Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni deboli di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Lorenzo Vittori

Sessione II
Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

L'obiettivo di questo elaborato è quello di presentare tecniche risolutive per le equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) di tipo ellittico che generalizzano le equazioni di Poisson e Laplace.
Una teoria generale che ricerchi soluzioni classiche sufficientemente regolari per le PDE è ostacolata dal fatto che, nella maggior parte dei casi, le soluzioni classiche non esistono. Per questo motivo abbandoniamo la ricerca di soluzioni classiche per poter raggiungere, grazie a richieste meno esigenti, risultati più generali di risolvibilità.
Grazie a questa nuova ottica, ricostruiamo una più ampia definizione del problema alle derivate parziali e della relativa soluzione in senso *debole*, cosicché, la minor esigenza di regolarità, garantisca maggiore efficacia nella ricerca dell'esistenza e dell'unicità della soluzione. Abbiamo così suddiviso la ricerca della soluzione in due distinte fasi: nella prima si determinano *soluzione deboli* del problema considerato e in secondo luogo ne studiamo la regolarità. Grazie a questo modo di procedere è possibile analizzare e risolvere una quantità molto maggiore di problemi.
Nel primo capitolo di questa tesi, dopo aver enunciato alcuni risultati preliminari, definiamo le soluzioni classiche e deboli di equazioni differenziale alle derivate parziali di tipo ellittico. Segue il teorema di Lax-Milgram per forme bilineari con il quale, grazie alle stime energetiche, dimostriamo l'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli di questo tipo di PDE.
Il secondo capitolo si articola nella dimostrazione di tre importanti teoremi: il primo di essi garantisce l'esistenza e l'unicità di soluzioni deboli per un problema al bordo. Il secondo teorema sfrutta la teoria di Fredholm sugli operatori compatti per mostrare la relazione che lega la risolvibilità di un problema con quella del problema omogeneo e, infine, con il terzo teorema arricchiamo le conoscenze sulle soluzioni deboli sfruttando risultati riguardanti lo spettro degli operatori compatti.
Per concludere, nel terzo capitolo, dimostriamo due teoremi che studiano il problema della regolarità delle soluzioni deboli.

Indice

Capitolo 1

Definizioni e risultati preliminari

Definizione 1.1. Siano X, Y spazi di Banach ed $A : X \to Y$, allora:

i) A è un operatore *lineare* se

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av \qquad \forall\, u, v \in X,\, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

ii) $Im(A) := \{Au \in Y \mid u \in X\}$ e $Ker(A) := \{u \in X \mid Au = 0\}$

iii) Diremo che un operatore lineare A è *limitato* se $\exists\, M > 0$ per cui

$$||Au||_Y \leq M\, ||u||_X$$

ed in tal caso definiamo la norma per gli operatore limitati come

$$||A|| := \inf \{M > 0\, |tc.||Au|| \leq M\, ||u||\} = \sup_{||u|| \leq 1} \left\{ \frac{||Au||}{||u||} \right\}$$

Si nota subito che un operatore limitato è conseguentemente continuo.

iv) Definiamo il *duale* di X come

$$X^* := \{T : X \to \mathbb{R},\ \text{T operatore lineare e limitato}\}$$

che è verificabile essere uno spazio di Banach attraverso la norma sopra definita.

v) Diremo che una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge debolmente ad $u \in X$, scrivendo

$$u_n \rightharpoonup u,$$

se $\forall\, T \in X^*$ vale che $T(u_n) \to Tu$ in $\mathbb{R}$

Teorema 1.0.1. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, allora qualsiasi successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ limitata ammette una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ convergente in X.*

Definizione 1.2. Assumiamo $u : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m) : U \to \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$, ed $x \in U$

i) Chiamiamo *multi-indice* un vettore della forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in {\mathbb{Z}_{\geq 0}}^n$ e

- $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$
- $\alpha \pm \beta := (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$
- $\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \quad (\forall i = 1, \dots, n)$
- $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$

ii) Dato un multi-indice α, definiamo

- $D^\alpha u(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$
- $Du := (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ il gradiente di u
- $D^\alpha \mathbf{u}(x) := (D^\alpha u^1, \dots, D^\alpha u^m)$

iii) Se k è un intero non negativo allora definiamo

- $D^k u := \{D^\alpha u \,;\, |\alpha| = k\}$
- $|D^k u| := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2}$

Definizione 1.3. Fissati $k \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia dato $\mathcal{F}$ un operatore alle derivate parziali di ordine k

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

allora chiamiamo *equazione differenziale alle derivate parziali di ordine* k una espressione della forma:

$$\mathcal{F}\big(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x\big) = 0 \quad (x \in U) \tag{1.1}$$

Diremo di aver risolto l'equazione (1.1) se troviamo tutte le funzioni $u : U \to \mathbb{R}$ che verificano (1.1).

