

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Equazioni di Stato della Materia in Astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:
Marco Balboni

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno Accademico 2018-2019

Indice

1	Equazioni e Funzioni di Stato	3
1.1	Gas Perfetti	5
1.1.1	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann	6
1.2	Gas Degeneri	7
1.2.1	Statistica di Fermi-Dirac e Bose-Einstein	7
2	Interni Stellari	9
2.1	Gas Perfetti	9
2.2	Gas Degeneri	11
2.3	Pressione di Radiazione	12
2.4	Diagramma densità temperatura	12
2.5	Equilibrio Idrostatico	13
2.6	Esempi Astrofisici	14
2.6.1	Stima T e P nel Sole	14
2.6.2	Massa limite per le Nane Bianche	15

Introduzione

Le equazioni di stato (EdS) descrivono un sistema fisico mettendo in relazione le sue quantità termodinamiche, come pressione, energia, densità, entropia, calore, ecc..., e sono legate sia alla fisica fondamentale, sia alle scienze applicate. Importanti branche della fisica si sono sviluppate dalle equazioni di stato e, viceversa, formulazioni più complesse delle EdS sono dovute agli sviluppi della fisica moderna.

Allo stesso modo in cui la Meccanica Newtoniana può essere vista come il fondamento della fisica, le EdS possono essere viste come il fondamento della Termodinamica, dell'Idrodinamica e della Fluidodinamica. Inoltre, come la meccanica si è estesa per comprendere la relatività e la quantizzazione, le EdS sono state ulteriormente sviluppate, per descrivere gli stati della materia in condizioni di estrema densità o temperatura. In astrofisica, ad esempio, si osservano oggetti in condizioni di pressione e temperatura molto più estreme di quelli ottenibili in laboratorio. Questi sistemi astrofisici sono campi di ricerca importanti per gli studi più vari.

In questa trattazione verranno illustrate le principali funzioni ed equazioni di stato della materia, accennando al "Metodo di Boltzmann" per ricavarle, e vedendo, nella seconda parte, alcune loro applicazioni astrofisiche.

Capitolo 1

Equazioni e Funzioni di Stato

Un'equazione di stato, è una relazione tra la pressione, la temperatura e la densità di un sistema fisico.

Le EdS descrivono la natura in tutti i possibili valori di pressione, densità e temperatura laddove si ha una situazione di equilibrio termodinamico locale, cioè dove le funzioni di stato (T,P,V,...) non dipendono dal tempo. Questo risultato, dimostrato da Boltzmann anche grazie allo sviluppo della teoria atomistica, ha permesso di legare i comportamenti dinamici del microscopico (atomi), alle misure macroscopiche della Termodinamica. Il programma di collegare la Dinamica microscopica con la Termodinamica macroscopica viene affrontato nell'ambito delle cosiddette Teorie Cinetiche che, per sistemi all'equilibrio termodinamico, si avvalgono della Meccanica Statistica per arrivare alla Termodinamica Statistica.

Per effettuare questo studio, si considera un sistema *microcanonico*, cioè isolato, e lo si scompone in N sottosistemi *canonici*, ovvero, sistemi interagenti tra loro solo tramite scambi di calore, e identici. In questo modo, lo spettro $\{\epsilon_\alpha, g_\alpha\}$ della Hamiltoniana $h(p_j, q_j)$ di ogni sottosistema, è lo stesso per tutti. Inoltre, vengono introdotte le popolazioni $n_\alpha(t)$ dei livelli, cioè il numero di sistemi canonici che, ad un dato istante t , occupano il livello ϵ_α , il quale ha molteplicità g_α .

