

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Fisica

**STATISTICA FRAZIONARIA  
E  
ANIONI**

**Relatore:  
Prof.ssa  
ELISA ERCOLESSI**

**Presentata da:  
UMBERTO DI LAUDO**

**Anno Accademico 2018/2019**

## Sommario

In questa tesi si espone la teoria quantistica per particelle identiche in spazi bidimensionali. Si discute a livello geometrico la costruzione dello spazio delle configurazioni per un sistema di tali particelle, dette anioni, e vengono descritte le loro principali caratteristiche. Viene inoltre studiato il comportamento della meccanica quantistica in spazi non semplicemente connessi. Si illustra infine il modello a tubo di flusso degli anioni e la teoria di gauge non relativistica di Chern-Simons.

# Indice

<b>1</b>	<b>Topologia e gruppo delle trecce</b>	<b>4</b>
1.1	Particelle identiche . . . . .	4
1.2	Spazio delle configurazioni . . . . .	5
1.3	Gruppo di omotopia . . . . .	9
1.4	Gruppi $S_N$ e $B_N$ . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Meccanica quantistica in spazi non connessi</b>	<b>13</b>
2.1	La fase della funzione d'onda . . . . .	13
2.2	Rivestimento universale . . . . .	14
2.3	Sistema di particelle identiche . . . . .	17
2.4	Statistica frazionaria . . . . .	18
2.5	Dinamica della statistica frazionaria . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Modello a tubo di flusso</b>	<b>23</b>
3.1	Cyon . . . . .	23
3.2	Interazione carica-flusso . . . . .	26
3.3	Termine di Chern-Simons . . . . .	28
<b>A</b>	<b>Integrale sui cammini</b>	<b>36</b>

# Introduzione

Il concetto di particelle identiche prevede la totale uguaglianza di caratteristiche fisiche quali massa, carica elettrica e spin, di due o più particelle. Tale concetto in fisica classica non comportava conseguenze a livello dinamico. In effetti classicamente pur essendo identiche, due particelle possono sempre essere distinte le une dalle altre in quanto, conoscendo posizione e velocità iniziali di una data particella, la traiettoria di quest'ultima è univocamente definita. I primi problemi riguardo la distinguibilità di più particelle identiche, ovvero sulla possibilità di poterle *etichettare*, sorgono già in termodinamica statistica. Ad esempio, tramite il mescolamento di gas, alla base del paradosso di J.W. Gibbs si capì che sistemi di particelle identiche avevano caratteristiche diverse da sistemi di particelle diverse. In generale quindi in questo ambito, i risultati sperimentali sono verificati solamente se si assume l'indistinguibilità di particelle identiche.[5]

Con l'avvento della meccanica quantistica, l'indistinguibilità è garantita dal principio di indeterminazione: non potendo conoscere con esattezza le condizioni iniziali di una data particella, il concetto di traiettoria perde di significato. Considerando quindi sistemi di due o più particelle identiche non sarebbe possibile etichettarle, ovvero distinguerle.[4]

Conseguenza di ciò fu la divisione di tutte le particelle in *bosoni* e *fermioni*. Tale differenza si manifesta matematicamente nella funzione d'onda che descrive il sistema: i sistemi bosonici hanno una funzione d'onda totalmente simmetrica, mentre i sistemi fermionici hanno una funzione d'onda totalmente antisimmetrica. Ciò sta a significare che a seguito di uno scambio di due particelle bosoniche la funzione d'onda totale resta invariata, mentre uno scambio di due particelle fermioniche comporta un cambio di segno della funzione d'onda totale.

J.M. Leinaas e J. Myrheim [6] cercarono di giustificare teoricamente l'origine di tale separazione e capirono che l'esistenza di soli due tipi di particelle derivava da un fatto di natura puramente geometrica, ovvero la dimensione dello spazio delle configurazioni di ciascuna particella. Considerando ad esempio particelle con spazio delle configurazioni bidimensionale si ottiene l'esistenza di infinite classi di particelle, ciascuna delle quali è in corrispondenza biunivoca con un parametro che assume valori compresi tra 0 e  $\pi$ . Queste particelle furono chiamate *anioni* (anyons in inglese) e rispettano una statistica frazionaria. La funzione d'onda totale di un sistema di anioni a seguito di uno scambio

di due di essi, acquista una fase generica, e bosoni e fermioni risultano essere solamente casi particolari in cui la fase è uguale a  $\pm 1$ .

Tale scoperta, che poteva sembrare una semplice curiosità teorica, si è rivelata invece di fondamentale importanza nello studio dell'effetto Hall quantistico frazionario e nello sviluppo dei computer quantistici. [8] [9]

In questo testo ci si concentra sulla trattazione matematica e fisica degli anioni. Nel primo capitolo si analizza dal punto di vista geometrico lo spazio delle configurazioni di un sistema di particelle identiche e indistinguibili in uno spazio  $N$ -dimensionale. Si sottolinea la differenza tra i sistemi di particelle vincolate a due e a tre dimensioni e si discute il primo gruppo di omotopia dei relativi spazi. Si nota che lo spazio delle configurazioni totale risulta essere non *semplicemente connesso*.

Vi è quindi la necessità di analizzare il comportamento della meccanica quantistica in tali spazi e tale trattazione è riportata nel capitolo 2.

Nel capitolo 3 si discute la possibilità di vedere un anione come una particella consueta carica a cui viene "attaccato" un tubo di flusso. Inoltre si descrive la teoria di gauge di Chern-Simons non relativistica che permette di realizzare un sistema di particelle con tali caratteristiche.

# Capitolo 1

## Topologia e gruppo delle trecce

In questo capitolo si discute lo spazio delle configurazioni di un sistema di  $N$  particelle, sottolineando le differenze tra sistemi confinati in due o più dimensioni spaziali e notando che tale spazio risulta essere non semplicemente connesso. Si introduce il concetto di *loop* che in questo caso corrisponde ad uno scambio di particelle. In spazi bidimensionali risulta essere importante la *storia* di tali particelle e non solamente lo stato iniziale e finale del sistema. Viene inoltre data la definizione di *omotopia* e *primo gruppo di omotopia*, concetto matematico utile per la descrizione di spazi topologici. Vi è infine una breve descrizione del gruppo delle permutazioni  $S_N$  e delle trecce  $B_N$ , che risultano essere i primi gruppi di omotopia degli spazi descritti nel capitolo.

### 1.1 Particelle identiche

In questo paragrafo ci si occuperà dello studio di un sistema fisico formato da  $N$  particelle libere di muoversi in  $d$  dimensioni. Si analizzeranno in particolar modo i casi in cui  $d = 2$  e  $d = 3$  e sarà interessante notare come il solo passaggio dalle tre alle due dimensioni causi dei profondi cambiamenti sul comportamento delle particelle.

Innanzitutto si deve precisare che tali particelle sono identiche e indistinguibili. Due particelle identiche potrebbero essere in generale distinguibili nel caso in cui si potesse etichettarle, ovvero se si potessero conoscere esattamente le traiettorie di ciascuna di esse. Questo procedimento, del tutto legittimo in meccanica classica, non è naturalmente possibile in meccanica quantistica a causa del **principio di indeterminazione**. Ciò dà origine al "*principio di indistinguibilità delle particelle identiche*".

In realtà questo principio fu introdotto da John Willard Gibbs molto prima dell'avvento della meccanica quantistica con il **paradosso di Gibbs**. Il paradosso consisteva nel fatto che, mischiando due gas dello stesso tipo, l'entropia del sistema sembrava aumentare. La soluzione che Gibbs diede fu quella di considerare il volume dello spazio delle fasi per  $N$  particelle,  $N!$  volte più piccolo di quello calcolato per particelle distinguibili.

L'idea di Leinaas e Myrheim invece, era quella di modificare inizialmente lo spazio delle fasi in modo che fosse già implicita l'indistinguibilità delle particelle. Dato che in meccanica quantistica lo spazio delle fasi perde significato, ci si occuperà in particolare dello spazio delle configurazioni.

## 1.2 Spazio delle configurazioni

Si assuma che lo spazio delle configurazioni di una singola particella sia  $X = \mathbb{R}^d$ . Contrariamente a quanto ci si aspetterebbe intuitivamente lo spazio totale delle  $N$  particelle non è  $X^N = \mathbb{R}^{Nd}$ . Si consideri infatti un punto  $\mathbf{x} \in X^N$ , ovvero una  $N$ -upla di coordinate

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.2.1)$$

in cui  $x_i \in X$ . Ora consideriamo l'azione  $\sigma \in S_N$ , gruppo delle permutazioni, tale che

$$\begin{aligned} \sigma : X^N &\rightarrow X^N \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}' = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Risulta ovvio che le  $N$ -uple  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  descrivono lo stesso stato del sistema, così come tutte le altre  $N!$   $N$ -uple ottenute dalle possibili permutazioni dei singoli  $x_i$ . Ne consegue che non vi è una corrispondenza biunivoca tra uno stato del sistema e una singola  $N$ -upla  $\mathbf{x}$ .

Affinchè vi sia una corrispondenza biunivoca bisogna modificare lo spazio delle configurazioni.

Si consideri quindi la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_N \mid y = \sigma x \quad (1.2.3)$$

e si operi il quoziente dello spazio  $X^N$  rispetto a tale relazione. Lo spazio delle configurazioni modificato risulterà essere  $X^N/S_N$ , cioè si identificano tutti i punti che rappresentano la stessa configurazione fisica del sistema.

In realtà neanche  $X^N/S_N$  è il giusto spazio da considerare, in quanto può avere delle singolarità al suo interno. Infatti i punti di  $X^N/S_N$  che corrispondono alla sovrapposizione della posizione di due o più particelle, sono punti singolari e corrispondono ai **punti fissi** dell'azione di  $S_N$  su  $X^N$ . Questi punti andranno quindi sottratti dallo spazio delle configurazioni totale.

Per fare ciò si può considerare l'insieme "diagonale"  $\Delta$  di  $X^N$

$$\Delta = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in X^N \mid x_i = x_j \text{ per } i \neq j \right\} \quad (1.2.4)$$

che rappresenta l'insieme dei punti fissi dell'azione del gruppo delle permutazioni.

Si è concluso che lo spazio delle configurazioni di un sistema formato da  $N$  particelle identiche è

$$Q = \frac{X^N - \Delta}{S_N} \quad (1.2.5)$$

In questo paragrafo si studieranno i casi in cui lo spazio delle configurazioni di una singola particella  $X$  è uguale a  $\mathbb{R}^d$ .

Per studiare casi come questi risulta molto conveniente utilizzare le coordinate del centro di massa

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d \quad (1.2.6)$$

dove  $\mathbf{x}_i$  sono le coordinate della  $i$ -esima particella. A questo punto lo spazio  $X^N/S_N$  può essere diviso come prodotto cartesiano [2]

$$\frac{X^N}{S_N} = \mathbb{R}^d \times r(d, N) \quad (1.2.7)$$

dello spazio del centro di massa  $\mathbb{R}^d$  e lo spazio relativo  $r(d, N)$  che rappresenta i  $d(N-1)$  gradi di libertà del moto relativo delle particelle.  $r(d, N)$  ha dimensione  $(Nd-d)$  ed è ottenuto uguagliando i punti connessi tramite elementi di  $S_N$  nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{Nd-d}$ .

Si consideri per fare un esempio il caso in cui  $N=2$ :  $r(d, 2)$  si trova identificando i punti  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  con i punti  $-\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  nello spazio  $\mathbb{R}^d$ . Inoltre è necessario sottrarre da questo spazio l'insieme diagonale  $\Delta = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = 0\}$ . Esso corrisponde al caso di sovrapposizione delle posizioni delle due particelle  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  unico punto singolare dello spazio.

In questo modo lo spazio delle configurazioni  $X^2/S_2$  diventa

$$Q = \frac{X^2 - \Delta}{S_2} = \mathbb{R}^d \times \frac{(\mathbb{R}^d - 0)}{\mathbb{Z}_2} = ]0, +\infty[ \times P_{d-1} \quad (1.2.8)$$

Nell'espressione precedente lo spazio è stato inoltre diviso per  $\mathbb{Z}_2$  in quanto ciò permette di identificare  $\mathbf{x}$  con  $-\mathbf{x}$ .  $P_{d-1}$  è lo spazio dei  $d-1$  gradi di libertà restanti e l'insieme delle direzioni di  $\mathbf{x}$ .

