo descrive come una certa grandezza che può aumentare a dismisura nel tempo, mentre invece l'infinito attuale è qualcosa che esiste in maniera indipendente dal tempo, è qualcosa che è e che non subisce variazioni.

Ad esempio, il metodo delle flussioni di Newton dà l'idea di limite come qualcosa di dinamico, mentre per ottenere un'idea di limite come qualcosa di statico bisogna aspettare Weierstrass, Dedekind e Cantor. I lavori di questi ultimi sono risultati fondamentali per lo sviluppo dell'analisi, poiché è proprio grazie a loro che nascono i numeri reali in quanto tali e non come intorni o approssimazioni dei razionali.

Generalmente in un liceo i limiti vengono introdotti tra il quarto e il quinto anno. Questo permette quindi di utilizzare un registro più alto e un approccio più maturo ad un problema che va oltre la semplice difficoltà cognitiva ma che necessita di una conoscenza più approfondita dell'idea che c'è dietro. Utilizzare anche un metodo storico per approcciarsi al problema può essere utile per far sviluppare un ragionamento critico agli studenti prima ancora di rivelargli quello che è il concetto di limite come lo conosciamo oggi, e cercare di far risolvere agli studenti stessi le difficoltà con le quali hanno avuto a che fare matematici come Leibniz, Riemann, Cauchy e tutti gli altri.

Un discorso diverso però deve essere fatto per quanto riguarda l'approccio al problema quando si deve introdurre il concetto di velocità istantanea.

Come già descritto nel paragrafo 1.2, un metodo introduttivo può essere quello di rendere l'idea di velocità istantanea come l'approssimazione via via più precisa del valore che la variabile velocità assume al diminuire dell'intervallo temporale, ovvero al suo tendere a zero.

Questa descrizione, seppur efficace, nasconde in sé l'idea di limite come qualcosa di dinamico, qualcosa che si può raggiungere nel tempo. Il limite in sé invece è statico, è sempre presente, e dipende strettamente dalla continuità della funzione che si sta studiando e dal fatto che la continuità stessa implica l'esistenza dei numeri reali. Dire che all'istante t la velocità assume esattamente il valore v vuol dire che un'istante prima la velocità aveva un valore diverso, che però è aumentato o diminuito in maniera continua fino ad assumere il valore v .

Secondo Cinti però partire subito da una concezione di limite tanto rigorosa e astratta può essere fuorviante per gli studenti, visto che la velocità istantanea viene generalmente introdotta nel secondo liceo. Partire perciò da una definizione dinamica può aiutare nella comprensione del problema, ma bisogna precisare che l'idea stessa di limite è qualcosa di altro, che verrà precisato nel

tempo.

1.5 Metodi e strategie di insegnamento

In conclusione di questa introduzione si discutono metodi e strategie elaborati per l'insegnamento della cinematica di base.

1.5.1 Laboratorio

L'attività di laboratorio è molto utile in quanto permette agli studenti di toccare con mano i problemi affrontati sul piano teorico e perciò di rendere più reali i concetti appresi durante le lezioni: alcuni esempi di esercizi utili possono essere la rotaia a cuscinetto d'aria, la caduta di un grave o il moto lungo un piano inclinato.

Dagli studi di Woolnough (2000) si nota anche come affrontare un esperimento senza avere una guida ben definita permetta agli studenti di scegliere quali siano le grandezze "interessanti" che meglio descrivono quel fenomeno, e quindi di trovare il modo migliore per rappresentarlo sotto forma di grafico.

Il rapporto tra esperimento e grafici aiuta anche gli studenti a problematizzare la relazione che esiste tra funzioni rappresentate sui grafici e il moto stesso. Si nota infatti come molti studenti confondano proprietà del grafico come caratteristiche del moto reale, e quindi descrivano, ad esempio, il moto di un corpo che cade con una retta a pendenza negativa perché il corpo parte dall'alto e arriva a terra (Planinic et al., 2012; Woolnough, 2000; McDermott et al., 1987).

L'esperienza di laboratorio può essere utilizzata in modi diversi e a diverse fasi della spiegazione di un argomento: si può utilizzare come applicazione di strumenti concettuali allo studio di un fenomeno reale dopo che questi sono stati introdotti in classe a livello teorico, oppure si può introdurre l'argomento a partire dall'analisi diretta di un fenomeno e attraverso un processo di schematizzazione, modellizzazione e formalizzazione (come fa ad esempio il PSSC); oppure, ancora, può essere usata per testare i modi di ragionamento degli studenti davanti ad un fenomeno sconosciuto per organizzare il tipo delle lezioni teoriche che andranno a trattare tale argomento. Secondo Woolnough è molto utile, anche se dispendioso in termini di tempo, permettere agli studenti di avvicinarsi al nuovo argomento senza avere conoscenze pregresse, e permettere agli studenti di poter sbagliare autonomamente e quindi di trovare la formulazione corretta del fenomeno senza aiuti esterni.

L'attività di laboratorio deve anche essere capace di far percepire agli studenti la vera natura di quella che veniva chiamata "filosofia naturale", ovvero lo studio dei fenomeni naturali e delle loro cause. Per Besson questa può essere usata per incentivare gli studenti a trovare delle tecniche risolutive proprie e per far nascere in loro un senso critico rispetto alle proprie idee e ai propri ragionamenti.

Una prova sperimentale contro-intuitiva può aiutare a sfatare un'idea errata rispetto ad un argomento, come nel caso della caduta di un grave o della dipendenza tra diverse variabili.

Molto importante è anche l'aspetto storico che alcuni esperimenti possono avere: riuscire a ricavare delle leggi fisiche attraverso materiali facilmente reperibili e di uso comune aiuta gli studenti nell'avvicinarsi alla materia, facendo capire anche quanto la realtà sia permeata nel profondo da fenomeni fisici.

1.5.2 Problem Solving

“La risoluzione di problemi richiede capacità di valutazione, analisi e sintesi, e il possesso di schemi di ragionamento, metodi formali e modelli fisici, che si acquisiscono con lo studio e l’esperienza.”

(Besson, 2015).

L’attività di problem solving aiuta gli studenti nel costruire delle modalità di ragionamento proprie, nel caso in cui però vengano lasciati liberi di scegliere la strada migliore per risolvere il problema sapendo solo il punto di partenza e di arrivo.

Rispetto ad un esercizio classico di fine paragrafo dove lo studente sa già quale formula utilizzare perché sa dove cercare, in un problema vero e proprio la soluzione non è fin da subito esplicita e per raggiungerla deve compiere dei passaggi logici non banali che si basano sia sulle conoscenze teoriche apprese nel corso ma anche su considerazioni generali necessarie per modellizzare un fenomeno e porre il problema in una forma affrontabile con gli strumenti concettuali e formali a disposizione.

Ogni problema in quanto tale presenta delle novità rispetto agli altri già affrontati, così da spingere lo studente ad andare oltre la semplice ripetizione meccanica della formula.

Per imparare a risolvere questo tipo di problemi è necessario che l’insegnante fornisca un insieme di risorse, suggerimenti, metodi e ambienti di apprendimento in cui lo studente possa muoversi per trovare il proprio metodo di risoluzione del problema dato.

In questo caso si va a far lavorare lo studente nella cosiddetta “zona di sviluppo prossimale” descritta da Vygotskij (1934), ovvero si forniscono allo studente gli strumenti indispensabili per risolvere il problema ed alcuni esempi di problemi già risolti per far capire che tipo di ragionamento può essere utilizzato, ma il resto del lavoro viene fatto dallo studente.

Esiste un approccio didattico, il problem-based learning, secondo cui un argomento potrebbe/dovrebbe essere affrontato mediante una sequenza di problemi presi dalla vita reale che accettano risposte differenti e metodi di ragionamento alternativi. L’approccio permetterebbe agli stessi studenti di vedere il problema da punti di vista differenti e di acquisire le conoscenze necessarie alla soluzione del problema. L’approccio prevede che gli studenti imparino anche a discutere tra loro e ad argomentare le proprie idee.

1.5.3 Tecnologia

L’utilizzo della tecnologia è indispensabile nell’insegnamento dei giorni nostri e di quelli a venire. Integrare le proprie lezioni con esempi visivi quali video o immagini di esperimenti permette infatti agli studenti di afferrare i concetti in modo più significativo e di farli propri. Infatti, spesso nell’insegnamento della fisica si ha a che fare con fenomeni che difficilmente possono essere replicati in classe per una serie di motivi quali problematiche economiche o di spazio o di tempo. L’utilizzo di video esplicativi permette agli studenti di assistere ad un numero molto grande di esperimenti e quindi di avere un database fenomenologico molto ampio anche se praticamente si hanno poche possibilità di fare esperienze.

In più, la facilità con cui oggi si possono creare o trovare online programmi finalizzati all’apprendimento interattivo permette agli studenti di avere un numero molto elevato di canali didattici da sfruttare oltre a quelli classici come lezioni frontali o libri di testo.

A questo proposito il Prof. Campari ed io abbiamo realizzato un esperimento molto semplice per poter calcolare il valore dell’accelerazione di gravità mediante l’uso di uno smartphone, di un grave e della carta millimetrata.

L’obiettivo di questo esperimento era quello di ricreare attraverso mezzi più accessibili agli studenti

l'esperimento classico fatto durante il laboratorio di Fisica descritto nel capitolo2, in cui venivano utilizzati un sonar, una calcolatrice grafica e una pallina da ping pong.

Inizialmente i fogli di carta millimetrata vengono affissi su un muro, in maniera da ricreare uno sfondo di riferimento. Poi si procede con il rilascio di un piccolo grave dal primo riferimento segnato sui fogli e si riprende il tutto attraverso uno smartphone. La particolarità sta nel fatto che al giorno d'oggi la quasi totalità degli smartphone che si trovano in commercio riescono a girare i video al rallentatore, e il rapporto tra la velocità reale e quella del video rallentato si stabilisce tra il 4x e l'8x. Questo rapporto può essere modificato tramite le impostazioni del telefono in modo da uniformare il rallenty passando da uno smartphone ad un altro.

Una volta acquisito il video si procede all'analisi frame-by-frame del video per segnare in quali istanti il grave passa sui riferimenti segnati sulla carta millimetrata. Per una buona precisione sono stati segnati dei riferimenti ogni 5 centimetri. L'analisi viene fatta tramite una delle tante applicazioni che si possono scaricare gratuitamente dagli store online che permette di analizzare appunto frame per frame il video.

