

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**PARAMETRI COSMOLOGICI
E LORO
DETERMINAZIONE**

Tesi di Laurea

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Presentata da:
Filippo Barbani

**Sessione II
Anno Accademico 2018/2019**

Indice

1	Modelli di Friedmann	1
1.1	Metrica di Robertson-Walker	1
1.2	Legge di Hubble-Lemaître	2
1.3	Le equazioni di Friedmann	3
1.3.1	Universo di polveri	4
1.3.2	Universo di radiazione	6
1.3.3	Universo di energia oscura	6
2	Modello Lambda-CDM	7
2.1	Evoluzione del parametro di Hubble	8
2.2	Parametri cosmologici	8
3	Radiazione cosmica di fondo	10
3.1	Origine delle anisotropie	12
3.1.1	Effetto Sachs-Wolfe ($\theta > \theta_H$)	12
3.1.2	Oscillazioni acustiche ($\theta < \theta_H$)	13
3.2	Dipendenza dello spettro di potenza dai parametri cosmologici	15
3.2.1	Curvatura dell'universo	15
3.2.2	Costante di Hubble	15
3.2.3	Densità di barioni	15

Sommario

Il presente elaborato ha lo scopo di trattare il significato dei principali parametri cosmologici e di analizzare a fondo uno dei metodi con cui alcuni di questi sono ottenuti.

Inizialmente vengono discusse la curvatura dell'universo K , la legge di Hubble-Lemaître (da cui emerge il parametro di Hubble) e le equazioni di Friedmann dalle quali si ricavano i relativi modelli, che forniscono gli andamenti del fattore di scala $a(t)$ per differenti fasi dell'universo. Essi sono utili per far emergere alcuni importanti parametri cosmologici: la densità delle differenti componenti dell'universo (radiazione, materia ed energia oscura) rapportata alla densità critica. In seguito viene trattato il modello Lambda-CDM, attualmente in vigore in cosmologia e vengono forniti i valori di alcuni parametri cosmologici misurati dal satellite Planck, analizzando per alcuni il metodo di determinazione. Viene quindi illustrata approfonditamente la radiazione cosmica di fondo, i suoi meccanismi primari di anisotropia, lo spettro di potenza angolare ed il suo utilizzo nella misurazione di alcuni parametri cosmologici.

Capitolo 1

Modelli di Friedmann

La cosmologia è la branca dell'astrofisica che studia la formazione e l'evoluzione dell'universo nella sua interezza tramite una serie di ipotesi verificate nel corso dei decenni.

All'inizio del ventesimo secolo si sapeva poco sulla distribuzione di materia dell'universo e la teoria di Einstein era troppo complicata per essere risolta con una distribuzione arbitraria di materia: per progredire era necessaria la costruzione di modelli semplificati basati sul **Principio Cosmologico**, il quale assume che su scale sufficientemente grandi l'universo sia omogeneo e isotropo: non esistono quindi né posizioni né direzioni privilegiate. Questo principio fu introdotto senza alcuna giustificazione osservativa e oggi lo accettiamo in quanto è in accordo con le osservazioni, tra le quali hanno grande evidenza quelle sulla radiazione cosmica di fondo.

1.1 Metrica di Robertson-Walker

Supponiamo di poter trattare l'universo come un fluido continuo e di assegnare ad ogni elemento dello stesso le tre coordinate spaziali χ^α ($\alpha = 1, 2, 3$): ogni punto dello spazio-tempo è caratterizzato dalle coordinate χ^α e dal tempo proprio t misurato con un orologio che si muove assieme all'elemento del fluido.

Le proprietà geometriche dello spazio-tempo di un universo in cui vale il Principio Cosmologico sono descritte dalla **metrica di Robertson-Walker**

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

dove abbiamo usato le coordinate sferiche r , θ e ϕ . $a(t)$ è detto *fattore di scala* e K *parametro di curvatura* il quale può essere scalato in modo che assuma solo i valori 1, 0 o -1 . ds^2 rappresenta l'intervallo di spazio-tempo tra x^j e $x^j + dx^j$ [1].

Il parametro K descrive la curvatura dell'universo (vedi figura 1.1) in particolare:

- per $K = 0$ si ha una **geometria euclidea** (la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°), l'universo è detto *piatto*.
- per $K = +1$ si ha una **geometria sferica** (la somma degli angoli interni di un triangolo è $> 180^\circ$), l'universo è detto *chiuso*.
- per $K = -1$ si ha una **geometria iperbolica** (la somma degli angoli interni di un triangolo è $< 180^\circ$), l'universo è detto *aperto*.