Prima di procedere nell'analisi di casi specifici, è necessario introdurre il concetto di *loop* in uno spazio topologico, in questo caso lo spazio delle configurazioni, e il concetto di *omotopia*.

**Definizione 1.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $p$  un suo punto fissato. Si dice **loop** centrato in  $p$  una funzione continua

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

tale che  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ .



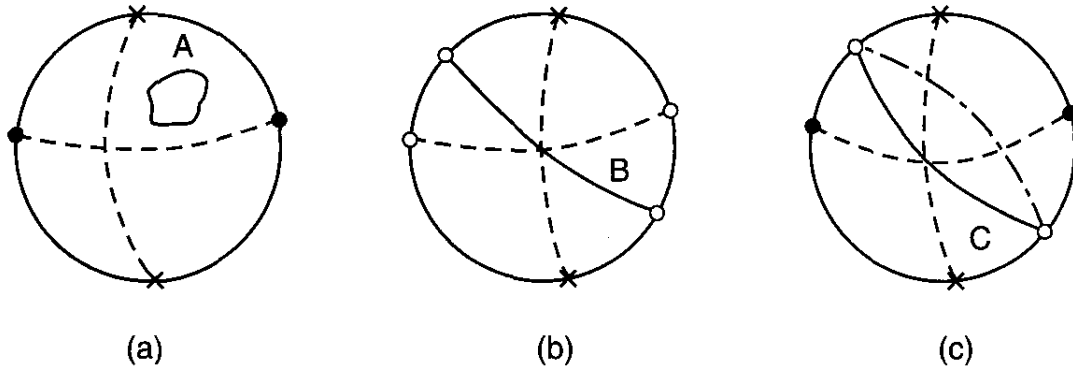


Figura 1.1: Rappresentazione dei tre possibili loop in  $d = 3$  [da [2]]

In altre parole esso rappresenta un cammino chiuso nello spazio  $X$ .

**Definizione 1.2.** Si dice **omotopia** tra due loop  $\gamma$  e  $\lambda$  una funzione continua

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

che trasforma  $\gamma$  in  $\lambda$  tramite lacci centrati in  $p$ . Ovvero

$$F(t, 0) = \gamma(t), F(t, 1) = \lambda(t) \quad \forall t$$

e

$$F(0, s) = F(1, s) = p \quad \forall s$$

Due *loop* (definizione (1.1.)) si dicono *equivalenti* se esiste una omotopia che li collega.

Arrivati a questo punto si inizia a vedere la differenza tra le due e le tre dimensioni.

- $d \geq 3$ : Come già detto lo spazio relativo  $r(d, 2)$  rappresenta lo spazio dei versori direzione in  $R^d$ . In questo caso quindi  $r(d, 2)$  rappresenta una sfera di dimensione  $(d-1)$ ,  $S^{d-1}$ , i cui punti diametralmente opposti sono identificati [2]. Percorrendo un loop in questo spazio vi sono tre possibilità (figura (1.1)):

1. nessuno scambio
2. uno scambio (percorrendo una semicirconferenza massima)
3. due scambi (percorrendo una circonferenza massima)

Nel caso (1), viene percorso un loop che non coinvolge punti identificati con il punto di partenza, quindi il percorso può essere ricondotto a un punto. Non rappresenta

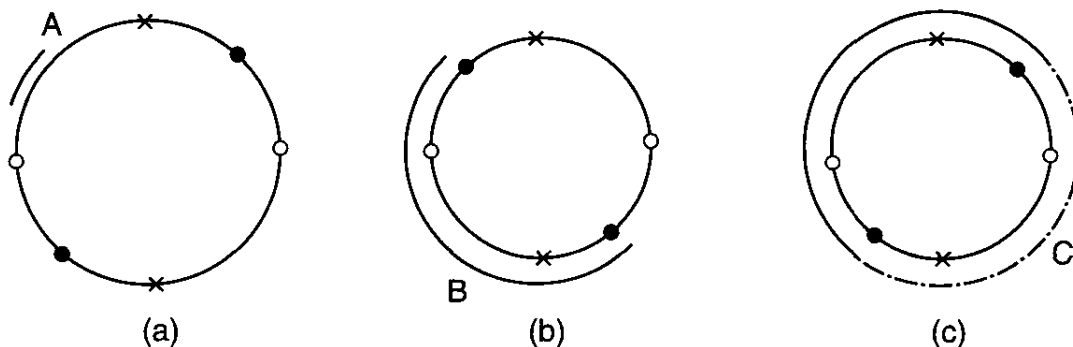


Figura 1.2: Rappresentazione dei tre possibili loop in  $d = 2$  [da [2]]

quindi nessuno scambio. Nel caso (2) si percorre una semicirconferenza, partendo da un punto e arrivando quindi in quello diametralmente opposto. Questo percorso non può essere ricondotto a un punto. Nel caso (3) il percorso corrisponde a una circonferenza chiusa, riconducibile a un punto. I percorsi possibili quindi sono quelli in cui avviene uno scambio o in cui non ne avviene alcuno.

- $d = 2$ : Questo è il caso che interessa maggiormente. In questo caso  $r(2,2)$  rappresenta un piano privato dell'origine con i punti opposti identificati [2]. Si tratta quindi chiaramente di uno spazio non semplicemente connesso. "Tagliando" il piano lungo una semiretta che parte dall'origine e avvolgendolo fino a far ricongiungere i lembi, si può ottenere dallo spazio di partenza, un cono senza il vertice con apertura di  $\pi/3$  rad. Procedendo in questo modo però bisogna ricordarsi che compiere un giro lungo una circonferenza nel piano centrata nell'origine, corrisponde a compiere due giri lungo il cono. Come in precedenza vi sono tre possibili loop da percorrere che determinano (figura (1.2)):

1. nessuno scambio
2. uno scambio
3. due scambi

Nel caso (1) il percorso può essere ricondotto a un punto. Il caso (2) corrisponde a percorrere una semicirconferenza ed è quindi evidente che il percorso non può essere contratto in un punto. Nel caso (3) viene percorsa una circonferenza, ma a differenza del caso delle tre in più dimensioni, essa non è omotopicamente equivalente a un punto. Si può perciò distinguere il caso in cui vengano effettuati due scambi dal caso in cui non ne venga effettuato alcuno ed è inoltre fondamentale conoscere il verso di percorrenza ed il numero di giri percorso.

È interessante notare che ciò accade poichè il piano è stato privato dell'origine: in caso contrario infatti i loop del caso (3) sarebbero stato contraibili a un punto e verso di percorrenza e numero di giri sarebbe stato ininfluente.

Sorge quindi una differenza enorme tra le tre e le due dimensioni: *mentre nelle tre dimensioni è importante conoscere solamente lo stato iniziale e finale del sistema, in due dimensioni è necessario conoscere l'evoluzione temporale delle particelle.*

Come si vedrà meglio nei capitoli successivi, lo scambio di due particelle comporta la moltiplicazione di una fase del tipo  $e^{i(\pm\theta)}$ , con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Ciò dà origine alla *statistica frazionaria*, con particelle che hanno un comportamento intermedio tra bosoni e fermioni.

### 1.3 Gruppo di omotopia

Matematicamente la distinzione tra gli spazi delle configurazioni in due o tre dimensioni, viene espressa attraverso il primo gruppo di omotopia.

Come già detto in precedenza, due *loop* sono tra loro *equivalenti* se esiste una omotopia che li collega. Si ottiene così una relazione di equivalenza e un *insieme quoziente*, indicato con  $\pi_1(X, p)$ . La classe di equivalenza di un loop  $\gamma$  indicata con  $[\gamma]$  è un elemento di  $\pi_1(X, p)$ , che sarà denominato **primo gruppo di omotopia**.

Tale gruppo per  $Q = \frac{R^{(2)}-0}{Z_2}$  vale

$$\pi_1\left(\frac{R^{(2)}-0}{Z_2}\right) = Z \quad (1.3.1)$$

mentre per  $Q = \frac{R^{(d)}-0}{Z_2}$ ,  $d \geq 3$

$$\pi_1\left(\frac{R^{(d)}-0}{Z_2}\right) = Z_2 \quad (1.3.2)$$

Generalizzando per  $N$  particelle si ha [2], [7]

$$\begin{aligned} \pi_1\left(\frac{R^{Nd}-\Delta}{S_N}\right) &= B_N; & \text{per } d=2 \\ &= S_N; & \text{per } d \geq 3 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

dove  $B_N$  rappresenta il gruppo delle trecce di  $N$  particelle mentre  $S_N$  rappresenta il gruppo di permutazioni di  $N$  particelle.

## 1.4 Gruppi $S_N$ e $B_N$

Il gruppo delle permutazioni  $S_N$  è un gruppo finito di ordine  $N!$  generato da  $N - 1$  operatori  $\sigma_i$  più l'operatore identità  $\mathbb{1}$ . Il generatore  $\sigma_i$  determina la permutazione della particella  $i$  -esima con la particella  $i + 1$  -esima, mentre l'operatore identità lascia il sistema invariato. Tali generatori soddisfano le seguenti proprietà:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1.4.1)$$

per  $i \neq (N - 1)$ ,

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (1.4.2)$$

per  $|i - j| \geq 2$ , e

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad (1.4.3)$$

La presentazione di tale gruppo può essere scritta come

$$S_N = \langle \mathbb{1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad ; \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| \geq 2 \quad ; \quad \sigma_i^2 = \mathbb{1} \rangle \quad (1.4.4)$$

La condizione (1.4.3) è perfettamente coerente con quanto visto nel paragrafo 1.2: in effetti per uno spazio di dimensione  $d \geq 3$  si è visto che un loop rappresentante un doppio scambio di particelle è omotopicamente equivalente a un punto. Ciò sta a significare che effettuare un doppio scambio equivale a non effettuarne alcuno e che la doppia applicazione dello stesso operatore  $\sigma_i$  corrisponde all'applicazione di  $\mathbb{1}$ .

Per comprendere meglio la statistica frazionaria, ci si soffermerà anche sulla descrizione del gruppo delle trecce  $B_N$ . Tale gruppo, a differenza di  $S_N$  è un *gruppo infinito* con  $N - 1$  generatori  $\sigma_i$ , con  $1 \leq i \leq (N - 1)$ . I generatori  $\sigma_i$  devono soddisfare le proprietà

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1.4.5)$$

per  $i \neq (N - 1)$  e

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (1.4.6)$$

per  $|i - j| \geq 2$ .

La presentazione del gruppo si può scrivere

$$B_N = \langle \mathbb{1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad ; \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2 \rangle \quad (1.4.7)$$

L'effetto che provoca sulla traiettoria della particella  $i$  -esima l'applicazione del generatore  $\sigma_i$  è descritto nella figura (1.3).

