Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LE SIMMETRIE NELL'ARTE BIZANTINA: progettazione, realizzazione e ridefinizione di un'uscita didattica

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatrice:
Prof.ssa
Alessia Cattabriga

Presentata da:
Nicola Mainetti

Sessione Unica
Anno Accademico 2018/2019

Dimmelo e me lo dimenticherò.
Insegnamelo e lo ricorderò.
Coinvolgimi e lo imparerò.
Benjamin Franklin

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di proporre un'idea di uscita didattica che abbia lo scopo di introdurre, attraverso l'osservazione di figure artistiche, il concetto di simmetria dal punto di vista matematico.
Ho ritenuto che il centro storico di Ravenna si prestasse molto bene per questo progetto data la presenza di alcuni monumenti ricchi di motivi simmetrici, che ho deciso di utilizzare come punto di partenza.
L'itinerario dell'uscita si sviluppa partendo dal Mausoleo di Galla Placidia e prosegue presso la Basilica di San Vitale, la Basilica di Sant'Apollinare Nuovo e il Palazzo di Teodorico.
L'attività è stata suddivisa in dieci fasi ed è destinata a studenti di una scuola secondaria di primo grado, ma si presta bene un suo utilizzo anche con classi del primo biennio di una scuola secondaria di secondo grado.
Nel corso dell'uscita didattica che ho progettato lo studente è posto al centro del processo di insegnamento apprendimento ed è chiamato a giocare un ruolo attivo: osserva, formula proposte, discute e si confronta con i compagni. Questa particolarità si sposa bene con l'idea di laboratorio espressa nelle Indicazioni Nazionali per la scuola secondaria di primo grado, cioè come di un momento in cui *«l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.»*
Le attività didattiche che gli studenti sono chiamati a compiere nel corso

dell'uscita sono pensate per essere svolte a piccoli gruppi da tre, massimo quattro ragazzi, al fine di sviluppare capacità di collaborazione, inclusione e socializzazione.
Dal punto di vista disciplinare, il concetto di simmetria di figure è strettamente collegato alle trasformazioni geometriche e alle isometrie in particolare, argomenti previsti negli obiettivi di apprendimento per la scuola secondaria di primo grado dalle Indicazioni nazionali. L'uscita didattica può pertanto essere utilizzata per introdurre questi concetti in una maniera insolita e attraente e può rivelarsi anche un prezioso strumento per contrastare la tendenza, tipica del contesto scolastico italiano, di trascurare la geometria (quella intuitiva in particolare), come sostenuto da Maria Dedò, professoressa ordinaria di geometria presso l'Università degli Studi di Milano.
L'uscita didattica che ho progettato è stata realizzata il 29 maggio 2019 con due classi seconde di una scuola secondaria di primo grado, l'Istituto Tavelli di Ravenna.
Nel corso di questa gli studenti si sono mostrati molto attivi e partecipi, sia nelle attività che erano chiamati a svolgere in autonomia, sia nei vari momenti di discussione e confronto.
Non sono ovviamente mancate alcune problematiche e così, al termine dell'uscita, ho compiuto una riflessione su quanto successo, coinvolgendo anche la professoressa Francesca Incensi, docente di matematica dell'Istituto Tavelli. Ho potuto mettere in evidenza quelle che sono state le maggiori criticità riscontrate nel corso dell'uscita e ho successivamente definito alcune azioni e modifiche da attuare per poterle fronteggiare.
Per fare questo ho seguito il ciclo della ricerca azione, una metodologia di ricerca che pone il docente in un'ottica riflessiva per individuare le problematiche e definire strategie di intervento.
Ho deciso infine di illustrare due possibili sviluppi per l'uscita: nel primo descrivo un software didattico molto interessante contenente attività sui concetti di simmetria di una figura, mentre nel secondo riporto alcuni monumenti di Ravenna che potrebbero, in caso di una maggiore disponibilità di tempo,

essere aggiunti all'itinerario.

La mia tesi si compone di cinque capitoli.
Nel Capitolo 1 descrivo la metodologia della ricerca azione, illustrando le varie fasi di cui si compone e le caratteristiche che la contraddistinguono.
Il Capitolo 2 contiene le nozioni matematiche teoriche su isometrie, gruppi di simmetria dei poligoni, tassellazioni, gruppi dei fregi e dei mosaici e può costituire una base teorica di supporto per il docente che intende sperimentare l'uscita didattica.
Nel Capitolo 3 descrivo la struttura dell'uscita didattica che ho progettato, presentandone l'itinerario e le dieci fasi che la costituiscono.
Nel Capitolo 4 riporto invece quanto successo il 29 maggio 2019, giorno in cui l'uscita didattica è stata sperimentata con due classi dell'Istituto Tavelli di Ravenna, e quanto emerso dalle schede delle attività che gli studenti hanno svolto.
Nel Capitolo 5 riporto la riflessione su quanto successo il giorno dell'uscita, la successiva individuazione delle problematicità e la definizione di possibili strategie di azione per migliorare gli aspetti critici.
Infine nel Capitolo 6 illustro il software didattico GeCla e descrivo alcuni monumenti di Ravenna che potrebbero essere aggiunti all'itinerario.

Indice

Capitolo 1

La ricerca azione

In questo capitolo descrivo la ricerca azione, una metodologia di ricerca che ho utilizzato nel Capitolo 5 per ridefinire alcuni aspetti dell'uscita didattica che ho progettato (si veda il Capitolo 3).
Dopo aver definito la ricerca azione e aver enunciato le sue principali caratteristiche, approfondisco le fasi di cui essa si compone e ne tratto un importante aspetto, la raccolta dei dati.
Ho utilizzato come testi di riferimento [3] e [4].

1.1 Definizione e caratteristiche della ricerca azione

Con il termine ricerca azione si intende:
"Un'indagine riflessiva condotta dall'insegnante ricercatore in prima persona nel proprio contesto, che parte da una situazione problematica, con lo scopo di migliorare la comprensione della situazione in cui opera e la qualità dell'azione attraverso un coinvolgimento di tutti gli attori, mediante un controllo sistematico dei processi. I dati esaminati da una pluralità dei punti di vista in un contesto di condivisione ne costituiscono la principale forma di validazione." [3, pag 30]
Si tratta pertanto di una metodologia che porta il docente ad assumere anche

il ruolo di ricercatore e a porsi in un'ottica di indagine riflessiva con lo scopo di capire meglio quanto succede in aula, di acquisire maggiore consapevolezza riguardo ai propri atteggiamenti o alle problematiche e di esplorare percorsi alternativi per migliorare la pratica.
Le caratteristiche che contraddistinguono questo modo di fare ricerca sono:

- *coinvolgimento in prima persona*: il protagonista della ricerca è l'insegnante che intraprende un'indagine per migliorare la propria pratica professionale

- *scopo pratico e ricaduta immediata*: la ricerca azione ha radici in situazioni concrete e i risultati ricadono direttamente sulla pratica, sia nel caso venga svolta per approfondire una situazione al fine di migliorarla, sia nel caso si cerchi di risolvere un problema specifico

- *riflessività*: ciascuna azione è preceduta e seguita da una riflessione su fatti e dati concreti riferiti a una determinata situazione, classe o alunno

- *sistematicità*: è richiesta un'osservazione sistematica della situazione all'interno di un piano di azione articolato in fasi, tempi e obiettivi e un'interpretazione dei dati raccolti

- *integrazione di teoria e pratica*: la ricerca azione permette di agganciare la teoria alla pratica e di costruire conoscenze professionali, partendo dall'esperienza, attraverso la riflessione

- *dimensione collaborativa*: alla ricerca azione partecipano le persone coinvolte nella situazione che possono essere, oltre l'insegnante, i colleghi, il dirigente scolastico, gli studenti e i genitori

- *ruolo di ricercatore per l'insegnante*: mentre insegna il docente si pone obiettivi, svolge un programma, dà compiti, interroga e contestualmente investiga ed esplora i motivi del proprio agire per valutarne gli effetti

- *unicità del contesto e non generalizzabilità*: le situazioni problematiche nelle quali l'insegnante ricercatore opera sono uniche e le soluzioni per risolverle vengono costruite ad hoc per una certa classe o certi alunni, in modo che sia possibile una valutazione immediata degli effetti.

1.2 Le fasi della ricerca azione

Ogni ricerca ha un inizio, uno sviluppo e una fine e la conclusione di questo ciclo può essere l'avvio di uno nuovo.
Il ciclo di ricerca azione si sviluppa in fasi, seguendo un percorso che, a partire da una situazione problematica (*individuazione area di indagine*), porta a una fase di riflessione per chiarire la natura del problema (*fase di chiarificazione e di ricognizione*) e quindi alla *definizione di un piano di azione.* Dopo aver attuato il piano si riflette sull'azione, attraverso una fase di lettura e interpretazione di fatti e dati raccolti, che possono far emergere nuove criticità (*fase di realizzazione e monitoraggio*). Da qui scaturiscono poi le nuove domande e la pianificazione di interventi successivi che possono portare a una modifica del progetto iniziale e dare vita a un nuovo ciclo.
Vediamo ora più nello specifico le varie fasi di cui il ciclo della ricerca azione si compone.

Individuazione area di indagine
In questa fase viene individuata una situazione che si intende cambiare, cercando di capire la natura generale del problema. L'idea iniziale può nascere in varie circostanze: da una situazione di stallo, da una curiosità, da un incidente di percorso oppure dalla voglia di capire meglio una certa situazione.

Fase di chiarificazione e di ricognizione
In questa fase viene approfondita la natura del problema, individuando l'esatta area da investigare in modo tale che risulti gestibile. Questo permette di prendere atto del problema, di focalizzarlo e creare un piano d'azione con-

trollabile.
Per poter definire in maniera il più possibile precisa l'area problematica è utile seguire i seguenti passi:

- esplicitare e verbalizzare il problema: questo aiuta a rendere il problema oggettivo, distanziato e condivisibile
- orientare il problema su di sé: questo permette di far aderire il problema più strettamente alla persona che lo ha enunciato
- porsi e porre domande: questo permette di destrutturare un problema, metterne in evidenza i vari aspetti e individuare quelli importanti per la specifica situazione
- focalizzare il problema e trovare la domanda di ricerca: la scomposizione del problema permette di individuare il focus della ricerca e aiuta nella scelta della domanda relativa al problema (tra quelle più rilevanti) più significativa e gestibile, la quale dovrà anche indicare il tipo di dati da raccogliere
- circoscrivere il problema e renderlo gestibile: questo permette di valutare come si può intervenire nel problema.

Definizione del piano di azione
In questa fase viene preparato il piano di azione che ha come obiettivo il miglioramento della situazione.
In particolare il piano deve prevedere:

- ⧫ l'individuazione dei contenuti e delle strategie di azione necessari per migliorare la situazione
- ⧫ l'individuazione delle tappe da seguire, determinando il punto di partenza, cosa va fatto prima e cosa invece dopo
- ⧫ l'individuazione dei tempi e la determinazione della durata della ricerca, che danno un ritmo e un senso di direzione, permettendo di concentrarsi sulla ricerca e, in alcuni casi, di gestire al meglio l'ansia

- l'individuazione degli strumenti che siano in grado di fornire informazioni (sia dati qualitativi che quantitativi) rilevanti per la domanda di ricerca, tenendo conto dei vincoli di tempo e delle risorse disponibili
- la determinazione di un contratto: dal momento che la ricerca avviene all'interno di un contesto sociale occorre informare tutte le persone che vi prenderanno parte e stabilire un codice di comportamento su cosa può e non può essere fatto, in modo che ogni soggetto risulti coinvolto e protetto.

Fase di realizzazione e monitoraggio
In questa fase si realizza il piano utilizzando le strategie di azione e si controlla il processo mediante l'osservazione e l'uso di strumenti per valutare l'efficacia delle strategie adottate.

Come detto in precedenza al termine della fase di realizzazione e monitoraggio possono sorgere delle nuove criticità, che si aggiungono a quelle già presenti.
Si rende pertanto necessaria la formulazione di nuove domande e la successiva modifica del vecchio piano d'azione o la definizione di uno nuovo, andando a innescare un meccanismo a spirale.

1.3 La raccolta dei dati

Innanzitutto occorre definire che cosa si intende per dato.
Possiamo dire che i dati sono tracce materiali o rappresentazioni di eventi e pertanto possono essere accumulati e resi disponibili a più persone. Inoltre sono considerati rilevanti dall'insegnante ricercatore in quanto permettono di indagare e capire meglio la situazione problematica.
Per poter definire più specificatamente che cosa sia un dato è però necessario conoscere la domanda di ricerca.
In generale le caratteristiche principali dei dati sono:

▼ forniscono una rappresentazione degli eventi selettiva: è inevitabile che alcuni di essi vengano sottolineati come rilevanti mentre altri non vengano presi in considerazione

▼ la loro produzione e selezione dipende dal processo interpretativo dell'insegnante ricercatore

▼ avendo un carattere materiale sono statici: gli eventi perdono la loro natura dinamica e qualsiasi loro sviluppo viene bloccato.

I dati pertanto aiutano a ricostruire una determinata situazione attraverso una rappresentazione parziale e legata alla soggettività di chi i dati li sceglie, li raccoglie, li produce. Essendo però comunicabili e condivisibili con altre persone, il problema della soggettività viene affrontato nella ricerca di significati condivisi e accettabili da diversi punti di vista.
Tante sono le distinzioni che possono essere fatte riguardo la natura dei dati. La prima li distingue in:

- dati direttamente osservabili come fatti, eventi, interazioni verbali o compiti scritti

- dati non direttamente osservabili come opinioni, percezioni, stati d'animo o atteggiamenti.

Una seconda distinzione può essere fatta tra:

▲ dati riferiti a singoli individui, nel caso l'insegnante ponga l'attenzione a individuare gli interventi necessari per risolvere problemi dei singoli studenti e quindi prende in considerazione i loro comportamenti, le loro reazioni e le loro motivazioni

▲ dati riferiti a situazioni collettive, nel caso l'insegnante ponga invece l'attenzione a individuare gli interventi necessari a risolvere problemi di una o più classi e quello che prenderà in considerazione sarà la risultante dei comportamenti individuali dai quali cogliere l'interdipendenza e le relazioni.

Un'ultima distinzione possibile è quella tra:

★ dati quantitativi come il numero degli alunni di una classe, la durata di un'attività didattica o il numero di verifiche svolte in un certo lasso di tempo

★ dati qualitativi più significativi nel processo di ricerca ma anche più difficili da raccogliere, elaborare e analizzare.

È una pratica costante per l'insegnante raccogliere dati sul contesto in cui si svolgono le attività (come ad esempio le presenze degli studenti) e sui risultati della propria attività di insegnamento (l'apprendimento degli studenti). Per fare questo costruisce strumenti per la raccolta dati (come prove orali e compiti scritti), stabilisce quando utilizzarli (all'inizio, nel corso o alla fine di un percorso didattico) e definisce per quale obiettivo utilizzare uno strumento piuttosto che un altro.
Meno comune nella pratica del docente è la raccolta dati relativi ai processi di insegnamento apprendimento che si attuano all'interno di una classe.
I dati che vengono solitamente raccolti sono indirettamente relativi ai processi e alla loro efficacia, ma raramente vengono utilizzati per una riflessione sulla qualità dei processi stessi e sulla possibilità di modificarne le caratteristiche.
Ancora più rara è la raccolta di dati relativi agli studenti diversi dai risultati ottenuti, come ad esempio dati su come vengono organizzate e condotte le attività didattiche, sul tipo di comunicazione e linguaggio utilizzati oppure sulle motivazioni e gli interessi degli studenti.
Nel corso di un ciclo di ricerca azione gli insegnanti sono chiamati a raccogliere dati in maniera più sistematica e continua, ad allargare lo spettro e a inserire il tutto in una nuova logica di riflessione e ricerca, per aiutarli ad analizzare e comprendere meglio i problemi che devono affrontare e risolvere.
La raccolta dei dati accompagna l'intero ciclo della ricerca azione visto nella sezione precedente, presentandosi in vari momenti e a seconda di questi con diverse funzioni:

- nella fase iniziale di esplorazione la raccolta dati aiuta a individuare meglio la situazione problematica su cui si intende intervenire
- nel corso della ricerca la raccolta dati aiuta a monitorare il percorso e a tenere sotto osservazione le strategie di azione messe in atto
- in fase conclusiva i dati raccolti aiutano a valutare l'insieme del processo compiuto, per verificare la correttezza delle scelte operate e definire un nuovo piano d'azione per avviare il processo ciclico descritto in precedenza.

Una raccolta dei dati effettuata lungo tutto il processo di ricerca azione permette, una volta arrivati al termine, di rileggerlo nel suo sviluppo e riflettere in maniera critica sulle sue fasi e su come di volta in volta ci si è orientati.

Capitolo 2

Gruppi di simmetria nel piano

In questo capitolo, dopo aver illustrato le principali nozioni geometriche sulle isometrie, descrivo i gruppi di simmetria dei poligoni, le tassellazioni del piano e i gruppi dei fregi e dei mosaici. Questa base teorica può essere utilizzata dal docente che intende sperimentare l'uscita didattica progettata nel Capitolo 3, per approfondire gli aspetti matematici necessari.
Ho riportato la dimostrazione della caratterizzazione dei gruppi finiti di isometrie del piano e dei sette possibili gruppi di simmetria dei fregi, in quanto è su tali nozioni matematiche che si basano molte figure analizzate nel corso dell'uscita. Queste dimostrazioni, più semplici ma ugualmente esplicative di quelle tecniche, contengono alcuni aspetti che possono essere ripresi dal docente nel caso l'uscita venisse sperimentata con una classe di una scuola secondaria di secondo grado.
Riporto in Appendice A alcune nozioni di base di teoria dei gruppi necessarie per la comprensione di questo capitolo.
Ho utilizzato come testo di riferimento [1], a cui si rimanda, salvo indicazioni contrarie, per le dimostrazioni dei teoremi non presenti nell'elaborato.

2.1 Isometrie del piano

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ in cui definiamo, posti

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)$$

il prodotto scalare standard

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ottenendo in questo modo un piano euclideo ovvero uno spazio euclideo di dimensione 2.
Possiamo ora introdurre su $\mathbb{R}^2$ la metrica euclidea ovvero definiamo una distanza nel modo seguente

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Grazie alle nozioni appena introdotte possiamo dotare $\mathbb{R}^2$ della topologia indotta dalla distanza: una base di aperti è costituita dai dischi centrati in $C \in \mathbb{R}^2$ e di raggio $r > 0$ cioè

$$D(C, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, C) < r\}.$$

Fissiamo inoltre su $\mathbb{R}^2$ un sistema di riferimento cartesiano

$$E = (\mathcal{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{O} = (0, 0)$ è l'origine del sistema di riferimento.

Osservazione 1. Dal momento che consideriamo come origine del sistema di riferimento $\mathcal{O}$ il punto $(0, 0)$, identificheremo nel seguito un generico punto $P = (x, y)$ con il vettore $(x, y) - (0, 0) = (x, y)$.

Definizione 2.1 (Figura piana)**.** Una figura piana F è un sottoinsieme del piano euclideo $\mathbb{R}^2$.

Definizione 2.2 (Segmento)**.** Si definisce segmento di estremi $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ dati da

$$tP_1 + (1-t)P_2 = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \quad t \in [0,1]$$

Definizione 2.3 (Linea spezzata chiusa)**.** Si definisce linea spezzata chiusa una linea costituita da un insieme ordinato di segmenti, a due a due consecutivi (ovvero tali da avere come unico punto in comune uno e un solo estremo) ma non adiacenti (due segmenti consecutivi non devono giacere sulla stessa retta), in cui il primo e l'ultimo estremo sono coincidenti.

Definizione 2.4 (n-poligono)**.** Si definisce n-poligono una figura piana delimitata da una linea spezzata chiusa, i cui n segmenti che la costituiscono vengono detti lati e gli n punti di incontro dei lati vengono detti vertici.

Tra le varie trasformazioni

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

consideriamo le isometrie ovvero quelle trasformazioni che formalizzano la nozione di movimento rigido di una figura.
Applicando un'isometria a una figura questa non viene deformata e conserva caratteristiche come distanze, angoli, aree e lunghezze.

Definizione 2.5. Un'isometria f è un'applicazione biunivoca del piano in sè

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

che conserva la distanza tra punti, cioè presi due punti qualsiasi P e Q si ha

$$d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$$

Dal punto di vista analitico si può dimostrare che se un'isometria f fissa l'origine del sistema di riferimento $\mathcal{O}$ allora f è lineare. Pertanto $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ dove A è una matrice 2×2 e dal momento che, per definizione, f conserva

le distanze la matrice A deve essere ortogonale.
La matrice A potrà essere del tipo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

dove la prima rappresenta una rotazione di angolo θ e centro O, che indicheremo con ρ_θ e la seconda una riflessione di retta r passante per O con coefficiente angolare $\tan(\theta/2)$, che indicheremo con σ_r.
Le matrici ortogonali formano con l'operazione di moltiplicazione un gruppo che viene solitamente indicato con $O(2)$. Inoltre le matrici ortogonali che hanno determinante uguale a 1, cioè quelle corrispondenti a rotazioni, formano un sottogruppo che viene indicato con $SO(2)$.
Nel caso in cui l'isometria f non fissi l'origine del sistema di riferimento $\mathcal{O}$, possiamo ricondurci al caso appena discusso considerando l'applicazione

$$g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) - \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad \mathbf{b} = f(\mathcal{O})$$

Questa applicazione g fissa l'origine del sistema di riferimento, quindi è lineare e pertanto $g(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
Si ha dunque che l'isometria f può essere scritta come

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$$

ovvero come composizione di un'applicazione lineare ortogonale e di una traslazione.
Indicheremo con $t_{\mathbf{b}}$ la traslazione di vettore $\mathbf{b}$, ovvero la trasformazione data da

$$t_{\mathbf{b}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{b}.$$

Definizione 2.6. L'insieme di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$ forma un gruppo, non commutativo, $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ con l'operazione di composizione. L'elemento neutro è l'identità e verrà indicato con Id.

I sottogruppi di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ sono detti gruppi di isometrie.

Osservazione 2. Si può definire un omomorfismo

$$\Phi : \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow O(2)$$

che associa a ciascuna isometria piana f la sua corrispondente matrice ortogonale A.

Osservazione 3. Questo omomorfismo è chiaramente suriettivo e il suo nucleo è il sottogruppo T delle traslazioni, normale e commutativo in $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

Per le isometrie del piano vale il seguente teorema, la cui dimostrazione si può trovare in [7].

Teorema 2.1.1. *Ogni isometria piana f è composizione di al più tre riflessioni.*

In particolare se l'isometria piana f possiede

- un punto fisso P, cioè P è tale che $f(P) = P$, allora è composizione di al più due riflessioni e quindi è la riflessione rispetto a una retta passante per P oppure una rotazione di centro P
- due punti fissi distinti P, Q allora è composizione di al più una riflessione e quindi è la riflessione rispetto alla retta passante per P e Q oppure l'identità
- tre punti fissi non allineati P, Q, S allora è l'identità.

Da queste osservazioni e dal teorema appena enunciato discende la seguente classificazione delle isometrie piane.
Poste $\sigma_r, \sigma_s, \sigma_t$ le riflessioni rispetto alle rette distinte r, s, t, si consideri un'isometria piana f composizione di k riflessioni. Si hanno i seguenti casi

- $k = 0$ allora $f = \mathrm{Id}$
- $k = 1$ allora $f = \sigma_r$ cioè la riflessione rispetto a una retta r
- $k = 2$ allora $f = \sigma_r \circ \sigma_s$ dove risulta che f è una traslazione nel caso le rette r e s siano parallele e una rotazione nel caso fossero incidenti

- $k = 3$ allora $f = \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t$ dove f può essere una riflessione oppure è composizione di una traslazione di vettore $\mathbf{v}$ e di una riflessione rispetto a una retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ e in questo caso f è detta glissoriflessione

Un'altra classificazione delle isometrie le distingue in inverse (o invertenti) e dirette (o non invertenti). Se si considera un poligono F con n vertici numerati in senso orario, un'isometria diretta applicata a F mantiene l'ordinamento dei punti in senso orario mentre se a F si applica un'isometria inversa l'ordinamento dei punti diventa antiorario.
Dal punto di vista matriciale in un'isometria diretta la matrice A ha determinante uguale a 1 e rappresenta una rotazione, mentre in un'isometria inversa la matrice A ha determinante uguale a -1 e rappresenta una riflessione.
Possiamo riconoscere una isometria f quando conosciamo se f ha punti fissi e se è diretta o inversa. In particolare:

- f è diretta e $f \neq \mathrm{Id}$
  - se ha punti fissi allora f è una rotazione
  - se non ha punti fissi allora f è una traslazione
- f è inversa
  - se ha punti fissi allora f è una riflessione
  - se non ha punti fissi allora f è una glissoriflessione.