Definizione 1.4 (Spazi di funzioni)**.** Sia $U \subset \mathbb{R}^n$*aperto*

i) $C_c^k(U) = \{u \in C^k(U) \,|\, u \text{ a supporto compatto}\} \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$

ii) $L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ misurabile secondo Lebegue}, ||u||_{L^p(U)} < \infty\}$, dove

- $||u||_{L^p(U)} := \big(\int_U |f|^p \, dx\big)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$
- $||u||_{L^\infty(U)} := sup\, ess_U\, |f| = \inf\{C \geq 0 \,;\, |f(x)| \leq C \text{ quasi ovunque}\}$

iii) $L^p_{loc}(U) = \{u \in L^p(V) \,|\, \text{per ogni } V \subset\subset U\}$

Definizione 1.5 (Spazi di Sobolev)**.**

i) Supponiamo $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α un multi-indice, allora v è la α-esima derivata parziale debole di u se $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$ vale che

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx$$

e in questo caso diremo che $v = D^\alpha u$ in senso debole. Inoltre, grazie alla formula di integrazione per parti, è dimostrabile che se u possiede derivate parziali normali, esse coincidono con quelle deboli.

ii) Fissato $1 \le p \le \infty$ e $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ si definisce lo spazio di Sobolev

$$W^{k,p}(U) := \{u \in L^p(U, \mathbb{R}) \;\big|\; \forall \alpha,\ |\alpha| \le k,\ \exists D^\alpha u \text{ debole appartenente ad } L^p(U)\}$$

sui quali è ben definita la norma

$$||u|| := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{|\alpha| \le k} \int_U |D^\alpha u|^p dx} & (1 \le p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \le k} sup\, ess_U |D^\alpha u|^p & (p = \infty) \end{cases}$$

grazie alla quale gli spazi di Sobolev sono spazi di Banach. In particolare, per $p = 2$, $H^k(U) := W^{k,2}(U)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$\langle u, v \rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_U D^\alpha u \, D^\alpha v \; dx$$

iii) Osservando che $C_c^\infty(U) \subset W^{k,p}(U)$ denotiamo con $W_0^{k,p}(U)$ la chiusura metrica di $C_c^\infty(U)$ in $W^{k,p}(U)$, ovvero $u \in W_0^{k,p}(U)$ se e solo se esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(U)$ tale che $u_n \to u$ in norma $W^{k,p}(U)$.
In generale useremo la notazione $H_0^k(U) = W_0^{k,p}(U)$.

Teorema 1.0.2 (Proprietà delle derivate deboli)**.** *Assumiamo $u, v \in W^{k,p}(U)$, α multi-indice con $|\alpha| \le k$, allora:*

i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ per ogni multi-indici α, β con $|\alpha| + |\beta| \le k$.

ii) Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \le k$.

iii) Se V è un sottoinsieme aperto di U, allora $W^{k,p}(U) \subset W^{k,p}(V)$

iv) Se $\zeta \in C_c^\infty(U)$, allora $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ e, per $|\alpha| \leq k$:

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \zeta \, D^{\alpha-\beta} u \quad \textit{(Formula di Leibniz)} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. 1. Per mostrare *i*) prendiamo $\phi \in C_c^\infty(U)$, così anche $D^\beta \phi \in C_c^\infty(U)$ e mostriamo che $D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u)$ in senso debole:

$$\begin{aligned}\int_U D^\alpha u \, D^\beta \phi \, dx &= (-1)^{-|\alpha|} \int_U u \, D^{\alpha+\beta} \phi \, dx \\ &= (-1)^{-|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_U \phi \, D^{\alpha+\beta} u \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U \phi \, D^{\alpha+\beta} u \, dx\end{aligned}$$

2. I punti *ii*) e *iii*) si mostrano molto semplicemente sfruttando le proprietà dell'integrale di Lebesgue.
3. Il punto *iv*) deriva direttamente dalla formula di Leibniz applicata su ogni $|\alpha| \leq k$, proviamo quindi (1.2) per induzione su $|\alpha|$: supponiamo $|\alpha| = 1$ e ricordando $\zeta \in C_c^\infty(U)$, prendiamo $\phi \in C_c^\infty(U)$, allora:

$$\begin{aligned}\int_U \zeta u D^\alpha \phi \, dx &= \int_U u(D^\alpha(\zeta\phi) - u\,(D^\alpha\zeta)\phi) \, dx \\ &= -\int_U (\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta)\phi \, dx\end{aligned}$$