Con questa trattazione si ottengono le seguenti relazioni tra le principali funzioni di stato

$$Z_c = \sum_{\alpha} g_{\alpha} e^{-\beta \epsilon_{\alpha}} \quad (1.1)$$

$$E = -\frac{\partial \ln Z_c}{\partial \beta} \quad (1.2)$$

$$S = k \ln Z_c + \frac{E}{T} = k \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \ln \left(\frac{g_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \right) \quad (1.3)$$

$$\Phi = -kT \ln Z_c = E - TS \quad (1.4)$$

$$P = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial V} \right)_T = kT \left(\frac{\partial Z_c}{\partial V} \right)_T \quad (1.5)$$

Dove:

- Z_c è detta *funzione di partizione canonica*
- k è la costante di *Boltzmann*
- $\beta = \frac{1}{kT}$
- E è l'energia totale del sistema
- Φ è l'*Energia libera di Helmholtz*
- S è l'entropia del sistema
- $\rho_\alpha = n_\alpha/N$ è la probabilità canonica
- P è la pressione

Nel caso di sistemi distinguibili, valgono le espressioni seguenti

$$\Phi_{tot} = \sum_i \Phi_i \quad (1.6)$$

$$Z_c^{tot} = \prod_j Z_{c,j} \quad (1.7)$$

Limite del continuo Nel limite in cui il volume di confinamento V diventa arbitrariamente grande, i livelli energetici tendono ad "infiltrarsi", il che rende praticamente necessaria un'approssimazione detta Limite del Continuo, nella quale le somme diventano integrali.

$$\epsilon_\alpha \longrightarrow \epsilon \quad (1.8a)$$

$$g_\alpha \longrightarrow g(\epsilon)d\epsilon \quad (1.8b)$$

$$\rho_\alpha \longrightarrow \frac{g(\epsilon)e^{-\beta\epsilon}}{Z_c} \quad (1.8c)$$

$$Z_c \longrightarrow \int g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \quad (1.8d)$$

Nel caso in cui non sia possibile far diventare arbitrariamente grande il volume, la condizione del limite del continuo si esprime anche come

$$(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll kT$$

1.1 Gas Perfetti

Si definisce *Gas Perfetto*, un sistema formato da N particelle puntiformi e massive, senza campi esterni, senza struttura interna (spin), libere di muoversi in una regione spaziale Ω di volume V , che si scambiano energia solo attraverso urti (interazioni Coulombiane trascurabili) e in condizione di *non degenerazione*. Per condizione di *non degenerazione*, si intende trascurabile la probabilità che due sistemi (in questo caso particelle) occupino lo stesso stato energetico, il che si traduce nel richiedere

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{N}{Z_c} \ll 1 \quad (1.9)$$

La funzione di partizione canonica, nel limite del continuo per un gas non degenere, si esprime come¹

$$Z_c = \frac{1}{h^D} \int e^{-\beta h(z)} dz$$

In cui la variabile D indica le dimensioni del sistema considerato, e quindi, h^D è il più piccolo volume considerabile nello spazio delle fasi. Nel caso in 3 dimensioni, per una singola particella, la funzione di partizione canonica diventa

$$Z_c^{sing} = \frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \quad (1.10)$$

Così da poter definire quello che è il *parametro di degenerazione* η

$$\eta = \frac{Nh^3}{V (2\pi mkT)^{3/2}} \quad (1.11)$$

Per essere in condizioni di non degenerazione $\eta \ll 1$.

Ora, si può ricavare la funzione di partizione canonica complessiva, nel caso di sottosistemi distinguibili o indistinguibili.

¹La variabile \mathbf{z} indica la coppia posizione-momento, (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , di un oggetto

$$Z_c^{dist} = \left[\frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \quad (1.12)$$

$$Z_c^{ind} = \frac{Z_c^{dist}}{N!} = \frac{1}{N!} \left[\frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \quad (1.13)$$

Considerando sistemi indistinguibili, la relazioni per le funzioni di stato che si ottengono sono

$$E = \frac{3}{2} NkT \quad (1.14)$$

$$S = kN \ln \left(\frac{V (2\pi mkT)^{3/2} e^{5/2}}{Nh^3} \right) \quad (1.15)$$

$$P = \frac{NkT}{V} \quad (1.16)$$

Da cui si può notare che tutte e 3 le funzioni di stato risultano sommabili. Se si fosse considerato il caso di sotto-sistemi distinguibili, l'unica differenza sarebbe stata relativa all'Entropia, passando dall'essere una quantità estensiva a una sovra estensiva.