Nel seguito chiameremo ordine o periodo di una rotazione ρ_θ il più piccolo intero positivo k tale che $\rho_\theta^k = \mathrm{Id}$.

Osservazione 4. Le isometrie dirette formano un sottogruppo non commutativo di indice due di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

Definizione 2.7. Due isometrie $f, g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ sono coniugate tra loro se esiste un'altra isometria $h \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ tale che $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

Osservazione 5. Si hanno pertanto le seguenti conseguenze:

- f è diretta se e solo se g è diretta
- f ha punti fissi se e solo se g ne ha.

Da questo segue che f e g sono necessariamente dello stesso tipo: entrambe traslazioni, entrambe rotazioni, entrambe riflessioni o entrambe glissoriflessioni.

Utilizzeremo nel seguito la nozione di azione di un gruppo su un certo spazio. In particolare considereremo l'azione di G sottogruppo di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ (come per esempio il sottogruppo delle traslazioni o delle isometrie dirette) sullo spazio costituito da sottoinsiemi del piano (come per esempio l'insieme dei punti del piano, l'insieme delle rette del piano o l'insieme dei vertici di un poligono).

Definizione 2.8. Dato un gruppo $(G, \star)$, avente elemento neutro e, si dice che esso agisce su uno spazio X se è data un'applicazione

$$T : G \times X \longrightarrow X$$

dove $T(g, x) = g \cdot x$ è tale che

(i) $e \cdot x = x, \quad \forall x \in X$

(ii) $g \cdot (h \cdot x) = (g \star h) \cdot x, \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X.$

Inoltre si dice che G agisce transitivamente su X se presi due qualsiasi punti x, y in X esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.
Preso un qualsiasi $x \in X$ si definisce l'orbita $O(x)$ di x rispetto a G come l'insieme

$$O(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

L'obiettivo di questo capitolo è quello di studiare i gruppi di simmetria di particolari figure piane, cioè si vuole determinare quali sono le isometrie che applicate alla figura la lasciano invariata.

Definizione 2.9. Sia F una figura piana ovvero un qualsiasi sottoinsieme del piano. Il gruppo di simmetria $\Gamma(F)$ di F è l'insieme delle isometrie del piano che fissano la figura F, cioè

$$\Gamma(F) = \{f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \mid f(F) = F\}.$$

L'insieme $\Gamma(F)$ forma un gruppo con la composizione. Infatti si può facilmente verificare che

- ▼ la composizione di due elementi in $\Gamma(F)$ appartiene ancora a $\Gamma(F)$
- ▼ l'inverso di un elemento in $\Gamma(F)$ appartiene ancora a $\Gamma(F)$.

Esempio 2.1. Se F è una circonferenza, ovvero l'insieme dei punti del piano la cui distanza da un punto C detto centro è costante e uguale a r, allora $\Gamma(F)$ contiene:

- ♦ tutte le rotazioni di centro C
- ♦ tutte le riflessioni di rette passanti per C.

Esempio 2.2. Se F è una retta r allora $\Gamma(F)$ contiene:

- tutte le traslazioni di vettore v parallelo a r
- tutte le rotazioni di angolo π, con centro un punto qualsiasi di r
- la riflessione di retta r
- tutte le riflessioni di una qualsiasi retta s ortogonale a r
- tutte le glissoriflessioni di retta r.

Definizione 2.10 (Congruenza tra figure)**.** Due figure F e F' si dicono conguenti se esiste un'isometria f tale che $f(F) = F'$.

2.2 Gruppi di simmetria dei poligoni

Cominciando dai poligoni vediamo di caratterizzarne i gruppi di simmetria.
Un n-poligono è detto regolare se tutti i suoi n lati sono congruenti e tutti i suoi n angoli sono congruenti.
Dato un n-poligono regolare F, si vuole determinare il suo gruppo di simmetria $\Gamma(F)$.
Indicheremo nel seguito con $P_1, ..., P_n$ i vertici del poligono regolare, con l_i i lati di estremi P_{i-1} e P_i (l_1 è il lato di estremi P_n e P_1) e con O il centro ovvero il punto equidistante dai vertici.
Definiamo inoltre il punto medio del lato l_i come quel punto di l_i che lo divide in due parti uguali.
Ogni elemento di $\Gamma(F)$ deve

- ▷ fissare il centro O e quindi gli elementi di $\Gamma(F)$ saranno necessariamente rotazioni di centro O oppure riflessioni di rette passanti per O
- ▷ mandare i vertici del poligono in vertici del poligono.

Pertanto $\Gamma(F)$ contiene:

- n rotazioni: Id, $\rho_\theta, \rho_\theta^2, ..., \rho_\theta^{n-1}$ dove ρ_θ è la rotazione di centro O e angolo $\theta = 2\pi/n$
- n riflessioni: $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ dove σ_i è la riflessione di retta s_i tale che
  - se n è dispari allora s_i è la retta passante per un vertice e per il punto medio del lato opposto
  - se n è pari allora s_{2i-1} è la retta passante per due vertici opposti e s_{2i} è la retta passante per i punti medi di due lati opposti.

In particolare, mandando

$$\rho_\theta \to a \quad \sigma_1 \to b$$

si ottiene un isomorfismo tra $\Gamma(F)$ e il gruppo diedrale con $2n$ elementi D_n.
Infatti è immediato verificare che valgono le seguenti relazioni

$$\rho_\theta^n = \sigma_1^2 = 1$$

e inoltre dal momento che $\rho_\theta = \sigma_2\sigma_1$ si ottiene

$$(\rho_\theta\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = 1.$$

Per un generico n-poligono vale invece il seguente teorema

Teorema 2.2.1. *Sia F un n-poligono arbitrario; allora il gruppo di simmetria $\Gamma(F)$ è un sottogruppo di D_n e coincide con D_n se e solo se F è un n-poligono regolare.*

2.3 Tassellazioni del piano

Passiamo ora allo studio delle tassellazioni piane ovvero le modalità per ricoprire un piano idealmente infinito con particolari figure geometriche che non devono sovrapporsi tra loro.
Analizzeremo in questa sezione soltanto alcune nozioni e risultati di quest'area della matematica molto vasta che presenta ancora oggi problematiche irrisolte.
In ambito artistico sono presenti numerosi esempi di tassellazione, fra i più celebri ritroviamo quelli presenti nel complesso dell'Alhambra a Granada e nei quadri dell'artista olandese Maurits Cornelis Escher.

Definizione 2.11. Una tassellazione del piano $\mathcal{F} = \{P_i \mid i \in I\}$ è una collezione di poligoni P_i, detti facce della tassellazione, tali che

(i) $\bigcup_{n\in I} P_i = \mathbb{R}^2$

(ii) se due facce P_i, P_j si intersecano allora l'intersezione risulta essere un vertice o uno spigolo comune a P_i e P_j; i vertici e i lati dei poligoni P_i si diranno rispettivamente vertice o spigolo della tassellazione

(iii) se v è un vertice della tassellazione allora è vertice di un numero finito di facce di $\mathcal{F}$.

Definizione 2.12. Se $\mathcal{F}$ è una tassellazione e v un suo vertice chiamiamo figura al vertice di $\mathcal{F}$ in v il poligono i cui vertici sono ordinatamente i punti medi degli spigoli uscenti da v.

Con gruppo di simmetria $\Gamma(\mathcal{F})$ di una tassellazione $\mathcal{F}$ si intende l'insieme delle isometrie del piano f tali che

$$f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

ovvero tale che presa una qualsiasi faccia P_i della tassellazione $f(P_i)$ risulta essere ancora una faccia di $\mathcal{F}$.
Occorre, prima di procedere allo studio dei gruppi di simmetria delle tassellazioni, introdurre la seguente nozione

Definizione 2.13. Dato G sottogruppo di di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, diciamo che G è sottogruppo discreto se per ogni $P \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno U di P in $\mathbb{R}^2$ tale che per ogni $g \in G$ risulta una sola delle seguenti possibilità

- $g(P) = P$
- $g(P) \notin U$.

Definito il sottogruppo discreto si ha che vale il seguente teorema

Teorema 2.3.1. *Il gruppo di simmetria $\Gamma(\mathcal{F})$ di una tassellazione $\mathcal{F}$ è un gruppo discreto.*

Definizione 2.14. Dato G sottogruppo discreto di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, un sottoinsieme chiuso D del piano è detto dominio fondamentale per l'azione di G se

(i) per ogni $P \in \mathbb{R}^2$ esiste $g \in G$ tale che $g(P) \in D$

(ii) per ogni coppia di punti P, Q che appartengono alla parte interna di D non esiste alcuna $g \in G$ tale $g(P) = Q$.

2.3.1 Tassellazione regolare

Vediamo ora un particolare tipo di tassellazione

Definizione 2.15. Una tassellazione $\mathcal{F}$ si dice regolare se tutte le facce sono poligoni regolari uguali tra loro.

In particolare se $\mathcal{F}$ è una tassellazione regolare valgono le seguenti proprietà:

1. tutte le figure al vertice sono poligoni regolari
2. tutte le figure al vertice sono uguali tra loro
3. in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce
4. il gruppo di simmetria della tassellazione agisce transitivamente sull'insieme dei vertici, sull'insieme degli spigoli e sull'insieme delle facce.

A ciascuna tassellazione regolare possiamo associare una coppia di numeri (l, s) con $l, s \geq 3$ dove l rappresenta il numero di lati per ogni faccia e s il numero di spigoli che escono da ciascun vertice.
Sono tassellazioni regolari le seguenti

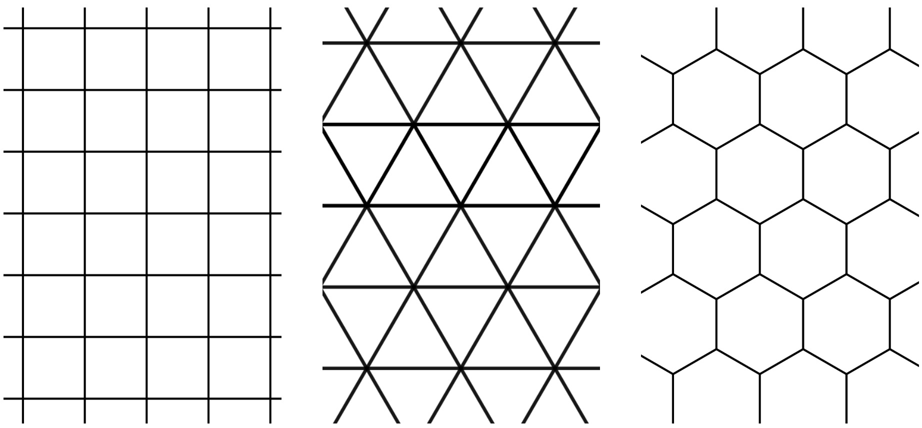


Figura 2.1: Da sinistra a destra tassellazioni regolari di tipo (4,4), (3,6) e (6,3).

Quelle riportate in figura si può dimostrare essere le uniche tassellazioni regolari.

Teorema 2.3.2. *Le sole possibili tassellazioni regolari del piano sono quelle di tipo* $(4,4)$, $(6,3)$, $(3,6)$.

Dimostrazione. Consideriamo una tassellazione regolare $\mathcal{F}$ di tipo (l,s). L'ampiezza dell'angolo di un l-poligono regolare è pari a $(l-2)\pi/l$ e in ciascun vertice arrivano s facce. Pertanto dovrà risultare

$$\frac{s(l-2)\pi}{l} = 2\pi$$

da cui, dividendo per $2\pi q$ si ottiene

$$\frac{l-2}{2l} = \frac{1}{s} \qquad \frac{1}{l} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}.$$

Dal momento che l e s sono numeri interi maggiori o uguali a 3 si può concludere che le uniche possibilità sono le coppie $(4,4)$, $(6,3)$, $(3,6)$. $\square$

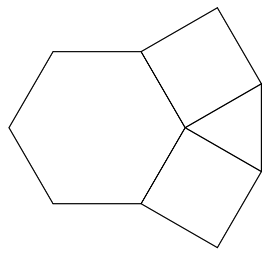
2.3.2 Tassellazioni uniformi

Un altro particolare tipo di tassellazione è quella di tipo uniforme.

Definizione 2.16. Una tassellazione $\mathcal{F}$ è detta uniforme se tutte le sue facce sono poligoni regolari e il suo gruppo di simmetria agisce transitivamente sui suoi vertici.

Le facce possono eventualmente essere poligoni regolari non uguali tra loro. Inoltre in una tassellazione uniforme arriva in ogni vertice lo stesso numero di spigoli e di facce e le figure al vertice sono poligoni tutti uguali tra loro ma non necessariamente regolari.
A ciascuna tassellazione uniforme possiamo associare una n-upla ordinata di interi $(p_1, p_2, ..., p_n)$ con $p_i \geq 3$ per $i = 1, ..., n$ nel modo seguente: scelto un vertice v della tassellazione, l'n-upla $(p_1, p_2, ..., p_n)$, definita a meno di permutazioni cicliche, è ottenuta leggendo, in senso orario, il numero dei lati dei poligoni che hanno v come vertice.

Ad esempio nel vertice della seguente figura arrivano un triangolo equilatero ($p_1 = 3$), un quadrato ($p_2 = 4$), un esagono regolare ($p_3 = 6$) e un altro quadrato ($p_4 = 4$). Pertanto alla tassellazione uniforme corrispondente potremmo associare la 4-upla ordinata $(3, 4, 6, 4)$.



Abbiamo mostrato prima come il numero di tassellazioni regolari possibili sia tre. Vogliamo ora capire quante possano essere invece le tassellazioni uniformi.
Cominciamo analizzando un vertice di una tassellazione uniforme $\mathcal{F}$ di tipo $(p_1, p_2, ..., p_n)$.
Sommando gli angoli che arrivano in questo vertice della tassellazione si ottiene

$$\frac{(p_1-2)\pi}{p_1} + \frac{(p_2-2)\pi}{p_2} + ... + \frac{(p_n-2)\pi}{p_n} = 2\pi$$
$$\left(1-\frac{2}{p_1}\right) + \left(1-\frac{2}{p_2}\right) + ... + \left(1-\frac{2}{p_n}\right) = 2$$
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = \frac{n-2}{2}$$

dove $p_i \geq 3$ per ogni $i = 1, ..., n$ e n è un numero intero $3 \leq n \leq 6$.
Questo perché se $n > 6$ almeno uno degli angoli dei poligoni che si trovano intorno a un vertice dovrebbe essere minore di

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

e questo è impossibile dal momento che stiamo trattando poligoni regolari.
Le soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = \frac{n-2}{2}$$

per $3 \leq n \leq 6$ sono in totale 17 ma non rappresentano tutte le possibili tassellazioni uniformi e ciò è dovuto a due cause.
In primo luogo, qualora ci fosse più di un ordinamento (ciclico) possibile ci potrebbero essere due diverse n-uple $(p_1, p_2, ..., p_n)$ con la stessa soluzione.
Si ottengono allora non 17 ma 21 possibili n-uple ovvero modi per posizionare poligoni regolari intorno ad un vertice.
Inoltre abbiamo, per ora, studiato che cosa succede intorno a un singolo vertice e questo non ci permette di estendere a tutto il piano le considerazioni fatte.
Si hanno pertanto i due seguenti lemmi che eliminano dalle 21 possibilità quei casi che non ci permetterebbero di ottenere una tassellazione di tutto il piano.

Lemma 2.3.3. *Se $\mathcal{F}$ è una tassellazione uniforme di tipo (p_1, p_2, p_3) e uno dei p_i è dispari allora gli altri due sono uguali tra loro.*

Lemma 2.3.4. *Se $\mathcal{F}$ è una tassellazione uniforme di tipo (p_1, p_2, p_3, p_4) e due tra i p_i sono uguali a 3 allora gli altri due sono uguali tra loro e l'ordinamento ciclico risulta essere del tipo $(3, m, 3, m)$.*

Si ha in conclusione il seguente teorema

Teorema 2.3.5. *Se $\mathcal{F}$ è una tassellazione uniforme e non regolare allora è una delle seguenti otto tassellazioni*

- $n = 3$ $(3, 12, 12)$ $(4, 8, 8)$ $(4, 6, 12)$
- $n = 4$ $(3, 6, 3, 6)$ $(3, 4, 6, 4)$
- $n = 5$ $(3, 3, 3, 3, 6)$ $(3, 3, 3, 4, 4)$ $(3, 4, 3, 4, 3)$.

2.3.3 Tassellazioni duali

Data una tassellazione $\mathcal{F}$ possiamo costruire a partire da essa una nuova tassellazione $\mathcal{F}'$, detta tassellazione duale, nel seguente modo:

1. $\mathcal{F}'$ ha un vertice nella parte interna di ogni faccia di $\mathcal{F}$
2. due vertici di $\mathcal{F}'$ sono congiunti da uno spigolo s' di $\mathcal{F}'$ se e solo se le corrispondenti facce di $\mathcal{F}$ sono fra loro adiacenti lungo uno spigolo s di $\mathcal{F}$
3. i vertici di $\mathcal{F}'$ vengono scelti in modo tale che l'unico spigolo della tassellazione $\mathcal{F}$ che interseca s' sia lo spigolo s
4. ciascuna faccia di $\mathcal{F}'$ corrisponde a un vertice v di $\mathcal{F}$ e ha come vertici quelli di $\mathcal{F}'$ corrispondenti alle facce di $\mathcal{F}$ adiacenti a v.

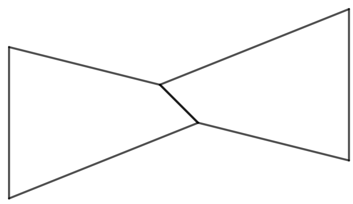
Queste caratteristiche permettono in fase di costruzione di scegliere abbastanza liberamente i vertici di $\mathcal{F}'$ e quindi la tassellazione duale non risulta unica.
Vi è un vantaggio nel costruire una tassellazione duale $\mathcal{F}'$ a partire da una tassellazione uniforme o regolare in quanto i vertici possono essere scelti nei centri delle facce di $\mathcal{F}$. In particolare

- se si parte da una tassellazione regolare di tipo (l, s) la sua duale sarà regolare di tipo (s, l)
- se si parte da una delle otto tassellazioni uniformi non regolari di tipo $(p_1, p_2, ..., p_n)$ la sua duale sarà una tassellazione in n-poligoni tutti uguali tra loro, in cui le figure al vertice sono poligoni regolari (anche non uguali tra loro) e dove $p_1, p_2, ..., p_n$ rappresentano il numero di spigoli che escono dagli n vertici di un n-poligono. Il gruppo di simmetria agisce transitivamente sulle facce della tassellazione.

2.3.4 Tassellazioni monoedriche

Introduciamo ora le tassellazioni monoedriche che permettono di ricoprire il piano applicando delle trasformazioni isometriche a un poligono P fissato. Ma quali caratteristiche deve avere un poligono affinchè ci permetta di ottenere una tassellazione monoedrica?

Per quanto osservato nelle tassellazioni regolari fissando come poligono P un triangolo equilatero, un quadrato o un esagono regolare si riesce a ottenere una tassellazione monoedrica.
Quest'ultima può essere ottenuta anche considerando i duali delle otto tassellazioni uniformi non regolari in quanto presentano facce tutte uguali tra loro.
Vediamo ora di ampliare la famiglia dei poligoni che permettono di ottenere una tassellazione monoedrica.
Innanzitutto si può facilmente intuire che qualsiasi parallelogramma permette di ricoprire il piano attraverso isometrie.
Possiamo poi tracciare una delle due diagonali in un parallelogramma qualsiasi ottenendo due triangoli congruenti la cui forma varia in base al parallelogramma considerato. Questo ci permette di concludere che tutti i triangoli permettono di ottenere una tassellazione monoedrica.
Sempre abbastanza facilmente si può verificare che ogni esagono che presenta le tre coppie di lati opposti e paralleli che lo compongono uguali fra loro tassella il piano.
Come conseguenza di questo si ha che ogni quadrilatero permette di ottenere una tassellazione monoedrica: basta unirne due copie, come in figura, in modo da formare un esagono con lati opposti paralleli e uguali tra loro.



A limitare l'ampliamento della famiglia di poligoni che permettono di ottenere tassellazioni monoedriche si ha il seguente teorema

Teorema 2.3.6. *Non esiste una tassellazione del piano che, presi $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b > 0$, verifichi simultaneamente le seguenti condizioni:*

(i) ogni faccia è un poligono convesso

(ii) *ogni faccia ha un numero di lati* $l \geq 7$

(iii) *ogni faccia ha area* $A > a$

(iv) *ogni faccia ha perimetro* $p > b$.

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [8].
Dal momento che nelle tassellazioni monoedriche le facce sono tutte uguali tra loro si può ricavare da questo teorema che nessun poligono convesso con sette lati o più permette di ottenerne una.
Abbiamo osservato precedentemente che se si prende come poligono P un qualsiasi triangolo o un qualsiasi quadrilatero si riesce a ottenere una tassellazione in cui tutte le facce sono isometriche a P.
Quindi per quanto riguarda i poligoni convessi, rimangono da considerare i pentagoni e gli esagoni.
Per quanto riguarda i primi è stata trovata una famiglia di pentagoni da cui è possibile ottenere tassellazioni monoedriche, ma non si sa ancora se questi casi esauriscano tutte le possibilità. Per poligoni convessi con cinque lati la questione rimane dunque aperta.
Mentre per quanto riguarda gli esagoni, preso un qualsiasi poligono convesso a sei lati P è noto se questo permette di tassellare il piano o meno. In particolare se P è un esagono convesso allora tassella il piano se e solo se appartiene a una delle tre categorie rappresentate nelle figure seguenti:

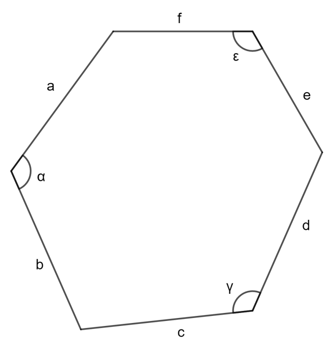


Figura 2.2: $\alpha = \gamma = \varepsilon = 2\pi/3$ e a = b, c = d, e = f.

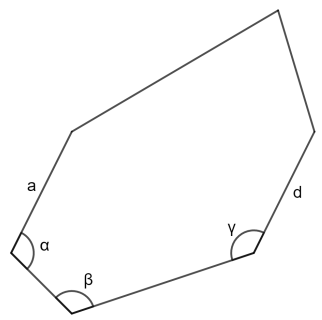


Figura 2.3: $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ e a = d.

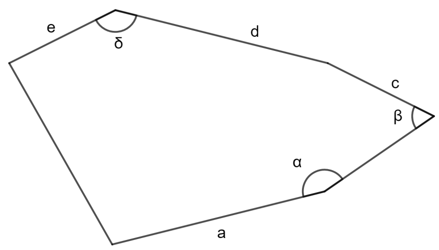


Figura 2.4: $\alpha + \beta + \delta = 2\pi$ e a = d, c = e.

2.4 Gruppi discreti di isometrie piane

In questa sezione andremo a studiare e classificare i gruppi discreti di isometrie piane.
In particolare distingueremo tra:

- gruppi finiti che rappresentano il gruppo di simmetria dei rosoni

- gruppi infiniti che divideremo in:

– gruppi dei fregi che rappresentano il gruppo di simmetria di quelle figure piane che si sviluppano in un'unica direzione mediante traslazioni multiple di un unico vettore $\mathbf{v}$

– gruppi dei mosaici che rappresentano il gruppo di simmetria di quelle figure piane che si sviluppano in due direzioni mediante traslazioni di due vettori $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ indipendenti.