Si noti che quindi il compito di  $\sigma_i$  è quello di scambiare l' $i$  -esima particella con l' $i+1$  -esima in senso antiorario. Per ogni  $\sigma_i$  esiste il suo inverso  $\sigma_i^{-1}$ , tale per cui avviene

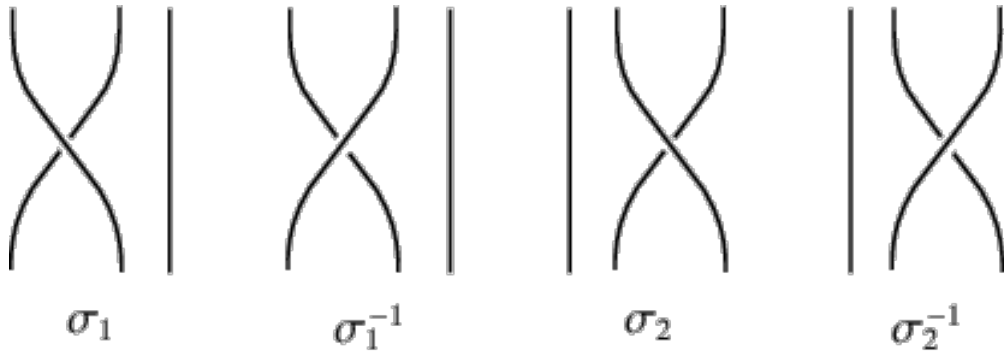


Figura 1.3: Rappresentazione dell'azione di  $\sigma_i$  e di  $\sigma_i^{-1}$  in un sistema di 3 particelle

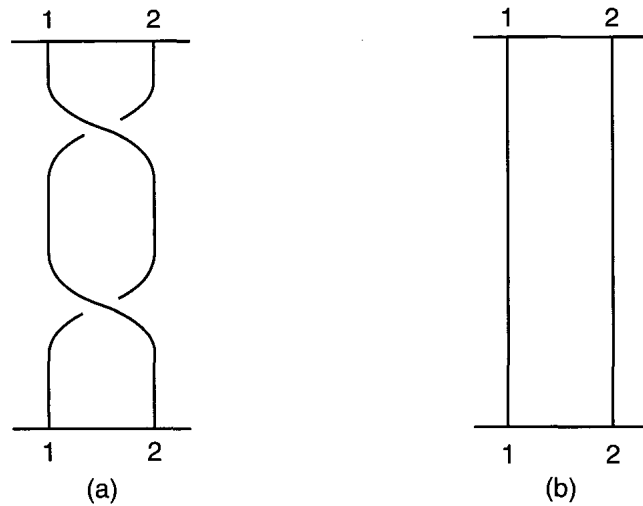


Figura 1.4: Rappresentazione dell'azione di  $\sigma_i^2$  (a) e di  $\mathbb{1}$  (b) [da [2]]

lo stesso scambio ma in senso opposto. Esiste inoltre l'operatore identità, indicato con  $\mathbb{1}$ , che lascia invariate le particelle.

Tra le proprietà dei generatori del gruppo  $B_N$  non vi è  $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ . Questo ha una profonda conseguenza nella dinamica delle particelle. In effetti le due traiettorie descritte in figura (1.4) delle due particelle, non comportano la stessa configurazione finale: un doppio scambio non equivale a non scambiare affatto le particelle. Nel caso particolare in cui  $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$  il gruppo  $B_N$  si riduce al gruppo finito delle permutazioni  $S_N$ .

La proprietà (1.4.5) è chiamata anche relazione di Yang-Baxter e può essere interpretata graficamente come in figura (1.5).

La figura (1.6) mostra invece la relazione (1.4.6).

Come già detto in precedenza e lo scambio di due particelle comporta la multipli-

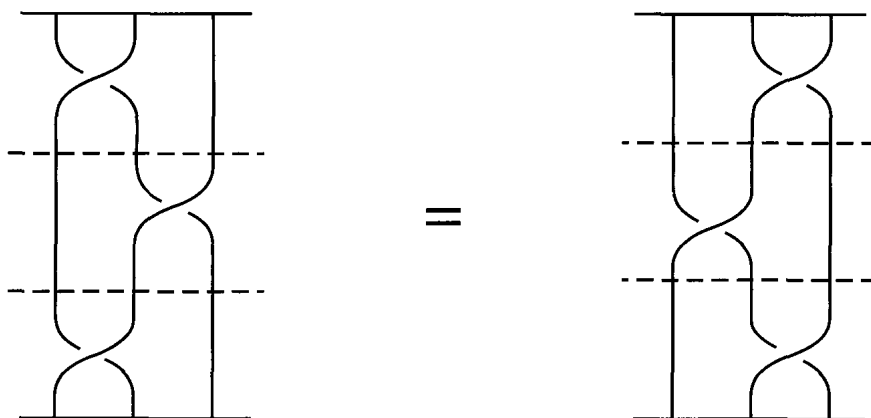


Figura 1.5: Rappresentazione della relazione Yang-Baxter [da [2]]

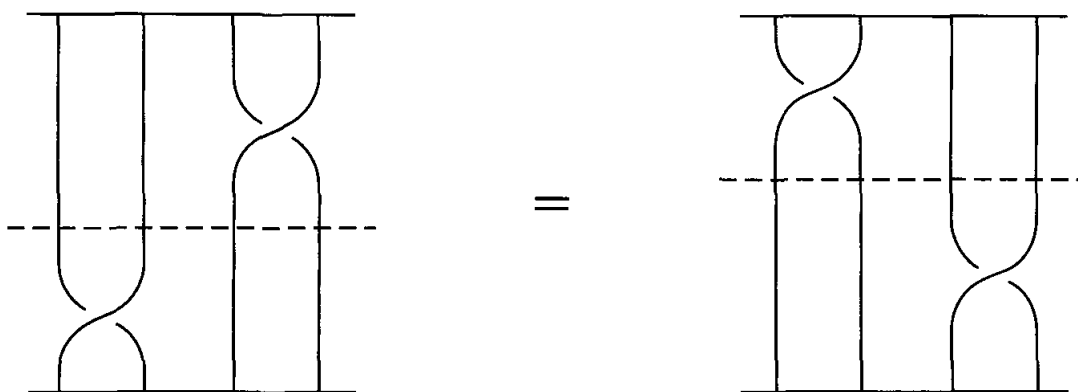


Figura 1.6: Rappresentazione della relazione (1.4.6) [da [2]]

cazione di una fase del tipo  $e^{i(\pm\theta)}$  che, come si vedrà meglio nel capitolo successivo, è la rappresentazione unidimensionale del gruppo  $B_N$ . L'angolo  $\theta$  può assumere qualsiasi valore, anche valori irrazionali. Da ciò Wilczek coniò il termine *anione*, in inglese *anyon*, che sta a rappresentare particelle che si comportano in questo modo, che sono descritte cioè dalla *statistica frazionaria* [2][7][8][12].

È importante sottolineare che tale fase  $e^{i(\pm\theta)}$ , prodotta dallo scambio di due particelle, dipende in generale anche dalla posizione delle altre particelle. Ciò sta a significare che se la traiettoria di una terza particella incrocia quelle delle particelle che vengono scambiate la fase assumerà un valore differente.

Ciò rende molto complicato lo studio di sistemi composti anche da pochi anioni. Finora infatti sono risolti problemi che comprendono non più di due di tali particelle.

# Capitolo 2

## Meccanica quantistica in spazi non connessi

Come detto nel primo capitolo, lo spazio delle configurazioni per un sistema di  $N$  particelle in due dimensioni spaziali è *non semplicemente connesso*. In questo capitolo si studia il comportamento della meccanica quantistica in spazi non semplicemente connessi effettuando in un primo momento considerazioni relative a una situazione generica e poi riferendosi ad uno spazio con le caratteristiche definite nel Capitolo 1. Si nota come il fatto di considerare spazi non semplicemente connessi è causa dell'esistenza, in due dimensioni spaziali, di una statistica frazionaria, ovvero di particelle con comportamento intermedio tra bosoni e fermioni. Si mostra inoltre come è possibile trattare un sistema di tali particelle libere, considerandolo equivalente a un sistema di particelle consuete con un termine aggiuntivo di interazione.

### 2.1 La fase della funzione d'onda

Un sistema fisico in meccanica quantistica è descritto da una funzione d'onda complessa  $\Psi \in L_2(Q, d\mu)$ , dove  $Q$  rappresenta lo spazio delle configurazioni mentre  $d\mu$  corrisponde alla misura su  $Q$ . L'evoluzione temporale di tale sistema è governato dall'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi \quad (2.1.1)$$

dove  $\hat{H}$  rappresenta l'hamiltoniano, operatore locale e simmetrico.

La funzione d'onda deve in generale soddisfare delle condizioni a contorno che determinano il dominio, entro il quale l'operatore hamiltoniano risulta essere autoaggiunto.

In meccanica quantistica un operatore unitario  $\hat{U}$ , funzione dell'operatore posizione  $\hat{q}$ , può essere scritto nella forma  $\hat{U} = e^{i\alpha(\hat{q})}$ , dove  $\alpha$  è una funzione reale. Poichè tutte le informazioni fisiche di un sistema sono contenute nel modulo quadro della funzione d'onda  $|\Psi|^2$ , l'azione di tale operatore lascia invariata la descrizione fisica del sistema.

In altre parole una trasformazione del tipo

$$\Psi(q) \rightarrow \Psi(q)e^{i\alpha(q)} \quad (2.1.2)$$

rimane inosservabile per un osservatore e si dice che la funzione d'onda è indeterminata a meno di una fase. La domanda che ci si pone è se questa fase possa essere fissata globalmente con un ben definito valore di  $U(1)$  su tutto  $Q$ , in modo tale da avere una funzione d'onda monodroma. Questo è possibile solamente quando lo spazio delle configurazioni  $Q$  è semplicemente connesso [8]. In caso contrario, cioè con  $Q$  non semplicemente connesso la fase non può sempre essere fissata globalmente e la funzione d'onda può essere polidroma. Il fatto che la funzione d'onda risulti ambigua è di fondamentale rilevanza nel caso di sistemi di particelle identiche. In questo capitolo ci si concentrerà su come si realizzi la meccanica quantistica in spazi non connessi.

## 2.2 Rivestimento universale

Innanzitutto per poter trattare la meccanica quantistica in spazi non semplicemente connessi è necessario richiamare il concetto di loop e di gruppo di omotopia, già definiti nel precedente capitolo. Il primo gruppo di omotopia  $\pi_1$  risulta essere l'insieme che ha come elementi le varie classi di equivalenza dei loop in uno spazio topologico  $X$ .

Si consideri adesso uno spazio delle configurazioni  $Q$  non semplicemente connesso, quindi tale per cui  $\pi_1(Q) \neq 0$ . È noto [8] che per ogni spazio topologico non semplicemente connesso esiste sempre un *rivestimento universale*, cioè uno spazio  $\tilde{Q}$  e una mappa  $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ , tale che:

- $\pi_1(\tilde{Q}) = 0$ , cioè  $\tilde{Q}$  è semplicemente connesso.
- esiste un'azione libera di  $\pi_1$  su  $\tilde{Q}$ . Un'azione si dice libera quando è *transitiva* ed *effettiva*.
- esiste un ricoprimento aperto di  $Q$  tale che per ogni aperto  $U$  di tale ricoprimento,  $\pi^{-1}(U)$  è l'unione disgiunta di aperti in  $\tilde{Q}$ , e la restrizione di  $\pi$  a qualunque di essi è un isomorfismo.

In tal caso si dice che  $\tilde{Q}$  *riveste*  $Q$ .

Per fare un semplice esempio di ricoprimento si può considerare la circonferenza  $S^1$ . Essa non è uno spazio semplicemente connesso, infatti  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Il suo ricoprimento universale sarà quindi l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , semplicemente connesso. Considerando  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i2\pi r} \quad r \in \mathbb{R}\}$ , la mappa  $\pi$  sarà  $\pi : r \rightarrow e^{i2\pi r} \in S^1$ .

Un rivestimento universale  $\tilde{Q}$  può essere decomposto in *domini fondamentali*, ognuno dei quali isomorfo a  $Q$ , tali per cui ciascuno di essi contiene una ed una sola controimmagine di ciascun punto di  $Q$  [8].