1.1.1 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Partendo dalla formula della distribuzione canonica nel limite del continuo

$$\rho_c(\mathbf{z}) = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{z})}}{\int e^{-\beta H(\mathbf{z})} d\mathbf{z}} \quad (1.17)$$

e integrando rispetto alle posizioni, si ottiene la distribuzione dei momenti $\rho_c(\mathbf{p})$.

A questo punto, tramite l'uguaglianza $\rho_c(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \rho_c(\mathbf{v})d\mathbf{v}$, possiamo ricavare la distribuzione delle velocità

$$\rho_c(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta m\mathbf{v}^2/2} \quad (1.18)$$

Passando alle coordinate sferiche e integrando su tutto l'angolo solido si ottiene la distribuzione delle velocità in funzione del solo modulo v

$$\rho_c(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\beta mv^2/2} \quad (1.19)$$

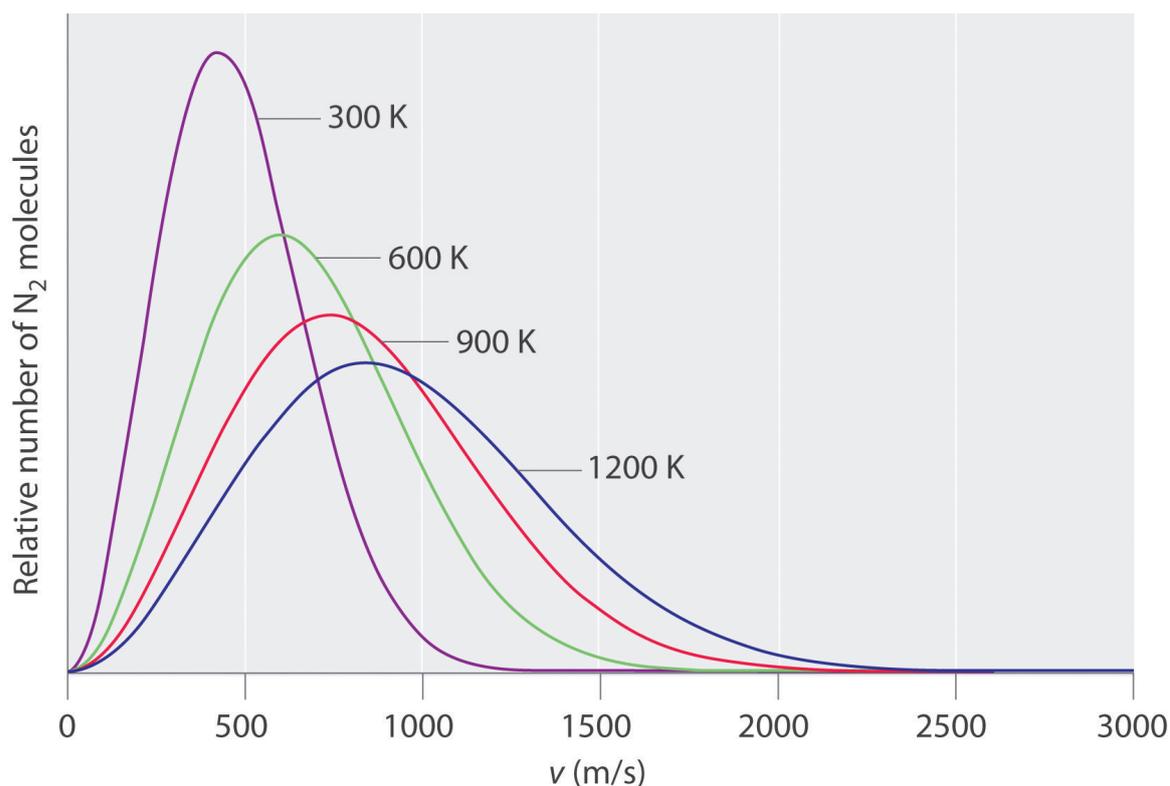


Figura 1.1.1: Distribuzione delle velocità di molecole di azoto a diverse temperature

Come si vede dalla figura Fig. 1.1.1, si ha una velocità più probabile delle altre in corrispondenza di $v = \sqrt{2kT/m}$, che cresce con la radice della temperatura. Si noti che la probabilità di avere particelle realmente ferme ($v = 0$) è nulla.

