

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Classificazione spettrale delle stelle

Tesi di laurea

Relatore:

**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Presentata da:

Eugenio Gambari

Appello II

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	2
1 Lo spettro di una stella	3
1.1 Emissione di corpo nero	4
1.2 Righe spettrali	5
1.2.1 Transizioni elettroniche	6
1.2.2 Transizioni molecolari	8
2 La forma delle righe	10
2.1 Allargamento naturale	10
2.2 Allargamento Doppler	11
2.3 Equazioni di Boltzmann e di Saha	12
3 Classificazioni Spettrali	15
3.1 Classificazione di Harvard	15
3.2 Classificazione di Yerkes	16

Introduzione

Lo scopo dell'elaborato è presentare come l'analisi degli spettri permette di raccogliere informazioni sulle proprietà fisiche delle stelle e come queste vengono utilizzate per la loro suddivisione in differenti classi.

Nel primo capitolo sarà introdotta la teoria sui componenti di un tipico spettro stellare: l'emissione di corpo nero (che ne forma il continuo) e i processi responsabili alla formazione delle righe d'assorbimento ed emissione.

Nel secondo capitolo ci si concentrerà maggiormente sulle caratteristiche delle righe spettrali, infatti la loro posizione sullo sfondo di emissione continua e la loro intensità e forma sono la chiave per distinguere stelle di diversa temperatura superficiale e magnitudine. Nel frattempo sarà necessaria una breve discussione delle equazioni di Boltzmann e di Saha, le quali descrivono lo stato di eccitazione e ionizzazione di una popolazione atomica.

Nel terzo capitolo verranno infine esposte le classificazioni di Harvard e di Yerkes (per la prima il fattore discriminante è la temperatura della fotosfera T_{eff} mentre per la seconda la luminosità L).

Capitolo 1

Lo spettro di una stella

La struttura di una stella è fatta a strati: il più interno è il nucleo, dove la fusione nucleare di elementi leggeri (inizialmente idrogeno ed in seguito elio e altri più pesanti) produce l'energia termica che bilancia la pressione gravitazionale e che viene trasportata verso l'esterno della struttura.

Esternamente al nucleo si trovano due strati in cui il trasporto energetico avviene in maniera differente: la zona radiativa e la zona convettiva.

Il limite tra la struttura interna e l'atmosfera è chiamato fotosfera, è lo strato visibile della stella, ossia la superficie dove si passa da un mezzo otticamente spesso e ad uno sottile.

Un generico spettro stellare è formato da uno sfondo di radiazione (detto il continuo) e da una parte discreta di righe di assorbimento e di emissione (per alcuni tipi particolari di stelle).

Il continuo è visibile come una banda luminosa che spazia dal colore blu alle piccole lunghezze d'onda λ fino al rosso dell'altro estremo ed è il prodotto dall'emissione di corpo nero che rappresenta la distribuzione energetica dei fotoni al momento della loro fuoriuscita dalla fotosfera.

Le righe spettrali sono invece linee o bande nere in cui la luce del continuo viene a mancare, sono causate da processi di assorbimento da parte di atomi e molecole presenti nell'atmosfera stellare, in strati più esterni e freddi rispetto alla fotosfera.

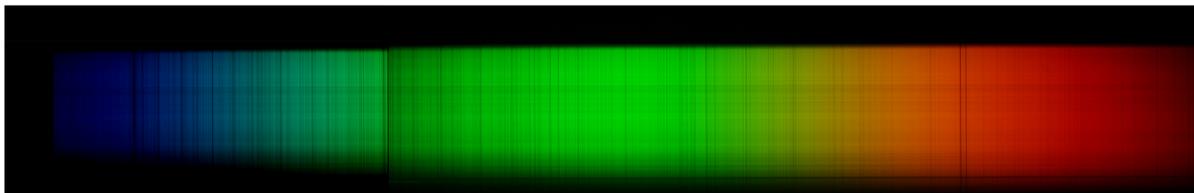


Figura 1.1: Spettro del Sole

1.1 Emissione di corpo nero

Il corpo nero è un oggetto ideale che assorbe e riemette completamente la luce che vi incide, più rigorosamente si dice avere emissività ed assorbanza unitarie.

Alla fine del XIX secolo i fisici si trovarono in difficoltà nel descrivere teoricamente le osservazioni del suo spettro utilizzando l'elettromagnetismo classico, andando incontro alla cosiddetta catastrofe ultravioletta per la quale lo spettro di emissione diverge ad intensità infinita alle piccole λ .