L'obiettivo è quello di costruire una meccanica quantistica sullo spazio  $\tilde{Q}$  e di "proiettarla" sullo spazio di partenza  $Q$ . Gli operatori locali definiti su  $Q$ , come ad esempio l'Hamiltoniano, possono essere quindi *sollevati* in maniera non ambigua, a degli operatori **simmetrici** su  $\tilde{Q}$ . In questo modo, lavorando sullo spazio  $\tilde{Q}$  si potrà fissare globalmente una fase e avere delle funzioni d'onda  $\Psi$  monodrome. Ci si domanda ora quali sono le condizioni necessarie affinché la meccanica quantistica su  $\tilde{Q}$  sia *proiettabile* su  $Q$ , ovvero quali siano le condizioni a contorno che dovrà soddisfare la nuova funzione d'onda  $\tilde{\Psi} \in L_2(\tilde{Q}, d\mu)$ . Per rispondere alla domanda è necessario introdurre il seguente teorema:

**Teorema 2.1.** (del sollevamento dell'omotopia) Si consideri un loop  $\gamma$  in  $q \in Q$  e la rispettiva classe di omotopia  $[\gamma] \in \pi_1(Q, q)$  e sia  $\tilde{q}$  un'arbitraria controimmagine di  $q$ . Allora  $\tilde{\gamma}$ , sollevamento di  $\gamma$ , inizierà in  $\tilde{q}$  e finirà in  $\tilde{q}'$ , ottenuto dall'azione di  $[\gamma]$  su  $\tilde{q}$ :

$$\tilde{q}' = [\gamma]\tilde{q} \quad (2.2.1)$$

Il punto  $\tilde{q}'$  sarà in generale diverso da  $\tilde{q}$ , ed essi saranno uguali nell'unico caso in cui  $\gamma$  è un loop banale, cioè  $\gamma(t) = q \forall t \in [0, 1]$ . Inoltre tutti i cammini in  $\tilde{Q}$  che collegano il punto  $\tilde{q}$  al punto  $\tilde{q}'$ , sono proiettati a dei loop in  $Q$  che appartengono a  $[\gamma]$ . Affinchè la funzione d'onda  $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$  assuma un significato fisico, ovvero sia proiettabile in  $\Psi(q)$ , essa non può ovviamente dipendere da una qualsiasi controimmagine  $\tilde{q} = \pi^{-1}(q)$  ma solamente da  $q$  stesso. Ciò sta a significare che, per ogni  $\tilde{q}, \tilde{q}' \in \pi^{-1}(q)$ ,  $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$  e  $\tilde{\Psi}(\tilde{q}')$  devono differire al massimo di una fase, e tale fase non può dipendere da  $\tilde{q}$  e  $\tilde{q}'$ . Essa non può inoltre dipendere dal cammino percorso e quindi potrà dipendere solamente da  $[\gamma] \in \pi_1(Q, q)$ . La risposta alla precedente domanda è quindi data dal seguente teorema:

**Teorema 2.2.** Affinchè la meccanica quantistica costruita sul ricoprimento universale  $\tilde{Q}$  di uno spazio non semplicemente connesso  $Q$ , le funzioni d'onda  $\tilde{\Psi}$  su  $\tilde{Q}$  devono rispettare le condizioni al contorno tali per cui:

$$\tilde{\Psi}([\gamma]\tilde{q}) = a([\gamma])\tilde{\Psi}(\tilde{q}); \quad \forall \tilde{q} \in \tilde{Q} \quad (2.2.2)$$

dove  $|a([\gamma])| = 1$ .

Un'importante proprietà che deve avere la fase  $a([\gamma])$  è la seguente:

$$a([\gamma]) \cdot a([\gamma']) = a([\gamma \cdot \gamma']) \quad (2.2.3)$$

Considerando infatti i punti  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{q}'$  e  $\tilde{q}''$  tali che  $\tilde{q}' = [\gamma]\tilde{q}$  e  $\tilde{q}'' = [\gamma']\tilde{q}'$  si ha che

$$\tilde{q}'' = [\gamma \cdot \gamma'] \cdot \tilde{q} \quad (2.2.4)$$

Data quindi la monodromia di  $\tilde{\Psi}$  si ha quanto afferma la (2.2.3).

Si può quindi affermare che il termine  $a([\gamma])$  è una trasformazione di tipo  $U(1)$  e sarà valido il seguente teorema:

**Teorema 2.3.** La mappa  $a$ :

$$\begin{aligned} a : \pi_1(Q) &\rightarrow U(1) \\ [\gamma] &\mapsto a([\gamma]) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

é una rappresentazione unitaria di  $\pi_1(Q)$  ed è chiamata **carattere** di tale gruppo.

Come già detto in precedenza lo spazio  $\tilde{Q}$  può essere decomposto in **domini fondamentali**, ognuno dei quali isomorfo a  $Q$  e connessi tra loro tramite l'azione di  $\pi_1$ . Considerando una funzione d'onda  $\tilde{\Psi}$  su due diversi domini fondamentali  $F_1$  e  $F_2$ , essa sarà proiettata su  $Q$  in una funzione  $\Psi$  che assumerà però valori in generale differenti a seconda di quale sia il dominio di partenza. In effetti si prenda l'isomorfismo

$$\begin{aligned} g_i : Q &\rightarrow F_i \\ q &\mapsto \tilde{q} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

con  $i = 1, 2$  Si avrà

$$\Psi(q) = \tilde{\Psi}(g_i(q)) \quad (2.2.7)$$

Per il **teorema del sollevamento**, percorrendo un loop  $[\gamma]$  in  $q \in Q$ , le due controimmagini  $\tilde{q}_1 = g_1(q)$  e  $\tilde{q}_2 = g_2(q)$  saranno legate dalla relazione (2.2.1). Si ha quindi che  $\tilde{\Psi}(\tilde{q}_2) = a([\gamma]) \cdot \tilde{\Psi}(\tilde{q}_1)$  e in base alla (2.2.7) si conclude che la  $\Psi(q)$  sarà una funzione d'onda polidroma e che ad ogni loop  $[\gamma]$  percorso verrà moltiplicata per il fattore  $a([\gamma])$ :

$$\Psi(q) \rightarrow a([\gamma]) \cdot \Psi(q) \quad (2.2.8)$$

Si considerino ora due funzioni d'onda  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  su uno spazio non semplicemente connesso  $Q$ . Se si assume valido il principio di sovrapposizione si può definire la funzione totale  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ . Percorrendo un loop  $[\gamma]$  ciascuna delle funzioni iniziali cambierà secondo la relazione (2.2.8) e ne consegue che  $\Psi = a_1([\gamma])\Psi_1 + a_2([\gamma])\Psi_2$ , cioè

$$\Psi \rightarrow a_1([\gamma]) \left[ \Psi_1 + a_1^*([\gamma])a_2([\gamma])\Psi_2 \right] \quad (2.2.9)$$

Si noti quindi che la  $\Psi$  totale produce una *fase relativa*  $a_1^*([\gamma])a_2([\gamma])$  e non rispetta la relazione (2.2.8).  $|\Psi|^2$  rimane proiettabile solamente nel caso in cui  $a_1 = a_2$ , in quanto si avrebbe  $a_1^*([\gamma])a_2([\gamma]) = 1$ .

É necessario quindi introdurre la **regola di superselezione** [8]: *il principio di sovrapposizione è valido solamente per le funzioni d'onda che, quando viene compiuto un loop, vengono moltiplicate per lo stesso carattere di  $\pi_1(Q)$ .*

Riassumendo si può affermare che *in uno spazio non semplicemente connesso  $Q$  le funzioni d'onda sono polidrome e vengono moltiplicate per il carattere di  $\pi_1(Q)$  quando viene percorso un loop. Inoltre le funzioni che vengono moltiplicate per uno stesso carattere formano spazi vettoriali detti settori di superselezione, che compongono per somma diretta lo spazio di Hilbert  $L_2(Q, d\mu)$ .*

Si prenda come esempio lo spazio  $Q = S_1 = \{x \in [0, l] | x = 0 \sim x = l\}$ . Esso ha come ricoprimento universale  $R$ , e il suo gruppo fondamentale è  $\pi_1(S^1) = Z$ . Essendo uno spazio non semplicemente connesso si avrà che le funzioni d'onda  $\Psi$  saranno polidrome e poichè il carattere di  $Z$  ha la forma di  $e^{ikd}$ ,  $|k| < \pi/d$ , si avrà

$$\Psi(x + l) = e^{ikd}\Psi(x) \quad (2.2.10)$$

Si consideri ora un sistema di elettroni in un potenziale unidimensionale di periodo  $l$ . Questi saranno descritti dalle funzioni di Bloch che rispettano la proprietà (2.2.10). Data questa analogia le condizioni a contorno (2.2.2) sono chiamate anche ”**condizioni di Bloch generalizzate**” [8].

## 2.3 Sistema di particelle identiche

Si consideri ora un sistema formato da  $N$  particelle identiche e quindi, per il *principio di indeterminazione* anche indistinguibili. Si vuole ora studiare la meccanica quantistica in tale spazio delle configurazioni che, come visto nel capitolo 1, è uno spazio non connesso.

In effetti lo spazio delle configurazioni che descrive il sistema trattato è

$$Q = \frac{R^{Nd} - \Delta}{S_N} \quad (2.3.1)$$

e il suo primo gruppo di omotopia è [2] [7]

$$\pi_1(Q) = B_N \quad \text{per } d = 2 \quad (2.3.2)$$

$$\pi_1(Q) = S_N \quad \text{per } d \geq 3 \quad (2.3.3)$$

Si ricordi che i due gruppi si differenziano per la condizione, valida solamente per  $S_N$ ,

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad (2.3.4)$$

Questa differenza risulta però fondamentale: il carattere di  $S_N$  può essere  $a(\sigma_i) = 1 \forall i$  o  $a(\sigma_i) \neq -1 \forall i$  e quindi, associando al carattere una fase del tipo  $e^{-i\theta}$ , l'angolo  $\theta$  potrà essere  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ . Il carattere del gruppo  $B_N$  non ha invece questa limitazione e

$$a(\sigma_i) = e^{-i\theta} \quad (2.3.5)$$

dove l'angolo  $\theta$  può quindi assumere qualsiasi valore compreso tra 0 e  $2\pi$ .

Applicando quindi al sistema una qualsiasi permutazione di due particelle (percorrendo cioè un loop  $[g]$  che rappresenti una classe di omotopia di una permutazione), si ha che in  $d = 3$

$$\Psi \rightarrow a([g])\Psi = \begin{cases} \Psi & \text{se } a([g]) = 1 \quad (\text{Statistica di Bose}) \\ \pm\Psi & \text{se } a([g]) = \pm 1 \quad (\text{Statistica di Fermi}) \end{cases} \quad (2.3.6)$$

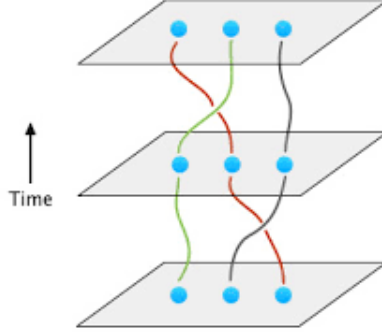


Figura 2.1: Evoluzione temporale del processo di scambio di particelle identiche

Facendo la stessa operazione su un sistema in cui  $d = 2$  si ha

$$\Psi \rightarrow a([g])\Psi \quad (2.3.7)$$

con  $a([g]) = e^{i\Sigma(\pm\theta)}$  e  $[g] \in B_N$ . I casi limite con  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  rappresentano rispettivamente la statistica di bosoni e fermioni, ma in generale, come accennato nel precedente capitolo, tale statistica viene detta *frazionaria* e le particelle che rispettano la (2.3.7) sono dette *anioni* [2][7][8][12].

## 2.4 Statistica frazionaria

Si può dare un'interpretazione interessante alla statistica delle trecce, considerando l'evoluzione temporale del processo di scambio delle particelle, come in figura (2.1).

Affinchè sia percorso un loop nello spazio delle configurazioni, tale per cui la configurazione fisica del sistema non cambi, è necessario un numero intero di scambi tra particelle. Inoltre l'angolo relativo  $\phi$  tra di esse cambia di  $\pm\pi$ .

Questo si può notare considerando come esempio un sistema formato da tre particelle indistinguibili disposte al tempo  $t$  come mostrato in figura (2.2).