Infine basta suddividere gli intervalli temporali per il rapporto di rallenty e mediante le formule classiche della cinematica si ottiene il valore di a , che nel nostro caso è risultato essere $9,84 \text{ m/s}^2$. Gli errori da considerare sono dovuti alla risoluzione della videocamera e al piccolo effetto di parallasse che si viene a generare tra il grave e il foglio sullo sfondo. Il secondo può essere evitato posizionando la videocamera alla metà del percorso segnato sulla carta millimetrata, in modo da far annullare per differenza la parallasse superiore con quella inferiore; per il primo invece basta prendere un grave di un colore che faccia molto contrasto con lo sfondo scelto.

In questo modo gli studenti, utilizzando il proprio smartphone, percepiscono il fenomeno fisico come molto più vicino alla loro esperienza quotidiana. In più, calcolando autonomamente gli intervalli temporali necessari al grave per passare da un riferimento al successivo si accorgono di come il tempo necessario per percorrere la stessa distanza diminuisca al crescere del tempo di caduta del grave in maniera costante.

Capitolo 2

Progettazione di uno studio empirico: contesto, strumenti e metodi

In questo paragrafo si descrive uno studio effettuato su un campione di studenti del corso di scienze biologiche di Bologna, progettato come “riproposizione” di uno studio condotto dai ricercatori Ceuppens et al. (2019) su un campione di circa 250 studenti belga di prima liceo.

In particolare, si è deciso di utilizzare il questionario elaborato dai ricercatori belgi perché finalizzato a mettere in evidenza l’origine di difficoltà nella soluzione di problemi molto note in letteratura e capire se alla base di tali difficoltà ci siano difficoltà di tipo matematico o difficoltà più tipicamente fisiche, inerenti alla modellizzazione e interpretazione del fenomeno.

L’obiettivo dello studio è quello di analizzare le difficoltà degli studenti di scienze biologiche mediante un confronto con risultati ottenuti in un’indagine statisticamente significativa.

Nel condurre l’analisi e il confronto si è posta particolare attenzione al fatto che i due campioni fossero diversi per livello scolastico.

2.1 Il contesto e il campione degli studenti

Lo studio riportato come oggetto della tesi è stato effettuato su 28 studenti del primo anno del corso di laurea in Scienze Biologiche presso l’Università di Bologna.

In particolare ho seguito come tutor i corsi di laboratorio di fisica 1 tenuti dai prof. Marulli Federico, Vignali Christian e Campari Enrico.

Il corso di Fisica è articolato in 3 moduli didattici: il primo (7 CFU), teorico, è costituito da lezioni frontali accompagnate dallo svolgimento e discussione di semplici esercizi precedentemente proposti agli studenti. Il secondo e il terzo modulo, entrambi di 1 CFU, sono di carattere sperimentale e prevedono attività di laboratorio (secondo modulo) e analisi dati (terzo modulo).

Ogni studente doveva svolgere tre “turni”, ognuno di questi rappresentato dallo svolgimento di una attività sperimentale e la sua analisi dati. I turni riguardavano rispettivamente una esperienza di meccanica, una di termologia e una di ottica. La durata di ogni attività era di 2 ore.

I laboratori sono stati svolti nel Dipartimento di Fisica e Astronomia in Via Irnerio 46, mentre l’analisi dati nel plesso in Via Belmeloro 8.

In ogni sessione erano presenti circa 25 studenti, i quali venivano suddivisi in gruppi di lavoro di 4/5 studenti.

All’inizio di ogni turno il professore designato (Marulli per gli studenti con i cognomi A-L e Campari per gli M-Z) spiegava la prova che gli studenti avrebbero svolto nelle successive due ore, mentre una lezione preparatoria per ogni esperimento veniva fatta durante le lezioni frontali.

Questo studio è stato possibile grazie al bando delle 150 ore che mi ha permesso di svolgere un lavoro di tutoraggio e assistenza durante questo corso, insieme al tutor Gesuato A. e agli altri studenti assegnatari della borsa, ovvero Casavecchia B., Rinaldi P. e Zangrandi F.

La prova di meccanica aveva come scopo la misurazione della costante g attraverso una strumentazione composta da un sonar collegato ad una calcolatrice grafica per la raccolta dati e una pallina da ping-pong utilizzata come grave (Fig. 2.1).

Gli studenti dovevano quindi far rimbalzare la pallina a terra sotto il sonar e successivamente, partendo dal grafico *Distanza pallina-sonar* (t) (Fig. 2.2), ricavare dapprima la velocità della pallina e da questa il valore dell’accelerazione di gravità.

Per facilitare i calcoli si sceglieva un solo intervallo del moto della pallina, ovvero quello tra due punti consecutivi in cui la pallina toccava terra. In questo modo si otteneva nel grafico $v(t)$ una semplice retta.

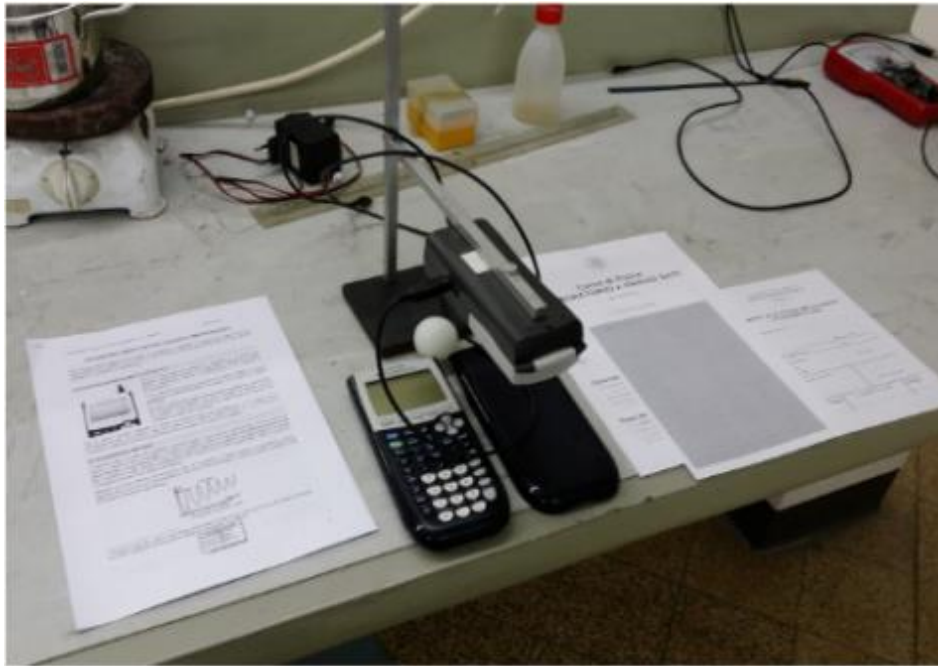


Fig. 2.1 Apparato sperimentale fornito per la prova.

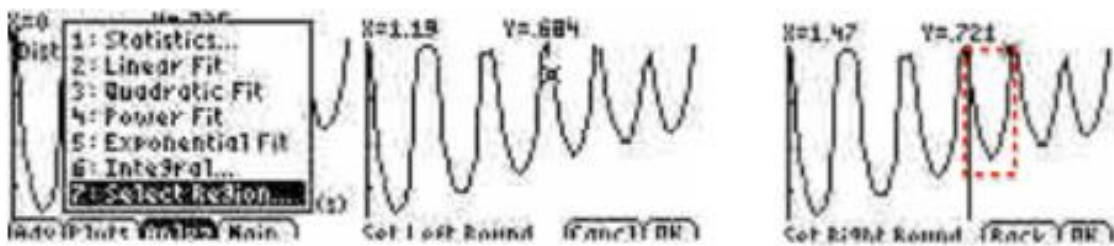


Fig. 2.2 Selezione dell'intervallo scelto sul grafico Distanza pallina - sonar

Ogni gruppo aveva a disposizione una scheda con il procedimento dell'esperienza e con alcune domande alle quali bisognava rispondere durante le prove per verificare l'esattezza di ciò che si stava facendo.

L'attività è stata monitorata ai fini dell'indagine riportata in questa sede. Nello specifico, ho deciso di articolare il suo monitoraggio in due fasi:

- osservazione;
- discussione (focus group).

Durante l'osservazione mi ero dato la regola di non intervenire. Gli studenti erano liberi di condurre l'esperienza, raccogliere dati e rispondere alle domande riportate sulla scheda. Durante l'osservazione ho potuto individuare i gruppi che avevano particolari problemi con l'interpretazione fisica dell'esperienza.

Le domande presenti nella scheda sono riportate nell'Appendice A e avevano l'obiettivo di far emergere i maggiori nodi concettuali relativi all'esperienza.

In ogni turno di laboratorio sono stati individuati due o tre gruppi coi quali ho condotto una discussione tra la fase di esplorazione del fenomeno e quella di spiegazione (risposta alle domande). L'impostazione che ho scelto per la discussione è stata la stessa per ogni gruppo, in maniera tale da poter confrontare anche le reazioni dei vari gruppi agli stessi stimoli.

In particolare avevo scelto alcune domande-guida focalizzate sui due aspetti che erano emersi dalla mia osservazione come i più delicati: la variazione della velocità nel tempo e la relazione tra segno della velocità e l'accelerazione di gravità.

Dopo aver ascoltato le loro motivazioni si procedeva con il calcolo esplicito dell'accelerazione dal grafico $v(t)$.

2.2 Interviste di gruppo

Il metodo scelto per la discussione è stato quello di interviste di gruppo (*focus group*), durante le quali il mio ruolo era quello di stimolo e moderatore nella discussione.

Nonostante i gruppi fossero composti da 4 o 5 persone, alla discussione ne partecipavano attivamente circa 2 o 3, solitamente coloro che, avendo fatto un liceo scientifico, si sentivano più a loro agio a rispondere a quel tipo di domande. Purtroppo, non mi è stato possibile trovare un modo per superare questa difficoltà, perché anche su mio esplicito invito gli altri studenti si rifiutavano di partecipare.

Attraverso le interviste sono emersi, come ci si aspettava, due problemi principali, relativi alla scelta del sistema di riferimento e alla gestione del segno della velocità: entrambi i problemi toccano aspetti cruciali di come gli studenti si relazionano con il formalismo matematico applicato all'esperienza diretta di un moto.

L'analisi dei focus-group ha confermato la presenza delle difficoltà già emerse durante l'osservazione e, come valore aggiunto, ha permesso di individuare gli approcci degli studenti, utile per capire quali fossero i ragionamenti utilizzati per risolvere semplici problemi relativi alla cinematica di base.

I risultati sono riportati a commento della discussione sui questionari nel capitolo successivo.