1.2 Gas Degeneri

Quanto detto per i Gas Perfetti, vale sotto la condizione di *non degenerazione*. Un gas degenerare, lo si considera come un sistema formato da N particelle indistinguibili, per le quali non vale la condizione (1.9). In questa situazione, l'indistinguibilità tra particelle non si traduce più in una divisione per $N!$ del numero di stati distinguibili, come tra (1.12) e (1.13), ma è necessario un conteggio specifico. Tale conteggio, dipende dalla natura delle particelle in esame, che possono essere di due tipi: *Bosoni* o *Fermioni*.

1.2.1 Statistica di Fermi-Dirac e Bose-Einstein

Le differenza principale tra queste due particelle è lo *spin*, infatti i Bosoni hanno spin intero mentre i Fermioni hanno spin semi-intero. Questa distinzione fa sì che più

Bosoni possano occupare lo stesso stato energetico, mentre i Fermioni sono soggetti al *Principio di Esclusione di Pauli*. Il calcolo degli stati totali di un sistema di Bosoni o di Fermioni, deriva dalle regole del calcolo combinatorio, portando a quelle che sono le Statistiche di Fermi-Dirac e Bose-Einstein:

$$W_{FD} = \prod_{\alpha} \frac{g_{\alpha}!}{(g_{\alpha} - n_{\alpha})!n_{\alpha}!} \quad (1.20)$$

$$W_{BE} = \prod_{\alpha} \frac{(g_{\alpha} - 1 + n_{\alpha})!}{(g_{\alpha} - 1)!n_{\alpha}!} \quad (1.21)$$

Dalle quali si trova una nuova formulazione per le popolazioni dei livelli energetici e per l'energia libera di Helmholtz ²

$$n_{\alpha}^{\pm} = \frac{g_{\alpha}}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} \pm 1} \quad (1.22)$$

$$\Phi^{\pm} = \mu N \mp kT \sum_{\alpha} g_{\alpha} \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)}] \quad (1.23)$$

Dove il parametro μ è il potenziale chimico.

Limite del continuo A differenza dei Gas Perfetti, bisogna considerare anche la possibilità che i livelli energetici ϵ_{α} dipendano dallo spin, o da altri gradi di libertà interni, che identificheremo con $\vec{\xi}$. Questo porta alle seguenti sostituzioni

$$\epsilon_{\alpha} \longrightarrow \epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} \quad (1.24a)$$

$$g_{\alpha} \longrightarrow g_{\vec{\xi}} g(\epsilon) d\epsilon \quad (1.24b)$$

$$n_{\alpha} \longrightarrow n^{\pm}(\epsilon, \vec{\xi}) d\epsilon \quad (1.24c)$$

E di conseguenza

$$n^{\pm}(\epsilon, \vec{\xi}) = g_{\vec{\xi}} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} - \mu)} \pm 1} \quad (1.25a)$$

$$\Phi^{\pm} = \mu N \mp kT \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}} \int g(\epsilon) d\epsilon \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} - \mu)}] \quad (1.25b)$$

²Per convenzione, si considera con il segno superiore il caso della statistica di Fermi-Dirac e con il segno inferiore quella di Bose-Einstein

Capitolo 2

Interni Stellari

Le stelle, a causa della loro temperatura, sono sistemi gassosi. Nella maggior parte delle stelle, la materia si comporta o come un gas perfetto o come un gas completamente degenere; in entrambi i casi l'EdS è abbastanza semplice. Per esempio, all'interno del Sole la correzione sulla pressione derivante dall'utilizzo della legge dei gas perfetti, è circa lo 0.43%, e nei casi di stelle più dense è il 2%. In questo capitolo verranno discusse le equazioni per la pressione negli interni stellari e alcune loro applicazioni.