Per ottenere questa classificazione occorre partire da alcune considerazioni di carattere algebrico.
Consideriamo un sottogruppo discreto di isometrie del piano G e l'insieme $T = \{t \in G \mid t \quad \text{traslazione}\}$.
Se restringiamo l'omomorfismo Φ, introdotto nell'Osservazione 2, a G otteniamo un omomorfismo

$$\Phi_{|G} : G \longrightarrow O(2)$$

con nucleo T e con immagine un sottogruppo P di $O(2)$, detto gruppo puntuale di G, isomorfo al quoziente G/T.
Proprio caratterizzando i gruppi T e P si ottiene la classificazione dei sottogruppi discreti di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ che vedremo nelle prossime sezioni.
Si ha la seguente distinzione riguardo alla struttura di T.

Lemma 2.4.1. *Si consideri G sottogruppo discreto di* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ *e T il sottogruppo delle traslazioni in G. Si hanno le seguenti tre possibilità:*

(i) $T = \{Id\}$

(ii) T è il gruppo libero isomorfo a $\mathbb{Z}$

(iii) T è il gruppo abeliano libero isomorfo a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ generato da due traslazioni $t_{\mathbf{v}}$ e $t_{\mathbf{w}}$ con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ linearmente indipendenti.

2.4.1 Gruppi finiti di isometrie piane

Partiamo con lo studio dei gruppi finiti di isometrie piane.

Lemma 2.4.2. *Se G è un sottogruppo finito di* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ *allora esiste un punto O tale che $g(O) = O$, $\forall g \in G$.*

Ora grazie al questo lemma possiamo caratterizzare i gruppi finiti di isometrie del piano in gruppi ciclici e diedrali.

Teorema 2.4.3. *Se G è un sottogruppo finito di* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ *allora G è isomorfo a un gruppo ciclico oppure G è isomorfo a un gruppo diedrale.*

Dimostrazione. Sia G un sottogruppo finito di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ e sia O il punto tale che $g(O) = O$ per qualsiasi $g \in G$. Pertanto gli elementi di G sono isometrie che hanno un punto fisso O e quindi quelle dirette possono solo essere le rotazioni di centro O, mentre quelle inverse possono solo essere le riflessioni di rette passanti per O.
Sia G^+ il sottogruppo delle isometrie dirette di G e scegliamo in esso l'elemento g che corrisponde alla rotazione di centro O e angolo α di ampiezza positiva minima. Questo elemento esiste dal momento che G è finito.
Possiamo scrivere $\alpha = 2k\pi/n$, dove k e n possono essere supposti primi tra loro.
Inoltre possiamo supporre $k = 1$. Questo segue dal fatto che, essendo k e n primi tra loro, esistono a e b interi tali che $ak + bn = 1$. Pertanto si ha

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2ak\pi + 2bn\pi}{n} = \frac{2ak\pi}{n} + 2b\pi = a\alpha + 2b\pi.$$

Ora, se g è la rotazione di centro O e angolo $\alpha = 2k\pi/n$ e $k \neq 1$ allora G contiene anche la rotazione f di centro O e angolo $2\pi/n$ poichè $f = g^a$.
G^+ contiene dunque il gruppo ciclico $H \cong C_n$ generato dalla rotazione g di $2\pi/n$ intorno a O. Vogliamo dimostrare che G^+ coincide con H.
Se così non fosse, considerando una rotazione $h \in G^+ \setminus H$, troveremmo in G^+ una rotazione di ampiezza strettamente minore di $2\pi/n$. Infatti se β è l'ampiezza di h ed è tale che

$$2\pi j/n < \beta < 2\pi(j+1)/n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

allora basterebbe considerare la rotazione hg^{-j}.
Possiamo quindi concludere che G^+ è isomorfo a H.

Ora, se G coincide con G^+ la dimostrazione è finita. Se invece esiste almeno una riflessione σ, per l'Osservazione 4, G^+ è un sottogruppo di indice due in G e $G = G^+ \cup \sigma G^+$ è isomorfo al gruppo diedrale D_n, generato da σ e g, con le relazioni $g^n = \sigma^2 = (\sigma g)^2 = 1$. □

Si ha inoltre il seguente lemma.

Lemma 2.4.4. *Se G è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ e il suo sottogruppo delle traslazioni è $T = \{\mathrm{Id}\}$ allora G è un gruppo finito.*

2.4.2 Gruppi dei fregi

Tra i gruppi infiniti di isometrie del piano cominciamo analizzando i gruppi dei fregi.
Un fregio è, come già detto, una figura piana caratterizzata dal fatto di svilupparsi in un'unica direzione ed è presente come motivo ornamentale in tantissimi palazzi, chiese o monumenti storici ma non solo.
I gruppi di simmetria dei fregi contengono quindi traslazioni tutte multiple di un unico vettore $\mathbf{v}$.
Partiamo dal seguente lemma

Lemma 2.4.5. *Se G è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, il suo sottogruppo delle traslazioni è $T \cong \mathbb{Z}$ e P denota il suo sottogruppo puntuale allora:*

(i) G può contenere solo rotazioni di ordine due

(ii) esistono quattro possibilità per P: C_1, C_2, D_1 e D_2.

Questo lemma però non ci basta per caratterizzare il gruppo discreto delle isometrie del piano G che ha sottogruppo delle traslazioni $T \cong \mathbb{Z}$, in quanto anche se si conoscono i due sottogruppi T e P, il gruppo G non è univocamente determinato.
Occorre dunque definire una relazione di equivalenza con la quale classificare i sottogruppi discreti di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

Definizione 2.17 (Affinità)**.** Un'applicazione

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

è detta affinità se A è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{b}$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ fissato.

L'insieme delle affinità su $\mathbb{R}^n$ forma un gruppo con la composizione che denotiamo con $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 2.18. Due sottogruppi G e G' di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ si dicono equivalenti se sono coniugati in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ ovvero se esiste un'affinità ξ tale che $\xi G \xi^{-1} = G'$.

Ora se consideriamo:

- la terna di gruppi T, G e P

- l'inclusione $\iota : T \longrightarrow G$ come omomorfismo iniettivo

- la proiezione sul quoziente $\Phi : G \longrightarrow P$ come omomorfismo suriettivo

otteniamo una successione esatta corta

$$1 \longrightarrow T \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\Phi} P \longrightarrow 1$$

che è ottenuta per restrizione dalla successione esatta corta

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\iota} \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\Phi} O(2) \longrightarrow 1$$

dove

- $\iota(\mathbf{v}) = t_{\mathbf{v}}$ è l'omomorfismo iniettivo che identifica $\mathbb{R}^2$ con il sottogruppo delle traslazioni

- Φ è l'omomorfismo suriettivo che associa a ciascuna isometria f la matrice ortogonale A tale che $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Inoltre definendo come $\nu : O(2) \longrightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ l'omomorfismo che associa a ciascuna matrice ortogonale A la corrispondente isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ si ottiene che questa successione esatta corta spezza.
Seguendo quindi il procedimento illustrato nell'Osservazione 6 dell'Appendice A si ha che $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ può essere ricostruito come prodotto semidiretto di $O(2)$ e del gruppo delle traslazioni isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$, tramite l'azione di $O(2)$ su $\mathbb{R}^2$.
Consideriamo quindi un elemento $\nu(A)\iota(\mathbf{v})\nu(A)^{-1}$.
Questo elemento appartiene al sottogruppo delle traslazioni in quanto sottogruppo normale di $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$. Essendo ι un'applicazione iniettiva esiste ed è unico un elemento $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\iota(\mathbf{w}) = \nu(A)\iota(\mathbf{v})\nu(A)^{-1}$.
In particolare $\nu(A)\iota(\mathbf{v})\nu(A)^{-1}$ è l'isometria $At_{\mathbf{v}}A^{-1}$, che applicata a un generico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ può essere riscritta nel modo seguente

$$At_{\mathbf{v}}A^{-1}(\mathbf{x}) = A(A^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{x} + A\mathbf{v} = t_{A\mathbf{v}}(\mathbf{x})$$

ottenendo la traslazione di vettore $A\mathbf{v}$.
Pertanto si ha che $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ e possiamo definire l'azione di $O(2)$ su $\mathbb{R}^2$ come $\eta(A)(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
Quindi più in generale nel caso la successione esatta corta

$$1 \longrightarrow T \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\Phi} P \longrightarrow 1$$

spezzi per un certo omomorfismo η, allora è possibile ricostruire il gruppo di isometrie G come prodotto semidiretto del gruppo puntuale P e del sottogruppo delle traslazioni T, tramite l'azione di P su T: $\eta(A)(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
Un caso in cui questa successione sicuramente spezza è quando il gruppo P contiene solo rotazioni. In questo caso P è ciclico, ovvero le rotazioni hanno tutte lo stesso centro e il suo generatore sarà una rotazione di angolo $2\pi/n$ di centro l'origine. Essendo presente in G una rotazione di centro un punto C e angolo $2\pi/n$ possiamo definire l'omomorfismo $\nu : P \longrightarrow G$ mandando ogni rotazione di P nella rotazione di centro C e uguale angolo di G.
Arriviamo dunque al seguente teorema che ci dice che i possibili gruppi di

simmetria di un fregio sono in tutto sette. Abbiamo visto nel Lemma 2.4.5 che nel caso in cui $T \cong \mathbb{Z}$ allora sussistono quattro possibilità per P: C_1, C_2, D_1 e D_2. La dimostrazione sarà svolta analizzando singolarmente ciascuno di questi casi e ricostruendo di volta in volta il gruppo di simmetria G.
Per rappresentare i sette gruppi di simmetria dei fregi viene solitamente utilizzata la notazione cristallografica: a ciascun gruppo è associata una sequenza di quattro numeri o lettere che viene composta secondo le seguenti convenzioni:

1. il primo simbolo è una **p**
2. il secondo simbolo è:
   - **m** nel caso il gruppo contenga una riflessione di retta perpendicolare alla direzione della traslazione
   - **1** nel caso il gruppo non contenga una riflessione di retta perpendicolare alla direzione della traslazione
3. il terzo simbolo è:
   - **m** nel caso il gruppo contenga una riflessione di retta parallela alla direzione della traslazione
   - **a** nel caso il gruppo contenga una glissoriflessione di retta parallela alla direzione della traslazione
   - **1** nel caso il gruppo non contenga nè una riflessione nè una glissoriflessione rispetto a una retta parallela alla direzione della traslazione
4. il quarto simbolo è:
   - **2** nel caso il gruppo contenga una rotazione di π
   - **1** nel caso il gruppo non contenga una rotazione di π.

Teorema 2.4.6. *Esistono, a meno di equivalenza, sette sottogruppi discreti di* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ *tali che abbiano sottogruppo delle traslazioni* $T \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sia $g = t_{\mathbf{v}}$ un generatore di $T = C_\infty$ dato dalla traslazione di vettore $\mathbf{v}$ e consideriamo i seguenti casi:

Caso $P \cong D_1$

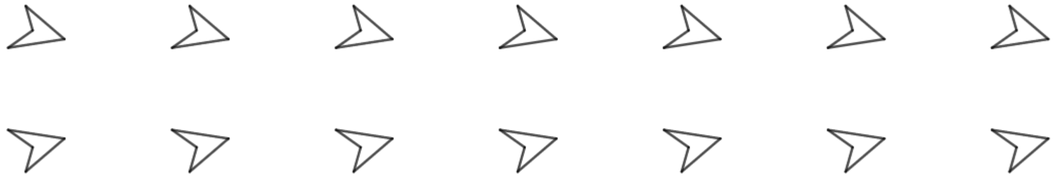
Chiamiamo σ_r l'unica riflessione presente in P e sia $f \in G$ tale che $\Phi(f) = \sigma_r$. L'isometria f può essere:

1. una riflessione di retta s, $f = \sigma_s$.
   In questo caso si può dimostrare che l'applicazione che manda $\sigma_r \mapsto f$ e l'identità nell'identità è un omomorfismo e pertanto la successione esatta corta
   $$1 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow 1$$
   spezza.
   Per quanto detto è possibile ricostruire G come prodotto semidiretto di P e T, tramite l'azione di P su T vista prima.
   Consideriamo $h = fgf^{-1}$ che è una traslazione di G e dal momento che $T \cong \mathbb{Z}$ si ha che $h = t_{\mathbf{w}}$ con $\mathbf{w} \parallel \mathbf{v}$.
   Se la retta r è parallela al vettore $\mathbf{v}$ si ha che g fissa la retta r e quindi h fissa la retta $f(r)$. Pertanto $f = \sigma_s$ deve mandare la retta r in una sua parallela $f(r)$.
   Le possibilità per s sono quindi due:

   (i) $s \parallel r$
   In questo caso f manda il vettore $\mathbf{v}$ e tutti i suoi multipli nel vettore stesso e pertanto l'azione di P su T è l'azione banale. Il gruppo G è quindi isomorfo a $D_1 \times C_\infty$.
   Dal punto di vista geometrico G contiene:

   - ▲ una sola riflessione f tale che $f^2 = 1$
   - ▲ infinite traslazioni di generatore g
   - ▲ infinite glissoriflessioni che si ottengono componendo la riflessione f con le traslazioni e tali che $fg = gf$.

In notazione cristallografica G è il gruppo **p1m1**.



(ii) $s \perp r$

In questo caso $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ e così anche per tutti i multipli di $\mathbf{v}$. Il gruppo G è isomorfo a $D_1 \rtimes C_\infty$ ma l'azione di P su T non è quella banale.

Dal punto di vista geometrico G contiene:

- ▼ infinite riflessioni f di rette ortogonali a $\mathbf{v}$ tali che $f^2 = 1$
- ▼ infinite traslazioni di generatore g

e a differenza di (i) non contiene glissoriflessioni.

In notazione cristallografica G è il gruppo **pm11**.

2. una glissoriflessione $f = t_{\mathbf{w}}\sigma_s$.

   Ripetendo il ragionamento fatto nel caso precedente si ha nuovamente che le rette r e $f(r)$ devono essere parallele. Questo implica che s sia una retta parallela a r.

   Inoltre si può osservare che $f^2 = t_{2\mathbf{w}}$ e pertanto $\mathbf{w} \parallel s$, ma anche $2\mathbf{w} = n\mathbf{v}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

   Possiamo quindi assumere $g = f^2$ come generatore del sottogruppo delle traslazioni T. Il gruppo G risulta essere il gruppo ciclico infinito generato da f.

   Dal punto di vista geometrico G contiene:

- infinite traslazioni
- infinite glissoriflessioni

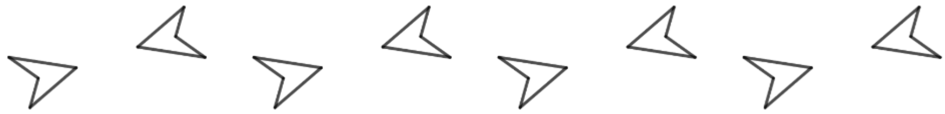
ma non contiene alcuna riflessione.
In notazione cristallografica G è il gruppo **p1a1**.

Caso $P \cong C_1$
In questo caso la successione esatta corta spezza e l'azione di P su T è quella banale. Il gruppo G coincide quindi con il sottogruppo delle traslazioni T e dal punto di vista geometrico contiene solamente infinite traslazioni.
In notazione cristallografica G è il gruppo **p111**.

Caso $P \cong C_2$
Anche in questo caso la successione esatta corta spezza ma se chiamiamo f la rotazione di π si ha che $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Pertanto l'azione di P su T non è quella banale e G risulta isomorfo al prodotto semidiretto $D_1 \rtimes C_\infty$.
Dal punto di vista geometrico G contiene:

- infinite traslazioni
- infinite rotazioni di π di centri punti che giacciono su una retta r parallela a $\mathbf{v}$ ed equidistanti tra loro a una distanza che è metà della lunghezza di $\mathbf{v}$.

In notazione cristallografica G è il gruppo **p112**.

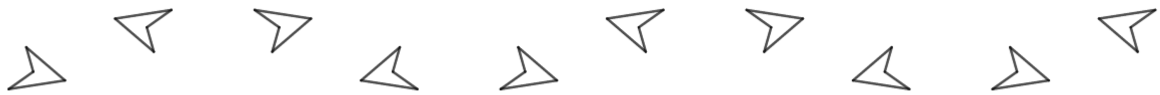


Caso $P \cong D_2$
Chiamiamo σ_r e σ_s le due riflessioni presenti in P, dove r e s sono due rette tra loro ortogonali.
Considerando f e h i due elementi di G tali che $\Phi(f) = \sigma_r$ e $\Phi(h) = \sigma_s$, ragioniamo come nel primo caso in cui $P \cong D_1$.
Almeno una tra f e h è una riflessione in quanto per gli assi di riflessione sono possibili la direzione parallela e quella ortogonale a $\mathbf{v}$, mentre per gli assi di glissoriflessione è possibile solo quella parallela a $\mathbf{v}$.
Siamo quindi in presenza dei seguenti due casi:

(i) f e h sono entrambe riflessioni.
Le due riflessioni sono relative a due rette di cui una parallela a $\mathbf{v}$ e una perpendicolare a $\mathbf{v}$.
La successione esatta corta spezza e G è isomorfo a $D_2 \times C_\infty$.
In notazione cristallografica G è il gruppo **pmm2**.

(ii) f riflessione e h glissoriflessione.
La riflessione f è relativa a una retta ortogonale a $\mathbf{v}$, mentre la glissoriflessione h è tale che $h^2 = g = t_{\mathbf{v}}$.

In questo caso la successione esatta corta non spezza e G è isomorfo al gruppo diedrale infinito D_∞, generato da una riflessione e una glissoriflessione.
In notazione cristallografica G è il gruppo **pma2**.



$\square$

2.5 Gruppi dei mosaici

Concludiamo l'analisi dei gruppi di isometrie del piano analizzando i gruppi dei mosaici.
Un mosaico, a differenza del fregio, ha la peculiarità di svilupparsi nel piano in due direzioni determinate da due vettori indipendenti. Per il Lemma 2.4.1 siamo nel caso in cui $T \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Come per i fregi partiamo dal seguente lemma che ci indica la possibile struttura del gruppo puntuale P.

Lemma 2.5.1 (Restrizione cristallografica)**.** *Sia G è un sottogruppo discreto di* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ *tale che per il suo sottogruppo delle traslazioni T vale $T \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Se P indica il suo gruppo puntuale si ha:*

(i) G può contenere solo rotazioni di ordine due, tre e quattro

(ii) esistono dieci possibilità per P: C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4 e D_6.

Procedendo con un'analisi del tutto analoga a quella fatta per i fregi si arriva al seguente teorema che ci dice che i possibili gruppi di simmetria dei mosaici sono in tutto diciassette.

Teorema 2.5.2. *Esistono, a meno di equivalenza, diciassette sottogruppi discreti di* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ *tali che abbiano sottogruppo delle traslazioni* $T \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [9].
Prima di illustrare i 17 gruppi di simmetria dei mosaici introduciamo, come fatto per i fregi, la notazione cristallografica. Anche in questo caso si assegna a ciascun gruppo una sequenza di quattro numeri o lettere determinati in base al seguente procedimento.
Prima di tutto occorre scegliere un dominio fondamentale D' relativo a T: si fissa il parallelogramma D' generato dai vettori di lunghezza minimale $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (che sono i generatori di T) e con vertici nei centri di rotazione di ordine massimo. Si sceglie poi l'asse x di un sistema di riferimento nella direzione di $\mathbf{v}$.
Nel caso in cui sia presente una sola direzione per gli assi di riflessione (o di glissoriflessione) e il parallelogramma così scelto non risulti simmetrico rispetto a un asse di riflessione oppure nel caso in cui siano presenti due direzioni per gli assi di riflessione (o di glissoriflessione) e il parallelogramma così scelto non risulti simmetrico rispetto a due assi di riflessione, allora il dominio fondamentale D' è scelto in modo tale da essere simmetrico rispetto a questo asse (o a questi assi). L'asse x del sistema di riferimento viene scelto ortogonale all'asse di riflessione (o a uno degli assi di riflessione).
Si hanno quindi le seguenti convenzioni per determinare la sequenza di numeri e lettere:

1. il primo simbolo è
   - **c** nel caso in cui l'asse x venga scelto non nella direzione di $\mathbf{v}$
   - **p** nel caso in cui l'asse x venga scelto nella direzione di $\mathbf{v}$
2. il secondo simbolo è un numero che indica il massimo ordine di una rotazione presente in G (i possibili valori sono 1, 2, 3, 4, 6)
3. il terzo simbolo è:

- **m** nel caso il gruppo contenga una riflessione di retta con direzione ortogonale all'asse x
- **g** nel caso il gruppo contenga una glissoriflessione di retta con direzione ortogonale all'asse x
- **1** nel caso il gruppo non contenga nè una riflessione nè una glissoriflessione di retta con direzione ortogonale all'asse x

4. il quarto simbolo è:

- **m** nel caso il gruppo contenga una riflessione di retta con direzione tale da formare con l'asse x un angolo α dipendente dal massimo ordine di rotazione presente
- **g** nel caso il gruppo contenga una glissoriflessione di retta con direzione tale da formare con l'asse x un angolo α dipendente dal massimo ordine di rotazione presente
- **1** nel caso il gruppo contenga nè una riflessione nè una glissoriflessione di retta con direzione tale da formare con l'asse x un angolo α dipendente dal massimo ordine di rotazione presente.

In particolare, posto n il massimo ordine di rotazione presente in G, l'angolo α può essere:

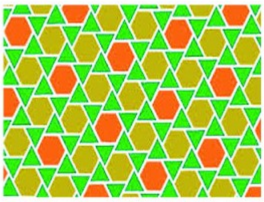
$$\alpha = \begin{cases} \pi/2, & \text{se } n = 1 \text{ oppure } n = 2 \\ \pi/4, & \text{se } n = 4 \\ \pi/3, & \text{se } n = 3 \text{ oppure } n = 6. \end{cases}$$

Nelle seguito esponiamo la descrizione dei 17 gruppi di simmetria dei mosaici distinguendo i casi in cui il gruppo di simmetria G contiene rotazioni di ordine 6, 4, 3, 2 e 1.

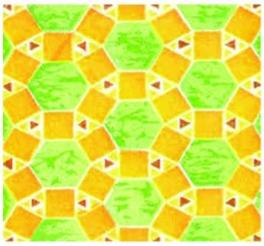
Il gruppo G contiene rotazioni di ordine 6

In questo caso le possibilità sono le seguenti:

▽ **p611** in questo caso $P \cong C_6$ e pertanto il gruppo contene solo isometrie dirette



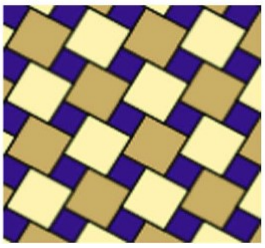
- ▽ **p6mm** in questo caso $P \cong D_6$ e pertanto il gruppo contene anche riflessioni (e glissoriflessioni).



Il gruppo G contiene rotazioni di ordine 4

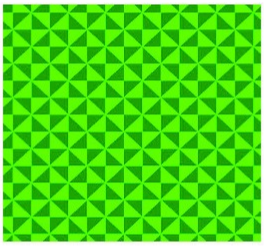
In questo caso le possibilità sono le seguenti:

- ▽ **p411** in questo caso $P \cong C_4$ e pertanto il gruppo contene solo isometrie dirette



- ▽ **p4mm** in questo caso $P \cong D_4$, il gruppo contiene riflessioni in 4 direzioni distinte e i centri di rotazione si trovano sugli assi di riflessione

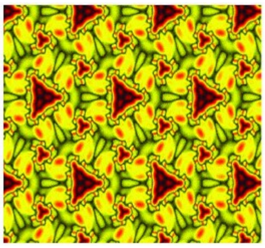
▽ **p4gm** in questo caso $P \cong D_4$, il gruppo contiene riflessioni in due direzioni ortogonali e i centri di rotazione possono anche non trovarsi sugli assi di riflessione.