2.3 Il questionario

Una volta finita la prova, alcuni studenti si sono resi disponibili a partecipare alla fase successiva dello studio, ovvero a rispondere ad un questionario. Il gruppo di studenti volontari era formato da 28 studenti, di cui 18 ragazze e 10 ragazzi, 21 provenienti dal Liceo Scientifico, 3 dal Liceo Classico, 1 dal Liceo Linguistico, 2 dal Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, 1 dall'Istituto Tecnico Agrario. Le scuole da cui provenivano sono quasi tutte dell'Emilia-Romagna (Bologna, Cesena, Forlì, Imola, Modena, Ravenna, Rimini), con studenti provenienti anche da Grosseto, Trento, Bolzano, Agrigento, Verona.

A loro è stato somministrato un questionario tratto dall'articolo "*9th grade students' understanding and strategies when solving $x(t)$ problems in 1D kinematics and $y(x)$ problems in mathematics*" di Ceuppens et al (2019). Il campione del loro studio era di 253 studenti presi dalle 9th grade classes, ovvero studenti di età compresa tra i 14 e i 15 anni, quindi l'equivalente della nostra prima Superiore.

Il questionario è strutturato in maniera tale da poter confrontare le risposte degli studenti a domande analoghe su funzioni lineari che riguardano o la cinematica unidimensionale (K) (la funzione $[x(t)]$) o la matematica (M) (la funzione $[y(x)]$) (cfr. Fig. 2.3 e tabella 1).

Le domande su tali funzioni sono state costruite in modo molto stringente:

- potevano avere o l'obiettivo di Determinare il valore di una grandezza o di Confrontare due situazioni,
- potevano fare riferimento o alla rappresentazione grafica (G) o a quella algebrica espressa da una formula (F),
- potevano fare riferimento o al segno positivo o negativo di una grandezza,
- potevano riguardare o il concetto di pendenza o quello di intercetta sull'asse delle Y.

Questa suddivisione permette perciò di avere 12 domande per ogni ambito (K o M) e di poterle confrontare molto facilmente. Di fatto le uniche cose che cambiano tra le domande M e le K sono il contesto, espresso del nome degli assi e dai nomi delle variabili. In Fig.2.3 è riportato lo schema riassuntivo della divisione delle domande, mentre in Fig. 2.4 un esempio della variazione tra una domanda della sezione K e la corrispettiva della sezione M.

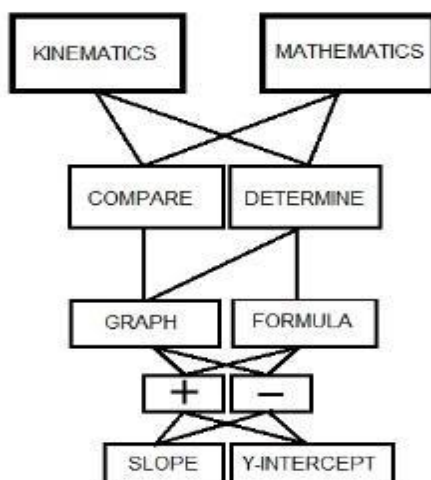
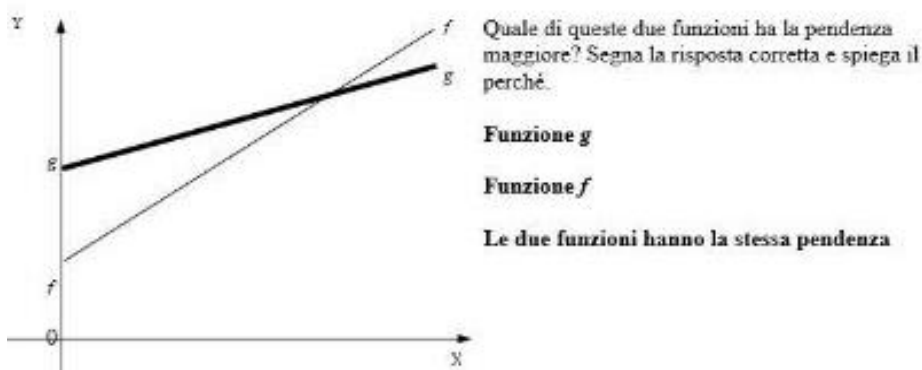


Fig. 2.3 Schema riassuntivo della formulazione/articolazione delle domande del questionario

M2

La figura mostra il grafico di due funzioni g e f .



K2

Due automobili A e B si muovono lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione x in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.

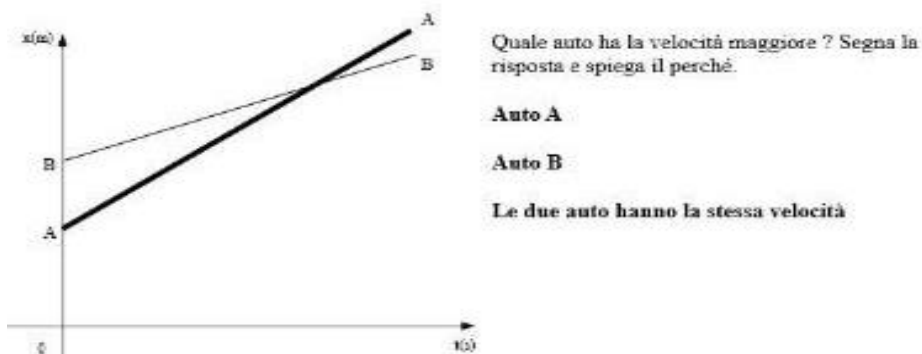


Fig. 2.4 Confronto tra domande K2 e M2. Si noti come la formulazione dei problemi sia analoga e come le richieste allo studente per la risoluzione dei due problemi siano le stesse.

L'obiettivo del test è quello di confrontare il diverso approccio al problema utilizzato dagli studenti nei due diversi ambiti di riferimento (M o K).

Nell'articolo l'analisi è stata eseguita attraverso equazioni di stima generalizzata (GEE), ossia un adattamento di analisi di regressione logistica per confrontare tra loro le domande appartenenti ad una stessa categoria. Un'analisi più dettagliata su queste equazioni è stata fatta nell'Appendice C.

Ciò che emerso dall'articolo è che la performance nella maggior parte delle domande di Matematica è significativamente migliore della controparte sulla Cinematica, ma anche che molti degli esercizi più facili o più difficili sono di Cinematica. Gli esercizi che hanno totalizzato il maggior numero di risposte esatte sono quelli che prevedevano un confronto tra rette con pendenze positive, mentre hanno raggiunto i risultati peggiori nelle domande in cui bisognava determinare o confrontare una delle funzioni con pendenze negative.

In particolare è risultata una differenza netta tra i problemi di fisica nei quali bisogna ricavare la velocità (di un ciclista o di un treno) data l'equazione del moto rispetto ai corrispettivi matematici in cui bisogna ricavare il coefficiente angolare di una retta data la sua equazione.

Quanto detto è riassunto nella Tabella 1, ripresa direttamente dall'articolo, in cui il coefficiente P indica la difficoltà della domanda in base alle risposte date dagli studenti e SD la sua deviazione standard.

Il coefficiente P è calcolato come

$$P = \frac{N_c}{N}$$

con N_c numero di risposte corrette e N numero di risposte totali, ovvero 253.

Q	Representation	Task	Slope sign	Concept	P	SD
K1	Graph	Compare	+	y intercept	0.88	0.33
K2*	Graph	Compare	+	Slope	0.92	0.28
K3	Graph	Compare	-	y intercept	0.83	0.38
K4*	Graph	Compare	-	Slope	0.13	0.34
K5	Graph	Determine	+	y intercept	0.74	0.44
K6*	Graph	Determine	+	Slope	0.48	0.50
K7*	Graph	Determine	-	y intercept	0.66	0.47
K8*	Graph	Determine	-	Slope	0.14	0.35
K9	Formula	Determine	+	y intercept	0.37	0.48
K10*	Formula	Determine	+	Slope	0.11	0.32
K11*	Formula	Determine	-	y intercept	0.35	0.48
K12*	Formula	Determine	-	Slope	0.05	0.21
M1	Graph	Compare	+	y intercept	0.53	0.50
M2*	Graph	Compare	+	Slope	0.85	0.36
M3	Graph	Compare	-	y intercept	0.54	0.50
M4*	Graph	Compare	-	Slope	0.41	0.49
M5	Graph	Determine	+	y intercept	0.39	0.49
M6*	Graph	Determine	+	Slope	0.70	0.46
M7*	Graph	Determine	-	y intercept	0.37	0.48
M8*	Graph	Determine	-	Slope	0.67	0.47
M9	Formula	Determine	+	y intercept	0.36	0.48
M10*	Formula	Determine	+	Slope	0.74	0.44
M11*	Formula	Determine	-	y intercept	0.36	0.48
M12*	Formula	Determine	-	Slope	0.71	0.45

Tabella 1 Classificazione delle diverse domande del questionario tratta dall'articolo di Ceuppens et al. (2019).

Prima di essere sottoposto agli studenti del corso di Scienze Biologiche il questionario è stato tradotto e riordinato in maniera da non far emergere esplicitamente la suddivisione prima descritta, mantenendo però l'ordine cinematica/matematica.

Il motivo di ciò è semplice: come emerso dalle interviste, gli studenti hanno memorizzato nel corso dei loro anni di scuola superiore le formule matematiche riguardanti la retta, ma non riescono a riconoscere lo stesso formalismo matematico nelle equazioni fisiche. Per questo motivo se avessero affrontato prima la parte matematica avrebbero risolto i problemi fisici più per analogia o in modo meccanico che non attraverso l'attribuzione di significato fisico alle strutture e ai concetti matematici intrinseci alla rappresentazione dei fenomeni riportati negli esercizi.

Capitolo 3

Analisi dell'indagine e principali risultati

Il procedimento di analisi dei dati raccolti con gli studenti di Scienze Biologiche con il questionario è stato di tipo bottom-up, partendo dai dati e dalle principali evidenze. Si è, in particolare, cercato di riconoscere i casi particolari più interessanti, per poi generalizzare il risultato, interpretando l'essenza e l'origine di tali difficoltà.

Per garantire la confrontabilità dei risultati con quelli dei ricercatori belgi, si è scelto di valutare come errate le risposte mancanti o sbagliate e non motivate, mentre le risposte giuste non motivate sono state considerate corrette, dando agli studenti il beneficio del dubbio.