Indicando con  $\phi_{ij}(t)$  l'angolo relativo tra la particella  $i$ -esima e quella  $j$ -esima al tempo  $t$ , si ha

$$\begin{aligned} \phi_{12}(t) &= 0 \\ \phi_{13}(t) &= \eta \\ \phi_{23}(t) &= \xi \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

con

$$\phi_{ij} = \tan^{-1}\left(\frac{x_j^2 - x_i^2}{x_j^1 - x_i^1}\right) \quad (2.4.2)$$

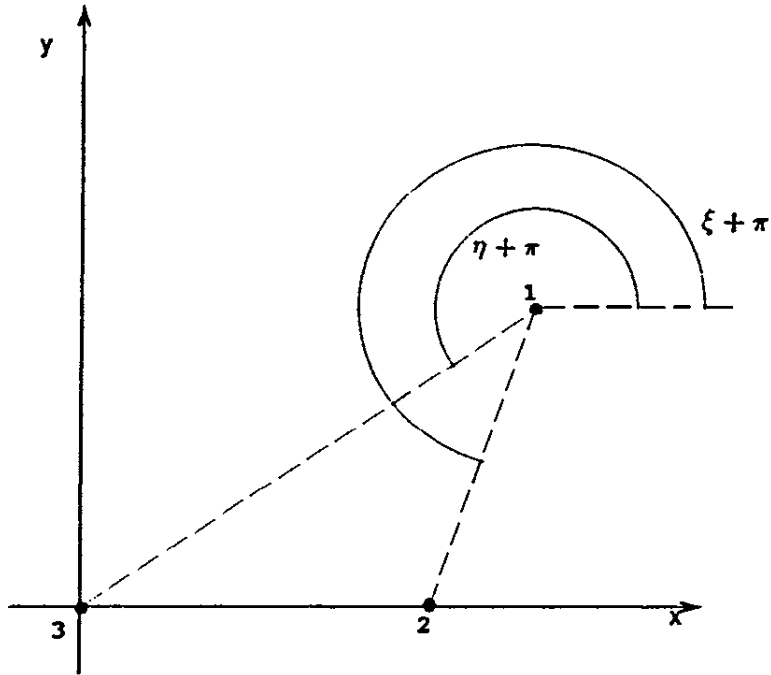


Figura 2.2: Configurazione di tre particelle al tempo  $t$

A seguito di uno scambio, ad esempio tra la particella 1 e la particella 3, al tempo  $t'$  si ha

$$\begin{aligned}\phi_{12}(t) &= \xi + \pi \\ \phi_{13}(t) &= \eta + \pi \\ \phi_{23}(t) &= \pi\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

Si ottiene perciò

$$\sum_{i < j} \phi_{ij}(t') - \sum_{i < j} \phi_{ij}(t) = n\pi\tag{2.4.4}$$

dove  $n$  è un numero intero, in questo caso uguale a 3.

In particolare si noti che l'angolo relativo tra le particelle scambiate 1 e 3 è variato di

$$\Delta\phi_{13} = \phi_{13}(t') - \phi_{13}(t) = \pi\tag{2.4.5}$$

Si può generalizzare questo risultato ed è quindi evidente che il carattere del gruppo  $B_N$  può essere scritto

$$a([g]) = e^{(i \sum (\pm \theta))} = e^{(-i \frac{\theta}{\pi} \sum_{i < j} \Delta\phi_{ij})}\tag{2.4.6}$$

Considerando l'incremento  $\Delta\phi_{ij}$  nella sua evoluzione temporale e definendo un parametro  $\nu = \frac{\theta}{\pi}$ , la relazione (2.4.6) può essere riscritta

$$a([g]) = \exp\left(-i\nu \int_t^{t'} d\tau \frac{d}{d\tau} \sum_{i<j} \phi_{ij}(\tau)\right) \quad (2.4.7)$$

dove le funzioni  $\phi_{ij}(\tau)$  sono in generale molto complicate e la loro dipendenza dal tempo dipende dalla classe di omotopia  $[g]$ .

Riassumendo si può stabilire che in tre dimensioni sono ammesse solamente la statistica di Bose e quella di Fermi. Per la statistica di Fermi si ha  $\theta = \pi$  ( $\nu = 1$ ) e ogni  $\Delta\phi_{ij}$  che sia multiplo pari di  $\pi$  non influisce sulla (2.4.6). Inoltre la "storia" delle particelle è irrilevante per il risultato finale  $a([g]) = \pm 1$ . Lo stesso vale per la statistica di Bose ( $\nu = 0$ ).

Profondamente diversa è la situazione nella statistica frazionaria. Potendo  $\nu$  assumere un qualsiasi valore compreso tra 0 e 1, non è possibile trascurare l'evoluzione temporale delle particelle (anioni), e loop che differiscono per un numero pari di scambi comportano un differente fattore di fase.

Gli anioni inoltre violano spontaneamente le simmetrie  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{T}$  [8]. Invertire gli assi del sistema di riferimento infatti, provoca un cambio di segno dell'angolo  $\theta$ , ovvero un'inversione del senso di percorrenza. Analogamente un'inversione temporale implica che la funzione d'onda si trasforma nella sua complessa coniugata. Risulta evidente che la simmetria  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{T}$  resta invariata.

## 2.5 Dinamica della statistica frazionaria

Il fatto che il fattore di fase, a seguito di uno scambio tra anioni, dipenda dalla storia delle particelle e non solamente dalla configurazione iniziale e finale, suggerisce di descrivere la dinamica del sistema trattato attraverso l'**integrale sui cammini**, una formulazione della meccanica quantistica introdotta da Feynman. La descrizione matematica di tale formulazione è descritta in maniera più approfondita nell'appendice A.

Si considerino due punti  $q$  e  $q'$  di uno spazio  $Q = \frac{R^{2N} - \Delta}{S^N}$ . L'ampiezza di probabilità del sistema di evolvere dalla configurazione  $q$  al tempo  $t$ , alla configurazione  $q'$  al tempo  $t'$  seguendo un cammino  $\gamma$  è data da

$$\mathcal{K}(q', t', q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle \quad (2.5.1)$$

che nella formulazione dell'integrale sui cammini si traduce in [3]

$$\mathcal{K}(q', t', q, t) = \int \mathcal{D}_\gamma(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \mathcal{L}[q(\tau), \dot{q}(\tau)]} \quad (2.5.2)$$

dove  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  rappresenta la lagrangiana del sistema e il simbolo  $\mathcal{D}_\gamma$  sta per la *somma sulle storie*.

Mentre in uno spazio semplicemente connesso la relazione (2.5.2) è definita in modo non ambiguo, ciò non accade nel caso di uno spazio non semplicemente connesso. In tal caso si considera il suo ricoprimento universale  $\tilde{Q}$ . Considerando il cammino  $\gamma$  percorso in  $Q$  e scegliendo le controimmagini di  $q$  e  $q'$ , rispettivamente  $\tilde{q}$  e  $\tilde{q}'$ , si ha

$$\tilde{q}' = [\gamma]\tilde{q} \quad (2.5.3)$$

Ciò sta a significare che tutte le controimmagini di  $q'$ ,  $\tilde{q}'$  saranno nella stessa posizione in  $\tilde{Q}$ .

Poichè  $\gamma$  è un cammino aperto bisogna specificare in che modo può essere associato ad una classe di omotopia. Quello che si fa è scegliere un punto fissato  $q_0$  in  $Q$  e creare una *maglia di cammini* che collegano tale punto con qualsiasi altro punto di  $Q$ . Si può in questo modo completare la curva iniziale  $\gamma$  con altre due curve  $\Gamma(q)$  e  $\Gamma(q')$  che collegano  $q_0$  rispettivamente a  $q$  e  $q'$ , creando un loop. In questo modo si può far corrispondere un loop ad ogni cammino aperto e si possono applicare le considerazioni sulle classi omotopiche.

Procedendo in questo modo il carattere  $a([\alpha])$  si può scrivere

$$a([\alpha]) = \exp\left(-i\nu \sum_{i<j} \int_{\Gamma(q)} d\phi_{ij}\right) \cdot \exp\left(-i\nu \sum_{i<j} \int_{\Gamma(q')} d\phi_{ij}\right) \cdot \exp\left(-i\nu \sum_{i<j} \int_{\gamma} d\phi_{ij}\right) \quad (2.5.4)$$

La relazione (2.5.2) si può riscrivere [8]

$$\mathcal{K} = \sum_{[\alpha] \in \pi_1(Q)} a([\alpha]) \mathcal{K}_\alpha(q, t, q', t') \quad (2.5.5)$$

dove  $\mathcal{K}_\alpha$  sono i propagatori parziali, ottenuti restringendo l'integrale sui cammini alle sole classi omotopiche  $[\alpha]$  di cammini da  $q$  a  $q'$ .

L'ultimo fattore della relazione (2.5.4), può essere riassorbito nel propagatore e la (2.5.5) si scriverà nel seguente modo:

$$\mathcal{K}(q, t, q', t') = \chi_0(q') \chi_0(q)^* \int \mathcal{D}_\gamma(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \tilde{\mathcal{L}}[q(\tau), \dot{q}(\tau)]} = \chi_0(q') \chi_0(q)^* \mathcal{K}_0(q, t, q', t') \quad (2.5.6)$$

dove l'integrale è fatto su tutto lo spazio dei cammini e  $\tilde{\mathcal{L}}$  è definita come

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \hbar\nu \sum_{i<j} \frac{d}{d\tau} \phi_{ij} \quad (2.5.7)$$

La fisica del sistema descritto è totalmente descritta dal propagatore  $\mathcal{K}_0(q, t, q', t')$  in quanto  $\chi_0(q)$  e  $\chi_0(q')$  non influenzano il valore del propagatore.

Ciò che si è fatto è di considerare un sistema di anioni con lagrangiana  $\mathcal{L}$  come un sistema di particelle *classiche*, la cui dinamica è descritta dalla lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Anioni liberi possono essere trattati come bosoni con un termine aggiuntivo di interazione la cui natura dipende dalla topologia dello spazio. In questo caso si tratta di una derivata totale rispetto al tempo e quindi non comporta variazioni delle equazioni del moto, ma risultano invece diverse le proprietà statistiche delle particelle, che sono legate alla struttura topologica globale dello spazio.



# Capitolo 3

## Modello a tubo di flusso

In quest'ultimo capitolo si studia il modello a tubo di flusso degli anioni. Tali particelle infatti possono essere viste come particelle cariche consuete sulle quali è "attaccato" un flusso di campo magnetico. A tale scopo si descrive il *cyon*, un sistema formato da una particella carica e un solenoide infinitamente lungo e di raggio trascurabile.

Infine si descrive la teoria di gauge non relativistica di Chern-Simons, attraverso la quale è possibile realizzare un sistema di particelle cariche a cui viene automaticamente associato un flusso di campo magnetico, semplicemente aggiungendo un termine (il termine di Chern-Simons) alla lagrangiana di un sistema di particelle consuete. Tale termine dipende da un parametro, il quale può essere fatto variare per "trasformare" anioni in bosoni o fermioni o viceversa.

### 3.1 Cyon

Dopo aver descritto le principali caratteristiche della statistica frazionaria e della sua dinamica, in questo capitolo si cercherà di costruire un sistema fisico che realizzi tale statistica. A tale scopo si studierà la dinamica di una particella carica puntiforme interagente con un solenoide infinitamente lungo e di raggio trascurabile. Questo sistema è chiamato *cyon*.

Si consideri una particella di massa  $m$  e carica  $q$  in condizioni non relativistiche che si muove in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  creato da un solenoide infinitamente lungo passante per l'origine e diretto verso l'asse  $z$ . Se si nega il moto della particella lungo il solenoide, la dinamica avverrà in un piano  $(x, y)$  e sarà governata dalla seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{q}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.1.1)$$

dove  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  indica la posizione della particella,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  la velocità e  $\mathbf{A}$  il potenziale vettore per il solenoide.

Tale potenziale non è definito univocamente, ma scegliendo il gauge simmetrico,  $\mathbf{A}$  è dato da

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}} \right) \quad (3.1.2)$$

dove  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\hat{\mathbf{j}}$  sono rispettivamente i versori dell'asse  $x$  e  $y$ . In coordinate polari si ha la componente radiale  $A_r = 0$  e la componente angolare  $A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi}$ .

Il campo magnetico associato a tale potenziale è

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \Phi \delta^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (3.1.3)$$

A questo punto risulta chiaro che  $\Phi$  è il flusso del solenoide in quanto

$$\int B d^2r = \int \Phi \delta^{(2)}(\mathbf{r}) d^2r = \Phi \quad (3.1.4)$$

Questo sistema particella-flusso, venne chiamato *cyon*.