In questo modo otteniamo che $D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha(\zeta)$, la formula di Leibniz per $|\alpha| = 1$, ed inoltre $\zeta u \in W^{|\alpha|,p}(U)$. Per induzione supponiamo che la formula di Leibniz valga per qualsiasi $|\alpha| \leq l < k$. Scegliamo un multi-indice α con $|\alpha| = l + 1$, è possibile esprimerlo nella forma $\alpha = \beta + \gamma$ per qualche $|\beta| = l$ e $|\gamma| = 1$. Sia ϕ come sopra e vediamo che:

$$\begin{aligned}\int_U \zeta u D^\alpha \phi \, dx &= \int_U \zeta u D^\beta(D^\gamma \phi) \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi \, dx\end{aligned}$$

(per ipotesi induttiva su β)

$$= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u) \phi \, dx$$

(per ipotesi induttiva)

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^\rho \zeta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u] \phi \, dx$$

(dove $\rho = \sigma + \gamma$)

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} [D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u \right] \phi \, dx$$

dova alla fine abbiamo fruttato che $\binom{\beta}{\sigma-\gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}$. □

Segue un importante teorema di approssimazione delle funzioni di $W^{k,p}$ che sarà utile in futuro:

Teorema 1.0.3 (Teorema di Meyers-Serrin)**.** *Sia* $1 \leq p < \infty$ *allora* $C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ *è denso in* $W^{k,p}(U)$

Definizione 1.6 (Immersione compatta)**.** Siano X e Y due spazi di Banach, $X \subset Y$, diciamo che X è immerso in modo compatto in Y, e scriveremo

$$X \subset\subset Y$$

se

i) $\exists\, C > 0$ per cui $||x||_Y \leq C\, ||x||_X \quad (x \in X)$,

ii) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ limitata in $X \implies \overline{\{x_n\}_{n=1}^\infty}^Y$ compatto in Y. Oppure, equivalentemente, ogni successione $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ convergente in Y.

Teorema 1.0.4 (Teorema di compattezza di Rellich-Kondrakov)**.**

i) Assumiamo $U \subset \mathbb{R}$ *aperto e limitato con* $\partial(U)$ C^1*. Supponiamo* $1 \leq p < n$*. Allora*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

per ogni $1 \leq q < p^* := \frac{np}{n-p}$

ii) Osservando che $p^* \xrightarrow{p \to n} +\infty$ *abbiamo che*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

iii) Inoltre

$$W_0^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

anche se non si assume la frontiera $\partial(U)$ C^1

Teorema 1.0.5. *i) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ limitato con frontiera ∂U C^1. Allora esiste un operatore lineare limitato*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(U)$$
$$u \mapsto Tu$$

tale che $Tu = u|_{\partial U}$ se $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$. Chiamiamo *Tu la traccia di u su ∂U.*

ii) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ limitato, con ∂U C^1 e sia $u \in W^{k,p}(U)$. Allora avremmo che

$$u \in W_0^{k,p}(U) \iff Tu = 0$$

1.1 Problema al bordo

A questo punto possiamo iniziare a definire il problema al bordo che andremo a studiare.

Definizione 1.7. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, sia L un operatore alle derivate parziali del secondo ordine della forma di divergenza:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{i,j}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=i}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{1.3}$$

dove $a^{i,j}, b^i, c$ sono coefficienti misurabili tali che $a^{i,j} = a^{j,i} \quad (i, j = 1, \dots, n)$.
Diremo che L è (uniformemente) ellittico se esiste una constante $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{1.4}$$

per q.o $x \in U$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Sia ora L come sopra ed $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione data, in seguito studieremo principalmente la risolvibilità e la regolarità delle soluzioni del problema al bordo:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{1.5}$$

e del relativo problema omogeneo:

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{1.6}$$

dove $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ sarà la nostra incognita, intendendo con $u = 0$ su ∂U che la traccia $Tu = 0$.

Esempio 1.1. Un esempio molto semplice lo si ottiene con $a^{i,j} = \delta_{ij}$ e $b^i = c = 0$. Vediamo che è verificata la condizione di ellitticità con $\theta = 1$ poiché

$$\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{i,j}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = |\xi|^2$$

In questo caso $Lu = -\Delta u$ ottenendo così l'equazione di Laplace.