La soluzione al problema fu trovata da Planck postulando che la radiazione potesse essere emessa e assorbita solamente in pacchetti discreti detti quanti (in seguito chiamati fotoni da Einstein), aventi energia proporzionale alla loro frequenza ν :

$$E_{fotone} = h\nu \quad (1.1)$$

Le assunzioni di Planck portarono alla corretta descrizione dell'intensità di radiazione di corpo nero nella forma della funzione Planckiana:

$$B_{c.n.}(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (1.2)$$

mostrando come la temperatura determini completamente la forma della distribuzione, per una data temperatura esiste una unica curva di intensità.

Derivando la funzione di Planck per trovare a quale λ si ha il massimo di emissione si trova la legge dello spostamento di Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad , \quad b \approx 2898 \quad [\mu m \cdot K] \quad (1.3)$$

dalla quale si nota come per temperature maggiori il picco di emissione si sposta verso λ minori, stelle di diversa temperatura superficiale appaiono quindi di colore diverso, infatti un primo metodo per distinguerle è misurarne la magnitudine con filtri che coprono due diverse zone dello spettro e farne poi la differenza, ottenendo il cosiddetto indice colore che può essere utilizzato come asse orizzontale nel diagramma H-R o colore-magnitudine.

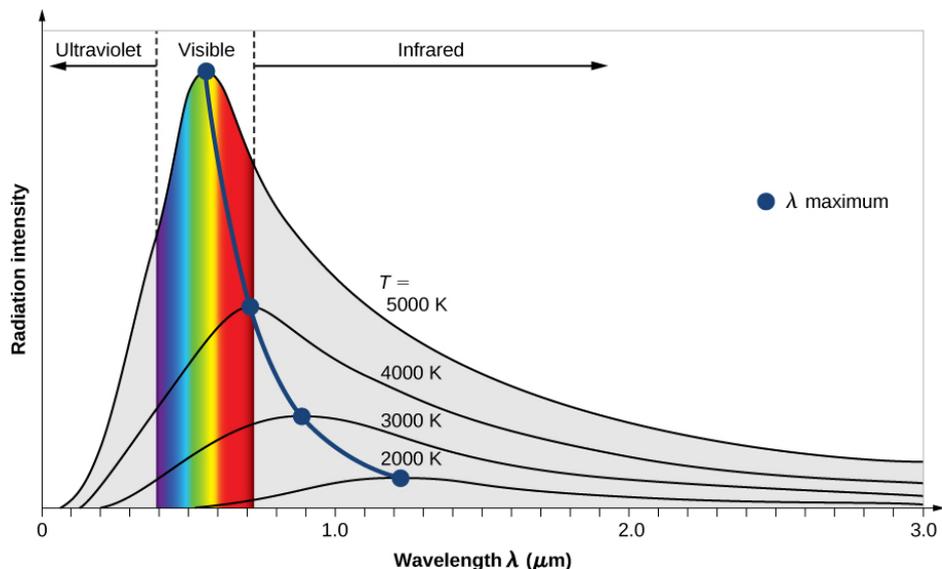


Figura 1.2: Funzioni di Planck e legge di Wien

1.2 Righe spettrali

Si prenda per esempio l'atomo di idrogeno, diversamente da quello che ci si aspetta in fisica classica, l'elettrone che "orbita" il nucleo non può avere una qualsiasi energia o trovarsi a qualunque distanza da esso, allo stesso modo una molecola non è libera di ruotare su se stessa ad una velocità a piacere o di vibrare ad ogni frequenza.

Atomi e molecole non hanno uno spettro di energie continuo bensì discreto.

Questi fenomeni furono osservati proprio grazie alla spettroscopia e descritti dalla meccanica quantistica nella prima metà del XX secolo.

Nel modello atomico di Bohr l'elettrone può muoversi solo su determinate orbite attorno al nucleo e di conseguenza l'atomo può occupare solo certi livelli energetici, separati tra loro da un ΔE finito e dipendente solamente dal numero quantico principale: l'intero n .

Per l'atomo di idrogeno il ΔE è dato dalla formula di Rydberg:

$$\Delta E = E_i - E_f = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad , \quad R_H \approx 13.6 \text{ [eV]} \quad (1.4)$$

Si noti che 13.6 eV è l'energia di ionizzazione dell'idrogeno, ossia l'energia da somministrare per "strappare" l'elettrone nello stato fondamentale e liberarlo così dalla buca di potenziale del protone.

Le transizioni tra diversi livelli energetici avvengono grazie all'interazione dell'atomo o molecola con un fotone e vi sono tre differenti meccanismi attraverso i quali possono accadere: assorbimento, emissione spontanea ed emissione stimolata.