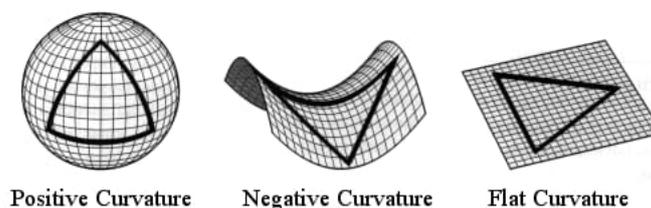


Figura 1.1: I tre tipi di curvatura dell'universo.

1.2 Legge di Hubble-Lemaître

Quando osserviamo lo spettro di una galassia, questo tipicamente contiene righe di assorbimento. Supponiamo di conoscere la lunghezza d'onda λ_{em} di una transizione atomica osservata sulla Terra: la lunghezza d'onda λ_{obs} che misureremo nello spettro della galassia in genere non sarà la stessa poiché, per effetto Doppler, la radiazione emessa viene spostata verso il rosso o verso il blu, a seconda della velocità della galassia lungo la nostra linea di vista. Definiamo il **redshift z** della galassia come (nel caso di velocità non relativistiche):

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{v_r}{c} \quad (1.2)$$

Nel 1929 Edwin Hubble, rappresentando il *redshift* z in funzione della distanza (vedi Figura 1.2), scoprì una relazione lineare¹ detta **Legge di Hubble-Lemaître**:

$$v = H_0 D \quad (1.3)$$

H_0 è detta **costante di Hubble**, il cui valore attuale è circa $H_0 \approx 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$. Nonostante venga chiamata costante di Hubble, essa è costante spazialmente ma non temporalmente²: infatti dentro ad $H(t)$ è codificato il tasso di espansione dell'universo il quale è cambiato nelle diverse epoche [2].

¹Ottenuta nello stesso periodo in maniera indipendente da Georges Lemaître.

² $H(t)$ è infatti comunemente denominato parametro di Hubble.

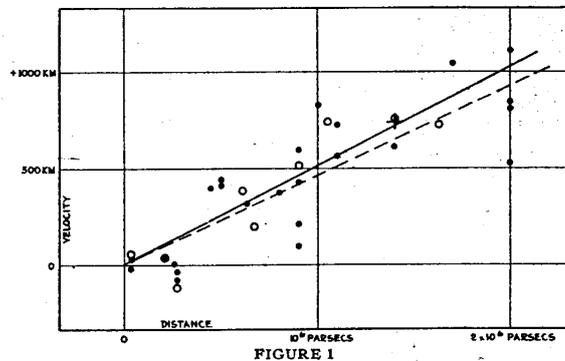


Figura 1.2: Grafico originale creato da Edwin Hubble nel 1929.

1.3 Le equazioni di Friedmann

Per ricavare le equazioni di Friedmann vanno introdotte le **equazioni di campo di Einstein**:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1.4)$$

Questo set di equazioni collega la geometria dello spazio-tempo, descritta dal tensore metrico g_{ij} , al contenuto di materia dell'universo, espresso dal tensore energia-momento T_{ij} . Se la metrica è di tipo Robertson-Walker, dalle equazioni di Einstein si ottengono le **equazioni di Friedmann** [1]:

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3\frac{p}{c^2})a \\ \dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Queste equazioni sono fondamentali e possono essere utilizzate per derivare l'evoluzione dell'universo in diversi casi, ottenendo i cosiddetti **modelli di Friedmann**.

La prima di queste equazioni può essere riscritta nella forma:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{8\pi g}{c^2}p - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (1.6)$$

Una generale equazione di stato è data da:

$$P = w\rho c^2 \quad (1.7)$$

A seconda della componente che vorremo considerare il parametro w avrà diversi valori.

1.3.1 Universo di polveri

Considerando un fluido di polveri (materia), abbiamo $w = 0$ quindi una pressione $P = 0$. Inoltre la densità avrà un andamento $\rho \propto a^{-3}$. Le equazioni di Friedmann diventano:

$$\begin{cases} \dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{Kc^2}{a^2} \end{cases} \quad (1.8)$$

La massa dell'universo si conserva, per cui:

$$\rho_0 a_0^3 = \rho a^3 \quad (1.9)$$

Dato che il fattore di scala al tempo attuale è normalizzato a 1 ($a_0 = 1$):

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (1.10)$$

Utilizziamo la densità dell'universo ad un tempo generico in questa forma, in quanto è più semplice misurare la densità attuale rispetto a quella ad un tempo qualunque. Quindi:

$$\dot{a}^2 = \frac{c^2 \rho_0}{a} - Kc^2 \quad (1.11)$$

Per trovare l'andamento del raggio dell'universo bisogna distinguere tra tre casi differenti a seconda della curvatura K .

Universo di Einstein - de Sitter

Nel caso $K = 0$ si ottiene l'**universo di Einstein - de Sitter**: esso è molto utile in quanto rispecchia una parte del modello cosmologico attualmente in vigore³.