Consideriamo adesso il problema generico al bordo (1.5), per poterne studiare in modo efficace le soluzioni ne costruiamo una formulazione debole. Assumiamo che $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$ $(i, j = 1, \dots, n)$, $f \in L^2(U)$ e che u sia una soluzione liscia. Moltiplicando il PDE $Lu = f$ per una funzione test $v \in C_c^\infty(U)$ ed integrando in U otteniamo un'identità che richiede alla soluzione u un solo ordine di derivazione:

$$\begin{aligned} \int_U Lu\, v\, dx &= \int_U fv\, dx \\ \Longrightarrow \int_U -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{i,j}u_{x_i}\right)_{x_j} v + \sum_{i=i}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv\, dx &= \int_U fv\, dx \\ \Longrightarrow \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=i}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv\, dx &= \int_U fv\, dx \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove abbiamo integrato per parti il primo addendo sfruttando il fatto che v è nulla su ∂U. A questo punto, ricordando che se $v \in H_0^1(U)$ esiste una successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(U)$ che converge in norma $H_0^1(U)$ a v, allora l'identità (1.7) vale $\forall v \in H_0^1(U)$.
Quindi, grazie a (1.0.5), possiamo incorporare la condizione al bordo $u = 0$ su ∂U alla richiesta dell' esistenza di un solo ordine di derivate per u semplicemente richiedendo che $u \in H_0^1(U)$.
Viene così naturale la seguente definizione di soluzione debole di (1.5):

Definizione 1.8 (Soluzioni deboli del problema)**.** Siano $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$, $f \in L^2(U)$ allora

i) $\forall u, v \in H_0^1(U)$ definiamo la forma bilineare $B[\cdot\,, \cdot]$ associata all'operatore ellittico L in forma di divergenza come:

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=i}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv\, dx$$

ii) Diremo che $u \in H_0^1(U)$ è una soluzione debole del problema al bordo (1.5) se $\forall v \in H_0^1(U)$

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle$$

dove indichiamo con $\langle f, g\rangle = \int_U fg\, dx$ il prodotto scalare interno di $L^2(U)$.

1.2 Teorema di Lax-Milgram

Ora introduciamo un principio per i funzionali lineari che servirà a dimostrare l'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli di problemi vicini al problema al bordo (1.5). Assumiamo in questa sessione che H sia un spazio di Hilbert su campo reale, con norma $||\cdot||$ generata dal prodotto scalare $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_H$. Indichiamo inoltre con H^* lo spazio duale di H, ovvero l'insieme dei funzionali lineari limitati $T : H \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.1 (Teorema di Rappresentazione di Riesz)**.** $\forall\, T \in H^*,\ \exists!\, u_T \in H$ *tale per cui*

$$\begin{array}{lll} i) & T(v) & = \langle u_T, v\rangle_H \quad \forall\, v \in H \\ ii) & ||T||_{H^*} & = ||u_T||_H \end{array}$$

Dimostrazione. Fissiamo un qualsiasi $u \in H$ e consideriamo il funzionale $\langle \cdot, u\rangle_H : H \to \mathbb{R}$. Dato che

$$|\langle v, u\rangle_H| \leq ||v||_H\, ||u||_H$$

allora è sicuramente un funzionale lineare e limitato con norma $||\langle \cdot, u\rangle_H||_{H^*} \leq ||u||_H$ ma vale anche che

$$||\langle \cdot, u\rangle_H||_{H^*} = \sup_{||v||_H \leq 1} \frac{|\langle v, u\rangle_H|}{||v||_H} \geq |\langle \frac{u}{||u||_H}, u\rangle_H| = ||u||_H$$

e quindi $||\langle \cdot, u\rangle_H||_{H^*} = ||u||_H$ dimostrando cosi $ii)$.
Prendiamo ora $T \in H^*$ ($T \neq 0$ altrimenti il teorema è valido con $u_T = 0$) definiamo lo spazio vettoriale $M := Ker(T)$.
Essendo T continuo e $M = T^{-1}(\{0\})$ allora M è chiuso e dato che $T \neq 0$ allora $M^\perp \neq \{0\}$. Ovviamente il u_T cercato dovrà appartenere a $M^\perp$ dato che deve valere che $T(u_T) = ||u_T||^2$, lo cerchiamo quindi della forma

$$u_T = T(z_0)z_0 \quad \text{per un certo } z_0 \in M^\perp,\ ||z_0||_H = 1$$

Dato che per il teorema di proiezione negli spazi di Hilbert $H = M \oplus M^\perp$ posso scrivere ogni vettore di H come $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in M$ e $v_2 \in M^\perp$. Forzando a questo punto che $v_2 = C\, z_0$ per una certa costante C, otteniamo che $T(v) = T(v_1) + C\, T(z_0) = C\, T(z_0)$ e quindi $C = \frac{T(v)}{T(z_0)}$. Ricapitolando, possiamo così scrivere un generico v come:

$$v = \underset{\substack{\Cap \\ M^\perp}}{\frac{T(v)}{T(z_0)}z_0} + \underset{\substack{\Cap \\ M}}{(v - \frac{T(v)}{T(z_0)}z_0)}$$