2.1 Gas Perfetti

L'EdS dei gas perfetti (1.16) descrive il comportamento di un gas a basse densità. La sua applicazione alle atmosfere stellari, dove le densità sono dell'ordine di $10^{-7} g/cm^3$, è ampiamente giustificata. Mentre il suo utilizzo negli interni stellari, dove le densità sono molto maggiori, sembrerebbe non essere corretto. Fortunatamente, negli interni stellari si hanno temperature così elevate da rendere la materia completamente ionizzata, e l'energia di interazione Coulombiana risulta trascurabile rispetto all'energia cinetica delle singole particelle.

L'EdS sopracitata, può essere riscritta come

$$P = nkT \tag{2.1}$$

indicando con n , la densità numerica delle particelle.

Siccome le temperature negli interni stellari sono molto elevate, e quindi gli atomi sono completamente ionizzati, la densità numerica totale, sarà data dalla somma delle densità di *ioni* ed *elettroni*. Assumendo che la massa delle stelle sia composta da una frazione \mathbf{X} di Idrogeno, una \mathbf{Y} di Elio e una \mathbf{Z} di elementi più pesanti, è possibile determinare la densità numerica totale. Siccome la materia è completamente ionizzata, ogni atomo di Idrogeno darà origine a 2 particelle, e quindi da una massa di $\mathbf{X} g$ di Idrogeno si otterranno

$$\frac{2\mathbf{X}}{H}$$

particelle. Dove $H \simeq 1.67 \times 10^{-24}g$. Allo stesso modo, ogni atomo di Elio genererà 4 particelle. Allora, da una massa di $\mathbf{Y} g$ di Elio, saranno prodotte

$$\frac{3\mathbf{Y}}{4H}$$

particelle. Per quanto riguarda gli elementi più pesanti, se si considera un atomo con numero atomico Z e numero di massa A , le particelle prodotte da una sua ionizzazione totale saranno $(Z + 1)$. Quindi, una massa di $\mathbf{Z} g$ di elementi pesanti genererà

$$\frac{(Z + 1)\mathbf{Z}}{AH} \approx \frac{1}{2H}\mathbf{Z}$$

particelle. Dove si approssima $A \approx 2Z$. In questo modo, chiamando ρ la densità in massa della stella, la densità numerica totale sarà data da

$$n = n_{ioni} + n_{elettroni} = \left[\frac{2\mathbf{X}}{H} + \frac{3\mathbf{Y}}{4H} + \frac{1}{2H}\mathbf{Z} \right] \rho$$

oppure

$$n = \left[2\mathbf{X} + \frac{3}{4}\mathbf{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{Z} \right] \frac{\rho}{H}$$

Ora, definendo il peso molecolare medio del gas come

$$\mu = \frac{1}{2\mathbf{X} + \frac{3}{4}\mathbf{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{Z}}$$

è possibile riscrivere l'equazione (2.1) ottenendo

$$P = \frac{\rho kT}{\mu H} \tag{2.2}$$

dove μ tiene conto di tutte le particelle del gas, ioni ed elettroni. Similmente, è possibile ricavare anche la densità degli elettroni n_e definendo

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e H}$$

con

$$\mu_e = \frac{2}{1 + \mathbf{X}}$$

2.2 Gas Degeneri

Dalla formula (1.11) vediamo che la degenerazione avviene più facilmente per particelle poco massive. Principalmente per questo, negli interni stellari, dove la densità è molto elevata, gli elettroni formano un gas completamente degenere. Inoltre, la densità che farebbe degenerare i nuclei è dell'ordine di $10^{12}g/cm^3$, che corrisponde ad un valore oltre mille volte superiore alle densità degli interni stellari. Questo, ci fa capire che possiamo trattare il gas di nuclei come un gas perfetto, che produce una pressione trascurabile rispetto alla pressione di degenerazione data dagli elettroni.