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \propto \frac{1}{a(t)} \quad (1.12)$$

Da cui si ottiene:

$$a \propto t^{2/3} \quad (1.13)$$

Universo chiuso

Nel caso $K = +1$ l'universo avrà una massima espansione e poi tornerà indietro contraendosi; le equazioni sono di risoluzione più difficile: la soluzione è una cicloide.

Si può calcolare il raggio di massima espansione, ovvero quando $\dot{a} = 0$:

$$a_{max} = \frac{8\pi G\rho_0}{3K} \quad (1.14)$$

³Modello Lambda-CDM.

Universo aperto

Nel caso $K = -1$ si individuano due andamenti:

- Per $a \rightarrow 0$ si ottiene la soluzione dell'universo di Einstein - de Sitter: $a \propto t^{2/3}$.
- Per $a \rightarrow \infty$ si ottiene: $a \propto t$.

L'espansione è molto più rapida, come si nota in figura 1.3.

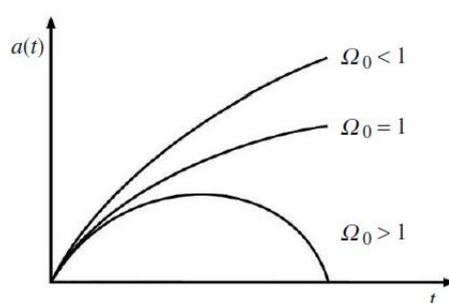


Figura 1.3: I tre diversi andamenti nell'universo di polveri.

Da queste considerazioni si può ottenere un parametro fondamentale in cosmologia, la **densità critica** ρ_{cr} , la densità da superare per passare da un universo aperto ad uno chiuso:

$$\dot{a}^2 = H^2 a^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{cr} a^2 \quad (1.15)$$

Otteniamo ρ_{cr} calcolando la densità nel caso $K = 0$:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.16)$$

Dipendendo dal parametro di Hubble $H(t)$, la densità critica non rimarrà costante ma cambierà nel tempo. Calcolando con precisione H_0 si ottiene la densità critica attuale dell'universo che, con $H_0 \approx 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, è:

$$\rho_{cr} = 9.2 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \quad (1.17)$$

Andando a misurare la densità dell'universo si può quindi determinare la sua curvatura⁴. Le stime di densità danno valori molto minori di ρ_{cr} quindi l'universo dovrebbe essere aperto, tuttavia altre osservazioni ci dicono che l'universo ha una geometria piatta ($K=0$): deve quindi esserci una densità di energia ulteriore che rende piatto l'universo ma non contribuisce alla massa. Dalla densità critica si può definire il parametro Ω come:

⁴Con un valore della densità $\rho = \rho_{cr}$ si otterrebbe un universo con geometria piatta.

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad (1.18)$$

Determinando Ω si ottiene la geometria dell'universo. L' Ω_{tot} si otterrà sommando le differenti componenti dell'universo ⁵.

1.3.2 Universo di radiazione

Considerando un fluido di fotoni: $w = \frac{1}{3}$. La densità cala più rapidamente rispetto al caso delle polveri:

$$\rho \propto a^{-4} \quad (1.19)$$

Questo avviene in quanto assieme all'universo si espande anche la lunghezza d'onda dei fotoni e la loro energia cala più rapidamente. L'andamento che si ottiene dalle equazioni di Friedmann inserendo una pressione $P = \rho c^2/3$ e considerando direttamente il caso $K = 0$ è:

$$a \propto t^{1/2} \quad (1.20)$$

1.3.3 Universo di energia oscura

Il modello cosmologico attualmente in vigore, detto **modello Lambda-CDM** ⁶, contempla la presenza dell'**energia oscura**, un'energia associata al vuoto. Nel caso dell'energia oscura $w = -1$ e $P = -\rho c^2$, quindi:

$$\rho \propto a^0 \quad (1.21)$$

Questa energia viene creata in continuazione man mano che lo spazio si espande e la sua densità resta costante. Risolvendo anche in questo caso le equazioni di Friedmann con $K = 0$ si ottiene:

$$a \propto e^{\frac{t}{\tau}} \quad (1.22)$$

Quindi le dimensioni dell'universo crescono esponenzialmente con il tempo.

E' importante notare che in un universo dominato dall'energia oscura il parametro di Hubble diventa costante nel tempo [2]:

$$H(z) \propto \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{e^{\frac{t}{\tau}}} = cost \quad (1.23)$$

⁵La densità di radiazione Ω_γ , di materia Ω_m e di energia oscura Ω_Λ (rapportate alla densità critica).