in questo modo

$$
\begin{aligned}
\langle v, u_T \rangle &= \langle \frac{T(v)}{T(z_0)} z_0 \,,\, u_T \rangle + \langle v - \frac{T(v)}{T(z_0)}\, z_0 \,,\, u_T \rangle \\
&= \langle \frac{T(v)}{T(z_0)}\, z_0 \,,\, T(z_0)\, z_0 \,\rangle \\
&= \frac{T(v)\, T(z_0)}{T(z_0)}\, ||z_0|| = T(v)
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 1.2.2 (Teorema di Lax-Milgram)**.** *Assumiamo che*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

sia un forma bilineare per cui $\exists\, \alpha, \beta > 0$ *tali che:*

$$
\begin{array}{lll}
Hp.\ i) & |B[u, v]| \le \alpha ||u|| ||v|| & \forall\, u, v \in H \\
Hp.\ ii) & \beta ||u||^2 \ \ \le B[u, u] & \forall\, u \in H
\end{array}
$$

Infine, sia $f : H \to \mathbb{R}$ *una funzione lineare e limitata. Allora* $\exists!\, \bar{u} \in H$ *tale che*

$$B[\bar{u}, v] = f(v) \qquad \forall v \in H \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente un elemento $u \in H$ e verifichiamo che la mappa $v \mapsto B[u, v]$ è lineare e limitate. La linearità deriva direttamente dalla bilinearità di $B[\cdot\, , \cdot]$, mentre per la limitatezza vedo che grazie ad $Hp.\ i)$ ho che

$$|B[u, v]| \le (\, \alpha ||u||\,) ||v|| = C ||v|| \quad \forall\, v \in H$$

A questo punto per il teorema di Riesz 1.2.1 $\exists!\, w = w(u) \in H$ *tc.* $B[u, v] = \langle w, v \rangle_H$, $\forall\, v \in H$. Possiamo così definire un funzionale

$$
\begin{aligned}
A : H &\longrightarrow H \\
u &\longmapsto Au := w
\end{aligned}
$$

cosicché per ogni $v \in H$ vale che $B[u, v] = \langle Au, v \rangle_H$. Verifichiamo essere lineare e limitato: $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\, , \forall\, u_1, u_2, v \in H$

$$
\begin{aligned}
\langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle_H &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\
&= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\
&= \lambda_1 \langle Au_1, v \rangle_H + \lambda_2 \langle Au_2, v \rangle_H \\
&= \langle \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v \rangle_H
\end{aligned}
$$

Questa identità vale per qualsiasi $v \in H$ allora necessariamente $A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2$, così A è lineare. Per la limitatezza vediamo che

$$||Au||^2 = \langle Au, Au\rangle_H = B[u, Au] \leq \alpha ||u|| \, ||Au|| \quad (\,per\, Hp.\ i)\,)$$

da cui si ottiene che $||Au|| \leq \alpha ||u||$, $\forall\, u \in H$, così A è limitato. Ora vediamo che A è iniettivo e che $Im(A)$ è chiusa in H.
Per fare questo osserviamo che

$$\beta ||u||^2 \leq B[u,u] = \langle Au, u\rangle_H \leq ||Au|| \, ||u|| \quad \text{da cui}$$

$$0 \leq \beta ||u|| \leq ||Au||$$

1) A questo punto, $Au = 0 \implies ||Au|| = 0 \implies ||u|| = 0 \implies u = 0$, e quindi A è iniettiva.

2) Per verificare la chiusura dell'immagine, prendo una successione $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Im(A)$ convergente a v in H, essa è allora una successione di Cauchy, cioè $||A(u_n - u_m)|| = ||Au_n - Au_m|| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ e, così come sopra, ciò implica che $||u_n - u_m|| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$, cioè $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in H. Essendo però H uno spazio completo, ogni successione di Cauchy è convergente, cioè $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un elemento di H che chiamiamo u. A questo punto, utilizzando la continuità di A e l'unicità del limite, otteniamo che $v = Au \in Im(H)$, e quindi abbiamo che $Im(A)$ è chiusa in H.

Dimostriamo infine la suriettività di A. Se per assurdo $Im(A) \neq H$, dato che $Im(A)$ è chiuso vale che $H = Im(A) \oplus Im(A)^\perp$, allora esisterebbe un elemento non nullo $w \in Im(A)^\perp$. Questo però implica la contraddizione: $0 < \beta ||w||^2 \leq B[w,w] = \langle Aw, w\rangle_H = 0$.