Si può calcolare il momento generalizzato  $\mathbf{p}$ , derivandolo dalla lagrangiana (3.1.1):

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad (3.1.5)$$

Questo si differenzia dal momento lineare cinetico  $m\mathbf{v}$  per un termine dovuto alla presenza del potenziale vettore  $\mathbf{A}$ .

L'Hamiltoniana di tale sistema non risente del campo magnetico in quanto

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (3.1.6)$$

Si può notare come questa Hamiltoniana sia equivalente a quella di una particella libera. La differenza con quest'ultima si ha nel momento generalizzato, che risente del potenziale  $\mathbf{A}$ .

La lagrangiana (3.1.1) del sistema è invariante per rotazioni. Esiste quindi per il teorema di Noether una quantità conservata relativa a tale simmetria. Questa quantità è il momento angolare canonico  $\mathbf{J}_c$  che è definito come

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_c &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{r} \wedge \mathbf{A} \\ &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} + \frac{q\Phi}{2\pi c} \\ &= \mathbf{J} + \frac{q\Phi}{2\pi c} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

dove si è indicato con  $\mathbf{J}$  il momento angolare cinetico.

Lo spettro di  $\mathbf{J}_c$  è uno spettro discreto: gli autovalori sono multipli interi della costante  $\hbar$ . Infatti per qualsiasi valore del flusso  $\Phi$ , il momento canonico  $\mathbf{J}_c$  è rappresentato in meccanica quantistica dall'operatore

$$\hat{\mathbf{J}}_c = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.1.8)$$

dove  $\phi$  è la coordinata polare del piano  $(x, y)$  lungo il quale si muove la particella.

Quando questo operatore agisce su funzioni d'onda monodrome si ha

$$\hat{\mathbf{J}}_c \Psi = \hbar m \Psi \quad (3.1.9)$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ .

Da ciò si deduce che

$$\mathbf{J}_c = \hbar m \quad (3.1.10)$$

Si può notare come nel caso in cui il flusso  $\Phi$  sia nullo gli operatori  $\hat{\mathbf{J}}_c$  e  $\hat{\mathbf{J}}$  sono uguali, e quindi anche l'operatore momento angolare cinetico avrà come autovalori multipli interi di  $\hbar$ . Tuttavia quando il flusso  $\Psi$  inizia ad essere non nullo, questo non è più vero. È possibile trovare il valore di questo operatore dalla relazione (3.1.7). Si ha

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_c - \frac{q\Phi}{2\pi c} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{q\Phi}{2\pi c} \quad (3.1.11)$$

che può quindi essere riscritto, nel caso in cui agisca su funzioni monodrome, come

$$\mathbf{J} = \hbar \left( m - \frac{q\Phi}{hc} \right) \quad (3.1.12)$$

dove  $m \in \mathbb{Z}$ .

Si può quindi notare che lo spettro di  $\mathbf{J}$  è traslato rispetto a quello di  $\mathbf{J}_c$  di un termine pari a  $\frac{q\Phi}{2\pi c}$ . In generale il suo valore non è quindi un multiplo intero di  $\hbar$  ma avrà valori frazionari.

È possibile dare un'interpretazione diversa a quest'ultima relazione. La particella carica in movimento crea un campo elettrico  $\mathbf{E}$  che rispetta la legge di Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q\delta^{(2)}(x - r(t)) \quad (3.1.13)$$

nella quale  $r(t)$  è la posizione nel tempo della particella. Da ciò si può scrivere

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r} \wedge \mathbf{A}) &= \int (\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x})) \mathbf{x} \wedge \mathbf{A} d^2x \\ &= \int \nabla \cdot [\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \mathbf{x} \wedge \mathbf{A}] d^2x - \int \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla (\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}) d^2x \\ &= \int \nabla \cdot [\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \mathbf{x} \wedge \mathbf{A}] d^2x - \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) B(t, \mathbf{x}) d^2x \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

L'ultimo termine della precedente relazione si annulla quando si considera la (3.1.3). Tenendo conto della relazione (3.1.7) si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_c &= \mathbf{J} + \frac{q}{c} \mathbf{r} \wedge \mathbf{A} \\ &= \mathbf{J} + \frac{1}{c} \int (\nabla \mathbf{E}(t, \mathbf{x})) \mathbf{x} \wedge \mathbf{A} d^2x\end{aligned}\quad (3.1.15)$$

La differenza tra il momento angolare canonico e il momento angolare cinetico sta quindi in un termine di superficie che non può essere trascurato e che come visto in precedenza ha il valore di  $\frac{q\Phi}{2\pi c}$ . Tale termine è nullo quando il flusso del campo magnetico  $\Phi = 0$  e in tal caso  $\mathbf{J}_c = \mathbf{J}$ . Se si pensa di aumentare gradualmente il flusso,  $\mathbf{J}_c \neq \mathbf{J}$  e solamente  $\mathbf{J}_c$  rimane costante (e quindi intero) durante il processo, per il teorema di Noether. Quando  $\Phi$  raggiunge il valore finale il termine di superficie nella (3.1.15) viene portato all'infinito dal campo di gauge. Per fenomeni riguardanti lunghezze finite, l'unico termine rilevante del sistema è il momento angolare cinetico  $\mathbf{J}$ . Di conseguenza anche se il momento angolare canonico  $\mathbf{J}_c$  rimane un intero, il sistema conserva solamente una parte di esso, che è in generale frazionario.

Questa parte, che corrisponde quindi a  $\mathbf{J}$  viene chiamato *spin* del cyon ed è quindi definito come

$$s = \frac{\mathbf{J}(m=0)}{\hbar} = -\frac{q\Phi}{hc}\quad (3.1.16)$$

dove in generale tale *spin* non sarà quindi nè un multiplo intero nè semi-intero di  $\hbar$ .

## 3.2 Interazione carica-flusso

Si immagini ora di avere due cyon identici in cui ogni tubo di flusso magnetico è strettamente legato a ciascuna particella. Considerando che le particelle siano elettroni, ovvero imponendo  $q = -e$ , la lagrangiana del sistema è

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - 2\frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \mathcal{L}_0^{(1)} + \mathcal{L}_0^{(2)} - \frac{e\Phi}{\pi c} \frac{d\phi}{dt}\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

in cui  $\mathcal{L}_0^{(i)} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_i^2$  con  $i = 1, 2$ .

Si può considerare l'ultimo termine come il termine di interazione tra i due sistemi e confrontando la lagrangiana con la relazione (2.5.7) si ha

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{e\Phi}{\pi c} \frac{d\phi}{dt} = -\hbar\nu \frac{d\phi}{dt}\quad (3.2.2)$$

dove in entrambi i casi  $\phi$  rappresenta il relativo angolo azimutale.

Da ciò si ricava

$$\nu = \frac{2e\phi}{hc} \quad (3.2.3)$$

Si è trovata quindi una corrispondenza con la statistica frazionaria e questo sta a significare che i due *cyon* si comportano a tutti gli effetti come degli *anioni*, legati dalle relazione (3.2.3) [8]. Nel sistema considerato non sono presenti però interazioni elettrostatiche del tipo carica-carica. Per eliminare queste interazioni si possono considerare le condizioni

$$e \rightarrow 0 \quad ; \quad \Phi \rightarrow \infty \quad (3.2.4)$$

In questo modo infatti si elimina l'interazione coulombiana facendo rimanere costante il prodotto  $e\Phi \simeq \nu$ .

Il risultato della (3.2.3) trova una coerente corrispondenza con l'**effetto Aharonov-Bohm**. Secondo la meccanica quantistica infatti, una particella carica è influenzata da un campo magnetico anche in zone dove quest'ultimo è nullo [1]. Si ricorda infatti che al di fuori del solenoide considerato (infinitamente lungo) il campo magnetico è nullo e quindi non modifica la dinamica della particella classicamente. Più precisamente, in questo caso, tale effetto implica che quando una particella si muove attorno al tubo di flusso dell'altra, la funzione d'onda totale  $\Psi$  acquisisce una fase [1][7]

$$a([\gamma]) = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma} \mathbf{A} d\mathbf{r}\right) \quad (3.2.5)$$

Tale fase può essere riscritta in termini del flusso  $\Phi$

$$\exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma} \mathbf{A} d\mathbf{r}\right) = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int B d^2r\right) = \exp\left(-2\pi i \frac{e\Phi}{hc}\right) \quad (3.2.6)$$

Nel caso in cui entrambe le particelle ruotassero attorno al tubo di flusso dell'altra, la fase raddoppierebbe

$$a([\gamma]) = \exp\left(-2\pi i \frac{2e\Phi}{hc}\right) \quad (3.2.7)$$

Secondo la (2.4.6) la fase acquisita dalla funzione d'onda di due anioni a seguito di una rotazione di questi ultimi di un angolo di  $2\phi$  è

$$\exp(-2\pi i \nu) \quad (3.2.8)$$

Da ciò segue la (3.2.3).

Riassumendo si può affermare che *gli anioni possono essere considerati come particelle aventi una carica fittizia  $q = -e$  e un fittizio tubo di flusso con flusso  $\Phi$ , interagenti tramite l'effetto Aharonov-Bohm. Inoltre la carica e il flusso sono legati al parametro statistico  $\nu$  dalla relazione*

$$\nu = \frac{2e\Phi}{hc} \quad (3.2.9)$$

Considerando la relazione (3.1.16) si nota che vale

$$\nu = 2s \quad (3.2.10)$$

Definendo inoltre il *quanto di flusso* come  $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$  si ha

$$\nu = 2 \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.2.11)$$

e di conseguenza se ne deduce che i bosoni hanno come flusso un multiplo intero di  $\Phi_0$ , mentre i fermioni hanno un multiplo semi-intero di  $\Phi_0$ .

### 3.3 Termine di Chern-Simons

Nei precedenti paragrafi si è visto come è possibile far sì che una particella carica si comporti come un anione semplicemente *attaccando* su di essa un flusso  $\Phi$ . Infatti essa sarà governata da una statistica frazionaria data da

$$\nu = \frac{2e\Phi}{hc} \quad (3.3.1)$$

In questo paragrafo si discuterà della possibilità di realizzare una statistica frazionaria utilizzando i campi di gauge di **Chern-Simons**. Tale trattazione del problema fu introdotta per la prima volta da Wilczek nel 1982 [11] [12]. Nella formulazione di Chern-Simons la statistica frazionaria è implementata tramite l'utilizzo di un'interazione di gauge locale e a lungo raggio in uno spazio tempo (2+1)-dimensionale. Invece di fissare sulla particella carica un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , si promuove  $\mathbf{A}$  a componente spaziale di un campo di gauge (2+1)-dimensionale  $A_\alpha$ . L'azione relativa a questo campo si scrive

$$\mathcal{S}_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{2c} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma \quad (3.3.2)$$

nella quale  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$  è il tensore completamente antisimmetrico. Gli indici assumono i valori 0, 1, 2 e sono contratti con la metrica  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1)$ , dove il primo elemento indica la componente temporale mentre gli ultimi due indicano le componenti spaziali. I vettori di tale spazio avranno la forma  $x^\alpha = (ct, x^i)$ , con  $i = 1, 2$ , e  $d^3x = ct d^2x$ .

L'azione di Chern-Simons è invariante per trasformazioni di gauge del tipo

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda \quad (3.3.3)$$

in cui  $\Lambda$  è un parametro dipendente dallo spazio-tempo.

In effetti per una tale trasformazione la lagrangiana di Chern-Simons  $\mathcal{S}_{CS}$  cambierà soltanto di una derivata totale [7]

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = -\frac{k}{2c}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha[(\partial_\beta\Lambda)A_\gamma] \quad (3.3.4)$$

in modo tale che l'azione (3.3.2) e le equazioni classiche del moto rimangono invariate.

Il termine di Chern-Simons, utilizzato in questo contesto in uno spazio-tempo (2+1)-dimensionale, può essere generalizzato per ogni spazio (2n+1)-dimensionale ed è quindi utilizzato in svariati contesti. Inoltre esso mantiene la stessa forma (3.3.2) anche in uno spazio-tempo curvo.