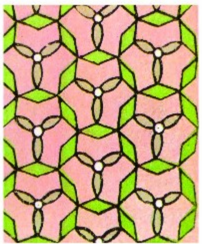
Il gruppo G contiene rotazioni di ordine 3 ma non di ordine 6
In questo caso le possibilità sono le seguenti:

▽ **p311** in questo caso $P \cong C_3$ e pertanto il gruppo contene solo isometrie dirette

▽ **p3m1** in questo caso $P \cong D_3$ e tutti i centri di rotazione si trovano sugli assi di riflessione



▽ **p31m** in questo caso $P \cong D_3$ e i centri di rotazione possono anche non trovarsi sugli assi di riflessione.

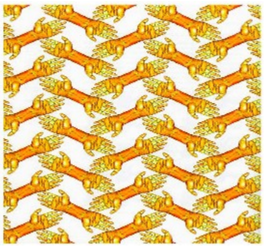


Il gruppo G contiene rotazioni di ordine 2

In questo caso le possibilità sono le seguenti:

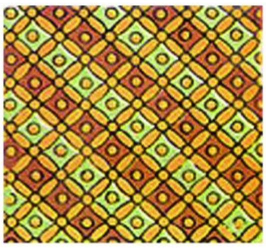
▽ **p211** in questo caso $P \cong C_2$ e pertanto il gruppo contene solo isometrie dirette

▽ **p2gg** in questo caso $P \cong D_2$ e il gruppo contiene glissoriflessioni ma nessuna riflessione



▽ **p2mg** in questo caso $P \cong D_2$ e il gruppo contiene sia riflessioni (in un'unica direzione) sia glissoriflessioni

▽ **p2mm** in questo caso $P \cong D_2$, il gruppo contiene riflessioni ma non glissoriflessioni e i centri si trovano sugli assi di riflessione



▽ **c2mm** in questo caso $P \cong D_2$, il gruppo contiene sia riflessioni che glissoriflessioni e i centri possono non appartenere agli assi di riflessione.

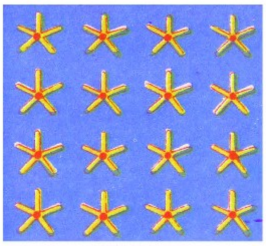
Nel gruppo G non ci sono rotazioni diverse dall'identità

In questo caso le possibilità sono le seguenti:

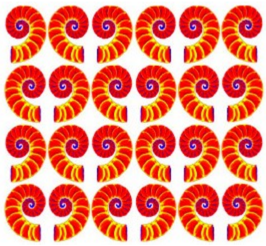
- $\triangledown$ **p111** in questo caso $P \cong C_1$ e pertanto il gruppo contene solo isometrie dirette

- $\triangledown$ **p1g1** in questo caso $P \cong D_1$ e il gruppo contiene glissoriflessioni ma nessuna riflessione

- $\triangledown$ **p1m1** in questo caso $P \cong D$ e il gruppo contiene riflessioni ma non glissoriflessioni



▽ **c1m1** in questo caso $P \cong D_1$ e il gruppo contiene sia riflessioni che glissoriflessioni.



Capitolo 3

Progettazione dell'uscita didattica

In questo capitolo descrivo la struttura di un'uscita didattica avente come meta la città di Ravenna. Dopo un'introduzione generale e alcune considerazioni sull'insegnamento della geometria nella scuola italiana, presento le tappe che compongono l'itinerario e le dieci fasi di cui si costituisce l'uscita. Le schede delle attività a cui faccio riferimento in questo capitolo sono quelle riportate in Appendice B.
Ho utilizzato come testi di riferimento [2], [5] e [6].

3.1 Introduzione

L'uscita didattica che ho progettato è destinata a una scuola secondaria di primo grado, ma è adatta anche per classi del primo biennio di una scuola secondaria di secondo grado e si pone come obiettivo principale quello di introdurre il concetto di simmetria di una figura dal punto di vista matematico. Nella vita di tutti i giorni gli studenti incontrano e utilizzano molto frequentemente la parola simmetria, a volte con un significato vago e generico, come sinonimo di qualcosa di armonioso, bello, equilibrato o ben proporzionato; altre volte con un significato più preciso, come uguaglianza tra destra e sinistra, evidente negli animali o nel corpo umano. In particolare quest'ultima visione, detta "simmetria bilaterale", viene spesso affrontata in arte nella

scuola secondaria di primo grado, fornendo quindi una possibile base per l'introduzione delle simmetrie in matematica.
Ho voluto utilizzare come spunto per introdurre questi concetti l'osservazione di figure artistiche presenti in alcuni monumenti di Ravenna. In questi luoghi, da sempre meta di uscite didattiche, si è soliti focalizzare l'attenzione degli studenti sugli aspetti storici e artistici. Ho cercato quindi, attraverso le attività che ho strutturato, di ampliare la prospettiva classica di osservazione di questi luoghi, introducendo un modo differente e insolito di guardare la realtà.
Riprendendo le parole presenti nel cappello introduttivo delle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione[1] nella sezione di Matematica:
«Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e della comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani.»
Nel corso dell'uscita didattica agli studenti è chiesto di giocare un ruolo attivo in un processo di costruzione della conoscenza, di esserne i protagonisti, mentre il docente assume un ruolo più passivo, prevalentemente di osservazione. Compito fondamentale di quest'ultimo è quello di spiegare, prima dell'inizio delle attività, le corrette modalità di svolgimento e al termine di ciascuna di esse raccogliere osservazioni, commenti degli alunni, cercando poi di indirizzarli verso i corretti concetti matematici, in un processo di istituzionalizzazione delle conoscenze.
Possiamo considerare questa uscita come una situazione a-didattica, cioè una di quelle situazioni nella quale, rispetto al processo di apprendimento, il ruolo attivo viene svolto dallo studente mentre il docente rimane per lo più in

[1] http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/decreto-ministeriale-254-del-16-novembre-2012-indicazioni-nazionali-curricolo-scuola-infanzia-e-primo-ciclo.pdf

secondo piano.
Inoltre riprendendo le parole presenti nel cappello introduttivo delle Indicazioni nazionali, possiamo considerarla come attività di laboratorio, ovvero:
«come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.»
Attività di questo tipo permettono di sviluppare apprendimenti di tipo intermedio ma anche di tipo superiore convergente e divergente, solitamente poco privilegiati. In particolare gli studenti possono sviluppare competenze:

- di comprensione: descrizione di ragionamenti e riconoscimento di situazioni
- convergenti: analisi e confronto di situazioni
- divergenti legate all'intuizione: tentare soluzioni e riconoscere il problema chiave.

Ho pensato inoltre di far svolgere le varie attività agli studenti a piccoli gruppi da tre/quattro persone. Questo li porta a collaborare e interagire nel processo di costruzione della conoscenza, in un momento dunque di apprendimento cooperativo, permettendogli di sviluppare capacità di collaborazione, partecipazione, inclusione e socializzazione.
Dal punto di vista disciplinare, alla base del concetto di simmetria di una figura ci sono le isometrie. Questa uscita didattica è pensata per classi che incontrano per la prima volta questo argomento e può pertanto costituire un'attività insolita e coinvolgente per introdurlo. Le isometrie si ritrovano all'interno delle Indicazioni nazionali, in particolare nella sezione *Spazio e figure* degli "Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado" si legge:
«Conoscere e utilizzare le principali trasformazioni geometriche e i loro invarianti.»

Nello specifico, gli obiettivi disciplinari che questa uscita si prefigge di raggiungere sono: l'introduzione delle simmetrie per traslazione, per rotazione e per riflessione e l'applicazione di questi concetti a figure artistiche invarianti rispetto a questi movimenti (fregi, rosoni e tassellazioni).
Le trasformazioni geometriche e le isometrie vengono riprese e trattate in maniera più approfondita nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado e pertanto le attività che ho progettato possono essere utilizzate per introdurre tali argomenti.
Vi è un ulteriore considerazione che occorre fare e riguarda l'insegnamento della geometria all'interno del contesto scolastico italiano. Nonostante nelle Indicazioni nazionali alla geometria sia riservato lo stesso spazio delle altre discipline matematiche, così sembra non essere nella pratica scolastica. Maria Dedò in [5], infatti, ne definisce l'insegnamento come *"il grande disperso nella scuola italiana del ventunesimo secolo"*.
Non si riesce tuttavia a trovare una giustificazione valida per questa sparizione e l'effetto maggiormente prodotto è la cosiddetta mancanza di "spirito geometrico", intendendo con questa la capacità di visualizzazione tipica della geometria e l'abitudine a individuare approcci globali ai problemi.
Quella che in particolare viene per lo più trascurata è la geometria intuitiva ovvero quella affrontata durante la scuola secondaria di primo grado. Sempre secondo la Dedò, l'insegnamento della geometria intuitiva dovrebbe avere come obiettivo quello di portare gli studenti a costruirsi un bagaglio di fatti geometrici, come ad esempio figure, proprietà, relazioni o costruzioni, che nel corso degli anni successivi organizzeranno in maniera via via più coerente dal punto di vista logico.
Come riportato dalla Dedò, il matematico russo Arnol'd sostiene che la matematica dovrebbe far suo il seguente schema, tipico della fisica:

1. osservazione
2. costruzione di un modello
3. analisi del modello

4. conclusioni

5. controllo di tali conclusioni mediante altre osservazioni.

In particolare per l'autrice questo schema bene si adatta nell'apprendimento della geometria intuitiva, sottolineando l'importanza dell'osservazione, un'abilità che può e deve essere insegnata ai ragazzi, che li porterà a individuare autonomamente gli aspetti rilevanti di una situazione, quelli da ignorare e a chiedersi il perchè dei fenomeni che vengono osservati.
Sulla base di queste considerazioni, ritengo che un'attività come quella che ho progettato sia uno strumento prezioso per arginare la tendenza, ormai consolidata, di trascurare la geometria intuitiva nella scuola secondaria di primo grado. Investendo molto sul ruolo dell'osservazione come punto di partenza nel processo di apprendimento, questa uscita didattica permette di sviluppare quello "spirito geometrico", di visualizzazione e di approccio globale ai problemi, di cui parla la Dedò.

3.2 Itinerario dell'uscita didattica e cenni storici sui monumenti

L'uscita didattica che ho progettato ha una durata di circa quattro ore e si sviluppa interamente nel centro di Ravenna attraverso il seguente itinerario:

1. Mausoleo di Galla Placidia

2. Basilica di San Vitale

3. Basilica di Sant'Apollinare Nuovo

4. Palazzo di Teodorico.

Espongo, nel seguito, brevi cenni storici riguardo a questi monumenti che possono essere utilizzati nel corso dell'uscita per inquadrare dal punto di vista storico i luoghi dove gli studenti sono chiamati a svolgere le attività didattiche.

3.2.1 Mausoleo di Galla Placidia

Il mausoleo di Galla Placidia venne costruito intorno al 425-450 dopo Cristo, circa un secolo prima della costruzione dell'adiacente Basilica di San Vitale. A commissionarlo fu proprio Galla Placidia, imperatrice dell'Impero Romano d'Occidente per dodici anni, vissuta a cavallo tra il III e il IV secolo. Figlia dell'imperatore Teodosio I, Galla Placidia nasce a Costantinopoli tra il 388 e il 392.
Alla morte del padre avvenuta nel 395 i fratelli di Galla Placidia, Arcadio e

Onorio, gli succedettero rispettivamente in Oriente e in Occidente. Ma il periodo era particolarmente delicato per l'impero in quanto i popoli barbari si rendevano sempre più pericolosi. Tra questi vi erano i Visigoti del re Alarico (originari della scandinavia) che nel 410 occuparono e saccheggiarono Roma prendendo come prigioniera proprio Galla Placidia, sorella dell'imperatore Onorio, che nel frattempo si rifugiò a Ravenna, divenuta ormai la capitale dell'impero.
Sempre nel 410 Alarico muore a Cosenza e a succedergli è il cognato Ataulfo che, nel 414, sposa nella città francese di Narbona la giovane prigioniera. Il matrimonio però dura ben poco: a seguito di una congiura Ataulfo muore e il suo successore Wallia rimanda Galla Placidia a Ravenna, dove nel 416 (o 417) sposa il generale dell'impero Costanzo da cui ha due figli Onoria e Valentiniano.
Nel 421 l'imperatore Onorio associa al trono il cognato Costanzo, rendendo quindi Galla Placidia imperatrice romana.
Ma anche in questo caso il matrimonio dura ben poco: sempre nel 421 Costanzo muore e Galla Placidia, entrata in forte contrasto con il fratello, fugge con i figli a Costantinopoli.
Nel 423 a morire è Onorio e Galla Placidia riesce da Costantinopoli a far riconoscere imperatore d'occidente il figlio Valentiniano. Dal momento che quest'ultimo aveva solamente sei anni, nel 425 viene affidata la reggenza dell'impero proprio alla madre che si dimostra un'abile sovrana riuscendo a conservare il trono per il figlio fino alla sua maggiore età.
Il 27 novembre 450 Galla Placidia muore a Roma. Quasi sicuramente fu sepolta nel mausoleo di famiglia presso San Pietro in Vaticano, anche se alcune voci poco attendibili sostengono che la salma fu successivamente portata proprio nel mausoleo ravennate.
Oggi questo edificio è a sè stante, mentre in passato era collegato alla vicina chiesa di Santa Croce, anch'essa fatta costruire da Galla Placidia.
A partire dal 1996 il mausoleo è inserito nella lista dei siti italiani patrimonio dell'umanità dell'UNESCO.

3.2.2 Basilica di San Vitale

La Basilica di San Vitale fu fatta costruire nel 526 dal vescovo Ecclesio e non è da escludere che l'idea di una chiesa a pianta centrale sia nata durante un viaggio in oriente dove questo modulo architettonico risulta molto diffuso. La chiesa venne consacrata il 17 maggio del 547 (o 548) dal vescovo Massimiano, terzo successore di Ecclesio.
Sono stati necessari dunque circa 21 anni per il completamento dell'edificio e, stando a queste date, l'inizio della costruzione avvenne sotto il regno dei Goti, mentre il suo termine avvenne sotto quello dei bizantini che nel 540 avevano riconquistato Ravenna.
Non si conosce il nome dell'architetto di San Vitale, mentre si è a conoscenca che la sua costruzione fu finanziata da un banchiere bizantino, Giuliano Argentario, che spese circa 26000 soldi d'oro.
A partire dal 1996 San Vitale è inserita nella lista dei siti italiani patrimonio dell'umanità dell'UNESCO.

3.2.3 Sant'Apollinare Nuovo

La basilica di Sant'Apollinare Nuovo fu fatta erigere da Teodorico e si può quindi far risalire al periodo che va dal 493, entrata dei Goti a Ravenna, al 526, morte di quest'ultimo.
Situata nella *Regio Caesarum*, nei pressi del palazzo residenziale dell'imperatore, nacque intitolata a Nostro Signore Gesù Cristo di cui all'interno sono narrati i miracoli e la passione.

Teodorico, di fede ariana, fece costruire edifici di culto ariano in una città a prevalenza cattolica. Dopo il 540 quando il culto cattolico tornò dominante a Ravenna la basilica venne riconsacrata e purificata e molti dei mosaici che recavano segni della fede ariana vennero modificati.
Intorno alla metà del IX secolo la basilica venne intitolata a Sant'Apollinare, quando da Classe vi furono trasportate (o così fu fatto credere) le reliquie del santo vescovo. L'attributo "Nuovo" venne aggiunto per distinguere la basilica da una piccola chiesa antica chiamata Sant'Apollinare in Veclo e non in riferimento a quella di Classe più recente di qualche anno.

3.2.4 Palazzo di Teodorico

Tante sono le ipotesi circa la costruzione di questo edificio.
Secondo alcuni studiosi venne fatto costruire, nel VII secolo o all'inizio del

VIII, come corpo di guardia per i soldati che sorvegliavano l'accesso al palazzo imperiale a imitazione di un edificio di Costantinopoli.
Un'altra ipotesi lo fa risalire alla prima metà dell'VIII secolo con funzione di segreteria degli Esarchi (i governatori bizantini).
La terza possibilità è che si tratti di una cappella palatina fatta costruire dal re dei Longobardi Astolfo, entrato a Ravenna nel 751 e rimasto per poco tempo.
Un'ultima ipotesi invece sostiene che si tratterebbe dei resti dell'atrio-porticato antistante la chiesa di San Salvatore che, secondo alcuni documenti, risulta completamente distrutta nel 1503.

3.3 Descrizione delle fasi dell'uscita didattica

Sulla base dell'itinerario descritto nella sezione precedente sono state strutturate le seguenti dieci fasi che costituiscono l'uscita didattica.
Come detto nell'introduzione ho pensato di far svolgere le attività didattiche a gruppi. Prima dell'inizio dell'uscita viene quindi consegnato a ciascun gruppo il materiale didattico di supporto riportato in Appendice B.
La descrizione di ciascuna fase ha una struttura comune che si articola in:

- OBIETTIVO didattico che il docente si prefigge di raggiungere
- LUOGO di svolgimento delle attività previste nella fase
- DURATA STIMATA della fase
- MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO in riferimento a quello presente in Appendice B
- SVOLGIMENTO nel quale sono indicati i passaggi salienti che il docente è invitato a seguire nel corso della fase.

3.3.1 Fase 1

OBIETTIVO: condivisione di un'idea intuitiva di simmetria di una figura rispetto a un movimento
LUOGO: esterno del Mausoleo di Galla Placidia
DURATA STIMATA: 30 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: nessuno
SVOLGIMENTO: questa prima fase è l'unica in cui non è previsto lo svolgimento a gruppi di nessuna attività. Si comincia con una presentazione dell'uscita didattica (obiettivi e modalità di svolgimento) e un'introduzione storica del Mausoleo di Galla Placidia. Quindi si effettua un'indagine sulle idee di simmetria possedute dagli studenti a cui fa seguito una discussione con gli stessi, nella quale il docente cerca di far emergere e far condividere un'idea intuitiva di simmetria di una figura rispetto a un certo movimento.

3.3.2 Fase 2

OBIETTIVO: osservazione di figure e individuazione di simmetrie
LUOGO: Mausoleo di Galla Placidia
DURATA STIMATA: 10 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: nessuno
SVOLGIMENTO: prima dell'ingresso nel Mausoleo si assegna a ciascun gruppo il compito di osservare le figure presenti al suo interno cercando di intuire se possono presentare una simmetria e in caso affermativo determinare rispetto a quale movimento.

3.3.3 Fase 3

OBIETTIVO: introdurre i concetti di simmetria per traslazione e per rotazione e i concetti di fregio e rosone
LUOGO: esterno del Mausoleo di Galla Placidia
DURATA STIMATA: 30 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: foglio lucido, scheda 1, scheda 2,

scheda 3, scheda 4
SVOLGIMENTO:

1. discussione sulle osservazioni e riflessioni relative alle figure presenti all'interno del Mausoleo di Galla Placidia

2. primo lavoro di gruppo: svolgimento delle scheda 1, della scheda 2 e della scheda 3. Le prime due hanno come obiettivo quello di far intuire agli studenti i movimenti associati alla simmetria di tipo 1 e a quella di tipo 2. La terza scheda è di verifica e chiede invece di determinare se le tre figure (l'Immagine 1 e l'Immagine 2 prese da Galla Placidia mentre l'Immagine 3 da San Vitale) presentano delle simmetrie e di quale tipo

3. discussione su quanto svolto dai gruppi

4. compilazione, guidata dal docente, dell'identikit dei primi due tipi di simmetria presenti nella scheda 4, indicando per ciascuna un nome[2], un simbolo (per poterla richiamare facilmente in attività successive) e le principali caratteristiche

5. breve discussione sui concetti di fregio e rosone, evidenziando le peculiarità che contraddistinguono questi due tipi di figure.

3.3.4 Fase 4

OBIETTIVO: verificare la comprensione dei concetti di simmetria per traslazione e per rotazione
LUOGO: Basilica di San Vitale
DURATA STIMATA: 20 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: scheda 5
SVOLGIMENTO: prima dell'ingresso all'interno di San Vitale si effettua una breve introduzione storica sul monumento. A seguire si assegna a ciascun

[2]Si lascia libertà agli studenti di scegliere anche nomi diversi da quelli canonici (traslazione, rotazione), se evocativi per gli stessi e condivisi da tutti.

gruppo il compito di svolgere la scheda 5 e, una volta terminata, di rintracciare all'interno della basilica figure che presentino simmetria per traslazione e per rotazione, disegnandole sul retro della scheda. Si tratta di un'attività di controllo su quanto è stato introdotto nella Fase 3.

3.3.5 Fase 5

OBIETTIVO: introdurre il concetto di timbro di un fregio e di un rosone e il concetto di tassellazione
LUOGO: esterno della Basilica di San Vitale
DURATA STIMATA: 25 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: scheda 6, scheda 7, scheda 8
SVOLGIMENTO:

1. dopo aver spiegato le consegne, si fa svolgere autonomamente ai gruppi le schede 6 e 7. È fondamentale che il docente sottolinei quali siano i movimenti a loro consentiti per spostare i timbri sul foglio, in modo da facilitarne l'individuazione.

2. discussione su quanto svolto dai gruppi: è necessario che tutti comprendano i concetti di timbro di un fregio e di un rosone in modo da poter svolgere adeguatamente le attività successive. Si passa poi all'analisi del quesito che introduce le tassellazioni, sottolineando che queste rappresentano i vari modi per ricoprire un piano. Inoltre risulterà utile per una attività della Fase 9 accennare al fatto che per farlo utilizzando poligoni regolari esistono solamente tre possibilità.

3. al termine della discussione far svolgere sempre autonomamente a gruppi la scheda 8.

4. breve attività di controllo da parte del docente per verificare il corretto svolgimento dell'ultima scheda.

3.3.6 Fase 6

OBIETTIVO: introdurre il concetto di simmetria per riflessione
LUOGO: esterno Basilica di Sant'Apollinare Nuovo
DURATA STIMATA: 20 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: foglio lucido, scheda 9
SVOLGIMENTO:

1. breve introduzione storica sulla Basilica di Sant'Apollinare Nuovo.
2. dopo aver spiegato la consegna, si fa svolgere autonomamente ai gruppi la scheda 9 che ha come obiettivo quello di far intuire agli studenti il movimento associato alla simmetria di tipo 3.
3. discussione su quanto svolto dai gruppi.
4. compilazione, guidata dal docente, dell'identikit della simmetria di tipo 3 presente nella scheda 4, indicando come per le prime due nome, simbolo e caratteristiche principali.
5. sempre guidata dal docente, breve analisi delle figure individuate fino a quel momento negli altri monumenti, cercando di capire se presentano simmetrie per riflessione.

3.3.7 Fase 7

OBIETTIVO: verificare la comprensione dei concetti di simmetria introdotti nelle fasi precedenti
LUOGO: Basilica di Sant'Apollinare Nuovo
DURATA STIMATA: 20 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: scheda 10
SVOLGIMENTO: prima di entrare nella basilica si assegna a ciascun gruppo il compito di rintracciare i fregi presenti all'interno e per ciascuno disegnarne nella scheda 10 il timbro, scrivendo anche rispetto a quali movimenti risultano simmetrici.

3.3.8 Fase 8

OBIETTIVO: classificare i tipi di fregio individuati
LUOGO: esterno Basilica di Sant'Apollinare Nuovo
DURATA STIMATA: 15 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: nessuno
SVOLGIMENTO: sulla base di quanto è stato individuato all'interno della basilica, effettuare una discussione collettiva cercando di classificare i fregi trovati sulla base del numero e della tipologia di simmetrie che presentano.

3.3.9 Fase 9

OBIETTIVO: verificare la comprensione dei concetti di simmetria e delle tipologie di figure introdotte nel corso dell'uscita didattica
LUOGO: Palazzo di Teodorico
DURATA STIMATA: 30 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: scheda 11, scheda 12, fogli bianchi
SVOLGIMENTO: l'attività di questa fase prevede, dopo una breve introduzione storica, lo svolgimento a gruppi delle schede 11 e 12. La prima pone delle consegne precise riguardo l'individuazione all'interno del Palazzo di particolari tassellazioni. La seconda è un'attività di "caccia alla simmetria" nella quale i gruppi devono individuare quante più figure simmetriche possibili, disegnarne il timbro e scrivere i movimenti rispetto ai quali sono simmetriche.