⁶Lambda Cold Dark Matter

Capitolo 2

Modello Lambda-CDM

Il **Modello Lambda-CDM** (Lambda Cold Dark Matter), detto anche *Concordance Model*, è il modello cosmologico attualmente in vigore in quanto riproduce le osservazioni in modo soddisfacente. Esso prevede un universo piatto composto da radiazione¹, materia (barionica e non barionica) ed energia oscura. La densità totale è data da:

$$\rho(z) = \rho_{DM}(z) + \rho_b(z) + \rho_\gamma(z) + \rho_\nu(z) + \rho_\Lambda(z) \quad (2.1)$$

L'universo è passato attraverso tre diverse epoche, ognuna dominata da una componente differente (vedi Figura 2.1(a)):

- **Epoca dominata dalla radiazione:** la radiazione domina fino a redshift $z \approx 10^4$; data l'alta velocità con cui decresce, la sua densità diventa presto trascurabile.
- **Epoca dominata dalla materia:** la materia è dominante da $z \approx 10^4$ fino a $z \approx 0.7$.
- **Epoca dominata dall'energia oscura:** la densità di energia oscura è molto piccola ma costante in quanto viene generata continuamente dal vuoto e domina quando l'espansione dell'universo ha fatto diminuire la densità delle altre componenti.

Dalle equazioni di stato conosciamo come le densità dipendono dal redshift:

$$\rho_M(z) \propto a^{-3} \propto (1+z)^3 \quad (2.2)$$

$$\rho_\gamma(z) \propto a^{-4} \propto (1+z)^4 \quad (2.3)$$

$$\rho_\Lambda(z) = \text{cost} \quad (2.4)$$

dove la densità di materia ρ_M comprende la materia oscura e la materia barionica e la densità di radiazione ρ_γ comprende i fotoni e i neutrini.

¹Oltre ai fotoni vengono considerati anche i neutrini.

2.1 Evoluzione del parametro di Hubble

Conoscendo come varia la densità con il redshift possiamo ottenere l'evoluzione del parametro di Hubble:

$$H(z) = \left[\frac{8\pi G}{3} \rho(z) \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

si ottiene quindi:

$$H(z) = \left[\frac{8\pi G}{3} (\rho_{M_0}(1+z)^3 + \rho_{\gamma_0}(1+z)^4 + \rho_{\Lambda_0}) \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

Ad altissimo redshift domina la radiazione. In seguito c'è una fase, che segue il modello Einstein - de Sitter, in cui domina la materia (in quanto la radiazione si è "diluita" con l'espansione). A redshift $z \approx 0.7$ l'energia oscura diventa dominante e nel futuro il parametro di Hubble diventerà una costante $H_\infty \approx 59 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$.

2.2 Parametri cosmologici

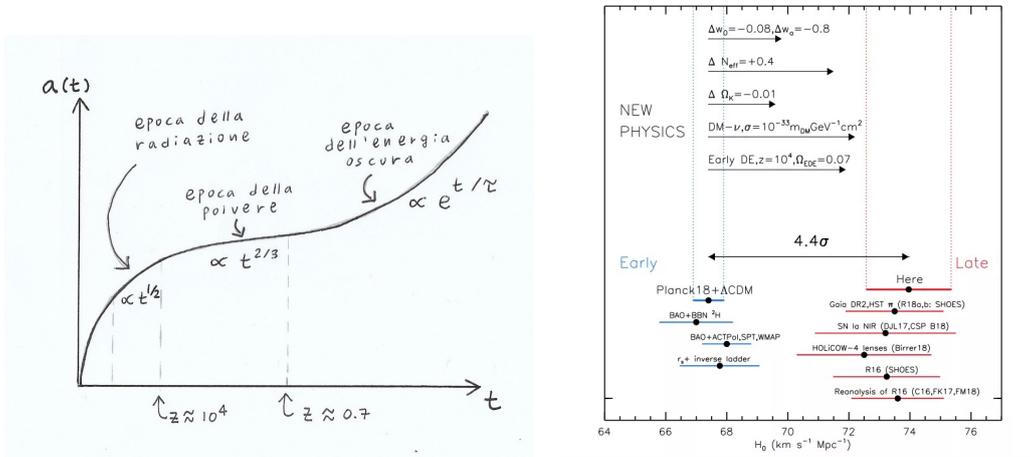
I parametri cosmologici risultano fondamentali per evidenziare caratteristiche dell'universo come la densità delle sue diverse componenti ed il tasso di espansione, entrambi fondamentali per il calcolo di tempi e distanze cosmologiche. I valori esatti subiscono continue revisioni, tramite la cosiddetta *high-precision cosmology*. Vengono di seguito elencati alcuni dei parametri cosmologici misurati dalla missione *Planck*², ottenuti con un'altissima precisione utilizzando le anisotropie della radiazione cosmica di fondo [4].