In questo paragrafo si studierà l'utilizzo del termine di Chern-Simons per realizzare una statistica frazionaria.

Si consideri un sistema di  $N$  particelle in condizioni non relativistiche di massa  $m$  e carica  $q$  e lo si accoppi con il campo  $A_\alpha$ . Si noti che la carica  $q$  delle particelle non corrisponde alla carica coulombiana in quanto il campo  $A_\alpha$  è legato al termine di Chern-Simons (3.3.2) e non all'azione maxwelliana.

Si denotino con  $r_I^\alpha = (ct, \mathbf{r}_I(t))$  le coordinate delle particelle in funzione del tempo, con  $I = 1, 2, \dots, N$ , e si definisca la loro velocità  $v_I^\alpha(t) = \frac{dr_I^\alpha}{dt} = (c, \mathbf{v}_I(t))$ . Si ha una corrente

$$j^\alpha(x) = \sum_{I=1}^N qv_I^\alpha(t)\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_I(t)) = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (3.3.5)$$

che soddisfa l'equazione di continuità

$$\partial_\alpha j^\alpha = \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.3.6)$$

Esprese esplicitamente le componenti della corrente sono

$$\rho(x) = \sum_{I=1}^N q\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_I(t)) \quad (3.3.7)$$

e

$$\mathbf{j}(x) = \sum_{I=1}^N q\mathbf{v}_I(t)\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_I(t)) \quad (3.3.8)$$

Si noti che la (3.3.7) e (3.3.8) indicano rispettivamente la convenzionale densità di carica e densità di corrente per un sistema di  $N$  particelle con posizione  $\mathbf{r}_I(t)$  e velocità  $\mathbf{v}_I(t)$ .

Si può quindi accoppiare  $j^\alpha$  con  $A_\alpha$  in modo da realizzare un termine di azione di interazione [7]

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{int} &= -\frac{1}{c^2} \int d^3x j^\alpha(x) A_\alpha(x) \\
&= -\frac{1}{c^2} \int c dt \int d^2x \left\{ \sum_{I=1}^N q \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_I(t)) [A_0(t, \mathbf{x}(t)) - \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t))] \right\} \\
&= \frac{1}{c} \int dt \left\{ \sum_{I=1}^N q [\mathbf{v}_I \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}_I(t)) - A_0(t, \mathbf{r}_I(t))] \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Inoltre i termini cinetici delle  $N$  particelle contribuiscono all'azione con un termine

$$\mathcal{S}_{mat} = \int dt \left( \sum_{I=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 \right) \tag{3.3.10}$$

In questo modo si avrà per tale sistema un'azione totale

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{int} + \mathcal{S}_{mat} + \mathcal{S}_{CS} = \int dt \mathcal{L} \tag{3.3.11}$$

nella quale  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{CS}$  è la lagrangiana totale del sistema che nel dettaglio è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{I=1}^N \left[ \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 + \frac{q}{c} \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}_I(t)) - \frac{q}{c} A_0(t, \mathbf{r}_I(t)) \right] \\
&\quad - \frac{k}{2} \int d^2x [\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \wedge \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + A_0(t, \mathbf{x}) B(t, \mathbf{x})]
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

In quest'ultima relazione si è introdotto il campo magnetico di Chern-Simons

$$B = \nabla \wedge \mathbf{A} = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = -F_{12} \tag{3.3.13}$$

e il campo elettrico di Chern-Simons

$$E^i = -\frac{1}{c} \partial_t A^i - \partial_i A_0 = F_{0i} \tag{3.3.14}$$

dove il tensore  $F_{\mu\nu}$  è definito come

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.3.15}$$

Considerando le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i} \tag{3.3.16}$$



nella quale  $l$  è una generica variabile da cui dipende  $\mathcal{L}$ , è possibile ricavare le equazioni del moto.

Derivando  $\mathcal{L}$  rispetto alla variabile  $\mathbf{r}_I(t)$  si ottengono le equazioni del moto

$$m\dot{v}_I^i(t) = q\left(E^i(t, \mathbf{r}_I(t)) + \frac{1}{c}\epsilon^{ij}v_I^j B(t, r_I(t))\right) \quad (3.3.17)$$

che coincidono con le equazioni del moto classiche di una particella immersa in un campo elettromagnetico. In effetti è esattamente l'espressione della forza di Lorentz agente su una particella di massa  $m$  e carica  $q$ .

Derivando invece  $\mathcal{S}$  rispetto al campo  $A_\alpha$  si trovano le equazioni del moto per i campi di gauge. In realtà, poichè il termine di Chern-Simons contiene solamente derivate prime di  $A_\alpha$ , si ottengono semplicemente le identità che mettono in relazione i campi  $\mathbf{E}$  e  $B$  con la corrente  $\mathbf{j}$  e  $\rho$ . Si ha

$$j^\alpha = \frac{kc}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma} \quad (3.3.18)$$

che si scrive in componenti

$$E^i = \frac{1}{kc}\epsilon^{ij}j^j \quad (3.3.19)$$

e

$$B = -\frac{1}{k}\rho \quad (3.3.20)$$

Queste relazioni sono molto importanti poichè mostrano che, dato un sistema in cui siano definite  $\rho$  e  $\mathbf{j}$ , i campi  $\mathbf{E}$  e  $B$  di Chern-Simons non possono essere arbitrari ma sono fissati dalle relazioni (3.3.19) e (3.3.20). Questo fatto rappresenta una sostanziale differenza con il *cyon* descritto in precedenza, nel quale il campo  $B$  era esterno al sistema e poteva quindi essere scelto arbitrariamente.

Per una singola particella si nota che le equazioni del moto (3.3.17), utilizzando le relazioni dei campi di Chern-Simons (3.3.19) e (3.3.20), si riducono a

$$\begin{aligned} E^i + \frac{1}{c}\epsilon^{ij}v^j(t)B(x) &= \frac{1}{kc}\epsilon^{ij}(j^j(x) - v^j(t)\rho(x)) \\ &= \frac{q}{kc}\epsilon^{ij}(v^j(t) - v^j(t))\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

dove si è sostituito  $\rho$  e  $j^i$  con le loro definizioni (3.3.7) e (3.3.8)

Quindi per un sistema di una particella la forza di Lorentz è nulla e di conseguenza essa non risente di un'autointerazione.

Considerando un sistema di  $N$  particelle l'equazione (3.3.17) diventa

$$m\dot{v}_I^i = \frac{q^2}{kc} \sum_{J=1}^N \epsilon^{ij} (v_J^j(t) - v_I^j(t)) \delta^{(2)}(\mathbf{r}_I(t) - \mathbf{r}_J(t)) \quad (3.3.22)$$

Si noti che, anche in questo caso, con  $J = I$  il termine che moltiplica  $\delta^{(2)}(\mathbf{r}_I(t) - \mathbf{r}_J(t))$  si annulla, eliminando in tal modo l'autointerazione delle particelle.

L'equazione del moto (3.3.17) si può riscrivere in termini del tensore energia-impulso  $T_{mat}^{\alpha\beta}$  [7] attraverso la relazione

$$\partial_\alpha T_{mat}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{kc} f^\beta \quad (3.3.23)$$

nella quale  $f^\beta$  è definito come

$$f^\beta = F^{\beta\gamma} j_\gamma = (E^i j^i, E^i j^0 + \epsilon_{ik} j^k B) \quad (3.3.24)$$

Andando a sostituire in quest'ultima relazione la (3.3.19) e (3.3.20) risulta

$$f^\beta = 0 \quad (3.3.25)$$

e quindi il tensore  $T_{mat}^{\alpha\beta}$  è conservato.

Questo risultato è del tutto coerente con quanto ci si aspettava. In effetti il termine di azione di Chern-Simons, essendo come già detto indipendente dalla metrica e dalla topologia del sistema, non contribuisce in alcun modo al tensore energia-impulso totale del sistema (sempre conservato), che quindi coincide con  $T_{mat}^{\alpha\beta}$ .

La conseguenza più significativa dell'interazione di Chern-Simons è sicuramente la relazione (3.3.20). Integrando tale espressione su un disco bidimensionale  $C_I$  che include al suo interno l' $I$ -esima particella, si ottiene

$$\int_{C_I} d^2x B = -\frac{q}{k} \int_{C_I} d^2x \sum_{J=1}^N \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_J(t)) = -\frac{q}{k} \quad (3.3.26)$$

dove nel secondo passaggio si è utilizzata la (3.3.7).

Considerando quindi che il primo termine corrisponde al flusso  $\Phi_I$  della particella  $I$ -esima, si ottiene la relazione

$$\Phi_I = -\frac{q}{k} \quad (3.3.27)$$

Ne consegue che una particella che possiede una carica  $q$  possiede anche un flusso  $\Phi_I$  legato ad essa tramite la (3.3.27).

La dinamica di Chern-Simons ha permesso di legare automaticamente a una particella carica e flusso, ciò che era stato imposto da fattori esterni nel cyon.

Riassumendo si può dire che *in un sistema di  $N$  particelle, la cui azione contiene il termine di Chern-Simons, ciascuna particella possiede una carica  $q$  e un flusso  $\Phi_I$ . I campi  $E^i$  e  $B$  di Chern-Simons annullano la forza di Lorentz e conseguentemente le particelle non saranno autointeragenti. Ogni carica però interagisce con gli  $N - 1$  flussi delle altre particelle e questo comporta la presenza dell'effetto Aharonov-Bohm.*

L'Hamiltoniana per un tale sistema ricavata dalla lagrangiana (3.3.12) [7] è

$$\mathcal{H} = \sum_{I=1}^N \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 \right) + \int d^2x A_0(x) (kB(x) + \rho(x)) \quad (3.3.28)$$

Imponendo le condizioni

$$\rho = -kB = k\epsilon^{ij} \partial_i A_j \quad ; \quad \partial_i A^i = 0 \quad (3.3.29)$$

è possibile scegliere il campo  $A_\alpha$  in modo tale da avere  $A_0 = 0$ . Inoltre si può trovare in modo non ambiguo la soluzione per  $A^i$  [7]

$$A_I^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{q}{2\pi k} \sum_{J \neq I} \epsilon^{ij} \frac{r_I^j - r_J^j}{|\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_J|^2} \quad (3.3.30)$$

Le particelle risentono di un potenziale vettore non locale, in quanto dipende dalle posizioni di ognuna di esse, e in particolare si annulla con  $N = 1$ .

L'Hamiltoniana, con  $A_0 = 0$  diventa

$$\mathcal{H} = \sum_{I=1}^N \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 \right) = \sum_{I=1}^N \frac{1}{2m} \left( p_I - \frac{q}{c} \mathbf{A}_I(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right)^2 \quad (3.3.31)$$

in cui nell'ultima uguaglianza si è utilizzata la relazione tra momento canonico e momento cinetico.

Il campo magnetico associato ad  $A_I$  è

$$B_I = \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial r_I^i} A_I^j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\frac{q}{k} \sum_{J \neq I} \delta^{(2)}(r_I - r_J) \quad (3.3.32)$$

che è in accordo con il fatto che il flusso sia  $\Phi = -\frac{q}{k}$ .