Caso non relativistico Da semplici considerazioni geometriche sugli urti tra le particelle, si ottiene la seguente relazione

$$P = \frac{1}{3}m \int_0^\infty N(v)v^2dv \quad (2.3)$$

dove $N(v)dv$ è il numero di particelle con velocità tra v e $v+dv$. Applicando la seguente relazione

$$\int_0^\infty N(v)dv = \int_0^\infty N(p)dp$$

si riscrive la (2.3) in funzione della quantità di moto come

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p)pvdp \quad (2.4)$$

Per trovare $N(p)dp$ si assume una distribuzione isotropa dei momenti, e quindi si ricava

$$N_e(p)dp = \frac{8\pi}{h^3}p^2dp \quad (2.5)$$

che integrata dà il momento di Fermi

$$p_F = \left(\frac{3h^3n_e}{8\pi} \right)^{1/3} \quad (2.6)$$

Sostituendo la (2.5) nella (2.4), e prendendo p_F come momento massimo, si ha

$$P_e = k_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad \text{con} \quad k_1 \sim 10^{13} \quad (2.7)$$

Da notare che la pressione non dipende più dalla temperatura.

Caso relativistico Il ragionamento che si adotta è simile al precedente, in questo caso, però, la quantità di moto p è data da $p = \gamma p_0 = \gamma m_e v_e$, dove γ è il fattore di Lorentz; così si ottiene

$$P_e^{rel} = k_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad \text{con} \quad k_2 \sim 10^{15} \quad (2.8)$$

Nemmeno in questo caso la pressione dipende dalla temperatura.

2.3 Pressione di Radiazione

Per ricavare quest'ultimo contributo di pressione dato dai *fotoni* utilizziamo l'espressione (1.25b) dell'energia libera di Helmholtz per un gas di bosoni senza massa

$$\Phi = \frac{8\pi V kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) d\nu$$

Applicando un cambio di variabile $x = \beta h\nu$ si risolve l'integrale ottenendo

$$\Phi = -\frac{8\pi^5 (kT)^4 V}{45c^3 h^3} \quad (2.9)$$

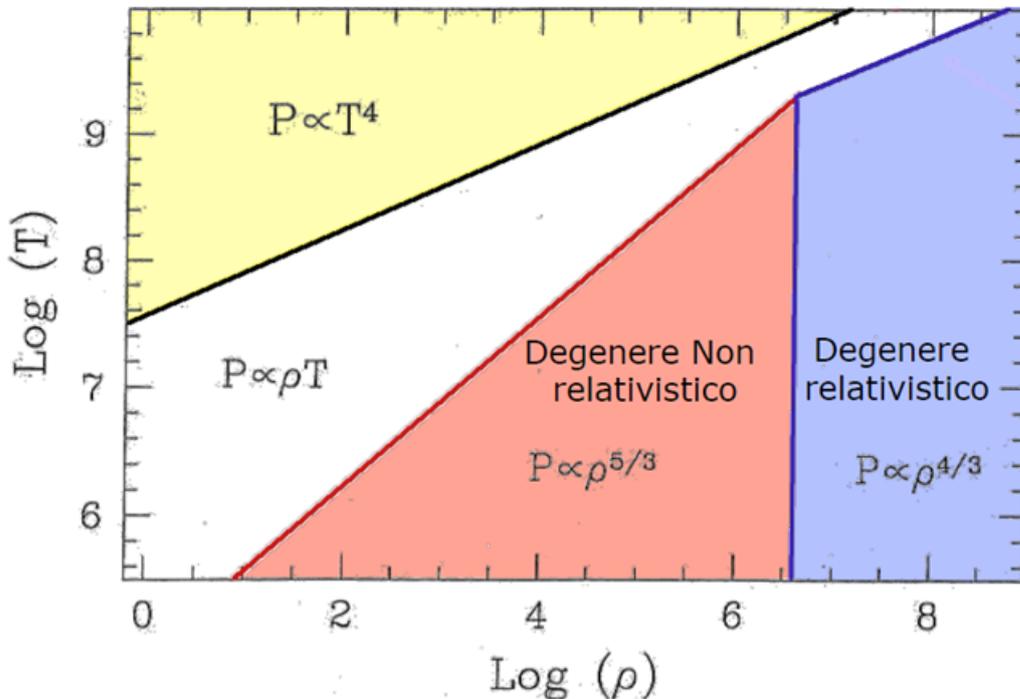
Ricordando l'equazione (1.5) si ottiene l'espressione per la *Pressione di radiazione*

$$P_{rad} = \frac{a}{3} T^4 \quad \text{con} \quad a = 7.566 \times 10^{-15} \quad (2.10)$$

È una pressione che dipende fortemente dalla temperatura.