- $\Omega_c h^2 = 0.120 \pm 0.001$ **Densità di materia oscura**
- $\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0001$ **Densità di materia barionica**
- $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ **Costante di Hubble**
- $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$ **Densità di materia**

Altri parametri rilevanti sono:

- $\Omega_0 \approx 1$ **Densità di energia totale**
- $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ **Densità di energia oscura**
- $\Omega_\gamma \approx 10^{-5}$ **Densità di radiazione**
- $q_0 \approx \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \approx -0.55$ **Parametro di decelerazione**

²Risultati presentati nel 2018.



(a) Evoluzione dell'universo secondo il modello Lambda-CDM. (b) Differenza tra misurazioni locali di H_0 e il valore predetto dal satellite *Planck* [5].

Figura 2.1

La **densità di energia totale** Ω_0 indica il rapporto tra la densità dell'universo e quella critica, determinandone la geometria. Questo parametro è vincolato al valore $\Omega_0 \approx 1$ da misure sulle anisotropie della radiazione cosmica di fondo: quindi l'universo ha una geometria piatta, mentre misurando la densità di materia e di radiazione si ottiene un valore $\Omega_0 \approx 0.3$ (universo aperto). Siccome la geometria dell'universo non può cambiare, deve esistere una forma di energia che contribuisce alla curvatura ma non alla formazione di strutture: questa è detta **energia oscura** ed ha una densità di energia ρ_Λ costante³ [2].

La **densità di radiazione** è ottenibile dalla temperatura della radiazione cosmica di fondo $T \approx 2.726 K$ con la relazione $\rho_\gamma = \alpha T^4$ [3].

Il **parametro di decelerazione** è definito come:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{2.7}$$

dove a e \dot{a}^2 rendono il parametro adimensionale. Fu introdotto poiché si pensava che l'espansione dell'universo decelerasse nel tempo. Si scoprì poi che l'universo ha un'accelerazione positiva grazie a studi sulle supernovae di tipo Ia.

Uno dei metodi per ottenere la **costante di Hubble** è utilizzare la scala delle distanze: va sottolineato come ci sia una discrepanza tra il valore $H_0 \approx 67.4 \pm 0.5 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, ottenuto dal satellite *Planck* e $H_0 \approx 74.03 \pm 1.42 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ ottenuto da misure locali che utilizzano la scala delle distanze (vedi Figura 2.1(b)) [5].

³Non contribuisce alla formazione di strutture in quanto non ha fluttuazioni.

Capitolo 3

Radiazione cosmica di fondo

I parametri cosmologici possono essere ottenuti con diversi metodi: in questo elaborato si vuole trattare lo studio dello spettro di potenza della radiazione cosmica di fondo (Cosmic microwave background, CMB).

Tale radiazione venne scoperta nel 1965 da Arno Penzias e Robert Wilson, fornendo un'evidenza fondamentale del modello del Big Bang essendo essa una naturale conseguenza del fatto che inizialmente l'universo fosse molto caldo e denso. Assumiamo che l'universo in origine fosse estremamente caldo ($T > 10^4 K$), la materia barionica era completamente ionizzata e l'universo era reso opaco dagli elettroni liberi che non permettevano ai fotoni di uscire, essendo questi accoppiati con la materia stessa.

In seguito all'espansione, l'universo si è raffreddato: ad una temperatura di $\sim 3000 K$ ioni ed elettroni hanno iniziato a ricombinarsi (**epoca della ricombinazione**) formando atomi neutri; quando il numero di elettroni liberi si è sufficientemente ridotto i fotoni della radiazione cosmica di fondo hanno potuto muoversi liberamente nell'universo (**disaccoppiamento dei fotoni**), con lo spettro tipico di un corpo nero. Si definisce **epoca dell'ultimo scattering** il momento in cui un tipico fotone della CMB ha subito l'ultimo scattering da parte di un elettrone¹. Ogni osservatore nell'universo è quindi circondato dalla superficie di ultimo scattering, da cui arrivano i fotoni della CMB.

Un'importante proprietà della CMB è la sua quasi perfetta isotropia. Sia $T(\theta, \phi)$ la temperatura della CMB in un punto del cielo, la temperatura media sarà:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = 2.726 K \quad (3.1)$$

e una generica fluttuazione di temperatura è definita come:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \equiv \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \quad (3.2)$$

¹L'epoca di ultimo scattering è molto vicina all'epoca del disaccoppiamento dei fotoni, entrambe a redshift $z \sim 1100$.