Il potenziale vettore  $A_I^i$  può essere riscritto [7]

$$\begin{aligned} A_I^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \frac{q}{2\pi k} \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial r_I^j} \sum_{J \neq I} \ln |\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_J| \\ &= -\frac{q}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial r_I^i} \sum_{J \neq I} \phi_{IJ} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

nella quale  $\phi_{IJ}$  è l'angolo tra le due particelle

$$\phi_{IJ} = \tan^{-1} \left( \frac{x_I^2 - x_J^2}{x_I^1 - x_J^1} \right) \quad (3.3.34)$$

Procedendo in questo modo la lagrangiana relativa all'Hamiltoniana (3.3.31) è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{I=1}^N \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 + \frac{q}{c} \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{A}_I(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right) \\
&= \sum_{I=1}^N \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 \right) - \frac{q^2}{2\pi c k} \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I} v_I^i \frac{\partial}{\partial r_I^i} \phi_{IJ} \\
&= \sum_{I=1}^N \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 \right) - \frac{q^2}{2\pi c k} \sum_{I < J} (v_I^i - v_J^i) \frac{\partial}{\partial r_I^i} \phi_{IJ}
\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Si noti che il termine nella seconda sommatoria dell'ultima relazione è uguale alla derivata totale di  $\phi_{IJ}$  rispetto al tempo:

$$(v_I^i - v_J^i) \frac{\partial}{\partial r_I^i} \phi_{IJ} = \left( v_I^i \frac{\partial}{\partial r_I^i} + v_J^i \frac{\partial}{\partial r_J^i} \right) \phi_{IJ} = \frac{d}{dt} \phi_{IJ} \tag{3.3.36}$$

La lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L} = \sum_{I=1}^N \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_I^2 \right) - \frac{q^2}{2\pi c k} \left( \sum_{I < J} \frac{d}{dt} \phi_{IJ} \right) \tag{3.3.37}$$

Paragonando quest'ultima relazione alla (2.5.7) si nota immediatamente che le particelle del sistema si comportano come anioni con una statistica frazionaria data dalla relazione

$$\nu = \frac{q^2}{hck} = -\frac{q\Phi}{hc} \tag{3.3.38}$$

É possibile quindi *trasformare* bosoni o fermioni in generici anioni semplicemente modificando il valore della costante  $k$  del termine di Chern-Simons.

Considerando particelle aventi carica  $q = -e$ , come nel caso del *cyon*, la relazione (3.3.38) diventa

$$\nu = \frac{e\Phi}{hc} \tag{3.3.39}$$

É interessante notare che la statistica  $\nu$  dell'ultima relazione è la metà della statistica ottenuta con il *cyon*. Questo è dovuto al fatto che la carica di Noether associata utilizzando il termine di Chern-Simons si dimostra essere non  $q$  ma [7]

$$q_N = \frac{1}{2} q = -\frac{1}{2} e \tag{3.3.40}$$

Questo comporta la differenza di fattore 1/2.

Il risultato ottenuto nella relazione (3.3.38) è perfettamente coerente con l'effetto Aharonov-Bohm. In effetti, se si suppone che la particella 2 percorra un loop intorno

alla particella 1 si ha l'interazione della carica 2 con il flusso 1 e la funzione d'onda totale  $\Psi$  acquisisce una fase [1]

$$\exp\left(i\frac{qN}{\hbar c} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}\right) = \exp\left(-i\frac{\frac{1}{2}e}{\hbar c} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}\right) = \exp\left(-\pi i \frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \quad (3.3.41)$$

nella quale  $q$  rappresenta la carica di Noether. Aggiungendo il contributo dell'interazione della carica della particella 1 con il flusso della particella 2 si ha una fase

$$\exp\left(-2\pi i \frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \quad (3.3.42)$$

Ricordando che due anioni che ruotano uno intorno all'altro di un angolo di  $2\pi$  generano una fase

$$\exp(-i\nu 2\pi) \quad (3.3.43)$$

si ha

$$\nu = \frac{e\Phi}{\hbar c} \quad (3.3.44)$$

perfettamente coerente con la relazione (3.3.38).

# Appendice A

## Integrale sui cammini

La meccanica quantistica nella sua prima formulazione è descritta attraverso il formalismo operatoriale, il quale spesso non risulta essere il metodo più intuitivo per comprendere i fenomeni quantistici. Esiste in effetti un formalismo equivalente, in cui l'uso degli operatori viene evitato attraverso un prodotto infinito di integrali, chiamato **integrale sui cammini** (*path integral* in inglese). Introdotta da Feynman nel 1942, l'integrale sui cammini generalizza il principio di minima azione classico, calcolando l'ampiezza di probabilità di un determinato processo attraverso una somma di un numero infinito di storie atte a realizzare tale processo.

In questo paragrafo si mostra come si arriva a tale formulazione partendo dal formalismo operatoriale.

È necessario introdurre l'operatore di evoluzione temporale  $\hat{U}(t_b, t_a)$ , che per un operatore hamiltoniano  $\hat{H}$  non dipendente esplicitamente dal tempo, si può scrivere come [3]

$$\hat{U}(t_b, t_a) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_b - t_a)\hat{H}} \quad (\text{A.0.1})$$

ed è un operatore unitario.

Esso, applicato ad una funzione d'onda  $|\Psi(t)\rangle$  al tempo  $t_a$ , restituisce il valore della stessa  $|\Psi(t)\rangle$  al tempo  $t_b$

$$|\Psi(t_b)\rangle = \hat{U}(t_b, t_a)|\Psi(t_a)\rangle \quad (\text{A.0.2})$$

Si consideri un sistema di una particella puntiforme che si muove in uno spazio che per semplicità si assume unidimensionale. Si può scrivere l'ampiezza della transizione della particella da uno stato iniziale  $|x_a, t_a\rangle$  ad uno stato finale  $|x_b, t_b\rangle$  come

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle, \quad t_b > t_a \quad (\text{A.0.3})$$

A questo punto sfruttando la legge di composizione di  $\hat{U}(t_b, t_a)$  è possibile dividere l'ampiezza della relazione precedente (A.0.3), in  $N + 1$  parti, utilizzando cioè  $N + 1$  operatori di evoluzione temporale, ognuno dei quali opera su un tempo infinitesimo

$\epsilon = t_n - t_{n-1} = t_b - t_a / (N + 1) > 0$  [3]. L'ampiezza diventa

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_N) \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \cdots \hat{U}(t_n, t_{n-1}) \cdots \hat{U}(t_1, t_a) | x_a \rangle \quad (\text{A.0.4})$$

dove  $x_b = x_{N+1}$ ,  $x_a = x_0$ ,  $t_b = t_{N+1}$  e  $t_a = t_0$

Considerando un insieme completo di stati tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = 1 \quad n = 1, \dots, N \quad (\text{A.0.5})$$

la (A.0.3) si scrive [3]

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \prod_{n=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \quad (\text{A.0.6})$$

nella quale

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(t_n)} | x_{n-1} \rangle \quad (\text{A.0.7})$$

con  $\hat{H}(t) = H(\hat{p}, \hat{x}, t)$ .

Separando nell'hamiltoniana la parte cinetica e la parte di potenziale e utilizzando la *formula di Baker-Campbell-Hausdorff*, si ha

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon (\hat{T} + \hat{V})} = e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{V}} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar^2} \epsilon^2 \hat{X}} \quad (\text{A.0.8})$$

dove

$$\hat{X} = \frac{i}{2} [\hat{V}, \hat{T}] - \frac{\epsilon}{\hbar} \left( \frac{1}{6} [\hat{V}, [\hat{V}, \hat{T}]] - \frac{1}{3} [[\hat{V}, \hat{T}], \hat{T}] \right) + \dots \quad (\text{A.0.9})$$

Se si considera  $N$  molto grande, si può assumere in prima approssimazione  $\epsilon^2 \hat{X} \sim 0$ , e la (A.0.7) diventa [3]

$$\langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{x}, t)} | x_{n-1} \rangle \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\{ip_n(x_n - x_{n-1})/\hbar - i\epsilon[T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n)]/\hbar\} \quad (\text{A.0.10})$$

Inserendo quest'ultima relazione nella (A.0.6) si ottiene

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle \simeq \prod_{n=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}^N\right) \quad (\text{A.0.11})$$

nella quale  $\mathcal{A}^N$  corrisponde a

$$\mathcal{A}^N = \sum_{n=1}^{N+1} [p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H(p_n, x_n, t_n)] \quad (\text{A.0.12})$$

Si può dimostrare [3] che, considerando un termine cinetico  $T = p^2/2M$  e un potenziale sufficientemente regolare, per  $N \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , la precedente relazione (A.0.11) diventa un'uguaglianza, cioè il commutatore  $\hat{X}$  non dà contributo.

In questo limite si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}^N = \mathcal{A}[p, x] = \int_{t_a}^{t_b} dt [p(t)\dot{x}(t) - H(p(t), x(t), t)] \quad (\text{A.0.13})$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] = \int_{(x_a, t_a) \rightsquigarrow (x_b, t_b)} \mathcal{D}'x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \quad (\text{A.0.14})$$

Dovranno essere soddisfatte le condizioni a contorno  $x(t_b) = x_b$  e  $x(t_a) = x_a$ .

L'ampiezza di probabilità (A.0.6) può essere scritta come

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \int_{(x_a, t_a) \rightsquigarrow (x_b, t_b)} \mathcal{D}'x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} e^{i\mathcal{A}[p, x]/\hbar} \quad (\text{A.0.15})$$

e questa espressione viene chiamata *integrale sui cammini*. Intuitivamente si può pensare all'integrale sui cammini come a una somma su tutte le storie lungo le quali il sistema può evolvere. L'esponentiale  $e^{i\mathcal{A}[p, x]/\hbar}$  è l'analogo quantistico del fattore di Boltzmann  $e^{E/k_b T}$ : ad ogni possibile storia è assegnato un fattore di fase anzichè un esponentiale di probabilità.

É possibile scrivere la (A.0.15) in maniera più semplice. Si consideri infatti un'hamiltoniana del tipo  $H = p^2/2M + V(x, t)$ . La (A.0.12) si scrive

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^N &= \sum_{n=1}^{N+1} \left[ p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon \frac{p_n^2}{2M} - \epsilon V(x_n, t_n) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \left[ -\frac{\epsilon}{2M} \left( p_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} M \right)^2 + \frac{M}{2} \epsilon \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - \epsilon V(x_n, t_n) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.0.16})$$

Integrando solamente nell'impulso si ha [3]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{\epsilon}{2M} \left( p_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} M \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i \epsilon / M}} \quad (\text{A.0.17})$$

L'ampiezza (A.0.11) si scrive

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i \epsilon / M}} \prod_{n=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi\hbar i \epsilon / M}} \right] \exp \left( \frac{i}{\hbar} \mathcal{A}^N \right) \quad (\text{A.0.18})$$



dove  $\mathcal{A}^N$  adesso è

$$\mathcal{A}^N = \epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[ \frac{M}{2} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(x_n, t_n) \right] \quad (\text{A.0.19})$$

Se si applica adesso il limite  $N \rightarrow \infty$  si ha

$$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{M}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \right] = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad (\text{A.0.20})$$

nella quale si nota che  $\mathcal{A}$  rappresenta l'azione della particella.

In questo limite l'ampiezza (A.0.18) si può scrivere nella forma

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \int_{(x_a, t_a) \rightsquigarrow (x_b, t_b)} \mathcal{D}x e^{i\mathcal{A}[x]/\hbar} \quad (\text{A.0.21})$$

Questa è la formula che Feynman introdusse per calcolare l'ampiezza di probabilità di un processo del tipo (A.0.3).

# Bibliografia

- [1] AHARONOV, Y. BOHM, D. (1959). *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev., 115, 485.
- [2] KHARE, A. (1997). *Fractional Statistics and Quantum Theory*.
- [3] KLEINERT, H. (1997). *Path Integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics*.
- [4] LANDAU, L.D., LIFSHIC, E., (1977). *Fisica teoria III - Meccanica Quantistica: teoria non relativistica*.
- [5] LANDAU, L.D., LIFSHIC, E., (1980). *Fisica teoria V - Fisica Statistica*.
- [6] LEINAAS, J.M., MYRHEIM, J., (1977). *On the Theory of Identical Particles*.
- [7] LERDA, A. (1992). *Anyons – Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*.
- [8] MORANDI, M. (1992). *The Role of Topology in Classical and Quantum Physics*.
- [9] NIELSON, M.A., CHUANG, I.L., (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*.
- [10] WILKZEC, F. (1989). *Geometric Phases in Physics*.
- [11] WILKZEC, F. (1982). *Magnetic Flux, Angular Momentum and Statistics*. Phys. Rev. Lett. 48, 1144.
- [12] WILKZEC, F. (1982). *Quantum Mechanics of fractional-spin particles*. Phys. Rev. Lett. 49, 957.