Successivamente si è cercato di individuare le difficoltà comuni tra gli studenti. Per fare questo, si è scelto un approccio fenomenologico, mirato a riconoscere le principali tipologie di difficoltà. Il risultato ha portato a dividere in: difficoltà di calcolo, difficoltà nell' interpolazione, difficoltà relative al segno e difficoltà nell' impostazione del problema. Tralasciando la prima, non rilevante per l'obiettivo dell'indagine, si analizzano ora le altre tipologie, confrontando i risultati con quelli ottenuti dal gruppo belga.

Poiché il campione dello studio è esiguo (28 studenti) e formato da studenti volontari, i risultati di questo lavoro non possono essere ritenuti statisticamente significativi e, quindi, rappresentativi dell'intero corso. Per questi motivi si è scelto di riportare i risultati sotto forma di frazioni (es. 14/28 risposte esatte) al posto di usare le percentuali come fatto nell'articolo.

Nonostante ciò, mettendo insieme i risultati dei questionari e le analisi delle osservazioni delle prove di laboratorio e dei *focus group*, è possibile concludere che l'andamento degli studenti rispecchia quello evidenziato dall'articolo, ovvero gli studenti trovano maggiori difficoltà quando hanno a che fare con rette a pendenza negativa; in più, dall'osservazione delle prove di laboratorio si è visto come la maggior parte degli studenti trovi difficoltà nel comprendere i rapporti tra il cambiamento di segno della velocità della pallina che rimbalza e l'accelerazione di gravità. Infatti, la quasi totalità degli studenti aveva difficoltà a rispondere alle domande della scheda del turno di laboratorio in cui si chiedevano informazioni sul segno della velocità e sull'accelerazione di gravità, ovvero il terzo blocco di domande, riportate in Fig. 2.5.

Rispondi in gruppo alle seguenti domande:

- L'andamento della velocità è quello che ti aspettavi?
- Quale parte del grafico corrisponde al moto della pallina quando si muove quale al moto quando si muove **verso il basso**?
- Perché la velocità assume sia valori positivi che negativi?
- Cerca quali **informazioni sulla accelerazione** della pallina puoi ricavare o velocità nel tempo in cui la pallina è in volo: pensi che l'accelerazione sia Che abbia lo stesso valore durante la salita e la discesa? Come potresti c;

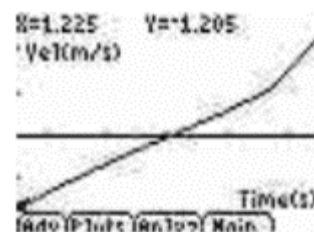


Fig.3.1 Domande itineranti tratte dalla scheda del turno di laboratorio e grafico $v(t)$ ottenuto dalla calcolatrice..

Le difficoltà maggiori nella risposta alle domande si avevano quando gli studenti provavano a spiegare il perché del cambio del segno della velocità.

Questo era dovuto al fatto che il tratto di moto scelto per l'analisi era quello tra due rimbalzi della pallina. Quindi la pallina arrivava alla sua massima altezza per poi tornare a terra, cambiando il segno della velocità.

La maggior parte degli studenti motivava questo cambio dicendo che era il segno dell'accelerazione di gravità a cambiare, in quanto secondo loro l'accelerazione di gravità si rivolgeva verso l'alto quando la pallina saliva e verso il basso quando scendeva.

A questo punto facevo notare che, se il verso dell'accelerazione di gravità fosse stato sempre concorde al verso del moto, la pallina avrebbe continuato a salire senza sosta, convincendo così gli studenti sul fatto che il verso dell'accelerazione di gravità fosse sempre lo stesso.

È interessante analizzare il fatto che gli studenti si riferissero all'accelerazione di gravità come "costante g " mentre sostenevano l'ipotesi del cambiamento del suo segno.

Si procede ora con la discussione delle principali categorie di difficoltà emerse dalla risoluzione degli esercizi del questionario, ovvero difficoltà di interpolazione, difficoltà dovute al segno e difficoltà nell'impostazione del problema.

3.1 Difficoltà di interpolazione

Questo tipo di difficoltà emerge principalmente negli esercizi in cui è richiesto di determinare velocità o la posizione iniziale a partire dal grafico, come il K4, K8 e M4. In questi esercizi gli studenti fanno confusione tra *asse x* e *asse y* quando devono estrapolare i dati da utilizzare per il calcolo delle grandezze oggetto del problema. La percentuale media di errore in questa tipologia di esercizi non è molto alta (circa 5%), ma c'è una differenza netta tra esercizi a pendenza positiva rispetto a quelli con pendenza negativa: se negli esercizi K5 e K6 questi errori sono praticamente assenti, nel K8 emergono in maniera netta, con più di un quinto di risposte errate.

L'origine dell'errore sta principalmente nella scelta dei punti da interpolare e nel non riuscire ad utilizzarli nel giusto ordine.

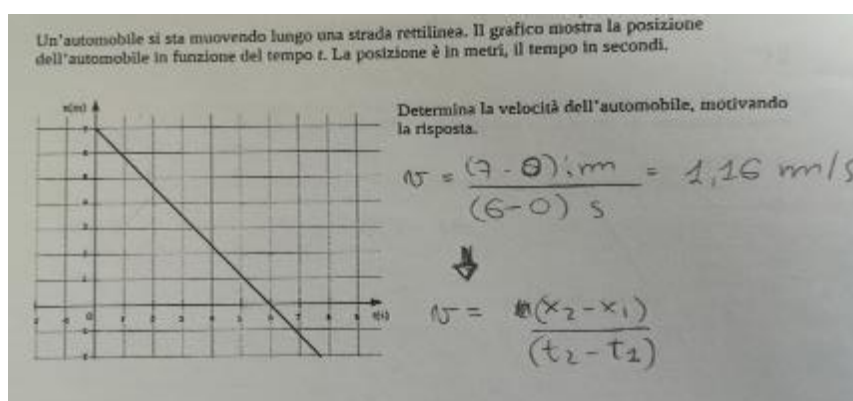


Fig. 3.2 Esercizio K8. Si noti come la formula è esatta ma la sostituzione dei valori è sbagliata.

Come si può notare dall'esercizio la scrittura formale dell'equazione risulta corretta, mentre viene commesso l'errore nella sostituzione dei valori numerici. Ciò che probabilmente porta all'errore è la

scrittura degli intervalli tramite il Δ che comunemente per gli studenti prevede la differenza tra il valore più grande e quello più piccolo e quasi mai il viceversa. Al contrario, nella controparte matematica la percentuale media è vicina allo 0.

3.2 Difficoltà relative al segno

Il discorso relativo alle difficoltà riscontrate nelle domande che contenevano confronti tra rette con pendenze negative merita una certa attenzione.

Questo tipo di difficoltà può essere considerato come una conseguenza dell'errata interpolazione per quanto riguarda gli esercizi in cui viene richiesta la determinazione di una variabile (come nell'esercizio K8), ma assume un ruolo centrale negli esercizi che chiedono di confrontare tra loro due moti rettilinei rappresentati nel grafico. Vediamo un esempio.

Nell'esercizio K4 si chiede di confrontare la velocità di due ciclisti. Circa la metà degli studenti nel rispondere ha considerato solo il modulo, senza considerare il segno, come in Fig. 3.3

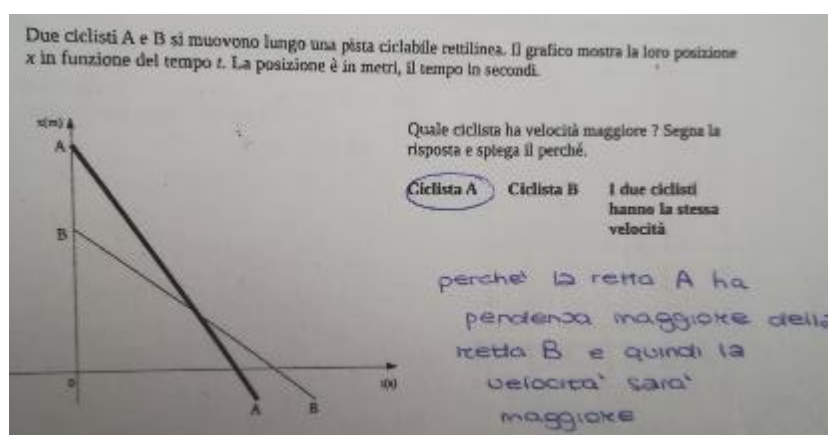


Fig. 3.3 Esercizio K4. Nella spiegazione della risposta è chiaro il fatto che non si tiene conto del segno delle due pendenze ma solo dei loro moduli.

Questo tipo di difficoltà è stato riscontrato anche nello studio di riferimento, in quanto nella lingua belga come in quella italiana non c'è differenza tra le parole "velocity" e "speed".

Nella lingua inglese infatti si utilizza il primo termine quando ci si riferisce solo al modulo della velocità, mentre il secondo indica la grandezza vettoriale.

Quando perciò si chiede "Quale ciclista ha velocità maggiore?" alcuni studenti si riferiscono al modulo della grandezza, altri alla grandezza vettoriale.

Poiché nella traduzione del questionario la domanda è rimasta formalmente uguale entrambe le risposte sono da considerarsi corrette, ma per avere un risultato confrontabile con l'articolo nella Tabella 2 le risposte senza segno sono considerate errate.

Lo stesso risultato viene riscontrato nell'M4, dove circa la metà degli studenti non inserisce il segno nella risposta.

Queste due domande, tuttavia, richiederebbero una ulteriore riflessione sia nella formulazione sia nell'analisi delle risposte. Infatti i risultati sono anomali e mettono in evidenza più un problema metodologico che una vera e propria difficoltà degli studenti.

3.3 Difficoltà nell'impostazione del problema

In questa categoria rientrano principalmente due esercizi, il K10 e il K12, riportati in Fig. 3.4 e 3.5. Nell'esercizio viene richiesto di individuare la velocità del corpo data una formula del tipo

$$x = x_0 + v \cdot t.$$

K10

Un treno si sta muovendo lungo un binario rettilineo. La posizione x del treno in funzione del tempo t è data da

$$x = 4 + 8t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.
Determina la velocità del treno. Spiega la tua risposta.

Fig. 3.4 Testo dell'esercizio K10.

L'obiettivo di questo esercizio è verificare se lo studente riconosce in questa equazione la relazione tra due grandezze, posizione e tempo, di un oggetto che si sta muovendo con velocità negativa e che partiva da una posizione iniziale diversa da zero. In particolare, non riconoscevano che questa equazione del moto già inglobava informazioni quali la posizione iniziale dell'oggetto e la sua velocità.