L'osservazione dell'isotropia della CMB fornisce una forte evidenza dell'isotropia su larga scala dell'universo: le osservazioni del satellite *COBE* infatti hanno registrato anisotropie dell'ordine di $\delta T/T \approx 10^{-5}$. L'osservazione di queste fluttuazioni permette di ottenere misurazioni precise di alcuni parametri cosmologici. Dato che queste fluttuazioni sono definite sulla superficie di una sfera è utile espanderle in armoniche sferiche (Y_{lm}):

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.3)$$

La proprietà statistica principale delle fluttuazioni è la funzione di correlazione $C(\theta)$:

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle \quad (3.4)$$

Che può essere riscritta come:

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta) \quad (3.5)$$

dove i P_l sono detti polinomi di Legendre. l è detto **multipolo** ed è intercambiabile con la scala angolare $\theta \sim 180^\circ/l$.

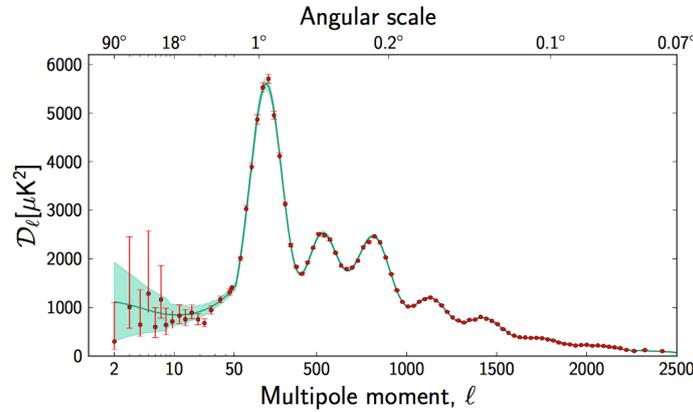


Figura 3.1: Spettro di potenza della CMB ottenuto dal satellite Planck (dati del 2013), con $D_l = l(l+1)C_l/2\pi$.

Il multipolo $l = 0$ corrisponde alla temperatura media della CMB, ad $l = 1$ corrisponde il termine di dipolo dovuto all'effetto Doppler. I multipoli $l \geq 2$ sono i più interessanti poiché descrivono le fluttuazioni presenti al momento dell'ultimo scattering. Per i risultati sulle osservazioni della CMB si rappresenta il grafico di $D_l = l(l+1)C_l/2\pi$ in funzione del multipolo l , ottenendo lo **spettro di potenza angolare**² (vedi Figura 3.1).

²Lo spettro di potenza non considera il segno delle fluttuazioni, che vengono prese in valore assoluto.

Al momento dell'ultimo scattering ($z_{ls} \approx 1100$) una scala particolarmente interessante è la **distanza di Hubble**:

$$c/H(z_{ls}) \approx 0.2 \text{ Mpc} \quad (3.6)$$

Un oggetto sulla superficie di ultimo scattering di questa grandezza avrà una dimensione angolare $\theta_H \approx 1^\circ$. Osservando lo spettro di potenza si nota come il primo picco corrisponda ad una scala angolare $\theta \approx 1^\circ$ ovvero ad un multipolo $l \approx 220$.

3.1 Origine delle anisotropie

La temperatura dei fotoni della CMB dipende dai campi associati ad essi, in particolare:

- **Gravità** (redshift e blueshift gravitazionale)
- **Densità** (riscaldamento e raffreddamento per compressione ed espansione)
- **Velocità** (effetto Doppler)

Le anisotropie si suddividono in **primarie**, originatesi sulla superficie di ultimo scattering e **secondarie**, formatesi da fenomeni fisici avvenuti tra la superficie di ultimo scattering e l'osservatore. In questo elaborato verranno trattate le anisotropie primarie.

L'origine delle fluttuazioni di temperatura è differente a seconda della scala che si considera:

3.1.1 Effetto Sachs-Wolfe ($\theta > \theta_H$)

Queste fluttuazioni di temperatura emergono dagli effetti gravitazionali delle fluttuazioni di densità primordiali nella distribuzione della materia oscura (in quanto a redshift z_{ls} la materia oscura dominava la densità di energia).

Supponiamo che la densità della materia oscura al momento dell'ultimo scattering non sia perfettamente omogenea:

$$\epsilon(\vec{r}) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\vec{r}) \quad (3.7)$$

La variazione della densità di energia $\delta\epsilon$ porta ad una variazione del potenziale gravitazionale $\delta\phi$:

$$\nabla^2(\delta\phi) = \frac{4\pi G}{c^2} \delta\epsilon \quad (3.8)$$

Per effetto della gravità un fotone della CMB che si trova in una buca di potenziale al momento dell'ultimo scattering perderà energia per uscire e sarà spostato verso il rosso.

Analogamente un fotone che si trova su una cresta di potenziale guadagnerà energia e sarà spostato verso il blu.

Considerando l'effetto delle fluttuazioni di densità $\delta\epsilon$, le regioni con densità più elevata hanno una temperatura più alta ed emetteranno fotoni spostati verso il blu, viceversa per fotoni emessi da regioni con densità minore rispetto alla media.