3.3.10 Fase 10

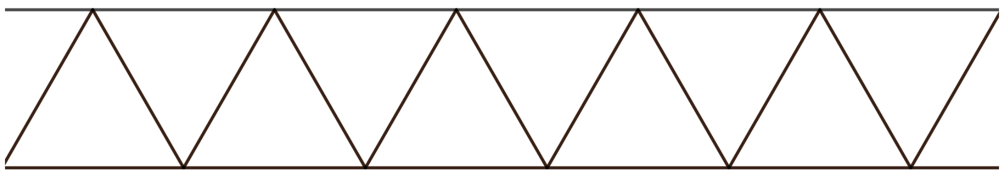
OBIETTIVO: riepilogare le caratteristiche delle varie tipologie di figure incontrate nel corso dell'uscita
LUOGO: Palazzo di Teodorico
DURATA STIMATA: 20 minuti
MATERIALE DIDATTICO DI SUPPORTO: scheda 13, scheda 14, scheda 15, scheda 16
SVOLGIMENTO: compilazione, guidata dal docente, delle schede 13, 14, 15 e

16, nelle quali si riepilogano le caratteristiche principali delle varie tipologie di figure incontrate nel corso dell'uscita didattica ovvero figure specchio (intendendo con questo nome le figure simmetriche solo per riflessione), rosoni, fregi e tassellazioni.

3.4 Analisi della simmetria delle figure presenti nelle schede

Riporto nel seguito un'analisi delle simmetrie delle figure presenti nelle schede delle attività in Appendice B, utilizzando le nozioni illustrate nel Capitolo 2.

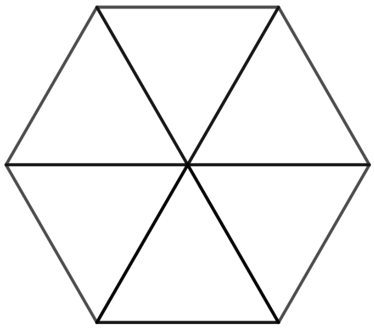
Fregio schede 1 e 9



Questo fregio è utilizzato nelle schede 1 e 9 per introdurre i concetti di simmetria per traslazione e per ribaltamento.
Utilizzando la notazione cristallografica introdotta nel Capitolo 2 si tratta di un fregio **pm11**.

Rosone scheda 2
Questo rosone è utilizzato nella scheda 2 per introdurre il concetto di simmetria per rotazione.
Per quanto visto nel Capitolo 2, trattandosi di un esagono regolare il suo gruppo di simmetria contiene sei rotazioni (con ampiezze multipli interi di $\pi/3$) e sei riflessioni di cui tre rispetto a rette passanti per vertici opposti e

tre rispetto a rette passanti per i punti medi dei lati opposti.



Fregio schede 3 e 8

Questo fregio, che si trova nel Mausoleo di Galla Placidia, è utilizzato nelle schede 3 e 8 per attività di controllo.
Utilizzando la notazione cristallografica introdotta nel Capitolo 2 si tratta di un fregio **p112**.

Fregio schede 3 e 8

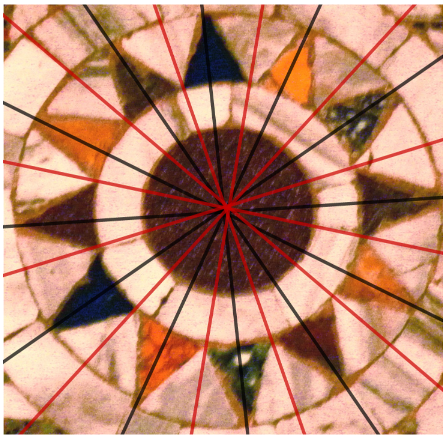
Questo fregio, che si trova nel Mausoleo di Galla Placidia, è utilizzato nelle schede 3 e 8 per attività di controllo.

Utilizzando la notazione cristallografica introdotta nel Capitolo 2 si tratta di un fregio **pm11**.

Rosone schede 3, 5 e 8

Questo rosone, che si trova a San Vitale, è utilizzato nelle schede 3, 5 e 8 per attività di controllo.

Il suo gruppo di simmetria contiene dodici rotazioni (con ampiezze multipli interi di $\pi/6$) e dodici riflessioni, di cui sei espresse dalle rette rosse nella figura seguente e sei dalle rette nere.



Capitolo 4

Realizzazione dell'uscita didattica

L'uscita didattica descritta nel Capitolo 2 è stata realizzata il 29 maggio 2019, con due classi seconde di una scuola secondaria di primo grado, l'Istituto Tavelli di Ravenna, un istituto paritario che comprende anche una scuola primaria e una scuola dell'infanzia.
Dopo una breve introduzione, descrivo quanto successo durante l'uscita e quanto emerso dalle schede delle attività che gli studenti hanno svolto.
Per queste ultime si fa riferimento, come in precedenza, a quelle presenti in Appendice B.

4.1 Introduzione

Rispetto alle dieci fasi descritte nella Sezione 2.3 per motivi di tempo sono state realizzate solamente le fasi dalla 1 alla 7.
Le due classi dell'Istituto Tavelli che hanno partecipato all'uscita didattica sono state la II A e la II B della scuola secondaria di primo grado.
Hanno preso parte all'uscita 42 studenti in totale, così ripartiti:

- 22 alunni della II A, di cui 13 femmine e 9 maschi, con un alunno certificato DSA
- 20 alunni della II B, di cui 15 femmine e 5 maschi, con un'alunna certificata DSA e un alunno certificato BES.

Sono state tre le docenti accompagnatrici dell'Istituto Tavelli che hanno preso parte all'uscita didattica: Francesca Incensi, docente di matematica e scienze, Elisa Simoni, docente di arte e immagine e Alessandra Palmieri, docente di italiano, storia e geografia.
Come descritto nel capitolo precedente le attività presenti all'interno dell'uscita didattica sono state svolte a gruppi, per favorire interazione, collaborazione e confronto tra gli studenti.
Gli undici gruppi sono stati costituiti dalle docenti di matematica delle due classi, adottando come criterio di composizione quello di inserire all'interno di uno stesso gruppo elementi con caratteristiche caratteriali compatibili per poter affrontare al meglio discussioni e confronti e facilitare quindi lo svolgimento delle attività.
A ciascun gruppo è stato consegnato il materiale didattico di supporto riportato in Appendice B.
Nessuna delle due classi aveva affrontato in matematica le isometrie e il concetto di simmetria di una figura. Quest'ultimo argomento era stato però trattato in arte, intendendo la presenza di due parti speculari rispetto a una retta. Sempre in arte avevano analizzato i concetti di rosone e fregio, quest'ultimo chiamato però con l'equivalente nome di greca.

4.2 Descrizione delle fasi

Descrivo, nel seguito, la realizzazione delle sette fasi svolte nel corso dell'uscita didattica del 29 maggio. Per ciascuna fase verranno riportate le osservazioni fatte dagli studenti nei momenti di discussione e quanto emerso dall'analisi delle schede delle attività, compilate dagli stessi durante l'uscita.

4.2.1 Fase 1

La Fase 1 è stata svolta, come da programma, all'esterno del Mausoleo di Galla Placidia e della Basilica di San Vitale.
Sono partito presentando alcuni cenni storici riguardanti questi due monu-

menti e successivamente ho indagato le idee di simmetria possedute dagli studenti.
Come già anticipato, le due classi avevano studiato il concetto di simmetria di una figura in arte, intendendo con questa la simmetria per riflessione rispetto a una retta.
Nel corso della discussione è emerso come avessero ben chiaro questo concetto: qualcuno ha parlato di simmetria come di un'uguaglianza tra ciò che si trova a destra e a sinistra (oppure sopra e sotto) rispetto a una certa retta, altri hanno parlato di simmetria come qualcosa che si ottiene utilizzando uno specchio oppure piegando opportunamente un foglio.
Ho spiegato loro come in matematica questa fosse solamente un particolare tipo di simmetria e che nel corso della mattinata ne avremmo incontrati altri.
Ho aggiunto inoltre che ogni tipo di simmetria lo avremmo associato a un preciso movimento e che quest'ultimo applicato a particolari tipi di figure permette di mantenerle invariate.
Da queste considerazioni è scaturito un altro momento di discussione e confronto nel quale gli alunni hanno cercato di individuare il movimento associato alla simmetria che avevano studiato in arte. Opportunamente stimolati, nel giro di qualche minuto alcuni studenti sono riusciti a concludere che si trattava del movimento di ribaltare rispetto a una retta.

4.2.2 Fase 2

La Fase 2 è stata svolta nel Mausoleo di Galla Placidia e prima di entrarvi a ciascun gruppo è stato assegnato il compito di individuare all'interno figure che presentassero una simmetria come quella studiata in arte e rintracciarne altre che possano presentare nuovi tipi di simmetria, provando a intuire rispetto a quale movimento.
Una volta all'interno tutti gli studenti si sono attivati nella ricerca di figure simmetriche, esplorando in lungo e in largo il mausoleo anche nei punti più nascosti.
Questa attività è stata svolta senza alcun intervento da parte mia o dei

docenti accompagnatori, in quanto mi interessava il fatto che i gruppi provassero autonomamente a formulare proposte e discutere rigurdo ai vari tipi di simmetria.

4.2.3 Fase 3

La Fase 3 è stata svolta nello spazio esterno compreso tra Galla Placidia e San Vitale.
Siamo partiti con una discussione su quanto i vari gruppi avevano individuato all'interno del Mausoleo e le principali osservazioni sono state:

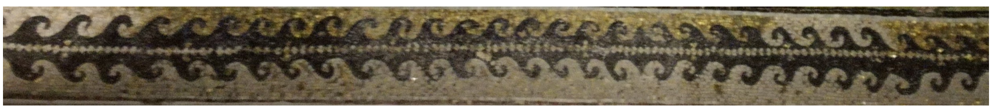
- *"la croce sulla volta è simmetrica"*

- *"le cornici sono simmetriche"*

- *"nei sarcofagi ai lati ci sono dei disegni simmetrici in cui la croce fa da asse"*

- *"ciascuna stella nella volta è simmetrica"*

- *"le onde sono simmetriche"*



- *"il pavimento è simmetrico"*.

Queste osservazioni fatte hanno confermato come il concetto di simmetria che le due classi avevano studiato in arte fosse ben acquisito dagli studenti,

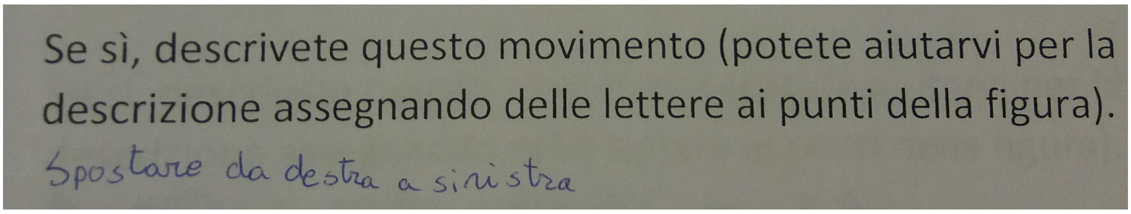
che erano in grado di individuare in vari tipi di figure la simmetria per ribaltamento. Tuttavia nessun gruppo è stato in grado di riconoscere, nelle stesse figure o eventualmente in altre, nuovi tipi di simmetria.
Successivamente ho assegnato loro il compito di svolgere le attività presenti nelle schede 1, 2 e 3. Le prime due prevedono, dopo aver sovrapposto la figura del lucido a quella della scheda, di individuare il movimento del lucido che permette di risovrapporre le due figure. Tuttavia la maggior parte dei gruppi non ha ben compreso la consegna: molti partivano muovendo il lucido anche se le figure non erano sovrapposte, altri invece, pur partendo da una corretta situazione, si accontentavano di movimenti che non risovrapponevano le figure. Si è reso necessario un intervento da parte mia presso ciascun gruppo per assicurarmi che la consegna fosse adeguatamente compresa.
Girando tra gli studenti nel corso dello svolgimento delle schede ho notato una grande partecipazione e sono sorti in alcuni casi vivaci dibattiti.
Quando tutti avevano terminato di compilare le schede, abbiamo avviato una discussione su quanto era stato svolto.
Nel corso di questa tutti i gruppi, anche quelli che inizialmente non vi erano riusciti, hanno intuito i movimenti delle schede 1 e 2 che permettevano di risovrapporre le figure. In particolare un ragazzo, che aveva partecipato a dei laboratori pomeridiani di matematica, ha correttamente chiamato il movimento della prima scheda traslazione.
Un gruppo mi ha invece fatto notare che la figura nell'Immagine 2 della scheda 3 non fosse perfettamente simmetrica perchè "*le figure presenti in quel fregio non sono tutte uguali*".

Abbiamo quindi concordato come quella figura avesse una simmetria di tipo 1 "imperfetta".
Successivamente abbiamo compilato assieme la scheda 4, "Identikit delle sim-

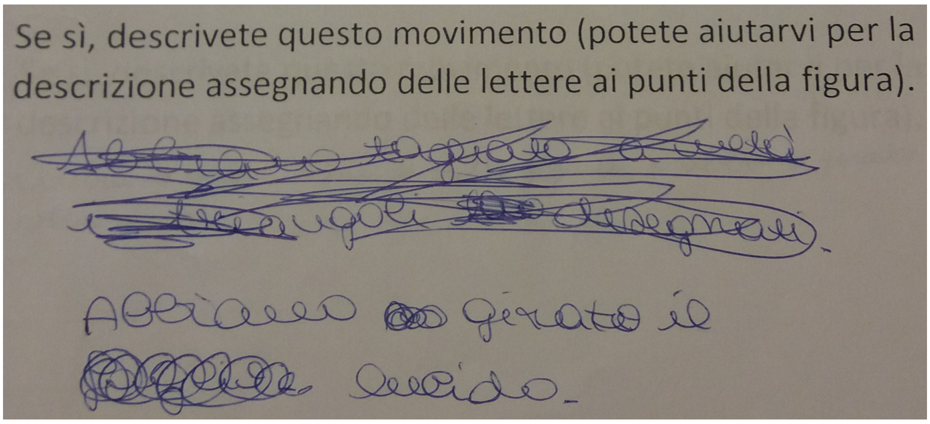
metrie".
La simmetria di tipo 1 è stata rinominata simmetria per traslazione, le è stato assegnato il simbolo **T** e per quanto riguarda le caratteristiche ho chiesto loro quale oggetto avrebbero utilizzato per indicare uno spostamento che avviene in una certa direzione, in un certo verso e di una certa lunghezza. La docente di matematica mi aveva anticipato come entrambe le classi avessero affrontato da poco il concetto di vettore all'interno dello studio dei moti in Fisica. Gli studenti hanno immediatamente colto l'analogia, ma non sono stati in grado inizialmente di darne il nome corretto. Qualcuno lo ha chiamato segmento, altri forza e solo in un secondo momento è stato dato il nome corretto di vettore.
Ho precisato infine che una simmetria per traslazione può avvenire non solo orizzontalmente ma anche verticalmente o in altre direzioni.
La simmetria di tipo 2 è stata rinominata simmetria per rotazione e le è stato assegnato il simbolo **R**. Per quanto riguarda le caratteristiche sono partito chiedendo se, applicando una rotazione a una figura, tutti i punti si spostassero. Gli studenti hanno immediatamente risposto che c'è un punto della figura, quello centrale, che rimane fermo durante la rotazione e abbiamo quindi chiamato questo punto centro di rotazione.
Successivamente ho chiesto loro di quanto avevano dovuto ruotare il lucido per sovrapporre le figure. Le risposte sono state 360 gradi e 180 gradi. Ho fatto notare che queste due risposte erano corrette ma che non erano le uniche e che una rotazione di ampiezza pari a qualsiasi multiplo di 60 gradi permetteva di sovrapporre le figure. Abbiamo quindi concluso che è necessario conoscere l'ampiezza dell'angolo di rotazione.
Infine ho fatto notare come una rotazione possa essere effettuata in due differenti versi (o sensi): quello orario e quello antiorario.
Gli studenti hanno osservato come nella figura della scheda 2 il senso della simmetria per rotazione fosse sia orario che antiorario. Abbiamo quindi riepilogato le tre caratteristiche fondamentali della simmetria di rotazione: centro di simmetria, ampiezza dell'angolo di rotazione e senso di rotazione.

Dall'analisi delle tre schede (svolta successivamente) ho notato qualche difficoltà nell'individuazione e descrizione dei movimenti (schede 1 e 2) e nell'associare i tipi di simmetria introdotti a figure prese dalla realtà (scheda 3).
In particolare per quanto riguarda la prima scheda sono stati sette su undici i gruppi in grado di fornire una descrizione adeguata. Di questi, due hanno utilizzato lettere dopo averle apposte su alcuni punti della figura, mentre gli altri cinque hanno parlato di:

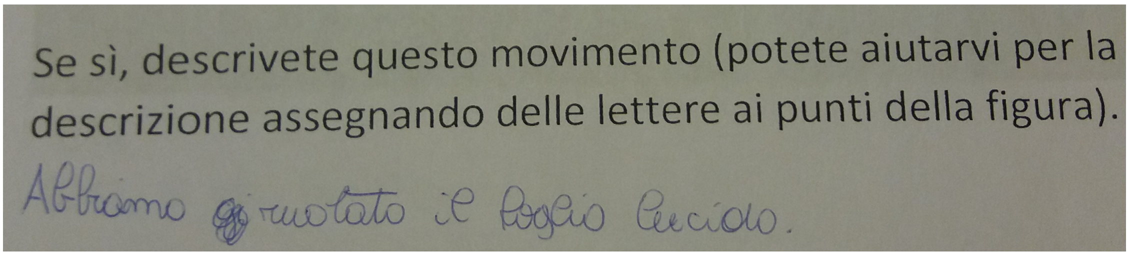
- scivolamento destra sinistra
- scivolamento orizzontale
- spostamento orizzontale.


Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).
Spostare da destra a sinistra

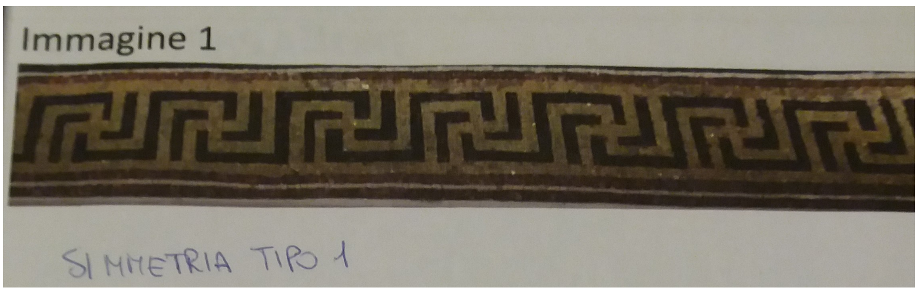
Sono quindi stati quattro i gruppi che non hanno saputo individuare correttamente il movimento: due hanno parlato di girare il foglio mentre gli altri due hanno utilizzato in maniera confusionale le lettere.


Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).
Abbiamo girato il lucido.

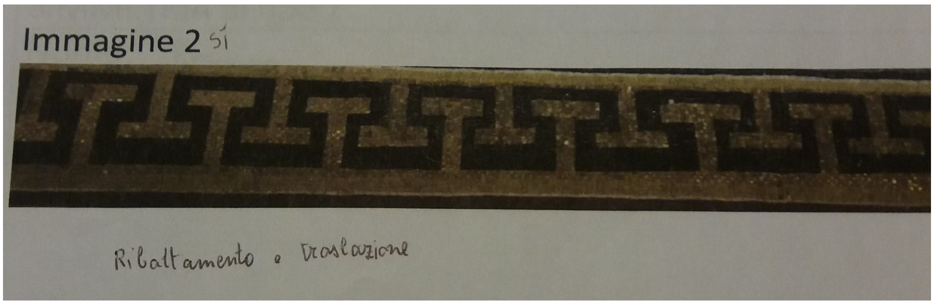
Per quanto riguarda la seconda scheda sono stati otto su undici i gruppi che hanno fornito una descrizione adeguata parlando di rotazione o di movimento rotatorio.


Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).
Abbiamo ~~gi~~ ruotato il foglio Cerchio.

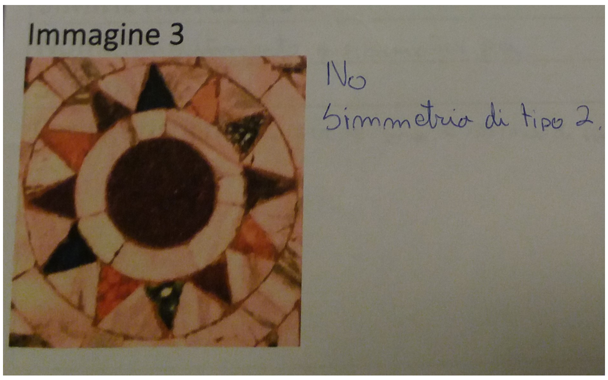
Di quelle risultate non corrette anche in questo caso ritroviamo due gruppi (gli stessi della scheda 1) che hanno utilizzato in maniera sbagliata le lettere.
La scheda 3 chiedeva agli studenti di dire se le tre figure presenti (le prime due prese da Galla Placidia mentre la terza da San Vitale) fossero state da loro osservate all'interno del mausoleo e di collegare i concetti di simmetria di tipo 1 e 2 delle prime due schede con queste tre immagini .
Tutti i gruppi hanno risposto correttamente al primo quesito, mentre nel secondo i risultati non sono stati gli stessi per le tre figure.
Per quanto riguarda l'Immagine 1, un fregio simmetrico per traslazione, nove gruppi su undici hanno individuato la corretta simmetria della figura (di tipo 1).



Significativa l'Immagine 2, un fregio simmetrico oltre che per traslazione anche per ribaltamento rispetto a rette perpendicolari alla direzione di traslazione. Nove gruppi hanno saputo individuare nella figura la simmetria di tipo 1 e due di questi hanno correttamente aggiunto anche quella per ribaltamento. Un gruppo ha individuato solamente quest'ultima, mentre un altro non è riuscito a trovare una sintesi sulle idee dei suoi componenti e ha fornito due diverse risposte, una dove veniva indicata come simmetria della figura quella di tipo 1 e l'altra indicando quella di tipo 2.



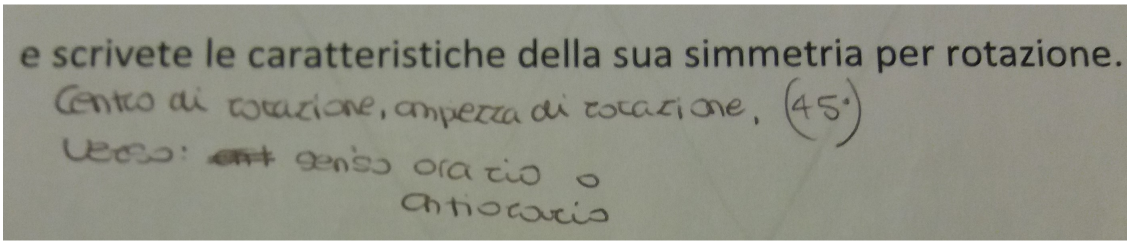
Infine, l'Immagine 3 riguardava un rosone simmetrico per rotazione e per ribaltamento. Otto gruppi hanno individuato la simmetria di tipo 2, nessuno di questi ha aggiunto quella per ribaltamento. Un gruppo ha individuato solamente quest'ultima, uno non ha fornito alcuna risposta mentre un altro ne ha fornita una errata parlando di simmetria per traslazione.