1.2.1 Transizioni elettroniche

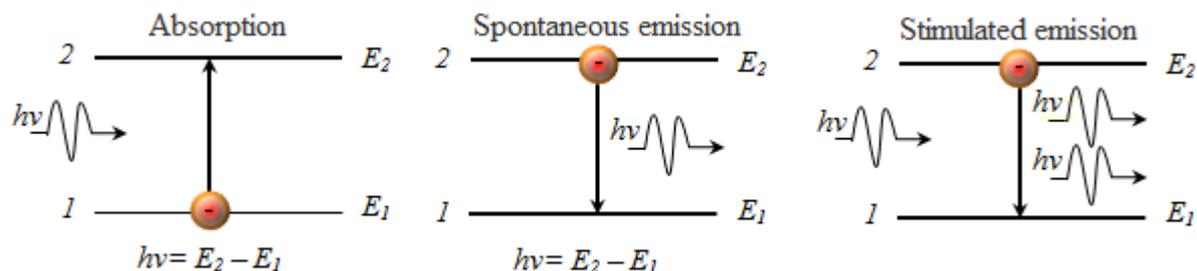


Figura 1.3: Meccanismi di transizione elettronica

Perché si verifichi l'**assorbimento** è necessario che l'elettrone sia in uno stato legato con l'atomo e che interagisca con un fotone di frequenza ν tale che la sua energia sia corrispondente al salto tra due livelli di eccitazione differenti, in tal caso si produrrà una linea di assorbimento alla lunghezza d'onda del fotone assorbito.

Se l'energia del fotone incidente è superiore al potenziale di ionizzazione dell'atomo (in un dato stato di ionizzazione ed eccitazione) allora si parla di transizione *bound - free* o foto-ionizzazione, in quanto dopo l'interazione l'elettrone non si troverà più in uno stato legato, inoltre avrà energia cinetica pari alla differenza: $E_{fotone} - (E_{\infty} - E_i)$.

Questo porta alla formazione non più di una singola riga ma di una banda continua in quanto causa l'assorbimento di fotoni aventi un range di λ continuo.

Due esempi evidenti negli spettri stellari sono il *Balmer jump* e il *Paschen jump* e verranno presentati nei prossimi capitoli.

L'**emissione spontanea** è l'“inverso dell'assorbimento” e avviene quando l'elettrone decade da uno stato eccitato ad uno di energia inferiore, emettendo così un fotone di frequenza ν tale che: $E_{fotone} = h\nu = E_f - E_i$.

Il risultato è la produzione di una riga di emissione (nelle stelle si verifica solamente per alcuni tipi peculiari dotati di atmosfere esotiche).

Si tratta quindi di una transizione *bound - bound*, anche in questo caso esiste il caso *free - bound*, detto ricombinazione, in cui l'elettrone libero cade nel potenziale di un atomo e riemette in primis la propria energia cinetica più l'energia di legame del livello su cui “atterra” ed in seguito decade “a cascata” su livelli via via più stabili.

Nell'**emissione stimolata** l'elettrone inizialmente in uno stato eccitato decade ad un livello inferiore, a differenza del caso precedente questo avviene però in seguito all'interazione con un fotone con la giusta frequenza. Il risultato del decadimento è quindi l'emissione contemporanea di due fotoni con stessa frequenza, fase e direzione.

Perché questo avvenga in quantità significative è necessaria un' *inversione di popolazione*, cioè una condizione in cui la distribuzione energetica degli atomi diverge fortemente dalla Maxwelliana tipica dell'equilibrio termico, si deve avere infatti un livello eccitato molto più popolato di quelli sottostanti, ciò avviene se esiste un meccanismo di *pumping* con tempo caratteristico inferiore a quello del decadimento spontaneo.

L'emissione stimolata è il fenomeno alla base dei *laser* nella banda dell'ottico e del *maser* nelle microonde.

Le transizioni tra differenti coppie di livelli energetici non sono equiprobabili, uno dei fattori che le regolano è la stabilità dei singoli livelli tra i quali si muove l'elettrone, cioè il tempo di vita medio degli stati considerati. Queste probabilità hanno infatti dimensione dell'inverso del tempo s^{-1} e sono chiamate **coefficienti di Einstein**.

In questo modo la variazione di popolazione di un livello energetico può essere calcolata come segue:

- $\left(\frac{dn_1}{dt}\right)_{abs} = -B_{12}n_1\rho(\nu)$
- $\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{em} = -A_{21}n_2$
- $\left(\frac{dn_1}{dt}\right)_{st.em} = B_{21}n_2\rho(\nu)$

dove A_{ij} e B_{ij} sono i sopracitati coefficienti e $\rho(\nu)$ è la densità di energia del campo di radiazione alla frequenza ν della transizione.

Un ruolo fondamentale nel determinare le probabilità di transizione *bound-bound* (e quindi l'intensità delle righe spettrali) è giocato dalle **regole di selezione**, infatti la meccanica quantistica restringe i possibili "balzi elettronici" a quelli soddisfacenti le seguenti condizioni:

- Il numero quantico l deve cambiare di $+1$ o -1 .
- Il numero quantico di spin s non deve cambiare.