Poiché le regioni sovradense corrispondono a minimi del potenziale e le regioni sottodense a massimi del potenziale gli effetti di gravità e densità tendono a cancellarsi.

Nonostante ciò i due termini non hanno lo stesso valore e le fluttuazioni dovute alla gravità dominano. L'effetto combinato di questi due effetti è detto **effetto Sachs-Wolfe** in onore dei fisici Sachs e Wolfe che l'hanno calcolato nel 1967, ottenendo:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\phi}{c^2} \quad (3.9)$$

3.1.2 Oscillazioni acustiche ($\theta < \theta_H$)

Consideriamo la situazione immediatamente precedente al disaccoppiamento tra materia e fotoni; questi non erano separati e formavano un fluido di fotoni e barioni che si muoveva prevalentemente sotto l'influenza della gravità della materia oscura: da una parte il fluido avverte l'attrazione della materia oscura e cade all'interno della buca di potenziale, dall'altra, cadendo, aumenta la propria densità e la pressione di radiazione tende a respingerlo fuori.

Queste oscillazioni avvengono a tutte le scale con $\theta < \theta_H$: se la dimensione della buca di potenziale è $> c/H(z_{ls})$ il fluido di barioni e fotoni (che viaggia ad una velocità $< c$) non riuscirà a cadere al centro della buca in tempo per l'ultimo scattering $t_{ls} \sim 1/H(z_{ls})$. Per questa ragione il moto di questo fluido non è rilevante per scale $\theta > \theta_H$ [3].

Se il fluido all'interno della buca di potenziale si trova nella situazione di massima compressione al momento del disaccoppiamento, la sua densità sarà più alta della media e il fotone emesso avrà una temperatura più elevata³. Viceversa, se il fluido si trova alla massima espansione, il fotone emesso avrà una temperatura minore rispetto alla media. Questo processo è descritto schematicamente da un oscillatore armonico nel quale le molle rappresentano la pressione dei fotoni e le sfere la massa del fluido (vedi Figura 3.2).

Procedendo dalle scale più grandi alle più piccole, a $\theta \sim \theta_H$ il fluido avrà compiuto una mezza oscillazione e si troverà alla massima compressione (questa scala corrisponde al primo picco nello spettro di potenza della CMB). Ad una scala di circa la metà il fluido avrà compiuto un'oscillazione completa e sarà alla massima espansione. I picchi dispari nello spettro di potenza corrisponderanno a momenti di massima compressione, i picchi pari a momenti di massima espansione. In Figura 3.2(a) (in blu) è rappresentato l'andamento temporale di una fluttuazione di densità che passa attraverso fasi di compressione ed espansione.

³Dato che $T \propto \epsilon^{1/4}$.

Oltre a fluttuazioni nella densità sono presenti fluttuazioni nella velocità (tratteggiate in rosso in figura): infatti, se il fluido si sta espandendo o contraendo al momento del disaccoppiamento, per effetto Doppler i fotoni emessi saranno più caldi o più freddi della media. Queste fluttuazioni hanno una fase di $\pi/2$ rispetto a quelle nella densità, perciò quando il fluido raggiunge la massima compressione e la massima espansione ha velocità nulla, mentre ha velocità massima quando la densità è uguale alla media. Considerando solo il potenziale della materia oscura, il contributo alle fluttuazioni di temperatura di densità e di velocità sarebbe di uguale ampiezza e non si avrebbero picchi acustici.

Dato che c'è anche il contributo gravitazionale della massa dei barioni, la buca di potenziale è in realtà un po' più profonda e quindi il fluido subisce una compressione maggiore rispetto a prima, andando a favorire le fluttuazioni di densità e generando i picchi acustici (vedi Figura 3.2(b)): questo effetto è detto **baryon drag** (i picchi sono dati dalla somma in quadratura delle fluttuazioni di densità e velocità che senza questo effetto sarebbe costante).

L'effetto di smorzamento che si vede nei picchi dello spettro di potenza ad alti multipli è detto **diffusion damping**; la scala fisica di queste fluttuazioni è così piccola che è paragonabile al libero cammino medio dei fotoni: ciò permette a fotoni caldi e freddi di mischiarsi e mediare le temperature. Questo effetto diminuisce sensibilmente le anisotropie verso scale sempre più piccole [6].