Abbiamo così fatto vedere che A è lineare, limitato e biunivoco.
Dato che $f \in H^*$, per il teorema di Riesz, $\exists\, \bar{w} \in H$ tc

$$f(v) = \langle \bar{w}, v\rangle_H \quad (v \in H)$$

Ora sappiamo che $\exists\, \bar{u} \in H$ per cui $A\bar{u} = \bar{w}$ cosicché

$$B[\bar{u}, v] = \langle A\bar{u}, v\rangle_H = \langle \bar{w}, v\rangle_H = f(v) \quad (v \in H)$$

Per concludere dimostriamo l'unicità di $\bar{u}$. Se, infatti, per assurdo esistessero $\bar{u}, \tilde{u} \in H$ per cui $\forall v \in H$, $B[\bar{u}, v] = f(v) = B[\tilde{u}, v]$, allora $B[\bar{u} - \tilde{u}, v] = 0$. A questo punto scegliendo $v = \bar{u} - \tilde{u}$ troviamo $0 \leq \beta ||\bar{u} - \tilde{u}||^2 \leq B[\bar{u} - \tilde{u}, \bar{u} - \tilde{u}] = 0$ il che implica che $\bar{u} = \tilde{u}$. □

1.3 Stime Energetiche

Torniamo adesso a considerare la specifica forma bilineare B definita come

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=i}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv \, dx$$

per $u, v \in H_0^1(U)$ e cerchiamo di verificare le ipotesi del teorema di Lax–Milgram così da poter dimostrare l'esistenza di soluzioni deboli del problema (1.5)

Teorema 1.3.1 (Stime energetiche)**.** *$\exists\, \alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tc. $\forall\, u, v \in H_0^1(U)$*

i)
$$|B[u,v]| \leq \alpha ||u||_{H_0^1(U)}\, ||v||_{H_0^1(U)}$$

ii)
$$\beta ||u||^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma ||u||^2_{L^2(U)}$$

Per la dimostrazione del teorema ci serviremo di queste disuguaglianze di Cauchy:

Lemma 1.3.2 (Disuguaglianze di Cauchy)**.**

$$1) \qquad ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ □

$$2) \qquad ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \qquad a, b > 0, \epsilon > 0$$

Dimostrazione. Scriviamo $ab = ((2\epsilon)^{1/2} a) \left(\frac{b}{(2\epsilon)^{1/2}} \right)$ ed applichiamo la disuguaglianza sopra. □

Dimostrazione del teorema. 1. Ricordando che stiamo considerando $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$, $f \in L^2(U)$. Tralasciando per questioni di comodità la dipendenza da x, otteniamo

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \int_U \sum_{i,j=1}^n |a^{i,j}||u_{x_i}||v_{xj}|\, dx + \int_U \sum_{i=1}^n |b^i||u_{x_i}||v|\, dx + \int_U |c||u||v|\, dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n ||a^{i,j}||_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_i}||v_{xj}|\, dx + \sum_{i=1}^n ||b^i||_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_i}||v|\, dx + \\
&\qquad + ||c||_{L^\infty(U)} \int_U |u||v|\, dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n ||a^{i,j}||_{L^\infty(U)} \int_U |Du||Dv|\, dx + \sum_{i=1}^n ||b^i||_{L^\infty(U)} \int_U |Du||v|\, dx + \\
&\qquad + ||c||_{L^\infty(U)} \int_U |u||v|\, dx \\
&\leq c\, ||\, |Du|\, ||_{L^2(U)}\, ||\, |Dv|\, ||_{L^2(U)} + c\, ||\, |Du|\, ||_{L^2(U)}\, ||v||_{L^2(U)} + c\, ||u||_{L^2(U)}\, ||v||_{L^2(U)} \\
&\leq 3c\, ||u||_{H_0^1(U)}\, ||v||_{H_0^1(U)}
\end{aligned}$$

Useremo in generale la lettera 'c' minuscola e maiuscola per indicare constanti positive delle quali non ci importa il valore effettivo. Nel nostro caso, dato che per condizione di ellitticità $||a^{k,k}||_{L^\infty(U)} > 0$, chiamando $\alpha = 3c > 0$ abbiamo dimostrato la prima parte del teorema.

2. Per la seconda parte della dimostrazione sfruttiamo l'ellitticità di L

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R},\, q.o.\, x \in U$$

per un certo $\theta > 0$. Da questa formula, scegliendo $\xi = Du(x)$ ed integrando su tutto U otteniamo:

$$\begin{aligned}
0 < \theta \int_U |Du|^2\, dx \leq & \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} u_{x_i} u_{x_j}\, dx \\
& = B[u,u] - \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u + cu^2\, dx \\
& \leq B[u,u] + \left| \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u + cu^2\, dx \right| \\
& \leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty(U)} \int_U |Du||u|\, dx + ||c||_{L^\infty(U)} \int_U u^2\, dx
\end{aligned}$$

Se $\sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty(U)} = ||c||_{L^\infty(U)} = 0$ allora si può saltare al passo 3 e così si dimostra la seconda parte del teorema per $\gamma = 0$.