La seconda regola dice per esempio che un elettrone con spin su non potrà transire ad un livello già occupato da un altro elettrone spin su (per il principio di esclusione di Pauli). Un altro esempio è quello di un atomo di idrogeno con il suo elettrone nell'orbitale 2s ($n = 2, l = 0$), questo elettrone non può scendere all'orbitale 1s perché violerebbe la prima regola. Queste regole possono però essere violate, negli spettri astronomici vengono infatti osservate anche transizioni proibite che avvengono in quantità considerevole pur essendo molto meno probabili di quelle permesse, ciò è possibile grazie all'elevato numero di atomi delle popolazioni nelle sorgenti astronomiche.

1.2.2 Transizioni molecolari

Nelle atmosfere delle stelle relativamente fredde possono esistere diversi tipi di molecole, la loro presenza è rivelata dalle bande d'assorbimento visibili negli spettri.

Si prenda per esempio una molecola diatomica, questa può **ruotare** attorno a tutti gli assi fuorché quello congiungente i due atomi.

Per mettere in rotazione la molecola o per aumentarne la sua velocità angolare è necessaria energia, se l'energia è sotto forma di radiazione elettromagnetica allora il fotone verrà assorbito proprio come quando incontra un atomo.

Le molecole non possono però ruotare a qualsiasi velocità ma solo a certe frequenze fissate e discrete, ognuna di queste corrisponde ad una quantità diversa di energia rotazionale. Si può quindi pensare a queste frequenze come *livelli rotazionali* della molecola.

Le molecole possono subire transizioni rotazionali sia assorbendo che emettendo un fotone ma a differenza degli atomi possono “saltare” da un livello all'altro solo di un “gradino” alla volta quindi per accelerare la propria velocità di rotazione la molecola deve assorbire una sequenza di fotoni di frequenza via via maggiore.

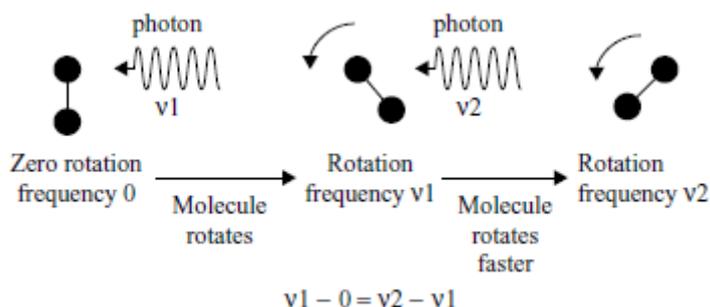


Figura 1.4: Transizione rotazionale

L'energia delle transizioni rotazionali delle molecole è molto bassa rispetto a quella delle transizioni elettroniche negli atomi ($10^{-2}/10^{-3}[eV]$) e sono quindi osservabili nelle regioni del lontano infrarosso e sub-millimetrico, com'è possibile allora vedere le molecole negli spettri stellari?

Una parte della risposta viene dal fatto che la molecola può anche **vibrare**, in seguito all'interazione con un fotone i due atomi vengono schiacciati, avvicinandosi maggiormente che nella posizione di equilibrio, per poi respingersi a causa della loro carica elettrica nucleare, ciò dà inizio ad una oscillazione lungo l'asse di legame della molecola.

Anche questa vibrazione è quantizzata in livelli energetici discreti e non continui, inoltre ogni transizione vibrazionale è obbligatoriamente accompagnata da una rotazionale.

Ogni transizione vibro-rotazionale ha energia leggermente diversa, quindi il risultato è una serie di righe molto ravvicinate che convergono verso le piccole λ .

Le energie di queste transizioni sono superiori alle sole rotazionali ma non rientrano nella parte visibile dello spettro, manca ancora una parte della risposta.

Gli elettroni degli atomi legati in molecole transiscono proprio come negli atomi liberi, in questo caso però ogni transizione elettronica è accompagnata da una vibro-rotazionale dell'intera molecola, quindi è come se ogni livello energetico elettronico fosse effettivamente diviso in una serie di livelli vibrazionali che a loro volta sono divisi in sotto-livelli rotazionali.

Il risultato di queste transizioni da parte di una popolazione molecolare è una serie di righe che convergono alle corte λ , una cosiddetta banda d'assorbimento molecolare nel visibile.