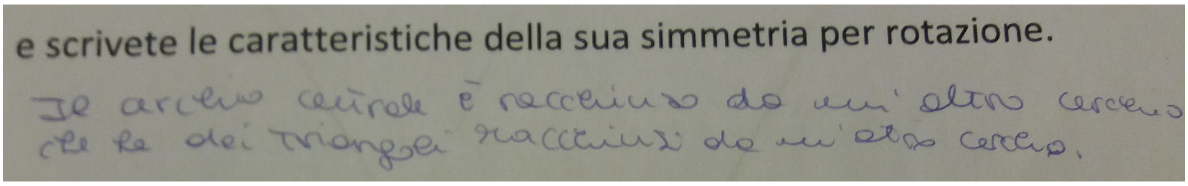
4.2.4 Fase 4

La Fase 4 è stata svolta all'interno della Basilica di San Vitale e prima di entrare ho chiesto loro di svolgere (sempre a gruppi) le consegne presenti

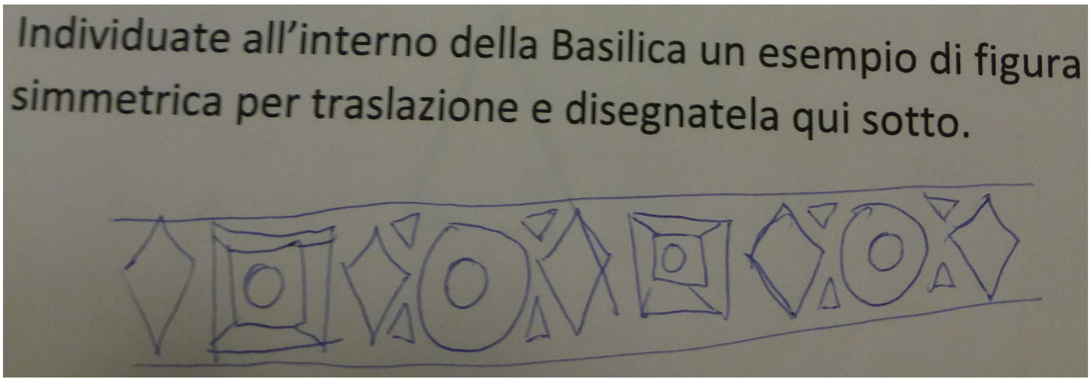
nella scheda 5.
Anche nel corso di questa fase ho notato molta partecipazione da parte di tutti i gruppi e alcuni sono stati presi da un vero spirito di competizione.
Dall'analisi della scheda 5 (svolta successivamente) è emersa una notevole difficoltà riguardo al primo quesito che chiedeva di scrivere le caratteristiche della simmetria di rotazione di un rosone presente all'interno di San Vitale. Nessun gruppo è riuscito a fornire una risposta corretta e solamente in tre hanno compreso la consegna, individuando il centro di rotazione e il verso (sia orario che antiorario), ma sbagliando l'ampiezza degli angoli di rotazione.



Tre gruppi hanno semplicemente individuato il centro di rotazione, mentre tutti i restanti hanno fornito risposte non pertinenti, molte delle quali erano semplici descrizioni della figura.

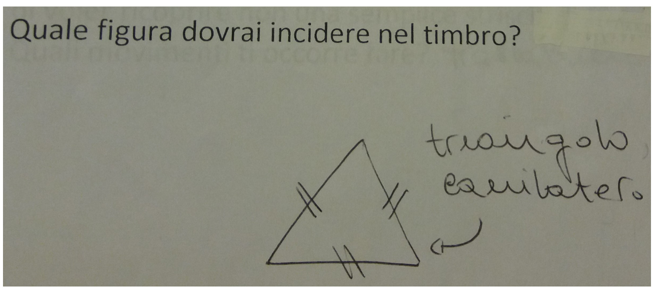


Per quanto riguarda il secondo quesito, che chiedeva di rintracciare e disegnare una figura simmetrica per traslazione, questo è stato svolto correttamente da tutti gli undici gruppi.

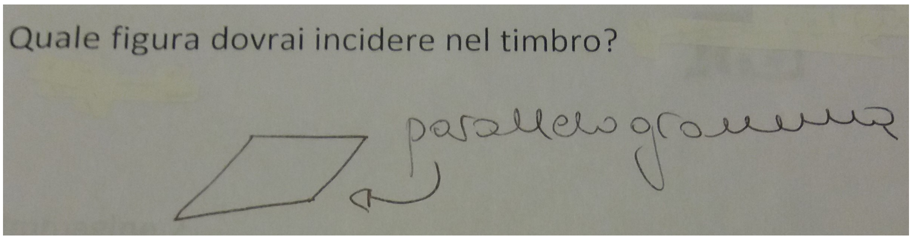


4.2.5 Fase 5

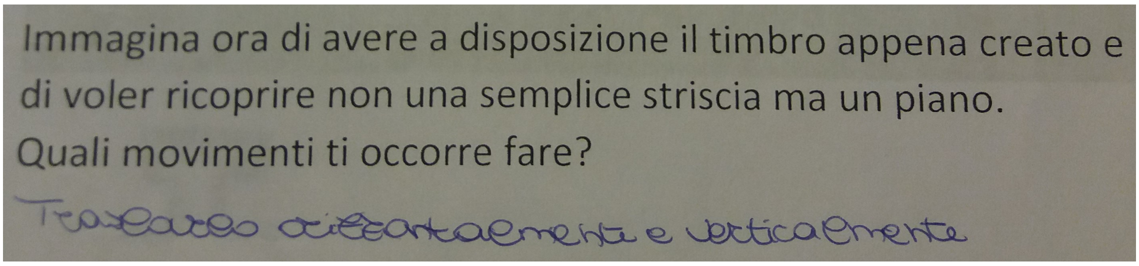
La Fase 5 è stata svolta nello spazio all'esterno della Basilica di San Vitale.
Ho chiesto ai gruppi di svolgere le schede 6 e 7, che prevedono di individuare il timbro del fregio e del rosone delle schede 1 e 2 e di determinare quali movimenti avrebbero permesso a un timbro di riempire un piano (questo quesito permette di introdurre le tassellazioni). Ho spiegato loro cosa si intendesse per timbro e quali tipi di movimento gli era consentito fare per riprodurre nelle figure vuote quelle originali.
Anche in questo caso però la consegna non è stata ben compresa dai gruppi, molti dei quali riproducevano nell'esagono vuoto e nella striscia bianca le figure delle prime due schede, senza identificare il timbro. Pertanto ho deciso, anche per motivi di tempo, di compilare le schede 6 e 7 tutti insieme attraverso una discussione collettiva.
Nel corso di questa il timbro del rosone (un triangolo equilatero) è stato individuato facilmente,



mentre più difficoltà ci sono state nell'individuazione di quello del fregio (un parallelogramma).



Per quanto riguarda il quesito che chiedeva i movimenti necessari per riempire il piano, gli studenti sono giunti autonomamente alla conclusione che fosse necessaria una traslazione oltre che orizzontale anche verticale.



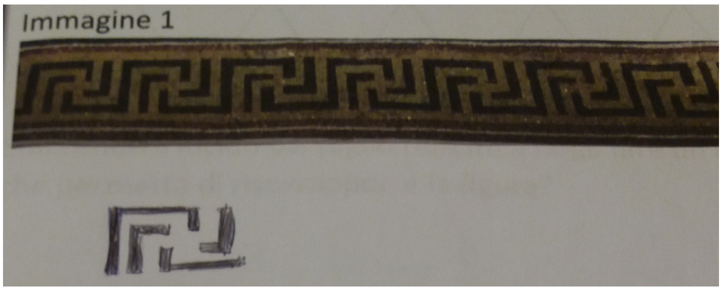
Ho posto loro alcune domande per farli riflettere sulle differenti caratteristiche che i vettori associati a queste due traslazioni hanno, sottolineando il fatto che presentano due direzioni differenti.
Ho infine detto loro che le figure che risultano simmetriche per traslazione di due vettori con direzioni diverse vengono chiamate tassellazioni.

4.2.6 Fase 6

La Fase 6 è stata svolta all'esterno della Basilica di Sant'Apollinare Nuovo.
Ho inizialmente fatto svolgere autonomamente ai gruppi la scheda 8, dove è presente un'attività di controllo sul concetto di timbro che per le stesse immagini della scheda 3 (due fregi e un rosone), con le quali gli studenti avevano già familiarizzato, chiede di disegnarne il timbro.

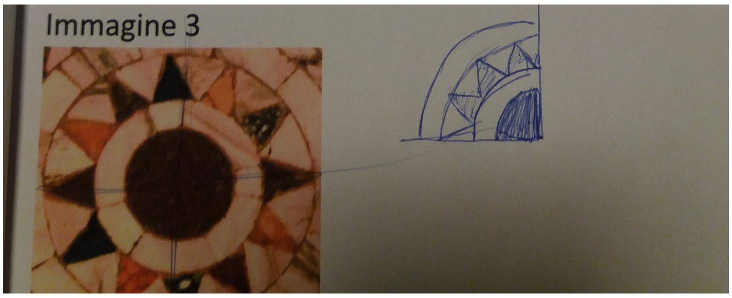
Durante lo svolgimento ho girato tra i vari gruppi e ho notato come questo concetto non fosse stato ben compreso e assimilato dagli studenti, che in più di un'occasione mi hanno segnalato difficoltà nell'individuazione dello stesso. Sono pertanto dovuto intervenire singolarmente presso vari gruppi e in alcune situazioni al posto del concetto di timbro ho utilizzato quello analogo di piastrella.
Dalla successiva analisi delle schede, in relazione alle tre immagini, è emerso che:

- il timbro dell'Immagine 1 è stato disegnato correttamente da sei gruppi, tre sono stati i disegni errati, mentre in due ne hanno fornito uno non comprensibile



- il timbro dell'Immagine 2 è stato disegnato correttamente da nove gruppi e solamente due sono stati quelli errati

- il timbro dell'Immagine 3 è stato disegnato correttamente da 7 gruppi, di cui tre di questi hanno saputo individuare quello minimale, mentre quattro sono stati i disegni errati.

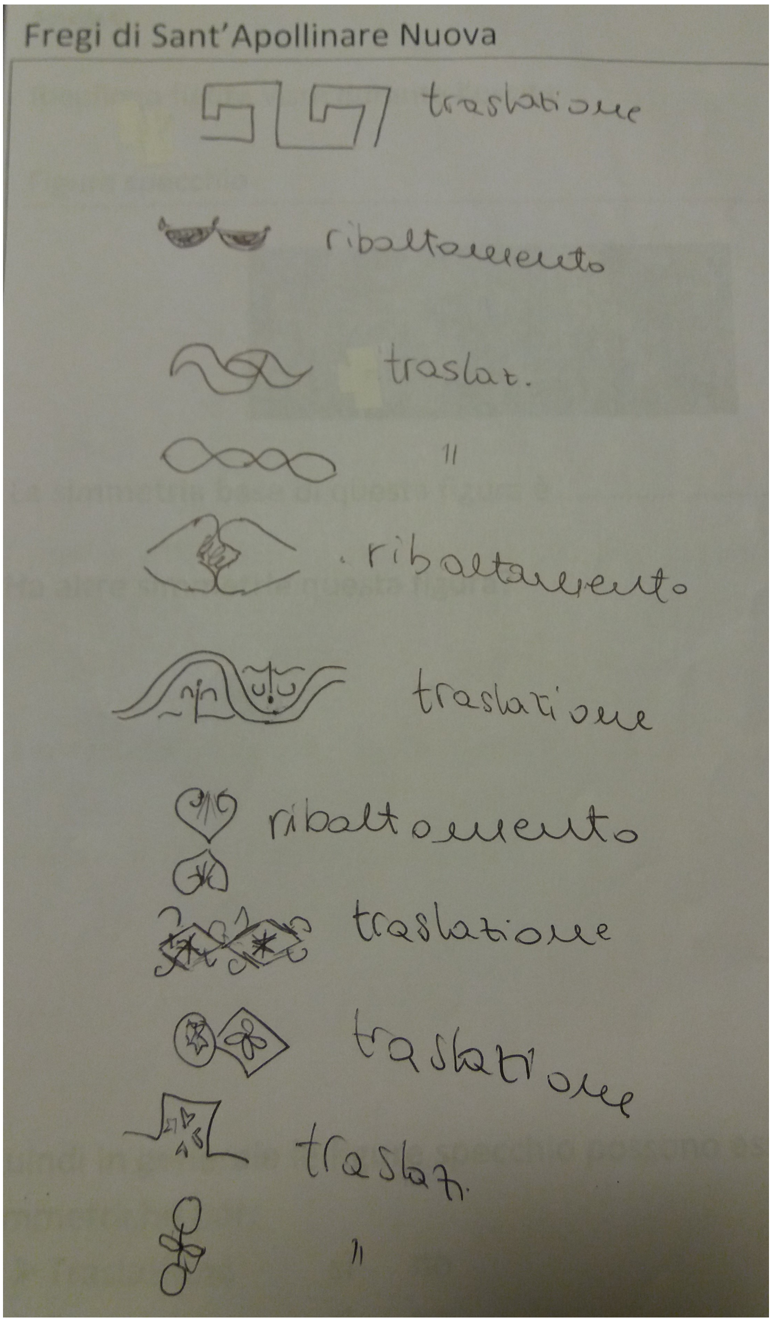


Al termine dello svolgimento della scheda 8, sfruttando il fatto che gli studenti conoscessero già bene la simmetria per ribaltamento ho deciso di saltare l'attività della scheda 9 che serviva per introdurla.
Siamo quindi direttamente passati alla compilazione dell'Identikit della simmetria di tipo 3 presente nella scheda 4: è stata rinominata simmetria per ribaltamento, le è stato assegnato il simbolo **S** (per richiamare lo specchio) e per quanto riguarda le caratteristiche si è giunti alla conclusione che l'unico elemento necessario per identificarla fosse una retta chiamata asse di simmetria.
Infine ho fatto un breve riepilogo sulle tre diverse simmetrie che avevamo incontrato nel corso dell'uscita (per traslazione, rotazione e ribaltamento) e sulle tre diverse tipologie di figure viste (rosoni, fregi e tassellazioni).

4.2.7 Fase 7

La Fase 7 è stata svolta all'interno della Basilica di Sant'Apollinare Nuovo.
Prima di entrare ho assegnato a ciascun gruppo il compito di individuare tutti i fregi presenti, disegnarli nella scheda 10 e scriverne il tipo di simmetria. Dalla successiva analisi delle schede è emerso come gli studenti non si siano focalizzati solamente sulla ricerca dei fregi, ma abbiano posto l'attenzione anche su altri elementi artistici presenti nella basilica, disegnandoli e riportandone il tipo di simmetria.
Nessun gruppo è stato però in grado di riconoscere all'interno di una stessa figura più di un tipo di simmetria, mentre solamente un gruppo, relativa-

mente ai fregi, ne ha disegnato il timbro.



4.2.8 Conclusione dell'uscita didattica e considerazioni finali

Una volta all'esterno della Basilica di Sant'Apollinare Nuovo, essendo rimasti pochi minuti a disposizione ho effettuato un breve riepilogo su quanto visto nel corso di tutta la mattina.
È stato infine chiesto agli studenti di fare qualche considerazione personale riguardo all'uscita didattica che si stava concludendo.
Le tre più significative sono state:

▷ *"La matematica è dappertutto".*

▷ *"Quando il prossimo anno andremo a studiare le simmetrie ci ricorderemo di quanto fatto oggi".*

▷ *"Queste figure le avrò viste diecimila volte, ma mai dal punto di vista della matematica. D'ora in avanti quando visiterò qualche nuovo posto farò attenzione anche agli aspetti matematici".*

Queste considerazioni finali sono indicative dello spirito con il quale gli studenti delle due classi hanno affrontato l'uscita didattica. La partecipazione e la curiosità sono state alte nel corso della mattina in quasi tutti i ragazzi, questo è sicuramente attribuibile al fatto di aver affrontato un nuovo argomento di matematica in un ambiente diverso da quello abituale e con modalità insolite.
Mi ha particolarmente colpito la terza considerazione che incarna perfettamente quell'idea che avevo esposto nell'introduzione del Capitolo 3, riguardo il fornire agli studenti una prospettiva diversa di osservazione della realtà.

Capitolo 5

Riprogettazione dell'uscita didattica

Al termine dell'uscita didattica svolta il 29 maggio 2019, la cui realizzazione è stata descritta nel Capitolo 4, ho riflettuto su quanto successo e analizzato i dati raccolti nelle schede di lavoro.
Nel corso di questa riflessione ho coinvolto, in un secondo momento, la professoressa Francesca Incensi, docente di matematica dell'Istituto Tavelli, presente il giorno dell'uscita.
Seguendo il ciclo della ricerca azione presentato nel Capitolo 1, ho cercato di individuare quali siano state le problematiche dell'uscita didattica e, sulla base di queste, ho definito delle possibili strategie d'azione per intervenire e migliorare gli aspetti più critici.
Per quanto riguarda le schede si farà riferimento, come in precedenza, a quelle presenti in Appendice B.

5.1 Riflessione sull'uscita didattica

Nel corso della riflessione personale che ho svolto su quanto successo nella realizzazione dell'uscita didattica ho deciso di approfondire separatamente gli aspetti di natura organizzativa da quelli di natura disciplinare.

Per quanto riguarda i primi ho focalizzato la mia attenzione sulle tempistiche, sull'itinerario che è stato seguito e sul numero degli studenti.
Le tempistiche, una cui stima è riportata nella descrizione delle fasi nel Capitolo 3, ritengo siano state tutte rispettate e non c'è stato bisogno di effettuare alcuna forzatura al fine di velocizzare lo svolgimento delle attività da parte degli studenti.
La mancata realizzazione delle fasi 8, 9 e 10 era stata decisa precedentemente al giorno dell'uscita sulla base degli orari scolastici che le due classi erano tenute a rispettare.
Per quanto riguarda l'itinerario, è stato seguito quello strutturato e descritto nel Capitolo 3 e ritengo che si sia ben adattato al percorso di costruzione della conoscenza che le due classi hanno affrontato.
Il monumento di partenza, il Mausoleo di Galla Placidia, pone subito agli occhi degli studenti una moltitudine di figure che presentano varie forme di simmetria, calandoli quindi perfettamente all'interno del contesto dell'uscita didattica.
La Basilica di San Vitale, seconda tappa del percorso, grazie alla sua spaziosità e alla presenza anche qui di innumerevoli figure bene si presta alle attività di ricerca e di controllo relativamente ai concetti di simmetria per traslazione e per rotazione introdotti precedentemente.
Infine la Basilica di Sant'Apollinare Nuovo, terza e ultima tappa, con i suoi innumerevoli fregi, permette anche qui di effettuare attività di ricerca e controllo su tutti e tre i tipi di simmetria e di effettuare una volta usciti una classificazione dei fregi sulla base delle simmetrie che presentano.
Ritengo invece essere stata una criticità il numero degli alunni totali che hanno preso parte all'uscita (42). Grazie all'aiuto delle tre docenti accompagnatrici il comportamento tenuto è stato complessivamente buono, ma questo numero così elevato mi ha creato alcune difficoltà nel tenere alto il livello di attenzione e concentrazione nello svolgimento delle varie attività da parte delle due classi.
Per quanto riguarda gli aspetti di natura disciplinare, una prima considera-

zione può essere fatta in merito alle conoscenze possedute dagli studenti al momento di affrontare l'uscita didattica.
Come è stato riportato nel capitolo precedente, le due classi avevano studiato in arte il concetto di simmetria, intendendo quella per ribaltamento rispetto a un asse. Questo concetto era stato acquisito in profondità dagli studenti, che sono stati in grado, fin dalle prime attività, di individuare questa forma di simmetria in varie tipologie di figure, in fregi, rosoni e pavimentazioni.
A posteriori ritengo che si sarebbe potuto, nel corso della Fase 3 quando si introducono le simmetrie per traslazione e per rotazione, riepilogare le caratteristiche di quella per ribaltamento, compilando subito il relativo identikit presente nella scheda 4.
Una seconda considerazione di natura disciplinare può essere fatta sulle difficoltà incontrate dagli studenti relativamente alla comprensione di alcune consegne presenti nelle schede che gli sono state fornite.
Come emerso dalla descrizione delle fasi riportata nel Capitolo 4 le schede che hanno creato maggiori problematiche sono state la numero 1, 2, 5, 6 e 7. Dal momento che la quasi totalità degli studenti non ha compreso queste consegne ritengo che ci sia stato un errore da parte mia nella loro formulazione e nella loro spiegazione il giorno dell'uscita.
Al termine di questa riflessione che ho svolto personalmente ho deciso di confrontarmi con la professoressa Incensi per poter disporre di un punto di vista differente (e sicuramente più esperto) riguardo a quanto successo nel corso dell'uscita didattica.
Il suo giudizio a riguardo è positivo principalmente per due motivi. Innanzitutto ha permesso di osservare in maniera nuova e insolita figure e mosaici che gli studenti conoscevano già molto bene. In secondo luogo ha ritenuto che si sia trattato di un laboratorio didattico molto coinvolgente, che si avvicina molto al concetto di didattica per competenze, dove l'alunno è posto al centro del processo di apprendimento.
Per la professoressa Incensi le maggiori criticità sono state il fatto che all'interno dei singoli monumenti fosse richiesto assoluto silenzio limitando quindi

gli studenti nello svolgimento delle attività a gruppi e i limiti di orario che non hanno permesso di visitare il Palazzo di Teodorico e svolgere quindi le ultime fasi.
Per quanto riguarda i punti di forza la professoressa Incensi ritene che siano stati:

- il coinvolgimento diretto degli studenti nel corso di tutta l'uscita
- il fatto che i gruppi non fossero costituti da troppi elementi così che ognuno potesse avere un ruolo importante
- le tempistiche stimate che hanno permesso di gestire al meglio le attività e le classi
- la preconoscenza del concetto di simmetria, studiato in arte, che ha permesso di sviluppare l'interdisciplinarietà
- le attività presenti nel percorso che permettono l'inclusione di studenti certificati BES.

Ha inoltre notato (questa impressione è stata confermata anche dalle altre due docenti accompagnatrici) come nel corso dell'uscita alunni solitamente poco interessati e attenti si siano rivelati molto partecipi.
Mi ha inoltre riferito che le classi sono state molto contente in merito all'uscita e gli studenti sono rimasti meravigliati del fatto che dietro a opere d'arte si nasconda tanta matematica.

5.2 Individuazione delle situazioni problematiche

In questa sezione verranno riportate la fase di individuazione e chiarificazione delle situazioni problematiche, seguendo il ciclo della ricerca azione riportato nel Capitolo 1, che faciliterà poi in un secondo momento la messa a punto delle strategie di azione necessarie per risolverle.

La riflessione riportata nella sezione precedente mi ha permesso, relativamente all'uscita didattica strutturata nel Capitolo 3 e realizzata poi il 29 maggio, di individuare le principali criticità:

1. numero degli studenti elevato
2. mancata comprensione delle schede 1 e 2
3. mancata comprensione della prima consegna della scheda 5
4. mancata comprensione delle schede 6 e 7

Vediamo ora di approfondire separatamente queste 4 problematiche, per chiarirne la natura e individuare gli aspetti che si dovrebbero modificare.

Numero degli studenti elevato
In fase di costruzione dell'uscita didattica non avevo posto l'attenzione su quale potesse essere il numero giusto di studenti per poter affrontare al meglio le varie attività e permettere quindi una migliore comprensione dei concetti. Sulla base di quanto emerso dalla riflessione ritengo che il numero degli studenti presenti il 29 maggio, ovvero 42, fosse troppo elevato, non permettendo di coinvolgere al meglio tutti gli studenti.

Mancata comprensione delle schede 1 e 2
Lo scopo di queste due schede è quello di far intuire agli studenti i movimenti associati alle prime due tipologie di simmetria proposte (ovvero per traslazione e per rotazione). Come già illustrato nel Capitolo 4, molti studenti non hanno compreso la consegna, alcuni muovevano il lucido senza aver sovrapposto correttamente le figure, altri invece pur partendo dalla situazione giusta terminavano il movimento prima di averle nuovamente sovrapposte. Penso che ci sia stato da parte mia un errore nella formulazione delle consegne e anche nella spiegazione delle stesse il giorno dell'uscita.