Altrimenti si utilizza la disuguaglianza di Cauchy con ϵ:

$$\int_U |Du|\,|u|\, dx \leq \epsilon \int_U |Du|^2\, dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_U u^2\, dx \quad \forall\, \epsilon > 0$$

Scegliendo quindi $\epsilon > 0$ in modo che

$$\epsilon \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty(U)} \leq \frac{\theta}{2}$$

Otteniamo, unendo le stime precedenti:

$$\begin{aligned}
\theta \int_U |Du|^2\, dx \leq & B[u,u] + \epsilon \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty(U)} \int_U |Du|^2\, dx + \frac{1}{4\epsilon} \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty(U)} \int_U u^2\, dx\, + \\
& + ||c||_{L^\infty(U)} \int_U u^2\, dx \\
& \leq B[u,u] + \frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2\, dx + \big(\frac{\theta}{8\epsilon^2} + ||c||_{L^\infty(U)}\big) \int_U u^2\, dx
\end{aligned}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2\,dx \le B[u,u] + C\int_U u^2\,dx \\
\Longrightarrow\quad &\frac{\theta}{2}||\,|Du|\,||^2_{L^2(U)} \le B[u,u] + C||u||^2_{L^2(U)}
\end{aligned}
$$

3. Utilizzando infine la disuguaglianza di Poincarè

$$||u||^2_{L^2(U)} \le C_U\,||\,|Du|\,||^2_{L^2(U)}$$

e scegliendo $\beta = \frac{\theta}{2(C_U+1)} > 0$ otteniamo che

$$
\begin{aligned}
\beta||u||^2_{H^1_0(U)} = \beta||u||^2_{L^2(U)} + \beta||\,|Du||\,||^2_{L^2(U)} &\le \beta C_U||\,|Du\,||^2_{L^2(U)} + \beta||\,|Du|\,||^2_{L^2(U)} \\
&= \beta(C_U+1)||\,|Du|\,||^2_{L^2(U)} \\
&= \frac{\theta}{2}||\,|Du|\,||^2_{L^2(U)} \\
&\le B[u,u] + C||u||^2_{L^2(U)}
\end{aligned}
$$

Quindi è dimostrato $ii)$ con $\gamma = C > 0$. □

Osserviamo però che vengono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lax-Milgram solo nel caso in cui $\gamma = 0$, se invece $\gamma > 0$ possiamo considerare un problema vicino e verificarne esistenza e unicità di soluzioni deboli.

Capitolo 2

Teoremi di esistenza e unicità di soluzioni deboli

2.1 Primo teorema di esistenza e unicità

Teorema 2.1.1 (Primo teorema di esistenza per soluzioni deboli)**.** *$\exists\,\gamma \geq 0$ tc. $\forall\,\mu \geq \gamma$ e $\forall\, f \in L^2(U)$, $\exists!\, u \in H_0^1(U)$ soluzione debole del problema al bordo:*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & in\ U \\ \quad\quad u = 0 & in\ \partial U \end{cases} \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Prendiamo γ del teorema delle stime energetiche 1.3.1, fissiamo $\mu \geq \gamma$ e definiamo una nuova forma bilineare:

$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu\langle u,v\rangle \quad \forall\, u,v \in H_0^1(U)$$

sottintendendo sempre con $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ il prodotto scalare di $L^2(U)$. La forma bilineare B_μ è associata, come abbiamo fatto vedere nella definizione 1.8 , all'operatore $L_\mu := Lu + \mu u$, infatti moltiplicando per $v \in C_c^\infty(U)$ ed integrando in U otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_U -\sum_{i,j=1}^n \left(a^{i,j}u_{x_i}\right)_{x_j} v + \sum_{i=i}^n b^i u_{x_i} v + (c+\mu)uv\,dx = \int_U fv\,dx \\ \implies \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=i}^n b^i u_{x_i} v + (c+\mu)uv\,dx = \int_U fv\,dx \\ \implies B[u,v] + \int_U \mu uv\,dx = \langle f,v\rangle \\ \implies B_\mu[u,v] = \langle f,v\rangle \end{aligned}$$

Quindi $u \in H_0^1(U)$ è soluzione debole del problema (2.1) se e solo se $\forall\, v \in H_0^1(U)$, $B_\mu[u,v] = \langle f,v\rangle$.