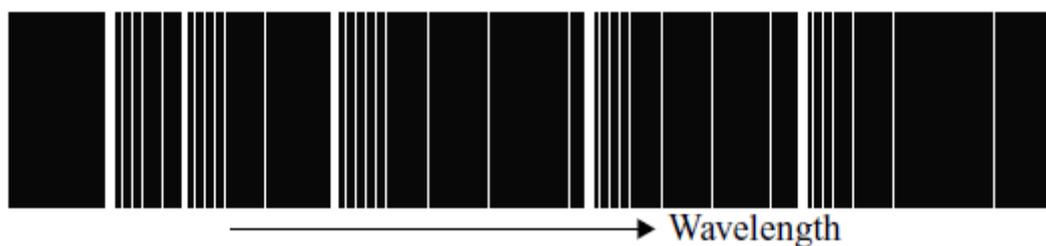


Figura 1.5: Bande molecolari

Capitolo 2

La forma delle righe

Da quanto esposto finora ci si potrebbe aspettare che le righe spettrali siano linee infinitamente sottili posizionate sulla lunghezza d'onda caratteristica della transizione considerata, questo non è mai vero, ogni riga ha un suo caratteristico **profilo** determinato da fenomeni quanto-meccanici e dalle condizioni fisiche presenti nelle atmosfere stellari.

2.1 Allargamento naturale

L'allargamento naturale o intrinseco della riga spettrale è una manifestazione a livello macroscopico del *principio d'indeterminazione* di Heisenberg.

Il suddetto principio è principalmente conosciuto nella forma posizione-impulso ma si applica più generalmente ad ogni coppia di osservabili non commutanti come sono l'energia e il tempo:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.1)$$

Questo implica che ogni livello energetico non si trova ad un valore fissato ma ha in realtà un'incertezza intrinseca che dipende dalla stabilità dello stato, cioè da quanto tempo ci si aspetta che l'elettrone lo occupi prima di decadere.

Ne consegue che le distanze in eV tra i livelli energetici non sono perfettamente definite e quindi le frequenze dei fotoni assorbiti e emessi durante le transizioni oscillano attorno ad un valore centrale, la riga spettrale si allarga attorno al centroide.

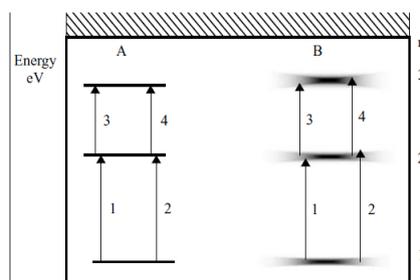


Figura 2.1: Indeterminazione delle energie

2.2 Allargamento Doppler

L'effetto doppler causa una variazione della λ dei fotoni quando sorgente e osservatore hanno una velocità relativa lungo la linea di vista diversa da zero.

Questo effetto causa un ulteriore allargamento delle righe spettrali, il movimento degli atomi è dovuto a tre fenomeni distinti: la loro **agitazione termica**, il loro movimento **sistematico** o di insieme e la **pressione**.

La quantità di cui viene spostata la riga della singola transizione è dipendente solo dalla velocità v dell'atomo lungo la linea di vista:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad (2.2)$$

Maggiore la sua velocità e maggiore sarà il *blue-shift* o *red-shift* della singola riga e quindi macroscopicamente si avrà un profilo spettrale più largo per popolazioni di atomi mediamente più veloci.

La velocità degli atomi nelle atmosfere stellari è principalmente dovuta alla loro agitazione termica ed è quindi funzione della temperatura essendo la distribuzione di velocità delle particelle di un gas descritta dalla Maxwelliana:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.3)$$

Questa v indica la velocità più probabile per una data temperatura, la distribuzione ha però una coda a velocità maggiori, il profilo della riga che ne risulta è la classica curva a campana della *Gaussiana*. L'allargamento è dell'ordine di 1\AA (molto superiore rispetto a quello intrinseco che è dell'ordine di 10^{-4}\AA) e agisce maggiormente nella parte centrale della riga, il *core*.

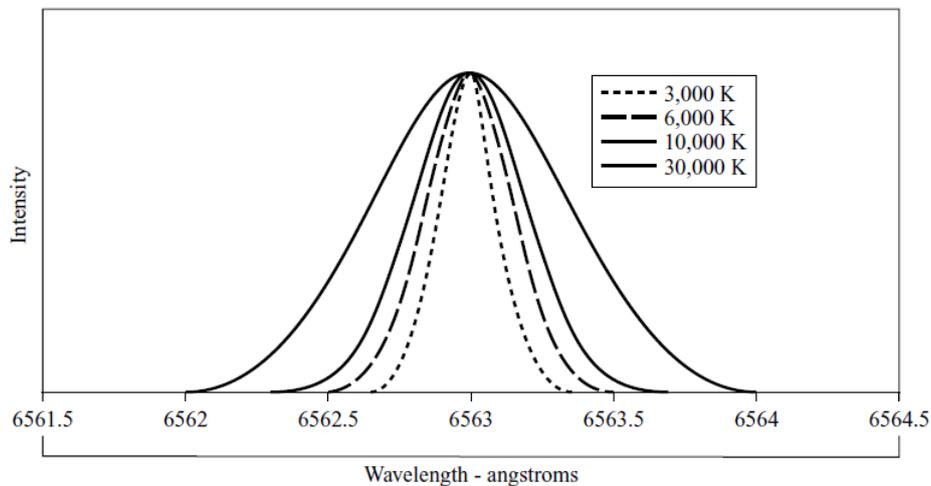


Figura 2.2: H α allargata termicamente

Le atmosfere stellari sono sede di movimenti convettivi e turbolenti, gli atomi hanno quindi una velocità sistematica da aggiungersi a quella termica, il risultato è un ulteriore allargamento delle righe spettrali al precedente.