Mancata comprensione della prima consegna della scheda 5
La scheda 5 è una scheda che presenta un'attività di controllo relativamente ai concetti di simmetria per traslazione e per rotazione appena introdotti agli studenti. In particolare nella prima consegna è richiesto di scrivere le caratteristiche della simmetria per rotazione di un rosone dopo averlo individuato all'interno della basilica.
I pochi studenti che hanno capito di dover determinare centro, ampiezza e verso di rotazione hanno sbagliato le ampiezze degli angoli mentre tutti i restanti gruppi hanno fornito risposte non pertinenti.
Anche in questo caso ritengo che formulazione e spiegazione della consegna da parte mia siano state insufficienti per permettere agli studenti di svolgere correttamente le attività.

Mancata comprensione delle schede 6 e 7
Nelle schede 6 e 7 gli studenti erano chiamati a individuare il timbro del fregio presente nella prima scheda e quello del rosone presente nella seconda. Come descritto nel Capitolo 4 molti credevano di dover replicare nell'esagono o nella striscia "vuoti" le figure presenti nelle prime due schede.
Analogamente a quanto già scritto nei due casi precedenti l'errore è stato sicuramente nella formulazione e spiegazione della consegna da parte mia.

5.3 Modifiche all'uscita didattica

In questa sezione definisco strategie e azioni per risolvere le quattro problematiche che sono state individuate.
Per quanto riguarda la mancata comprensione delle consegne di alcune schede, ho deciso di riformularle in una nuova versione che descrivo brevemente nel seguito.
In Appendice C riporto le schede 1, 2, 5, 6 e 7 contenenti le nuove consegne.

Numero degli studenti elevato
In fase di progettazione non avevo posto l'attenzione su questo aspetto. Sulla base dell'esperienza diretta del 29 maggio, ritengo più opportuno che siano classi singole ad affrontare l'uscita didattica. Con un numero di studenti limitato il docente accompagnatore avrà modo di coinvolgere maggiormente tutti gli alunni, che riusciranno a essere più partecipi anche nei vari momenti di discussione e confronto previsti. Risulterà pertanto più facile, ma ovviamente non scontata, l'acquisizione dei concetti disciplinari che questo percorso prevede.
Un'altra soluzione possibile potrebbe essere, nel caso prendano parte all'uscita più classi, quella di assegnare a ciascuna un docente "guida" specifico. Le classi svolgerebbero collettivamente le fasi di osservazione e ricerca all'interno dei vari monumenti, mentre nei momenti di discussione e confronto previsti resterebbero separate per permettere al docente di coinvolgere al meglio tutti gli alunni.

Mancata comprensione delle schede 1 e 2
Nella nuova formulazione delle consegne delle schede 1 e 2 gli studenti vengono maggiormente guidati in modo tale che risulti chiaro che, per individuare il movimento associato alle prime due tipologie di simmetria, occorra partire dalla sovrapposizione "perfetta" tra la figura sul lucido e quella sulla scheda.

> Sovrapponete la figura presente sul lucido a quella presente su questa scheda in modo che coincidano perfettamente.
> Muovendo il lucido senza staccarlo dal foglio, riuscite a individuare un movimento che permette di risovrapporre le figure in modo che di nuovo coincidano perfettamente?

Mancata comprensione della prima consegna della scheda 5
Anche in questo caso la nuova formulazione della consegna è maggiormente guidata rispetto alla precedente.

Ho deciso di inserire richieste molto specifiche su centro, ampiezze e verso di rotazione in modo tale che gli studenti siano più agevolati nell'individuazione delle caratteristiche della simmetria per rotazione del rosone presente sulla scheda. Questa nuova formulazione permette agli alunni di creare un collegamento tra quanto scritto in maniera generale nell'identikit della scheda 4 e un esempio "pratico".

e completate le caratteristiche della sua simmetria per rotazione:

- Centro di rotazione: individuatelo e disegnatelo nella figura qui sopra
- Ampiezza angoli di rotazione: ci sono in tutto 12 possibilità, inserite quelle mancanti

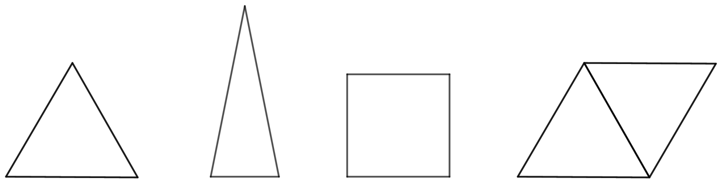
  30° __ __ __ 150° __ 210° __ __ 300° __ __

- Verso di rotazione:
  - ☐ Orario
  - ☐ Antiorario
  - ☐ Sia orario che antiorario

Mancata comprensione delle schede 6 e 7

La mancata comprensione della consegna relativa al timbro di un rosone prima e di un fregio poi è dovuta sicuramente a una difficoltà intrinseca di questo concetto.

Nella scheda 6 ho deciso quindi di evitare di porre una domanda aperta, mettendoli invece di fronte a quattro possibili figure da poter incidere nel timbro per ricreare il rosone della scheda 2 nell'esagono "vuoto".



Gli studenti dovranno ragionare per individuare quali tra queste possano essere corrette e in un secondo momento riflettere su quale sia la più piccola.
La consegna relativa alla richiesta di individuare il timbro del fregio nella scheda 7 è rimasta la stessa salvo un richiamo alla precedente in modo tale che gli studenti siano portati a compiere un ragionamento analogo a quello già compiuto.

Capitolo 6

Idee per ulteriori sviluppi

In questo capitolo illustro due possibili sviluppi per l'uscita didattica che ho progettato.
Nella prima sezione descrivo un software didattico, GeCla, contenente attività sui concetti di simmetria di una figura, che può essere utilizzato successivamente all'uscita.
Nella seconda sezione invece riporto alcuni monumenti di Ravenna, ricchi di figure simmetriche, che potrebbero essere aggiunti all'itinerario nel caso si abbia più tempo a disposizione.

6.1 GeCla

GeCla, abbreviazione di Generatore e Classificatore, è un software didattico sviluppato da Atractor che si presta bene a essere utilizzato, successivamente all'uscita didattica descritta nel Capitolo 3, per svolgere attività di controllo sui concetti di simmetria di una figura.
Questo programma, facilmente scaricabile sul sito di GeCla[1], è completamente gratuito e presenta varie attività illustrate nel seguito, che possono essere svolte singolarmente ma anche a piccoli gruppi di studenti.

[1] https://www.atractor.pt/mat/GeCla/index-en.html

Trovare simmetrie

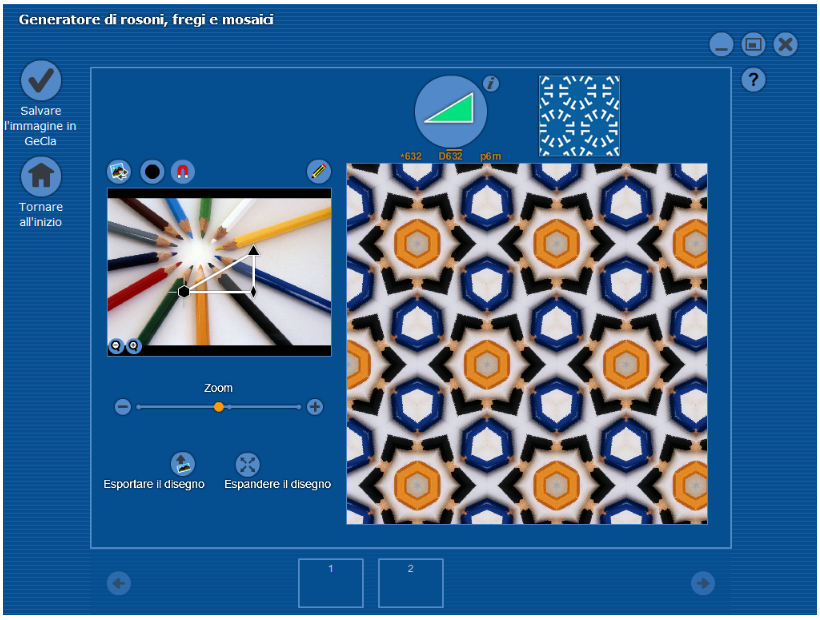
Durante questa attività lo studente viene posto di fronte a un immagine e deve stabilire se risulta simmetrica per traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione. Si tratta di un'attività molto interattiva dove l'alunno agisce direttamente sull'immagine applicandole i movimenti che caratterizzano i vari tipi di simmetria.

Le immagini sulle quali viene svolta questa attività vengono scelte dal docente fra quelle proposte direttamente dal programma oppure possono essere prese da internet. Inoltre è possibile far utilizzare agli studenti fotografie di figure reali, inserendole all'interno di un'apposita cartella.

Generatore di rosoni, fregi e mosaici

In questa attività gli studenti hanno la possibilità di generare un fregio, un rosone oppure un mosaico a partire da un'immagine anche asimmetrica, sulla quale gli alunni dovranno scegliere il timbro e il tipo di simmetria da utilizzare.

Le immagini create possono poi essere salvate e utilizzate per svolgere le altre attività che GeCla propone.



Classificazione

Questa attività permette agli studenti di classificare le figure sulla base delle simmetrie che presentano. Prima di iniziare viene chiesto di scegliere il livello di aiuto che si intende utilizzare, tra le seguenti tre possibilità:

- con aiuto: qualsiasi errore viene indicato e il software non permette di compiere nuove mosse fino a quando non viene corretto
- nessun aiuto: accetta tutte le mosse purchè non siano incompatibili tra loro e alla fine, nel caso ci siano errori, segnala il primo
- personalizzato: permette di impostare il funzionamento del programma durante lo svolgimento dell'attività e possono essere scelte due possibili modalità, **S** che fornisce un aiuto nell'identificare il tipo di simmetria e **T** che, invece, aiuta nel cambiare il tipo di simmetria che si sta cercando.

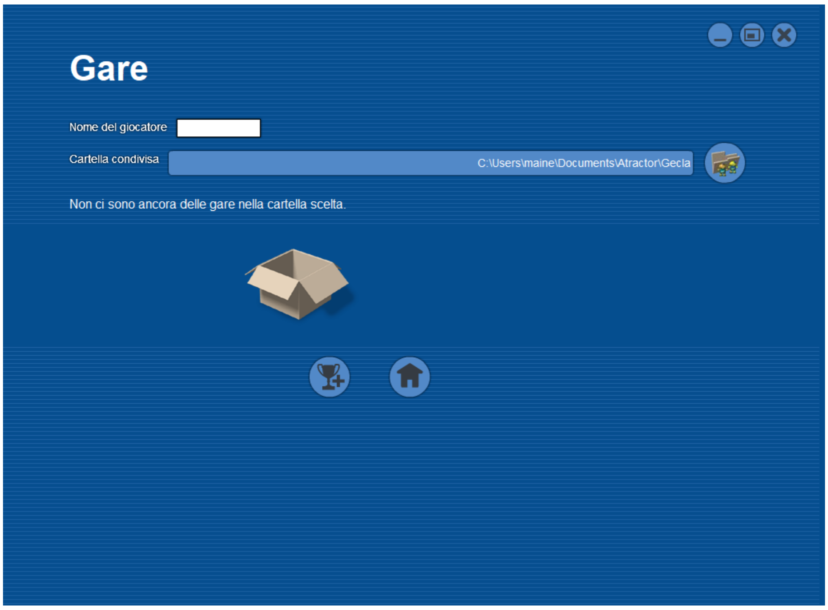
Si tratta sempre di un'attività molto coinvolgente, nella quale lo studente agisce direttamente sulle immagini.
Come per le precedenti è possibile utilizzare come immagini non solo quelle proposte dal software ma anche figure prese da internet oppure caricate dal docente.

Gara
In questa attività GeCla offre la possibilità a due squadre o eventualmente

a due giocatori di fare una gara: ciascuna squadra crea delle immagini che devono poi essere classificate da quella avversaria.
Al momento GeCla permette due possibilità di sfida:

- le due squadre generano le immagini e le classificano a turno utilizzando lo stesso computer
- le due squadre utilizzano due computer differenti e in questo caso si dovrà utilizzare una cartella condivisa (su una rete locale) accessibile a entrambe.

Le immagini vengono create utilizzando le stesse modalità dell'attività "Generatore di rosoni, fregi e mosaici", così come per la parte di classificazione.



Le attività di GeCla appena descritte sono utilizzabili sia in scuole secondarie di primo che di secondo grado.
In particolare in [13] Paola Pedrini, docente di matematica e fisica in una scuola superiore, riporta un'esperienza didattica molto interessante in cui è stata utilizzata la modalità "Gara".
Infatti verso la fine dell'anno scolastico ha deciso di sfidare con i suoi alunni una classe di una scuola portoghese, guidati dalla docente Manuela Simões.

Sono state formate in entrambe le classi varie squadre che si sono poi sfidate a colpi di generazione e classificazione di figure.
Le due docenti hanno stabilito alcune regole di competizione, fra le quali la richiesta ai ragazzi di giocare in maniera leale e sportiva e l'obbligo che tutti i componenti di ciascuna squadra fossero attivi e partecipi nel gioco.
Grazie alle funzionalità del programma (descritte in precedenza) le docenti hanno anche limitato la classificazione a figure che non contenessero glissoriflessioni.
Dal punto di vista didattico questa attività ha dato la possibilità agli studenti di avvicinarsi alle trasformazioni geometriche e alla classificazione delle figure in base alla loro simmetria, argomenti formali solitamente poco apprezzati che invece GeCla ha permesso di introdurre in modo insolito e accattivante, preparando il terreno a una successiva formalizzazione.
I ragazzi, inoltre, hanno avuto la possibilità di confrontarsi con coetanei di un altro paese, partecipando a questa sfida con grande entusiasmo.
Nell'uscita didattica che ho progettato (descritta nel Capitolo 3) gli studenti, se ne hanno la possibilità, potrebbero scattare foto alle varie figure che osservano all'interno dei monumenti, in modo da poterle utilizzare con GeCla.
Il fatto che questo software si presti per un utilizzo a gruppi permette, a casa o in classe, di dare un seguito alle attività svolte e sviluppare ulteriormente capacità di visualizzazione geometrica, mantenendo gli stessi gruppi formati per l'uscita.

6.2 Altri monumenti

I monumenti che sono stati inclusi nell'itinerario dell'uscita didattica descritta nel Capitolo 3, non sono gli unici presenti a Ravenna contenenti figure con varie forme di simmetria.
I siti che descrivo nel seguito possono essere aggiunti all'itinerario nel caso si abbiano a disposizione più delle quattro ore stimate per l'uscita didattica che ho progettato.

Tra questi monumenti, di particolare interesse è la Domus dei Tappeti di Pietra, che si trova sempre in centro non distante da San Vitale. Questo sito è collocato all'interno della settecentesca Chiesa di Sant'Eufemia, in un ambiente sotterraneo a tre metri sotto il livello stradale e contiene 14 ambienti pavimentati con mosaici dove si possono trovare varie tipologie di rosoni, alcuni fregi e alcune tassellazioni.

Un altro luogo che può essere aggiunto è il Museo TAMO, anch'esso nel centro di Ravenna. Si tratta di un museo dedicato al mosaico che ha sede nel complesso monumentale di San Nicolò. Anche qui possiamo trovare rosoni, fregi e tassellazioni molto interessanti.

A poca distanza da questo museo si trova il Battistero Neoniano, edificato dal Vescovo Neone agli inizi del V secolo. Questo monumento ha base ottogonale (come la Basilica di San Vitale) e contiene al suo interno alcune tipologie di fregio e una volta particolarmente interessante che può essere studiata come rosone.

Posto di fronte al Battistero Neoniano si trova il Museo Arcivescovile che contiene la cappella paleocristiana di Sant'Andrea, fatta costruire da Pietro II come oratorio privato dei vescovi cattolici durante il regno di Teodorico. Qui si trovano alcuni fregi ma soprattutto, nel pavimento di ingresso, vi è un esempio interessante di tassellazione uniforme di tipo (3,6,3,6).

Infine nella frazione di Classe, a pochi chilometri dal centro di Ravenna, si trova la Basilica di Sant'Apollinare in Classe, inserita nel 1996 nella lista dei siti italiani patrimonio dell'umanità dell'UNESCO.
Come San Vitale la sua costruzione è stata possibile grazie al finanziamento del banchiere Giuliano Argentario e la sua consacrazione è avvenuta nel 549.
Anche qui si possono trovare fregi, rosoni e alcune figure simmetriche solo per ribaltamento rispetto a una retta, come quelle sui vari sarcofagi o nell'abside.

Appendice A

Prerequisiti di teoria dei gruppi

Riporto in questa appendice alcune nozioni di teoria dei gruppi, necessarie per la comprensione del Capitolo 2.
Ho utilizzato come testi di riferimento [10], [11] e [12].

Definizione A.1 (Gruppo)**.** Una coppia $(G, \star)$, dove G è un insieme non vuoto e $\star$ un'operazione binaria su G ovvero

$$\star : G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longmapsto a \star b$$

è detta gruppo se valgono le seguenti proprietà:

- $\star$ è associativa, cioè $\forall a, b, c \in G$ si ha $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$

- esiste un elemento $e \in G$ detto elemento neutro di G tale che

$$a \star e = e \star a = a, \quad \forall a \in G$$

- per ogni elemento $a \in G$ esiste un elemento $a' \in G$ detto inverso di a in G tale che

$$a \star a' = a' \star a = e.$$

Si può facilmente provare che l'inverso è unico.
Se l'operazione $\star$ è commutativa ovvero

$$a \star b = b \star a, \quad \forall a, b \in G$$

allora il gruppo $(G, \star)$ è detto gruppo abeliano o commutativo.
Un esempio di gruppo è dato dall'insieme delle funzioni biunivoche su un insieme X con l'operazione di composizione, mentre sono gruppi commutativi le coppie $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$.
D'ora in avanti, quando questo non crea ambiguità, scriveremo "gruppo G" al posto di "gruppo $(G, \star)$".
Inoltre indicheremo con g^{-1} l'inverso di $g \in G$ e scriveremo l'operazione $g \star h$ tra due elementi $g, h \in G$ come gh, quando non crei ambiguitá.

Definizione A.2 (Sottogruppo)**.** Dato un gruppo G, sia H un sottoinsieme di G. Diciamo che H è sottogruppo di G se valgono le seguenti proprietà:

- H è chiuso rispetto all'operazione $\star$ ovvero

$$h_1 \star h_2 \in H, \quad \forall h_1, h_2 \in H$$

- ogni elemento $h \in H$ possiede inverso $h' \in H$.

Tra i sottogruppi di G ci sono sempre G stesso e il sottogruppo banale costituito dal solo elemento neutro.

Definizione A.3 (Laterale di un sottogruppo)**.** Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Se $g \in G$, l'insieme

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

è detto laterale destro di H in G rispetto a g.
Analogamente l'insieme $gH = \{gh : h \in H\}$ è detto laterale sinistro di H in G rispetto a g.

Proposizione A.0.1. *Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei laterali destri di H in G e l'insieme dei laterali sinistri di H in G.*

Definizione A.4 (Indice di un sottogruppo)**.** Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si definisce indice di H in G e si indica con $[G : H]$ la cardinalità dell'insieme dei laterali destri o sinistri di H in G.

Definizione A.5 (Sottogruppo normale)**.** Se G è un gruppo e H un suo sottogruppo, si dice che H è normale in G se

$$gHg^{-1} \subseteq H, \quad \forall g \in G$$

dove $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$.

La definizione appena data è equivalente alla richiesta

$$gHg^{-1} = H, \quad \forall g \in G.$$

Infatti se H è normale si ha che

$$g^{-1}gHgg^{-1} \subseteq g^{-1}Hg, \quad \forall g \in G$$

ovvero

$$H \subseteq g^{-1}Hg, \quad \forall g \in G$$

da cui segue

$$H \subseteq gHg^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

La doppia inclusione conduce a

$$H = g^{-1}Hg, \quad \forall g \in G.$$

Viceversa se $gHg^{-1} = H, \quad \forall g \in G$ allora ovviamente H è normale.

Definizione A.6 (Gruppo quoziente)**.** Sia G un gruppo e R una relazione di equivalenza su G compatibile con il suo prodotto, cioè tale che se aRa' e bRb' allora $abRa'b'$.
L'insieme delle classi di equivalenza di R, con il prodotto definito come

$$[a] \cdot [b] = [ab]$$

è un gruppo, detto gruppo quoziente, che si denota con G/R.

In particolare se si considera un gruppo G e un suo sottogruppo normale H allora il il gruppo G/H è il gruppo G/R, dove gRg' con $g, g' \in G$ se i due elementi appartengono allo stesso laterale sinistro (oppure destro).
La compatibilità con il prodotto è garantita dalla normalità di H.
Indicheremo nel seguito con 1 l'elemento neutro del gruppo G.

Definizione A.7 (Omomorfismo di gruppi)**.** Un omomorfismo di gruppi è un'applicazione
$$f : G \longrightarrow G'$$
dove $(G, \star)$, $(G', *)$ sono gruppi, tale che
$$f(a \star b) = f(a) * f(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Se l'applicazione f è biunivoca si dice che f è un isomorfismo.
Se $G = G'$ si dice che f è un endomorfismo.
Se $G = G'$ e l'applicazione f è biunivoca si dice che f è un automorfismo.
In particolare l'insieme degli automorfismi di un gruppo G con la composizione è un gruppo che denotiamo con $\mathrm{Aut}(G)$.

Definizione A.8 (Nucleo)**.** Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi e sia e' l'elemento neutro di G'. Chiamiamo nucleo di f il sottoinsieme $f^{-1}(e')$ di G e lo indichiamo con $\ker f$.

Definizione A.9 (Immagine)**.** Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Chiamiamo immagine di f il sottoinsieme $f(G)$ di G' e lo indichiamo con $\mathrm{Im} f$.

Proposizione A.0.2. *Se $f : G \longrightarrow G'$ è un omomorfismo di gruppi allora $\ker f$ è un sottogruppo normale di G e $\mathrm{Im} f$ è un sottogruppo di G'.*

Teorema A.0.3 (Teorema fondamentale di omomorfismo)**.** *Dati due gruppi G e G' e un omomorfismo $f : G \longrightarrow G'$, allora l'applicazione*
$$\varphi : G/\ker f \longrightarrow \mathrm{Im} f$$
è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi.

Definizione A.10 (Successione esatta corta)**.** Data una terna di gruppi G, J, K e una coppia di omomorfismi $\varphi : J \longrightarrow G$ e $\psi : G \longrightarrow K$, si definisce una successione esatta corta di gruppi una successione

$$1 \longrightarrow J \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 1$$

tale che a ogni livello il nucleo di un omomorfismo coincida con l'immagine del precedente.
Si dice che la successione esatta corta spezza se esiste un omomorfismo

$$\nu : K \longrightarrow G$$

tale che

$$\psi \circ \nu = \mathrm{Id}_K$$

dove Id_K è l'applicazione

$$\mathrm{Id}_K : K \longrightarrow K$$
$$k \longmapsto k.$$

Da questa definizione segue che:

- φ è iniettivo in quanto $\ker \varphi = \mathrm{Im}\{1 \to J\} = 1$
- ψ è suriettiva in quanto $\mathrm{Im}\psi = \ker\{K \to 1\} = K$
- $\ker \psi = \mathrm{Im}\varphi$.

Definizione A.11 (Prodotto semidiretto)**.** Dati due gruppi $(G, *)$ e $(H, \star)$ e un'azione di $(H, \star)$ su $(G, *)$ ovvero un omomorfismo $\eta : (H, \star) \longrightarrow \mathrm{Aut}((G, *))$, si definisce prodotto semidiretto $G \rtimes_\eta H$ dei due gruppi rispetto all'azione η l'insieme delle coppie del prodotto cartesiano $G \times H$ con struttura di gruppo data dalla seguente operazione:

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g * (\eta(h)g'), h \star h')$$

Se η è l'azione banale

$$\eta(h)g' = g', \quad \forall g' \in G \quad \forall h \in H$$

si ottiene il prodotto diretto $G \times H$.