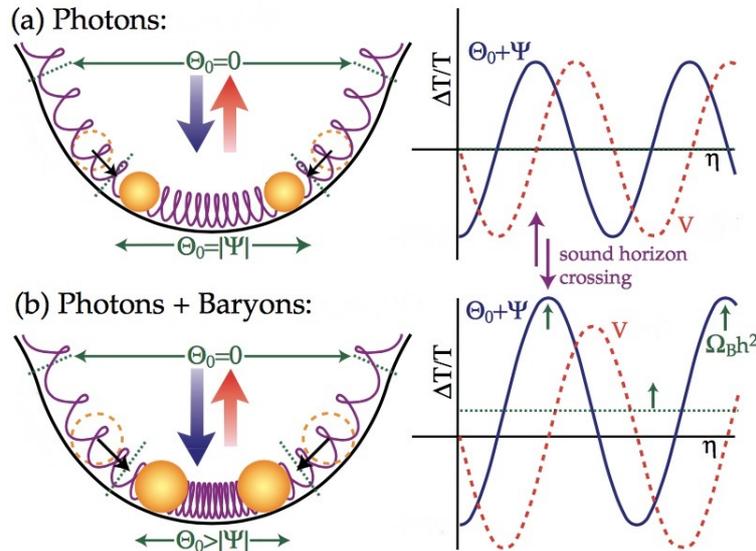


Figura 3.2: Oscillazioni acustiche. (a) Sistema con $\Omega_b = 0$. (b) Sistema con $\Omega_b \neq 0$ [7].

3.2 Dipendenza dello spettro di potenza dai parametri cosmologici

Una misura precisa delle anisotropie di temperatura consente di ottenere stime di alcuni parametri cosmologici: ciò effettuando un fit dello spettro osservato con spettri di potenza ottenuti in simulazioni numeriche al variare dei parametri cosmologici.

3.2.1 Curvatura dell'universo

La posizione del primo picco dello spettro di potenza (e in generale di tutti i picchi) dipende sensibilmente dalla curvatura dell'universo: al diminuire della curvatura i picchi si spostano ad angoli più piccoli (quindi a multipoli l più grandi) mantenendo al contempo la stessa forma. Dal primo picco (osservato con una precisione maggiore rispetto ai successivi) si ottiene che l'universo ha una curvatura quasi perfettamente piatta, quindi $\Omega_0 \approx 1$.

3.2.2 Costante di Hubble

Aumentando H_0 , diminuisce la distanza di ultimo scattering e quindi il primo picco dello spettro viene visto ad un angolo maggiore (vedi Figura 3.3(b)).

3.2.3 Densità di barioni

Come detto, l'effetto di baryon drag permette la creazione dei picchi acustici: all'aumentare della densità dei barioni aumenta la profondità delle buche di potenziale. Poiché i picchi dispari sono associati a momenti di massima compressione del fluido, aumentando Ω_b aumenta il loro contributo rispetto a quello dei picchi pari (vedi Figura 3.3(a)). Aumentare la densità dei barioni rende il fluido più accoppiato e sposta la *damping tail* a scale angolari più piccole. Inoltre l'aumento di massa diminuisce la frequenza delle oscillazioni, spostando i picchi a multipoli più elevati. I molti modi con cui i barioni influenzano lo spettro in modo indipendente permettono di ottenerne la densità con estrema precisione [6].

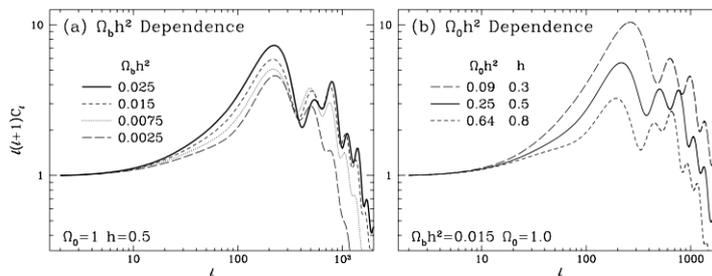


Figura 3.3: Dipendenza dello spettro di potenza angolare da Ω_b (a) e da H_0 (b) [8].

Bibliografia

- [1] Peter Coles, Francesco Lucchin, *Cosmology, The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, John Wiley & Sons, LTD (2002)
- [2] Franco Vazza, *Appunti di Astrofisica Extragalattica* (2019)
- [3] Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*, The Ohio State University (2006)
- [4] Planck Collaboration, *Planck 2018 Results. VI. Cosmological parameters*, (2018)
- [5] Adam G. Riess et al., *Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics Beyond Λ CDM*, accepted by "ApJ" (2019)
- [6] Wayne Hu, *Intermediate Guide to the Acoustic Peaks and Polarization*, <http://background.uchicago.edu/~whu/intermediate/intermediate.html> (2001)
- [7] Wayne Hu, Naoshi Sugiyama & Joseph Silk, *The Physics of Microwave Background Anisotropies*, in "Nature" 386 pag. 37-43 (1997)
- [8] Wayne Hu, *Concepts in CMB Anisotropy Formation*, in "Lect.Notes Phys" 470 pag. 207 (1996)