L'ultima forma di allargamento è quello **collisionale**, dipendente dalla pressione del gas atmosferico, è più importante in stelle con atmosfere dense come le nane bianche.

Il suo effetto sul profilo è simile in modulo a quello dell'allargamento naturale però agisce maggiormente sulle ali della riga rispetto a quest'ultimo e viene chiamato profilo di *damping*.

L'effetto combinato dell'allargamento *core* e *damping* è detto profilo di *Voigt*.

2.3 Equazioni di Boltzmann e di Saha

Le righe spettrali osservate variano per differenti stelle perché variando la temperatura delle loro atmosfere cambiano i livelli di eccitazione e ionizzazione delle specie atomiche che le popolano.

Le equazioni di Boltzmann e di Saha servono a stimare la frazione di atomi di un elemento chimico in un dato stato di eccitazione e ionizzazione.

La prima delle due equazioni prende un dato elemento chimico in un certo stato di ionizzazione j e data una temperatura fornisce il rapporto tra il numero di atomi in uno stato di eccitazione i rispetto a tutti gli altri:

$$\frac{N_{i,j}}{N_j} = \frac{g_i}{U_j(T)} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \quad (2.4)$$

La g è la degenerazione dello stato di eccitazione considerato e per un atomo idrogenoide si ha: $g_n = 2n^2$.

Al denominatore del secondo termine si trova la *funzione di partizione*, non è altro che la sommatoria dei g di tutti i livelli energetici, pesati da un termine dipendente dalla temperatura: $U_j(T) = \sum_i g_i 10^{-\chi_i \Theta}$

χ è il potenziale di eccitazione e nel caso idrogenoide si calcola: $\chi_i = 13.6 \cdot z^2 (1 - \frac{1}{n_i^2})$

L'equazione di Saha fornisce invece il rapporto tra il numero di atomi (di una data specie) ionizzati $j + 1$ volte rispetto al numero di atomi ionizzati j volte:

$$\log\left(\frac{N_{j+1}}{N_j}\right) = \frac{2kT}{P_e} \frac{U_{j+1}(T)}{U_j(T)} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_j}{kT}} \quad , \quad P_e = n_e kT \quad (2.5)$$

Il seguente esempio mostra come l'applicazione di Boltzmann e Saha sia la chiave per ricavare la temperatura delle atmosfere stellari a partire dagli spettri.

La serie di Balmer è l'insieme delle righe spettrali dovute alle transizioni elettroniche dell'idrogeno in cui l'elettrone si trova inizialmente nel primo stato eccitato $n = 2$, sono denominate H_α , H_β , H_γ eccetera, coprono la parte ottica e ultravioletta dello spettro partendo dalla transizione $n = 2 \rightarrow n = 3$ a 656 nm .

Nel prossimo capitolo verrà presentato che le stelle di classe A0 - A2 ($T_{eff} \approx 10^3 \text{ }^\circ\text{k}$) sono quelle che mostrano la serie di Balmer più intensa in assoluto, quindi ci si aspetta che la loro temperatura superficiale corrisponda a quella di massima occupazione del secondo livello elettronico per l'idrogeno.

Però come si può osservare dalla figura a destra, in cui è graficata l'occupazione del primo livello eccitato dell'idrogeno, a $10000 \text{ }^\circ\text{k}$ questa è minima ($N_2/N_1 \approx 1$ a $85000 \text{ }^\circ\text{k}$) e quindi ci si aspetterebbe che la serie di Balmer sia più intensa in stelle più calde, a meno che non ci sia un meccanismo che spopola il livello $n = 2$ oltre i $10^3 \text{ }^\circ\text{k}$.