2.4 Diagramma densità temperatura

A questo punto, si conoscono i contributi alla pressione dati dalle varie componenti degli interni stellari, quindi si può generare un grafico per studiare i vari regimi di pressione, al variare della densità e della temperatura.



Nella regione gialla si hanno temperature molto elevate e domina la pressione di radiazione. A temperature inferiori, nella regione bianca, la pressione inizia a dipendere anche dalla densità, qui si trovano le stelle della *Main Sequence*. Aumentando la densità, si entra nel regime degenerare non relativistico, in cui la pressione smette di dipendere dalla temperatura. Infine, oltre a $\log \rho \approx 6.6$, si ha il caso degenerare relativistico, dove la pressione dipende ancora solo dalla densità, ma in maniera meno forte rispetto a prima.

2.5 Equilibrio Idrostatico

Le osservazioni fatte fino ad ora, non hanno mostrato nessun cambiamento nella maggior parte delle stelle. Perfino stelle variabili come le *Cefeidi* e le *Novae*, non presentano cambiamenti a lungo termine se si mediano nel tempo le loro variazioni. Nel caso particolare delle Cefeidi, anche se si sono misurati dei cambiamenti nei periodi di pulsazione, si è visto che, affinché diventino significativi sono necessari milioni di anni. Un'altra conferma del fatto che le stelle siano sistemi all'equilibrio arriva dal Sole. Infatti, prove fossili riguardanti la vegetazione del nostro pianeta, hanno dimostrato che anche un miliardo di anni fa il Sole doveva avere la stessa luminosità che ha oggi. Questo dimostra come gli interni stellari siano in perfetto equilibrio, limitando gli studi alle configurazioni di equilibrio.

In questa condizione, possiamo assumere che, in ogni punto di una stella, la risultante di tutte le forze agenti su un elemento di materia è nulla. Considerando solo la forza gravitazionale e di pressione

$$F_{grav} + F_{pres} = 0 \quad (2.11)$$

La forza di pressione sulla superficie dS di un elemento di volume dV , diretta verso l'esterno, è data

$$F_{pres} = P(r + dr)dS - P(r)dS = \frac{dP(r)}{dr} dr dS \quad (2.12)$$

Mentre la forza gravitazionale agente sull'elemento dV , diretta verso l'interno, è

$$F_{grav} = \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr dS \quad (2.13)$$

Imponendo la (2.11) si ottiene la condizione di equilibrio idrostatico.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (2.14)$$

2.6 Esempi Astrofisici

Di seguito verranno presentati alcuni esempi di applicazioni delle formule ricavate in precedenza.

2.6.1 Stima T e P nel Sole

Utilizzando la condizione di equilibrio idrostatico (2.14), possiamo fare una stima della pressione ad un raggio $r = R_{\odot}/2$ all'interno del Sole.

$$\int_{P_{R/2}}^{P_R} dP = -G \int_{R/2}^R \frac{M(r)}{r^2} dr$$

Assumendo che la pressione sulla superficie sia 0 e la densità costante si ha

$$P_{R/2} = \frac{1}{2} G \pi \bar{\rho}^2 R^2$$

Sostituendo i valori

$$P_{R/2} \approx 10^{15} \text{ dyne/cm}^2$$

cioè circa 10^{14} Pa. A questo punto, utilizzando la relazione (2.2), si può fare una stima della temperatura. Supponendo il Sole composto solamente da Idrogeno e conoscendo la pressione a $R_{\odot}/2$, la stima sulla temperatura è

$$T_{\odot} \approx 10^7 K$$

La quale ci indica la temperatura tipica degli interni stellare di decine di milioni di gradi.

2.6.2 Massa limite per le Nane Bianche

Quando una stella finisce il combustibile per alimentare una specifica reazione nucleare, inizia una fase di contrazione. Da questa contrazione possono svilupparsi due scenari. Nel primo caso, la temperatura aumenta finché non cominciano nuove reazioni nucleari, facendo procedere la stella con le successive fasi evolutive. Come seconda possibilità, la contrazione fa aumentare la densità a tal punto, che la degenerazione non riguarda più solo il nucleo della stella, ma anche gli strati più esterni. Questa seconda situazione, fa sì che la stella raggiunga uno stadio finale evolutivo, caratterizzato da una continua perdita di energia dalla superficie, il quale è rappresentato dalle *nane bianche*.