Osservazione 6. Data una successione esatta corta

$$1 \longrightarrow J \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 1$$

che spezza con l'omomorfismo $\nu : K \longrightarrow G$, allora il gruppo G può essere ricostruito a partire da J, K e ν come prodotto semidiretto di K e J rispetto all'azione di K su J definita nel seguente modo:

1. si consideri l'elemento $\nu(k)\varphi(j)\nu(k)^{-1}$ che appartiene a $\varphi(J)$ in quanto sottogruppo normale di G
2. dal momento che φ è iniettivo esiste ed è unico un elemento $z \in J$ tale che $\varphi(z) = \nu(k)\varphi(j)\nu(k)^{-1}$
3. definiamo allora l'azione di K su J come $\eta(k)(j) = z$
4. si può verificare che $\Upsilon : J \rtimes_\eta K \longrightarrow G$ definita come $\Upsilon(j,k) = \varphi(j)\nu(k)$ è un isomorfismo.

Sia G un gruppo e X un sottoinsieme non vuoto di G.
Definiamo:

$$gp(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : x_i \in X \quad \varepsilon_i = \pm 1\}$$

Si dice che i prodotti

$$x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \qquad y_1^{\eta_1} \dots y_m^{\eta_m}$$

tali che x_i, $y_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ e $\eta_i = \pm 1$ sono identici se $n = m$, $x_i = y_i$ e $\varepsilon_i = \eta_i$ per $i = 1 \dots m$.
Due prodotti sono differenti se non sono identici.
Un prodotto

$$x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

dove $x_i \in X$ e $\varepsilon_i = \pm 1$, è detto prodotto ridotto se $x_i = x_{i+1}$ implica $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$.

Definizione A.12 (Insieme libero di generatori). Un gruppo G si dice generato liberamente da un insieme $X \subseteq G$ se $X \neq \emptyset$ e valgono le seguenti condizioni:

(i) $gp(X) = G$

(ii) due prodotti ridotti differenti in X definiscono due elementi differenti non unitari in G.

Un insieme X di generatori di G che soddisfa la condizione (ii) è chiamato un insieme libero di generatori di G.

Definizione A.13 (Gruppo libero)**.** Un gruppo G è detto libero se è il gruppo banale con la sola identità oppure se ha un insieme libero di generatori.

Se X è l'insieme dei generatori liberi di G, si dice che G è libero su X. Una presentazione di un gruppo G mediante generatori e relazioni è una scrittura del tipo

$$G = \langle g_1, \dots, g_n \mid r_1 = \dots = r_k = 1 \rangle$$

con la quale si indica che il gruppo G è isomorfo al gruppo quoziente F/R, dove:

- F è il gruppo libero generato da $g_1, \dots, g_n$
- $r_1, \dots, r_k$ sono elementi di F ovvero parole (prodotti) nei generatori $g_1, \dots, g_n$
- R è il più piccolo sottogruppo normale di F che contenga gli elementi $r_1, \dots, r_k$.

Definiamo ora due particolari gruppi, quello ciclico e quello diedrale.

Definizione A.14 (Gruppo ciclico)**.** Sia $n \in \mathbb{N}$, il gruppo ciclico di n elementi è il gruppo

$$C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$$

con un solo generatore a e una sola relazione $a^n = 1$.

Si dice gruppo ciclico infinito e si denota con C_∞ il gruppo

$$C_\infty = gp(\{x\}) \quad con \quad x \in X \quad x \neq 1.$$

Nel seguito denoteremo con $C_1 = \langle a \mid a = 1 \rangle$ il gruppo banale.
Ogni gruppo ciclico è isomorfo o al gruppo $\mathbb{Z}_n$ delle classi di resto dei numeri interi modulo n oppure al gruppo $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.
I generatori di C_n sono tutti gli elementi del tipo a^s con $MCD(s,n) = 1$.
Risulta inoltre che ogni sottogruppo di C_n è isomorfo a un gruppo ciclico C_k dove $k|n$ (k è un divisore di n).

Definizione A.15 (Gruppo diedrale)**.** Il gruppo diedrale su n elementi è il gruppo

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

Questo gruppo possiede $2n$ elementi:

$$D_n = \{1, a, a^2, ..., a^{n-1}, b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}.$$

Questo può essere giustificato partendo dalla seguente relazione

$$(ab)^2 = abab = 1$$

pertanto

$$ba = a^{-1}b^{-1} = a^{-1}b$$

da cui si ottiene

$$ba^2 = a^{-1}ba = a^{-2}b$$

e quindi iterando

$$ba^k = a^{-k}b.$$

Queste osservazioni ci portano a dire che qualsiasi composizione di a e b può essere riscritta ponendo prima tutte le potenze di a e poi tutte le potenze di b, ottenendo a^kb^h.
Utilizzando le relazioni $a^n = b^2 = 1$ si ottiene che gli elementi possibili sono quelli elencati poc'anzi.
Per quanto riguarda i possibili sottogruppi di D_n essi possono essere isomorfi

- a un gruppo ciclico C_k con $k|n$
- a un gruppo diedrale D_k con $k|n$.

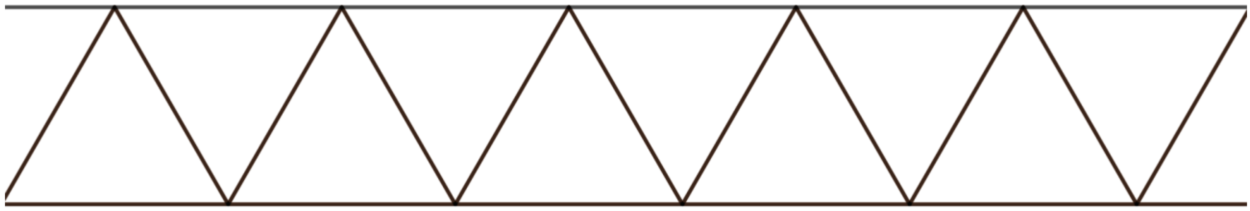
Si dice gruppo diedrale infinito e si denota con D_∞ il gruppo

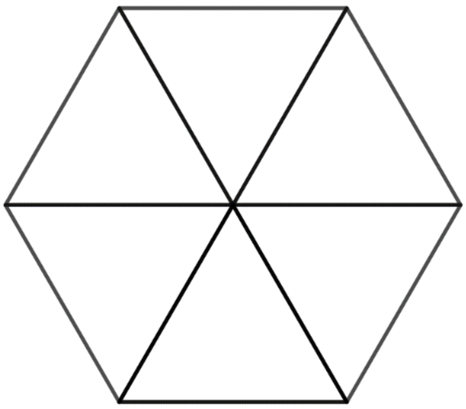
$$D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$$

Appendice B

Materiale didattico di supporto

Riporto nel seguito il materiale didattico di supporto all'uscita.
Per poter svolgere correttamente alcune attività (quelle relative alle schede 1, 2 e 9), è necessario stampare la pagina che segue su un foglio di carta lucida, mentre, a partire da quella successiva intitolata **"LE SIMMETRIE NELL'ARTE BIZANTINA"**, comincia il vero e proprio fascicolo che ogni gruppo dovrà avere a disposizione, contenente le sedici schede di lavoro.





LE SIMMETRIE NELL'ARTE BIZANTINA

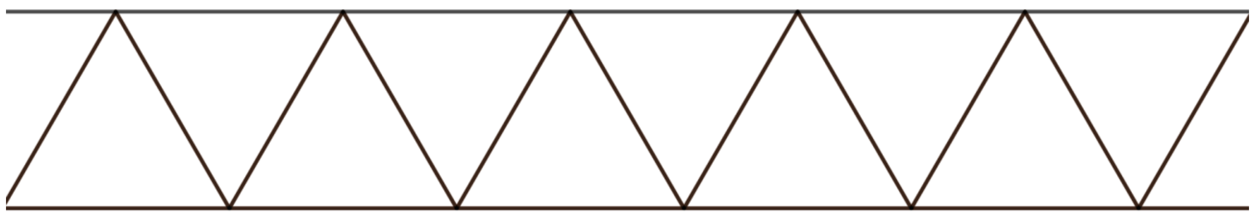
Nome del gruppo:

Nome componenti del gruppo:

Classe:

Scheda 1

Simmetria di tipo 1

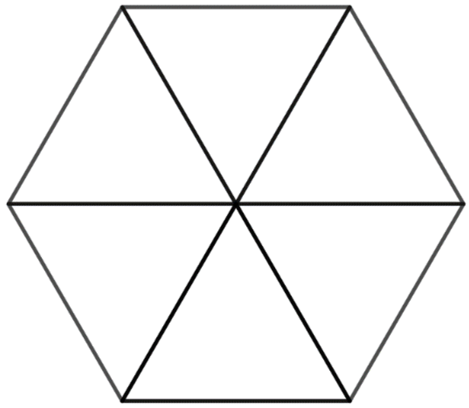


Senza staccare il lucido dal foglio riuscite a fargli fare un movimento che permetta di risovrapporre la figura?

Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).

Scheda 2

Simmetria di tipo 2



Senza staccare il lucido dal foglio riuscite a fargli fare un movimento che permetta di risovrapporre la figura?

Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).

Scheda 3

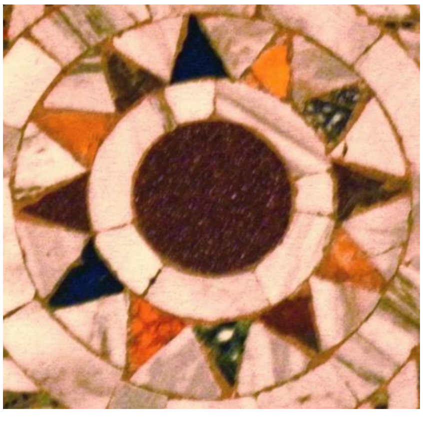
Per ciascuna delle seguenti immagini rispondete alle domande:

1) Vi sembra di averla vista dentro Galla Placidia?
2) Presenta qualche simmetria? Se sì, di che tipo? Descrivetela

Immagine 1

Immagine 2

Immagine 3



Scheda 4

IDENTIKIT DELLE SIMMETRIE

SIMMETRIA di tipo 1
Nome:
Simbolo:
Caratteristiche:

SIMMETRIA di tipo 2
Nome:
Simbolo:
Caratteristiche:

SIMMETRIA di tipo 3
Nome:
Simbolo:
Caratteristiche:

Scheda 5

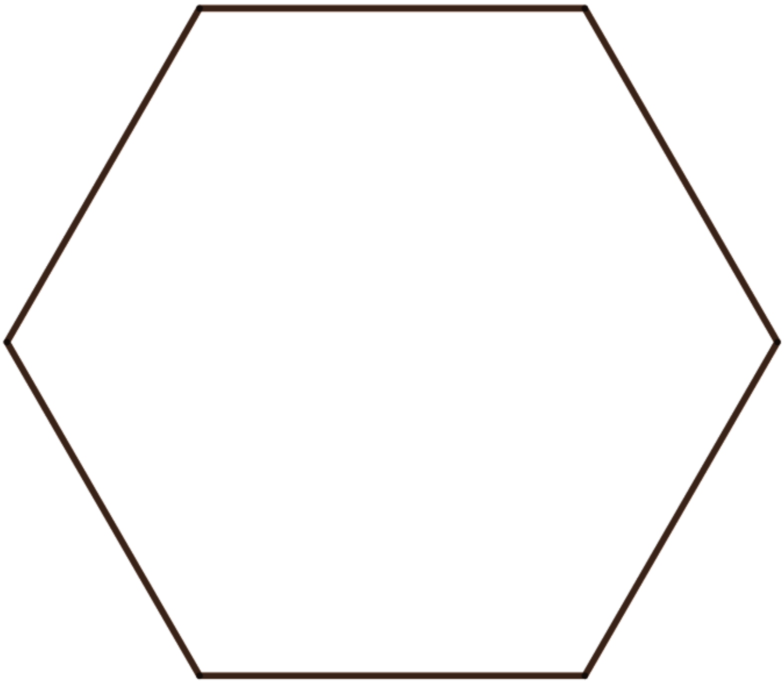
Individuate all’interno della Basilica di San Vitale la figura rappresentata nell’Immagine 3

e scrivete le caratteristiche della sua simmetria per rotazione.

Individuate all’interno della Basilica un esempio di figura simmetrica per traslazione e disegnatela qui sotto.

Scheda 6

Immaginate di avere a disposizione un timbro e di voler replicare nella figura qui sotto il rosone presente nella **scheda 2**.



Quale figura dovrete incidere nel timbro?

Scheda 7

Immaginate ora di voler replicare nella striscia bianca qui sotto il fregio presente nella **scheda 1**.

Quale figura dovrete incidere nel timbro?

Immaginate ora di avere a disposizione il timbro appena creato e di voler ricoprire non una semplice striscia ma un piano.
Quali movimenti vi occorre fare?

Scheda 8

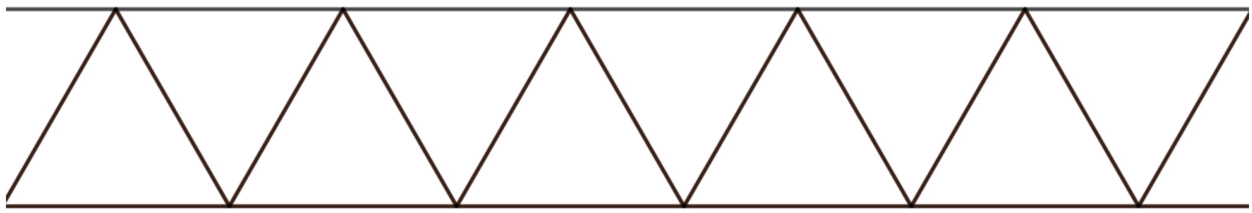
Ora per ciascun fregio e rosone analizzato in precedenza disegnate il relativo timbro.

Immagine 1

Immagine 2

Immagine 3

Scheda 9



Staccando il lucido dal foglio riuscite a fargli fare un movimento che permetta di risovrapporre la figura?

Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).

Scheda 10

Fregi di Sant'Apollinare Nuova

Scheda 11

Parlando di tassellazioni abbiamo detto che esistono solamente tre possibilità per ricoprire il piano usando poligoni regolari.
All’interno del Palazzo di Teodorico è presente una di queste tre possibilità.
Individuate di quale poligono si tratta e disegnatelo qui sotto.

Individuate ora all’interno del Palazzo un’altra tassellazione che usa triangoli, esagoni e quadrati e disegnatene una parte qui sotto.

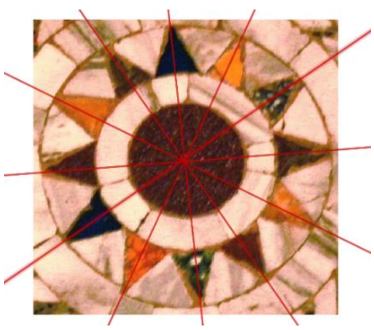
Scheda 12

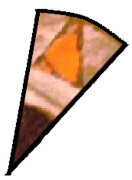
Ora vai tu a caccia di figure simmetriche!

Individuate quante più figure possibili e per ognuna di esse:

- Disegnatela (quando possibile basta solamente il timbro)
- Scrivete di che tipo di figura si tratta (fregio, rosone, tassellazione o figura specchio)
- Scrivete il tipo di simmetria:
  - Simmetria per traslazione in un’unica direzione T, in più di una direzione T+
  - Simmetria per rotazione R (individuare anche centro e ampiezza)
  - Simmetria per riflessione S, per più di una riflessione S+ (tracciare sulla figura l’asse o gli assi di riflessione)

Ad esempio:



Disegno figura: 

Tipo di figura: rosone

Simmetrie:

- R con ampiezza 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 360°
- S+

Scheda 13

Riepilogo figure viste durante l'uscita

Figura specchio

La simmetria base di questa figura è ……………………………………….

Ha altre simmetrie questa figura?

Quindi in generale le figure specchio possono essere simmetriche per:

- Traslazione sì no
- Rotazioni sì no
- Riflessioni sì no

Scheda 14

Rosoni

Questo rosone contiene al suo interno altri rosoni. Quanti ne riuscite ad individuare?

La simmetria base di questa figura è ……………………………………..

Ha altre simmetrie questa figura?

Disegnate il timbro:

Quindi in generale i rosoni possono essere simmetrici per:

- Traslazione sì no
- Rotazioni sì no
- Riflessioni sì no

Scheda 15

Fregi

La simmetria base di questa figura è ……………………………………….

Ha altre simmetrie questa figura?

Disegnate il timbro:

Quindi in generale i fregi possono essere simmetrici per:

- Traslazione sì no
- Rotazioni sì no
- Riflessioni sì no

Scheda 16

Tassellazioni

La caratteristica geometrica di questa figura è:

Ha altre simmetrie questa figura?

Disegnate il timbro:

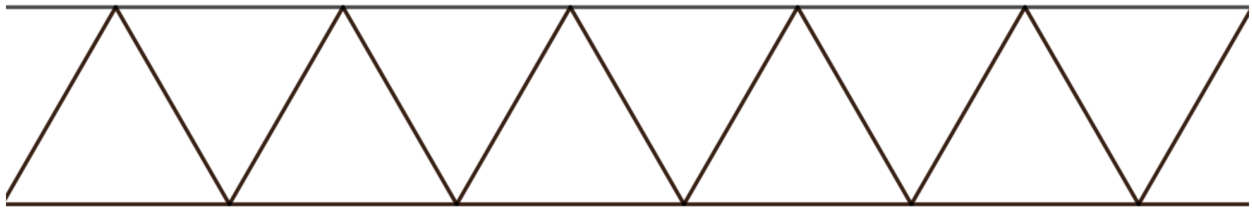
Appendice C

Nuova formulazione schede

Riporto in questa appendice la nuova formulazione delle schede 1, 2, 5, 6 e 7 che è stata descritta nel Capitolo 5.
Queste possono essere stampate al posto delle "omonime" riportate in Appendice B.

Scheda 1

Simmetria di tipo 1

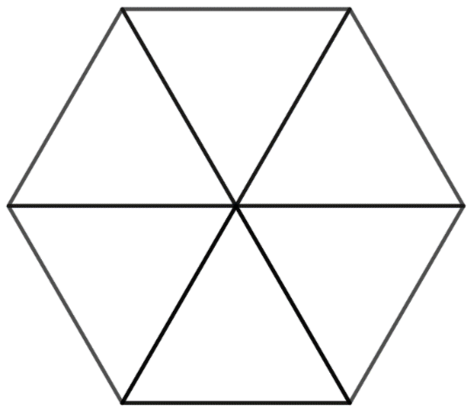


Sovrapponete la figura presente sul lucido a quella presente su questa scheda in modo che coincidano perfettamente.
Muovendo il lucido senza staccarlo dal foglio, riuscite a individuare un movimento che permette di risovrapporre le figure in modo che di nuovo coincidano perfettamente?

Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).

Scheda 2

Simmetria di tipo 2



Sovrapponete la figura presente sul lucido a quella presente su questa scheda in modo che coincidano perfettamente.
Muovendo il lucido senza staccarlo dal foglio, riuscite a individuare un movimento che permette di risovrapporre le figure in modo che di nuovo coincidano perfettamente?

Se sì, descrivete questo movimento (potete aiutarvi per la descrizione assegnando delle lettere ai punti della figura).

Scheda 5

Individuate all’interno della Basilica di San Vitale la figura rappresentata nell’Immagine 3

e completate le caratteristiche della sua simmetria per rotazione:

- Centro di rotazione: individuatelo e disegnatelo nella figura qui sopra
- Ampiezza angoli di rotazione: ci sono in tutto 12 possibilità, inserite quelle mancanti

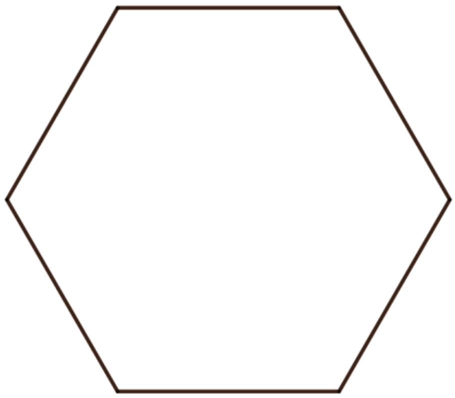
  30° __ __ __ 150° __ 210° __ __ 300° __ __

- Verso di rotazione:
  - ☐ Orario
  - ☐ Antiorario
  - ☐ Sia orario che antiorario

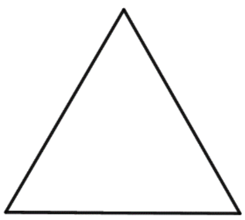
Individuate all’interno della Basilica un esempio di figura simmetrica per traslazione e disegnatela qui sotto.

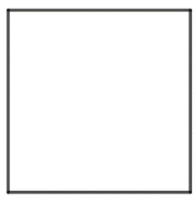
Scheda 6

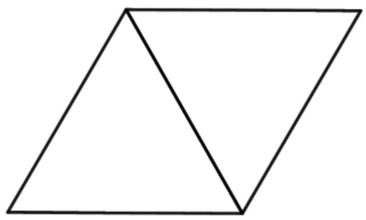
Immaginate di avere a disposizione un timbro e di voler replicare nella figura qui sotto il rosone presente nella **scheda 2**.



Quale fra le seguenti figure potreste fare incidere nel timbro?







Di quelle che avete selezionato qual è la più piccola?

Scheda 7

Ricordando quanto avete svolto nella scheda precedente, immaginate ora di voler replicare nella striscia bianca qui sotto il fregio presente nella **scheda 1**.

Quale figura dovrai incidere nel timbro?

Immaginate ora di avere a disposizione il timbro appena creato e di voler ricoprire non una semplice striscia ma un piano.
Quali movimenti vi occorre fare?

Bibliografia

[1] Maria Dedò,
Forme - simmetria e topologia
Decibel, (1999).

[2] Wladimiro Bendazzi, Riccardo Ricci,
Ravenna - Guida alla conoscenza della città
Edizioni Sirri, (1987).

[3] Bruno Losito, Graziella Pozzo,
La ricerca azione - Una strategia per il cambiamento nella scuola
Carocci Faber, (2005).

[4] John Elliott, Andrè Giordan, Cesare Scurati
La ricerca-azione - Metodiche, strumenti, casi
Bollati Boringhieri, (1993).

[5] Maria Dedò,
Alla ricerca della geometria perduta 1 - quale geometria per la scuola
Egea, (2016).

[6] Hermann Weyl,
La simmetria
Feltrinelli, (1975).

[7] Maria Dedò,
Trasformazioni geometriche
Decibel Zanichelli, (1996).

[8] Ivan Niven,
Convex polygons that cannot tile the plane
The American Mathematical Monthly, **vol.85** (1978).

[9] Mark Anthony Armstrong,
Groups and Symmetry
Springere Verlag, (1980).

[10] Michael Artin,
Algebra
Bollati Boringhieri, (1997).

[11] Israel Nathan Herstein,
Algebra
Editori Riuniti university press, (2010).

[12] Thomas William Hungerford,
Algebra
Holt, Rinehart and Winston, Inc. , (1974).

[13] Paola Pedrini,
A tutto GeCla!
XlaTangente, **numero 41**, (2013).

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare alla Professoressa Cattabriga per la disponibilità, la pazienza e l'entusiasmo.
Ringrazio poi le Professoresse Incensi, Simoni e Palmieri e le classi II A e II B dell'Istituto Tavelli di Ravenna per avermi dato la possibilità di sperimentare il mio lavoro.
Un grazie speciale a Laura, che mi regala un sorriso ogni giorno e senza la quale non ce l'avrei sicuramente fatta.
Grazie a mio babbo, mia mamma e a mio fratello per essere sempre in prima linea a sostenermi.
Grazie a tutti i miei amici, da quelli "forlivesi" a quelli conosciuti in questi anni universitari.
Grazie ai miei parenti, in particolare a mio zio Roberto che mi ha guidato nella prima visita alla scoperta di Ravenna.
Grazie al Professor Serra per avermi fatto appassionare alla matematica.
E infine grazie a Guia, certe persone non si dimenticano mai.