Tale meccanismo è la ionizzazione, infatti dall'equazione di Saha si vede come in un intervallo di soli $3000 \text{ }^\circ\text{k}$ una popolazione di atomi di idrogeno passi da neutra a quasi totalmente ionizzata:

- $T \approx 8300 \text{ }^\circ\text{k} \rightarrow N_{\text{II}}/N_{\text{tot}} \approx 0.06$
- $T \approx 11300 \text{ }^\circ\text{k} \rightarrow N_{\text{II}}/N_{\text{tot}} \approx 0.95$

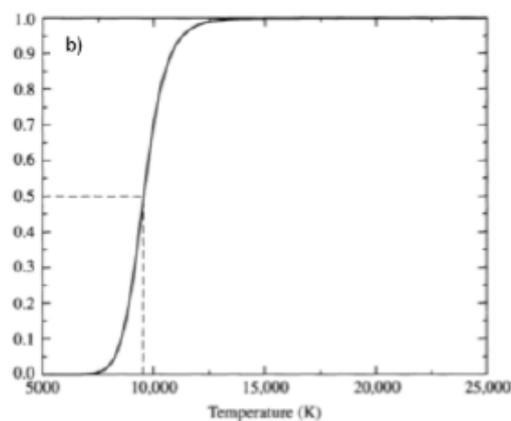
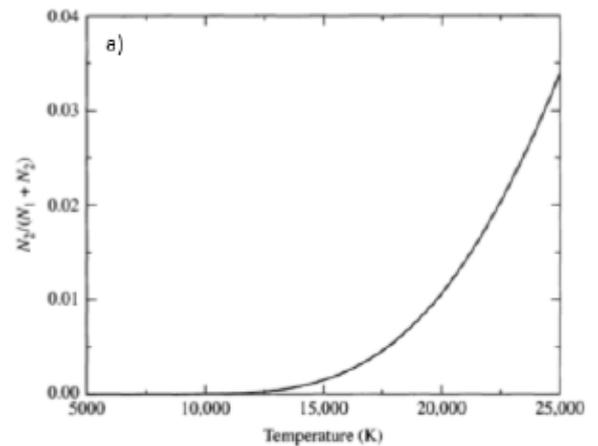


Figura 2.3: Frazione di ionizzazione, eq. di Saha

Sommando gli effetti di eccitazione e ionizzazione si ottiene la distribuzione di Figura 2.4 dalla quale è evidente come il picco di popolamento per $n = 2$ sia proprio a $T \approx 10000 \text{ }^\circ\text{k}$, la temperatura delle stelle di classe A0.

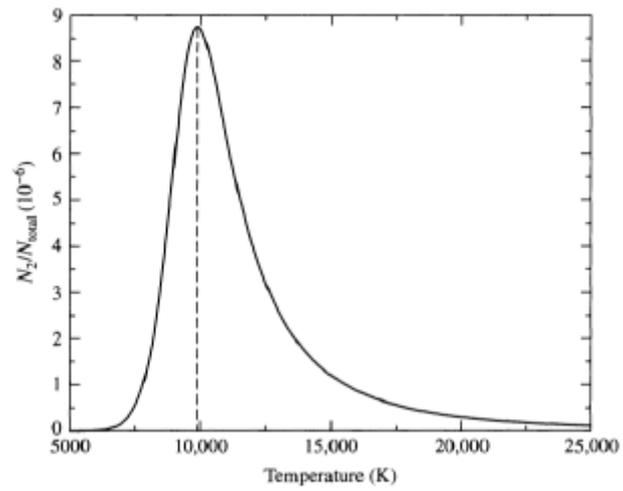


Figura 2.4: Frazione di atomi in N_2

Capitolo 3

Classificazioni Spettrali

3.1 Classificazione di Harvard

Nella classificazione di Harvard il fattore che discrimina le varie classi stellari è la presenza e l'intensità delle righe spettrali che è diretta conseguenza della temperatura superficiale della stella, quindi si parla anche di classificazione per temperature.