Le nane bianche, possono essere approssimate a dei sistemi completamente degeneri. In realtà, presentano degli strati superficiali in condizioni non degeneri e, inoltre, nelle zone interne sono degeneri solo gli elettroni ma non i nuclei. Si vede, però, che gli strati di materia non degeneri hanno dimensioni trascurabili rispetto al volume totale, e che la pressione generata dai nuclei è trascurabile rispetto a quella della materia degeneri. Quindi l'approssimazione ad una struttura completamente degeneri è giustificata.

Una caratteristica interessante di questi oggetti è la presenza di una massa limite. Per comprendere meglio questo concetto, si consideri l'espressione approssimata per la densità

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}$$

e quindi per la forza di gravità si ha

$$\rho \frac{GM}{R^2} \propto \frac{M^2}{R^5}$$

Ricordando le formule per la pressione (2.7) e (2.8) per il caso relativistico e non, si può scrivere

$$\text{non relativistico : } P \propto \rho^{5/3} \propto \frac{M^{5/3}}{R^5}$$

$$\text{relativistico : } P \propto \rho^{4/3} \propto \frac{M^{4/3}}{R^4}$$

E per la forza di pressione

$$\textit{non relativistico} : \quad \frac{dP}{dr} \propto \frac{M^{5/3}}{R^6}$$

$$\textit{relativistico} : \quad \frac{dP}{dr} \propto \frac{M^{4/3}}{R^5}$$

Per comparare la forza di pressione con la forza gravitazionale, dobbiamo distinguere i due casi. Nel caso non relativistico, si vede che le due forze dipendono da potenze differenti del raggio. Perciò, la stella ha la possibilità di bilanciare le forze variando il raggio finché non raggiunge l'equilibrio.

Nel caso relativistico, invece, le due forze dipendono allo stesso modo dal raggio. Quindi, se non sono in equilibrio, la stella non può bilanciarle semplicemente modificando il raggio. Si nota, inoltre, che le due forze dipendono in maniera diversa della massa, quindi esiste un valore della massa, detto *massa limite*, per cui le forze sono in equilibrio. Per masse superiori alla massa limite, la forza gravitazionale supererà sempre la forza di pressione, qualsiasi sia il raggio. In questo modo la stella non si troverà mai all'equilibrio a meno che non perda massa. Se invece la massa è minore della massa limite, la forza di pressione vincerà la forza gravitazionale e quindi la stella si espanderà. Durante questa espansione la densità comincerà a diminuire, passando così dal caso relativistico a quello non relativistico. Adesso, all'aumentare del raggio la forza di pressione diminuisce più velocemente di quella gravitazionale, così che si possa generare una condizione di equilibrio.

Si può concludere che, in stelle più massive della massa limite, la forza di pressione non sarà mai sufficiente a bilanciare la forza gravitazionale. In stelle con massa inferiore alla massa limite, la pressione di degenerazione può bilanciare la forza gravitazionale, e per raggiungere questo equilibrio la stella deve modificare il suo raggio, fino ad un valore descritto da una relazione massa-raggio per i modelli degeneri.

Bibliografia

- [1] L. Ferrari. *Elementi di Termodinamica Statistica*. Dispense. Dipartimento di Fisica, Università di Bologna, 2019.
- [2] F.R. Ferraro. *Astrofisica Stellare*. Dispense. Dipartimento di Astronomia, Università di Bologna, 2018.
- [3] D. Mollica. «Equazioni di Stato della Materia in Astrofisica». Corso di studio in Astronomia. Università di Bologna, 2014.
- [4] H. Hora S. Eliezer A. Ghatak. *Fundamentals of Equations of State*. A cura di World Scientific Pub. Co. Inc. 2002.
- [5] M. Schwarzschild. *Structure and Evolution of the Stars*. A cura di Princeton University Press. 1958.