In almeno la metà dei casi la legge oraria non viene riconosciuta, e questo ha portato gli studenti a considerarla come una semplice equazione a due incognite, da cui il valore della velocità andava ricavato algebricamente. Come si può notare dalla Fig. 3.5, gli studenti infatti cercano di sostituire la x dell'equazione con quella della legge oraria di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme con posizione iniziale nulla. A parte l'errore concettuale di partenza, questo procedimento li porta a dover fare ipotesi sul valore di una delle incognite (in genere il tempo).

Un'automobile si sta muovendo lungo una strada rettilinea. La posizione x della macchina in funzione del tempo è data da

$$x = 3 - 12t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.

Determina la velocità dell'auto. Spiega la tua risposta.

$3 - 12t = v \cdot t$

$$v = \frac{3 - 12t}{t} = \frac{3(1 - 4t)}{t}$$

Per $t = 1s$ $v = -9$
 $t = 2s$ $v = -\frac{21}{2}$
.....

La velocità è sempre più negativa con il passare del tempo e quindi diminuisce

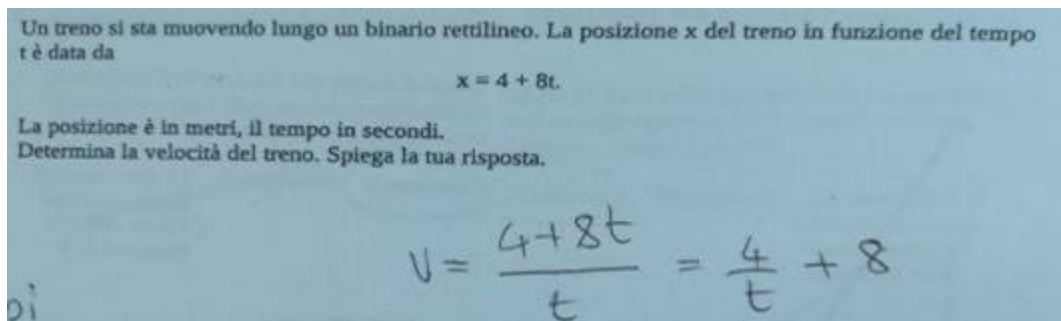


Fig. 3.5 Esercizi K10 (sopra) e K12 (sotto). In entrambi si nota l'errore di base che sta nel non riconoscere la legge del moto nell'equazione.

La percentuale di questo tipo di errore in questi due esercizi è molto alta (circa un terzo degli studenti), mentre nella controparte matematica, dove data un'equazione del tipo

$$y=6+5x$$

si chiedeva di determinare la pendenza della funzione, è sia nell'M10 che nell'M12 dello 0%. Questo dimostra che gli studenti faticano a riconoscere il formalismo matematico nelle equazioni che descrivono un fenomeno fisico, mentre non hanno difficoltà a individuare in un'equazione matematica il parametro richiesto.

Ciò può essere dovuto al fatto che durante tutto il periodo della scuola superiore in matematica vengono trattate equazioni e funzioni lineari, mentre invece le leggi orarie non vengono più riprese dal secondo anno di Scuola Superiore in poi.

3.4 Confronto dei risultati

Una volta analizzati i questionari e fatto un controllo delle tipologie di errori commessi dagli studenti, i risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti dall'articolo per delineare degli eventuali tratti comuni.

Nell'articolo le risposte sono state analizzate attraverso le equazioni di stima generalizzate (GEE), che vengono descritte nell'Appendice C.

In questo lavoro, dato il basso numero di questionari, ci si è basati su uno studio caso per caso. Dall'articolo si evince che la maggior parte degli errori commessi nella parte del questionario riguardante la cinematica sono riconducibili agli esercizi in cui sono presenti velocità negative, e che di frequente gli studenti confondono i rapporti tra intervalli con i rapporti tra punti.

Dalla parte matematica invece esce una tendenza a confondere tra loro gli assi quando si ha a che fare con la determinazione delle intercette.

Tra gli studenti belgi e quelli universitari si nota una relazione tra gli esercizi, in quanto entrambi hanno totalizzato i punteggi più bassi negli stessi esercizi, commettendo gli stessi errori: la stessa tipologia di errori è infatti riscontrabile nei test somministrati agli studenti universitari, seppure con

una frequenza minore rispetto a quella dell'articolo. Il confronto è riportato nella Tabella 2, dove i coefficienti P esprimono la quantità di risposte esatte per ogni domanda.

DOMANDE	P _{ITALIANI}	P _{BELGI}	DOMANDE	P _{ITALIANI}	P _{BELGI}
K1	27/28	0.88	M1	27/28	0.53
K2	26/28	0.92	M2	26/28	0.85
K3	27/28	0.83	M3	25/28	0.54
K4	12/28	0.13	M4	10/28	0.41
K5	26/28	0.74	M5	26/28	0.39
K6	23/28	0.48	M6	20/28	0.70
K7	23/28	0.66	M7	23/28	0.37
K8	14/28	0.14	M8	21/28	0.67
K9	26/28	0.37	M9	26/28	0.36
K10	18/28	0.11	M10	27/28	0.74
K11	25/28	0.35	M11	24/28	0.36
K12	13/28	0.05	M12	27/28	0.71

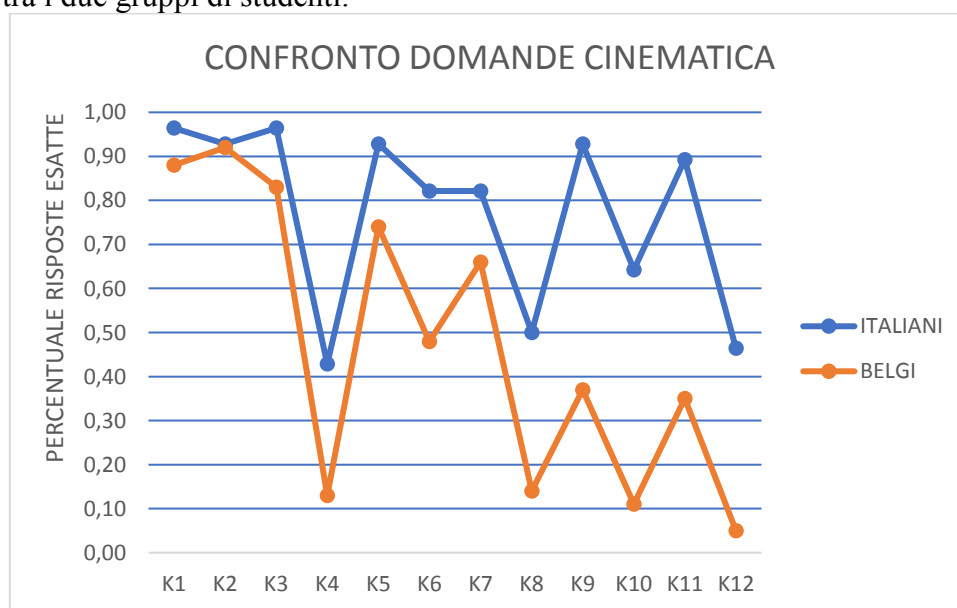
Tabella 2 Confronto dei risultati dell'indagine con quelli dell'articolo originale.

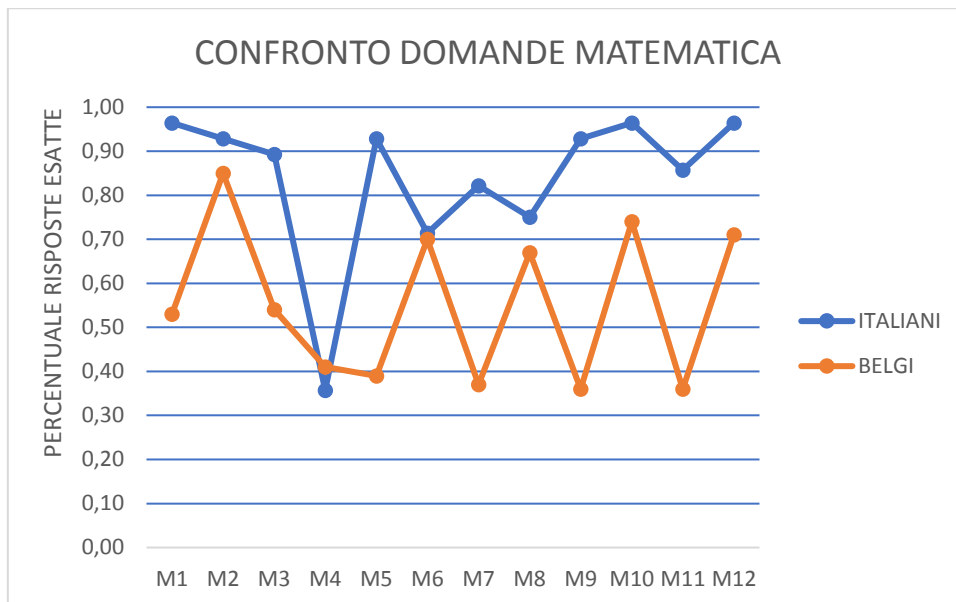
Ciò che si evince dalla Tabella 2 è che generalmente gli esercizi in cui gli studenti italiani hanno più difficoltà sono critici anche per i belgi, mentre non è sempre vero il contrario.

Per la parte di cinematica le domande nelle quali entrambi i gruppi di studenti hanno incontrato le maggiori difficoltà sono la K4, la K8, la K10 e la K12.

Per la parte matematica invece le uniche difficoltà comuni sono state riscontrate nella M4, mentre invece nelle domande in cui gli studenti belgi hanno avuto più problemi come M5, M7, M9 o M11 gli studenti italiani non hanno avuto difficoltà evidenti.

Nei grafici 3.1 e 3.2 viene rappresentato il confronto tra i trend delle risposte in fisica e in matematica tra i due gruppi di studenti.





Graf. 3.1 (sopra) e 3.2 (sotto). Confronto tra gli andamenti delle risposte dei due gruppi di studenti.

Questi risultati evidenziano ancora di più come i legami tra le conoscenze matematiche e la loro applicazione nella fisica siano molto labili, in quanto nella sezione di Matematica il campione dell'articolo in questione non ha dimostrato mancanze gravi o errori di concetto: in tutte le domande (tranne per la M4, di cui si è già parlato) almeno 20 studenti hanno dato la risposta esatta, dimostrando un livello medio molto alto rispetto al gruppo belga.

In realtà questo risultato non deve sorprendere, visto che gli studenti universitari portano con loro tutte le conoscenze matematiche apprese nei 5 anni di scuola superiore.