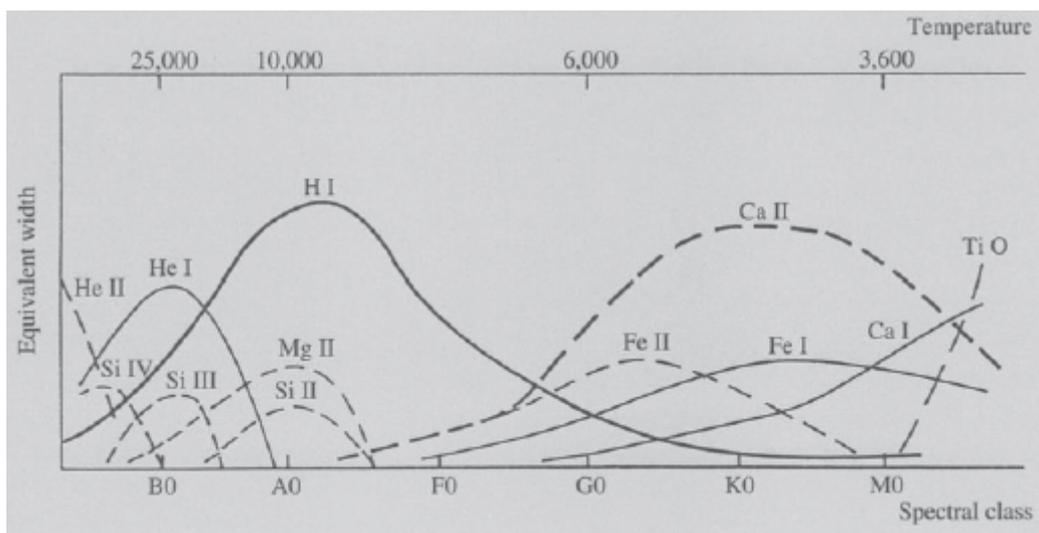


Figura 3.1: Larghezza equivalente delle righe per differenti classi

Le stelle vengono suddivise in classi che inizialmente erano: O,B,A,F,G,K,M. Ognuna di esse è suddivisa in 10 sottoclassi da 0 a 9 di temperatura decrescente. Le temperature variano da oltre i 30000 °k delle stelle blu O ai 2000 °k delle rosse M.

3.2 Classificazione di Yerkes

Per una classificazione più precisa bisogna tener conto anche della luminosità, infatti due stelle con la stessa T_{eff} potrebbero avere luminosità molto diverse.

La classe di luminosità è determinata analizzando il profilo bidimensionale di righe spettrali che dipendono fortemente dall'accelerazione di gravità superficiale della stella, che è strettamente legata alla sua luminosità.

Le masse di stelle giganti e nane sono simili ma i loro raggi variano considerevolmente, causando le differenze di luminosità L :

$$L = A \cdot \sigma T^4 = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \quad (3.1)$$

In conseguenza l'accelerazione di gravità superficiale $g = \frac{GM}{R^2}$ di una gigante è molto minore che per una nana, ciò causa una minore pressione e densità del gas atmosferico della gigante.

Come è stato esposto nel secondo capitolo la pressione contribuisce all'allargamento delle righe che può quindi essere utilizzato per distinguere stelle di differente luminosità.

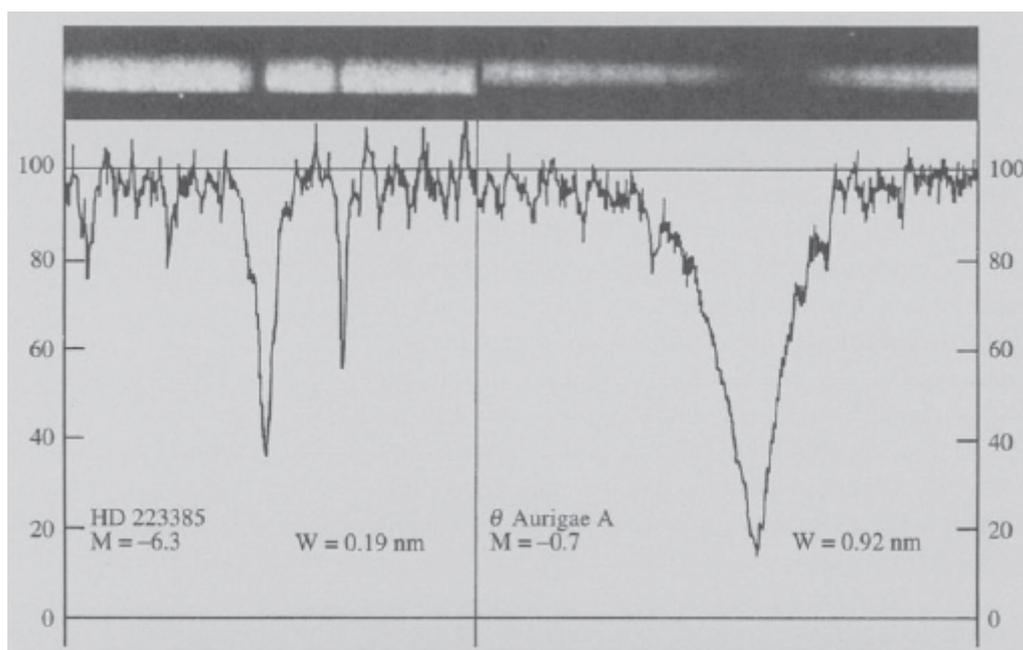


Figura 3.2: Effetto della luminosità sulla H_γ in stelle A, a sinistra una supergigante A2 e a destra una gigante

Le stelle vengono divise in sei classi di luminosità decrescente: Ia, Ib, II, III, IV, V che vanno dalle supergiganti più luminose alle stelle di sequenza principale o nane.

Il Sole fa parte dell'ultima categoria, è una stella G2V.

Bibliografia

- [1] Keith Robinson
Spectroscopy: The Key to the Stars
Springer-Verlag, 2007

- [2] Karttunen, H.; Kröger P.; Oja H.; Poutanen M.; Donner K.J.
Fundamental Astronomy
Springer-Verlag, 1984

- [3] F.R.Ferraro
Appunti di Astrofisica Stellare