Una possibile spiegazione delle differenze di rendimento sta nel fatto che al secondo liceo si hanno conoscenze matematiche molto più scarse di quelle che si possiedono arrivati al primo anno di Università, mentre invece poiché gli argomenti trattati in fisica non vengono ripresi nel corso degli anni di liceo la possibilità che alcune lacune siano rimaste è decisamente maggiore.

Capitolo 4

Conclusioni

La finalità di questo studio era quella di verificare se i tratti caratteristici rilevati nell'articolo di Ceuppens et al. (2019), cioè il debole legame tra le conoscenze di matematica e quelle di cinematica di base fossero riscontrabili in un corso universitario non prettamente fisico o matematico, come può essere quello di Scienze Biologiche.

Nonostante nella prova di laboratorio siano stati osservati circa un centinaio di studenti, per motivi logistici e organizzativi il questionario è stato somministrato a 28 persone, di cui 18 ragazze e 10 ragazzi. Di queste 28 persone, 21 provenivano da licei scientifici, 2 da corsi di scienze applicate, 3 da licei classici, 1 da liceo linguistico e 1 da istituto agrario.

Dato il ristretto numero del campione e i metodi di selezione, i dati non sono stati analizzati seguendo metodi statistici ma utilizzando un approccio fenomenologico. Nonostante la differenza di età e di contesto, il principale risultato riguarda una concordanza con i risultati dell'indagine belga: le domande che presentano maggiori difficoltà riguardano la cinematica. Gli studenti mostrano di padroneggiare i concetti di pendenza e di intercetta in matematica ma non sanno riconoscerne il significato fisico in rappresentazioni formali di moti. Particolari difficoltà sono quindi emerse nel concetto di pendenza negativa.

In più, dalle indagini svolte durante la prova di laboratorio sono emerse alcune problematiche di natura concettuale sulle quali varrebbe la pena concentrarsi, come il segno delle grandezze in relazione al sistema di riferimento:

non avendo un'idea chiara di come porsi in un sistema ad assi ribaltati (nei grafici ottenuti dalla calcolatrice grafica venivano messi in relazione il tempo sulle ascisse con la distanza tra pallina e sonar sulle ordinate), molti studenti non riuscivano a dare una spiegazione al perché la pallina avesse sia velocità positive che negative. Pur di trovare una spiegazione a questo fenomeno la quasi totalità di loro dava come motivazione il cambio di segno dell'accelerazione di gravità, mostrando così alcuni dubbi sulla loro concezione di costante.

Questo tipo di ragionamento potrebbe essere dovuto al fatto che quando gli studenti hanno a che fare con l'accelerazione di gravità non pensano che questa derivi dalla legge di gravitazione universale, ma che sia una proprietà del corpo che viene acquisita durante il moto.

Il fatto che poi l'ipotetico cambio del segno dell'accelerazione di gravità venisse dato come motivazione del cambio del segno della velocità dimostra una non chiara idea del concetto di sistema di riferimento, e di come questo possa influire sulla misurazione delle variabili di un certo fenomeno.

Appendice A

Rispondi in gruppo a queste domande:

- Che forma ha il grafico selezionato?
- A quale funzione matematica pensi che possa assomigliare?
- Che tipo di moto ti aspetti che sia quello della pallina nell'intervallo selezionato?
- Come ti aspetti che sia il grafico della velocità nello stesso intervallo di tempo?

Rispondi in gruppo a queste domande:

- A che cosa corrispondono i valori di X e Y che compaiono nella parte superiore del grafico?
- Che cosa rappresentano i valori **massimi** di distanza nel grafico?
- Che cosa rappresentano i valori **minimi**?

Rispondi in gruppo alle seguenti domande:

- L'**andamento della velocità** è quello che ti aspettavi?
- Quale parte del grafico corrisponde al moto della pallina quando si muove **verso l'alto** e quale al moto quando si muove **verso il basso**?
- Perché la velocità assume sia valori positivi che negativi?
- Cerca quali **informazioni sulla accelerazione** della pallina puoi ricavare dall'andamento della velocità nel tempo in cui la pallina è in volo: pensi che l'accelerazione sia costante o variabile? Che abbia lo stesso valore durante la salita e la discesa? Come potresti calcolarne il valore?

Rispondi in gruppo alle seguenti domande:

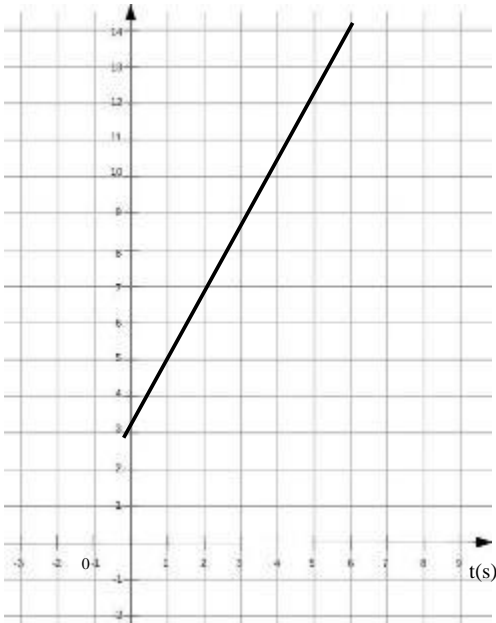
- Il valore trovato era prevedibile considerando che si tratta di un moto di caduta libera?
- Se tu avessi selezionato un diverso intervallo di tempo, corrispondente ad un diverso rimbalzo della pallina, pensi che avresti ottenuto un valore uguale o diverso dell'accelerazione? Perché?

Appendice B

Questionario per tesi

K6

Un treno si sta muovendo lungo un binario rettilineo. Il grafico sottostante mostra la posizione x del treno in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Determina la velocità del treno. Spiega la tua risposta.

K11

Un'automobile si sta muovendo lungo una strada rettilinea. La posizione x della macchina in funzione del tempo è data da

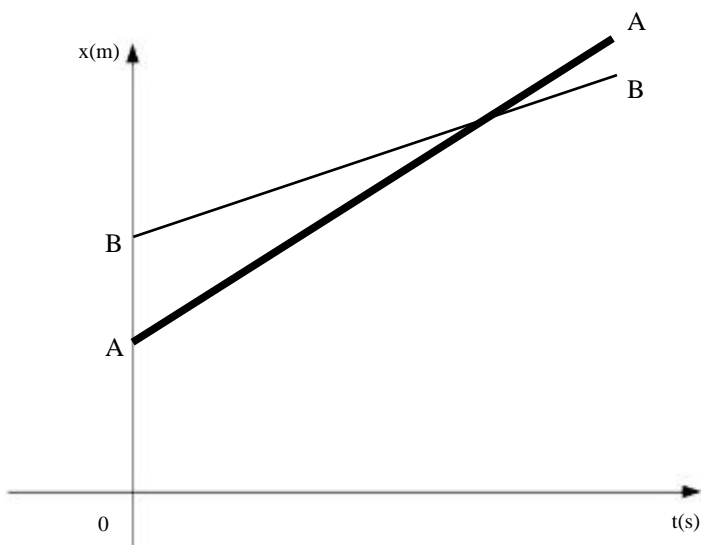
$$x = 5 - 10t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.

Determina la posizione iniziale dell'auto. Spiega la tua risposta.

K2

Due automobili A e B si muovono lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione x in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Quale auto ha la velocità maggiore? Segna la risposta e spiega il perché.

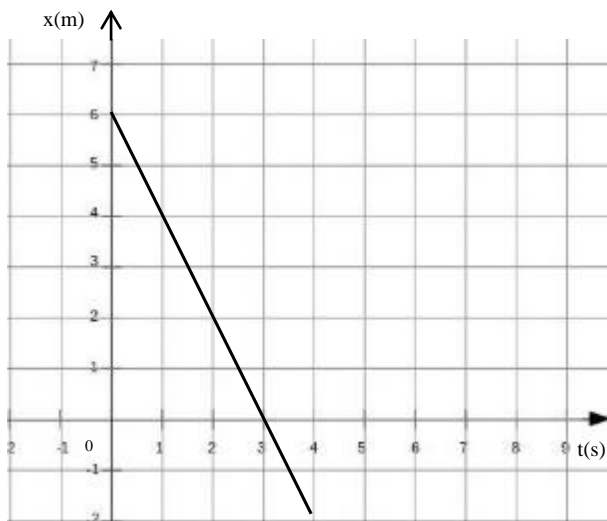
Auto A

Auto B

Le due auto hanno la stessa velocità

K7

Un ciclista si sta muovendo lungo una pista ciclabile rettilinea. Il grafico mostra la posizione del ciclista in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Determina la posizione iniziale del ciclista, motivando la risposta.

K12

Un'automobile si sta muovendo lungo una strada rettilinea. La posizione x della macchina in funzione del tempo è data da

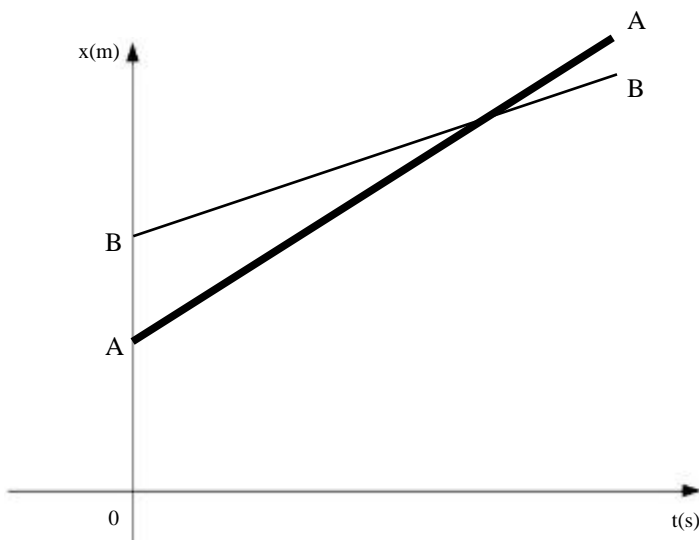
$$x = 3 - 12t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.

Determina la velocità dell'auto. Spiega la tua risposta.

K1

Due ciclisti A e B si muovono lungo una pista ciclabile rettilinea. Il grafico mostra la posizione x in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Quale ciclista ha la posizione iniziale maggiore? Segna la risposta e spiega il perché.

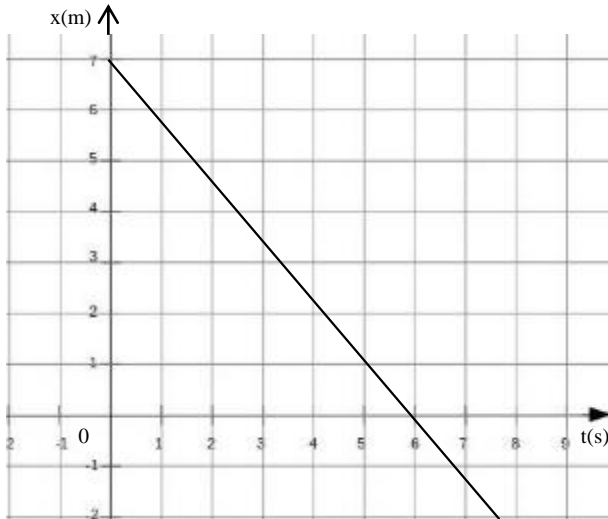
Ciclista A

Ciclista B

I due ciclisti hanno la stessa posizione iniziale

K8

Un'automobile si sta muovendo lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione dell'automobile in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Determina la velocità dell'automobile, motivando la risposta.

K9

Un ciclista si sta muovendo lungo una pista ciclabile rettilinea. La posizione x del ciclista in funzione del tempo è data da

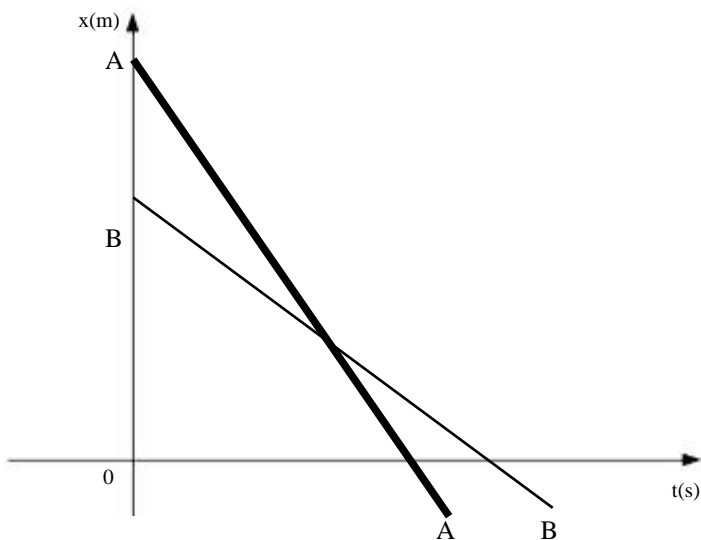
$$x = 2 + 6t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.

Determina la posizione iniziale del ciclista.

K4

Due ciclisti A e B si muovono lungo una pista ciclabile rettilinea. Il grafico mostra la loro posizione x in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Quale ciclista ha velocità maggiore? Segna la risposta e spiega il perché.

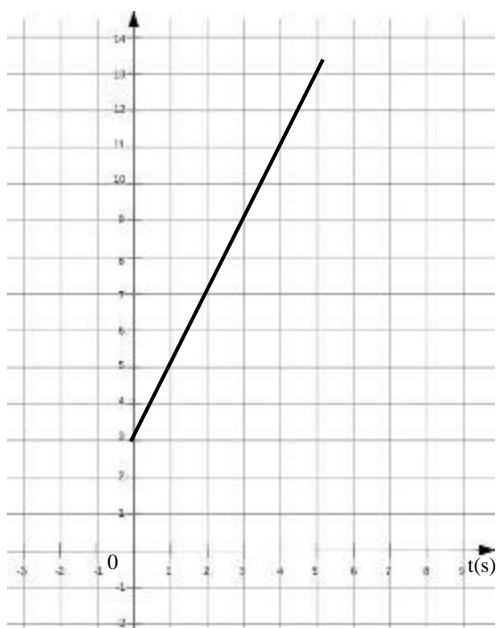
Ciclista A

Ciclista B

I due ciclisti hanno la stessa velocità

K5

Un'automobile si sta muovendo lungo una strada rettilinea. Il grafico sottostante mostra la posizione x dell'automobile in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Determina la posizione iniziale dell'automobile. Spiega la tua risposta.

K10

Un treno si sta muovendo lungo un binario rettilineo. La posizione x del treno in funzione del tempo t è data da

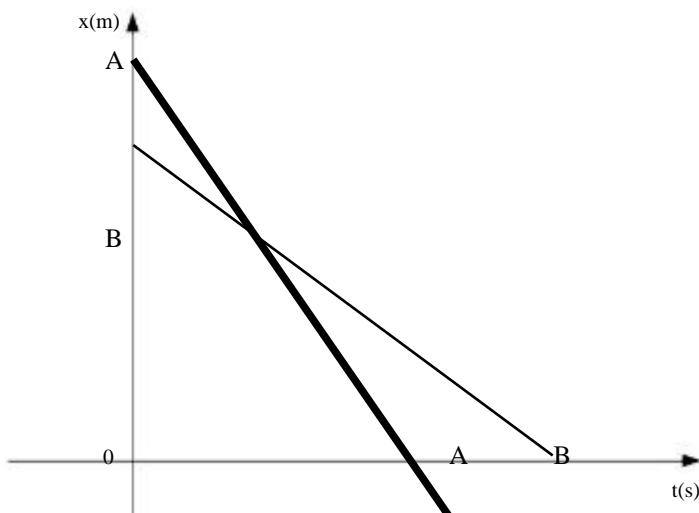
$$x = 4 + 8t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.

Determina la velocità del treno. Spiega la tua risposta.

K3

Due ciclisti A e B si muovono lungo una pista ciclabile rettilinea. Il grafico mostra la loro posizione x in funzione del tempo t . La posizione è in metri, il tempo in secondi.



Quale ciclista ha posizione iniziale maggiore ?
Segna la risposta e spiega il perché.

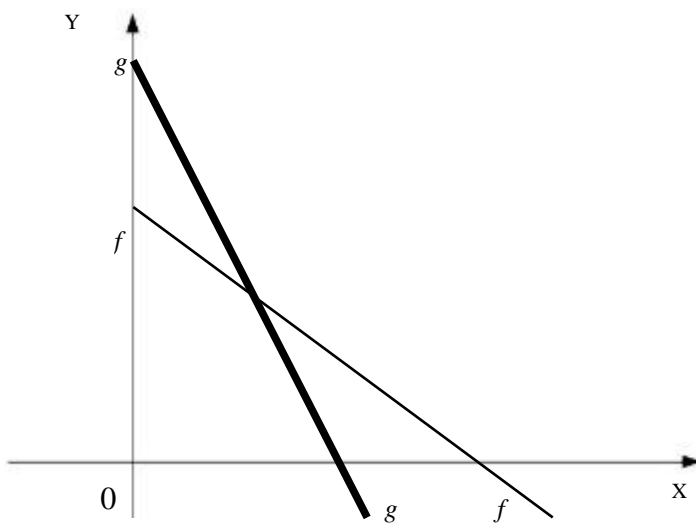
Ciclista A

Ciclista B

I due ciclisti hanno la stessa posizione iniziale

M3

La figura mostra il grafico di due funzioni g e f .



Quale di queste due funzioni ha il più grande valore della funzione in 0? Segna la risposta corretta e spiega il perché.

Funzione g

Funzione f

Le due funzioni hanno lo stesso valore della funzione in 0

M10

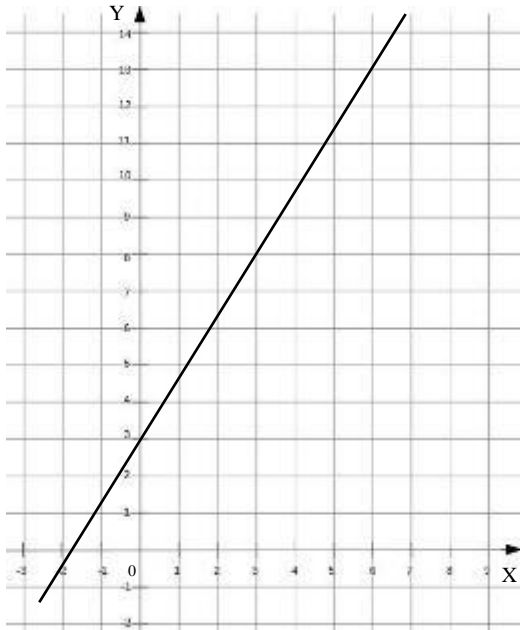
Una funzione f è data da

$$f(x) = 6x + 2.$$

Determina la pendenza. Spiega la risposta.

M5

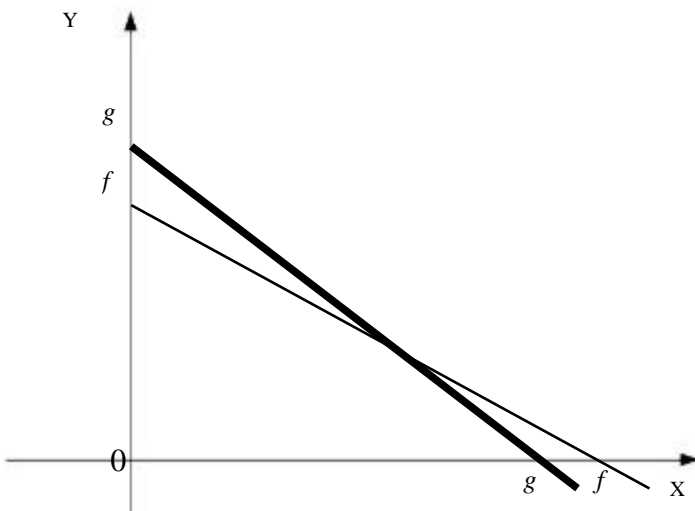
La figura mostra il grafico della funzione f .



Determina il valore della funzione in 0.

M4

La figura mostra il grafico di due funzioni g e f .



Quale di queste due funzioni ha pendenza maggiore? Segna la risposta corretta e spiega il perché.

Funzione g

Funzione f

Le due funzioni hanno la stessa pendenza

M9

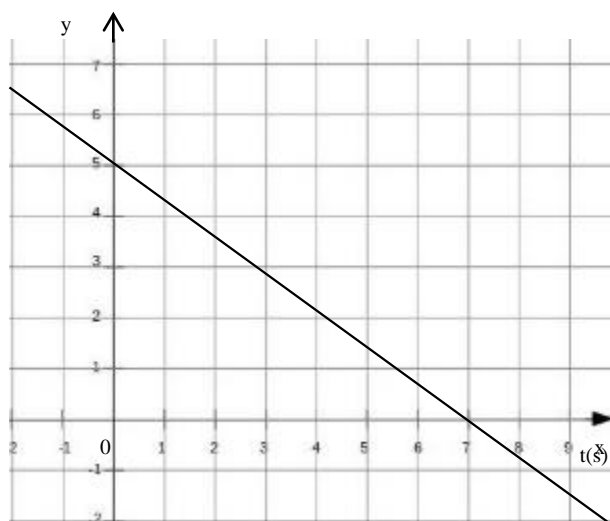
Una funzione f è data da

$$f(x) = 12x + 4.$$

Determina il valore della funzione in 0.

M8

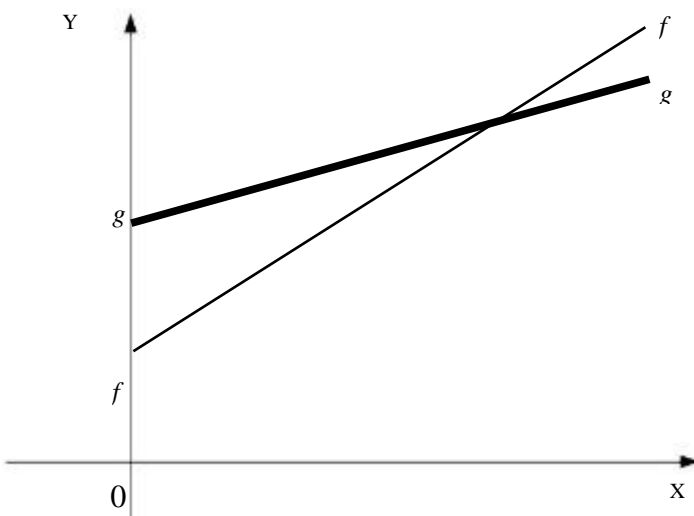
La figura mostra il grafico della funzione f .



Determina la pendenza, motivando la risposta.

M1

La figura mostra il grafico di due funzioni g e f .



Quale di queste due funzioni ha il più grande valore della funzione in 0? Segna la risposta corretta e spiega il perché.

Funzione g

Funzione f

Le due funzioni hanno lo stesso valore della funzione in 0

M12

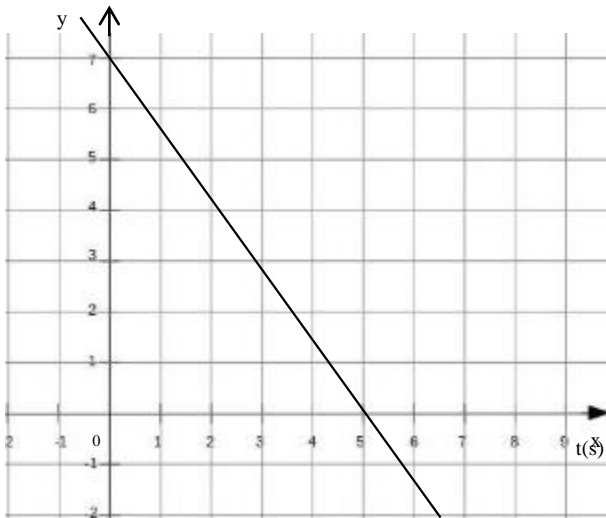
Una funzione f è data da

$$f(x) = -6x + 12.$$

Determina la pendenza. Spiega la tua risposta.

M7

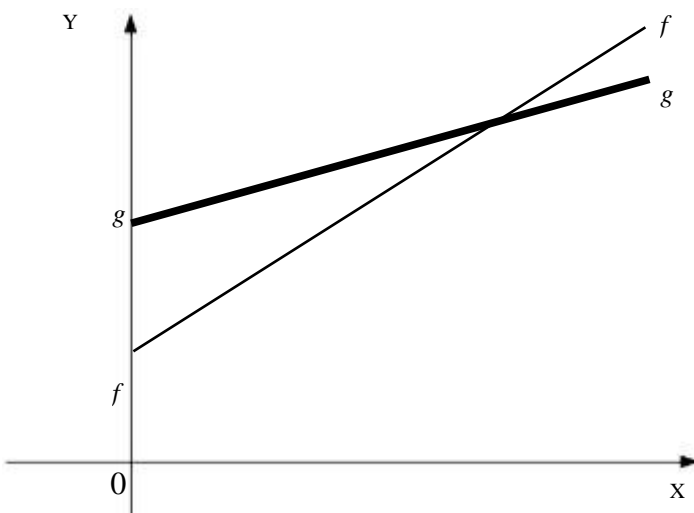
La figura mostra il grafico della funzione f .



Determina il valore della funzione di 0, motivando la risposta.

M2

La figura mostra il grafico di due funzioni g e f .



Quale di queste due funzioni ha la pendenza maggiore? Segna la risposta corretta e spiega il perché.

Funzione g

Funzione f

Le due funzioni hanno la stessa pendenza

M11

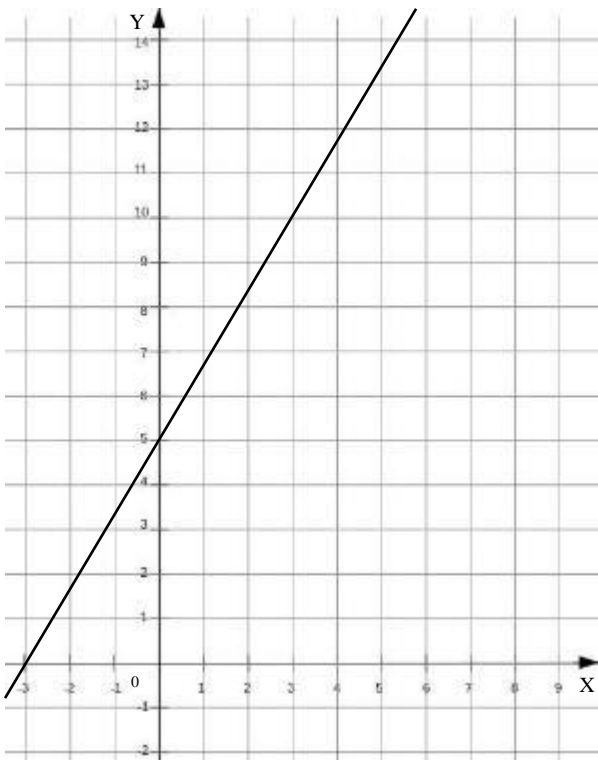
Una funzione f è data da

$$f(x) = -8x + \frac{1}{2}$$

Determina il valore della funzione in 0. Spiega la tua risposta.

M6

La figura mostra il grafico della funzione f .



Determina la pendenza, motivando la risposta.

Appendice C

Equazioni di stima generalizzate

L'analisi dati dell'articolo di Ceuppens et al. (2019) è stata eseguita attraverso l'utilizzo delle Equazioni di Stima Generalizzate (GEE), le quali vengono utilizzate principalmente per lo studio di modelli basati su ricerche longitudinali, ovvero quelle ricerche che contemplano l'analisi ripetuta nel tempo su uno stesso campione al variare di alcune circostanze esterne.

Le GEE diventano utili quando si hanno alcuni parametri da analizzare che potrebbero essere dipendenti tra loro e che vanno a costruire una struttura logica interconnessa utilizzabile come spiegazione di un certo fenomeno. La correlazione è stimata con un opportuno stimatore.

Poiché non si conosce inizialmente il tipo di relazione presente tra i parametri, si va a costruire una matrice di covarianza da mettere a confronto con una matrice di correlazione.

La ricerca della reale struttura di correlazione attraverso la procedura GEE e la valutazione della bontà della stima, con criteri appropriati, possono migliorare la precisione delle stime e influenzare positivamente l'affidabilità delle previsioni. Le regressioni GEE possono essere eseguite considerando differenti matrici di correlazione, cioè assumendo che le osservazioni ripetute siano correlate in modi diversi.

Queste equazioni sono inserite in molti programmi, come SAS, Stata e S-Plus, utili per l'analisi di esperimenti in cui le variabili in gioco possono o no essere legate in maniera diretta con ciò che si vuole dimostrare.

In particolare, nell'articolo a cui si fa riferimento in questo testo sono state considerati nel modello statistico 5 elementi da analizzare:

- contesto (cinematica 1-dimensionale o matematica);
- tipo di domande (comparare per mezzo di un grafico, determinare attraverso un grafico, determinare attraverso una formula);
- concept (intercetta sull'asse y, pendenza);
- segno della pendenza (positiva, negativa);
- sesso (donna,uomo).

Attraverso questo modello vengono quindi studiate le relazioni singole tra gli errori commessi e queste categorie, ma anche le relazioni tra due categorie (es. concept * contesto) e tre categorie (es. contesto * concept * tipo di domanda).

Bibliografia

- Besson, U. (2015). *Didattica della fisica*. Carocci Editore.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer academic publisher.
- Ceuppens, S., Bollen, L., Deprez, J., Dehaene, W., De Cock, M. (2019). *9th grade students' understanding and strategies when solving $x(t)$ problems in 1D kinematics and $y(x)$ problems in mathematics*. Physical Review Physics Education Research 15, 010101.
- Cinti, F. (2013). *Storia e sviluppo del concetto di limite: fra matematica, filosofia e didattica*. Tesi di Laurea in Didattica della Matematica.
- Giordano, M. "La descrizione del moto", progetto di tirocinio SSIS.
- Karam, R. (2015). *Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics*. Sci & Educ ,24:487-494.
- Maxwell, J. C. (1856). *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*. Lettura inaugurale, Aberdeen, 3 Novembre 1856 in P. M. Harman (ed.), Cambridge University Press, 1990.
- McDermott, L., Rosenquist, M., van Zee E. (1986). *A conceptual approach to teaching kinematics*. American Journal of Physics, Vol. 55, No. 5, pp. 407-415.
- Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., Ivanjek, L. (2012). *Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics*. International Journal of Science and Mathematics Education (2012) 10: 1393-1414 # National Science Council, Taiwan 2012.
- Haber-Schaim, U., Dodge, J., Gardner, R., Shore, E. (1960). *PSSC, Physics*. 1st Edition. D.C. Heath
- Tall, D. (1991). Reflections. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer academic publisher.
- Vygotskij, L. (1934). *Pensiero e Linguaggio. Ricerche psicologiche*. traduzione di Luciano Mecacci, collana Biblioteca Universale Laterza, Laterza, 1990, pp. 428.
- Woolnough, J. (2000). *How do Students Learn to Apply Their Mathematical Knowledge to Interpret Graphs in Physics?*. Research in Science Education, 30(3), 259-267.