Utilizzando α e β delle stime energetiche su B, verifichiamo adesso le ipotesi di Lax-Milgram per B_μ:

1)
$$\begin{aligned}|B_\mu[u,u]| &\leq |B[u,v]| + \mu \int_U |u||v|\,dx \\ &\leq |B[u,v]| + \mu||u||_{L^2(U)}||v||_{L^2(U)} \\ &\leq \alpha||u||_{H_0^1(U)}||v||_{H_0^1(U)} + \mu||u||_{H_0^1(U)}||v||_{H_0^1(U)} \\ &= (\alpha+\mu)||u||_{H_0^1(U)}||v||_{H_0^1(U)}\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\beta||u||^2_{H_0^1(U)} &\leq B[u,u] + \gamma||u||^2_{L^2(U)} \\ &= B_\mu[u,u] - \mu||u||^2_{L^2(U)} + \gamma||u||^2_{L^2(U)} \\ &= B_\mu[u,u] + (\gamma-\mu)||u||^2_{L^2(U)} \\ &\leq B_\mu[u,u]\end{aligned}$$

Prendiamo $f \in L^2(U)$ e consideriamo il seguente funzionale:

$$\begin{aligned}\langle f,\cdot\rangle \ : \ H_0^1(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle f,v\rangle\end{aligned}$$

$\langle f,\cdot\rangle$ è ovviamente lineare, per la limitatezza vediamo che:

$$|\langle f,v\rangle| \leq ||f||_{L^2(U)}\,||v||_{L^2(U)} \leq ||f||_{L^2(U)}\,||v||_{H_0^1(U)}$$

Ci è consentito quindi applicare Lax-Milgram su B_μ e $\langle f,\cdot\rangle$, ovvero $\exists!\, u \in H_0^1(U)$ tale che:

$$B_\mu[u,v] = \langle f,v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(U)$$

e quindi per definizione u è l'unica soluzione debole del problema (2.1) □

Osservazione 2.1.1. Questo primo teorema di esistenza e unicità fornisce già un importante risultato: sappiamo che $\forall \mu \leq \gamma$ delle stime energetiche, il problema

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{2.2}$$

è sicuramente risolvibile. Vedremo formalmente con il secondo teorema di esistenza e unicità che, se $\mu < \gamma$, può mancare sia l'unicità sia l'esistenza di una soluzione. Vediamo subito con questo esempio come può mancare l'unicità:

Esempio 2.1. Riconsideriamo l'operatore $Lu = -\Delta u$ definito su $U = (0,\pi)\times(0,\pi)$. Essendo nulle b^i e c sappiamo che $\gamma = 0$. Prendiamo $u(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ allora:

$$\begin{aligned}-\Delta u &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \sin(x)\sin(y) + \sin(x)\sin(y) = 2u\end{aligned}$$

e dato che $u(0,t) = u(t,0) = u(\pi,t) = u(t,\pi) = 0$ per $t \in [0,\pi]$ allora $u_{|\partial U} = 0$. Quindi abbiamo verificato che u è soluzione del problema al bordo:

$$\begin{cases} -\Delta u - 2u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{2.3}$$

dove quindi $\mu = -2 < 0 = \gamma$ e quindi ad ogni soluzione particolare u_f del problema non omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u - 2u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{2.4}$$

avremmo che $u + u_f$ sarebbe un'altra possibile soluzione, perdendo così l'unicità.

2.2 Alternativa di Fredholm

Per raggiungere migliori risultati ed informazioni sulla risolvibilità delle equazioni ellittiche abbiamo bisogno di introdurre la teoria di Fredholm per gli operatori compatti. Iniziamo con una serie di definizioni per operatori.

Definizione 2.1 (Operatore aggiunto)**.** Sia H uno spazio di Hilbert ed $A : H \to H$ un operatore lineare limitato. Provvediamo adesso di costruire un secondo operatore: sia $v \in H$ e consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} \langle A\cdot, v\rangle_H : H &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto \langle Aw, v\rangle_H \end{aligned}$$

essa è sia lineare sia limitata allora, utilizzando il teorema di Riesz 1.2.1 $\exists\, w = w(A,v)$ tc.

$$\langle Au, v\rangle_H = \langle u, w\rangle_H \quad \forall\, u \in H$$

è così ben definito l'operatore

$$\begin{aligned} A^* : H &\to H \\ v &\mapsto A^*v := w \end{aligned}$$

il che soddisfa $\langle Au, v\rangle_H = \langle u, A^*v\rangle_H$, $\forall\, u, v \in H$. Chiamiamo così A^* *l'operatore aggiunto di* A.

Proposizione 2.2.1. *Se $A : H \to H$ è un operatore lineare e limitato, allora lo è anche A^*.*

Dimostrazione. 1) $\forall\, u, v \in H$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora,

$$\begin{aligned} \langle A^*[\lambda u + \mu v], w\rangle_H &= \langle \lambda u + \mu v, Aw\rangle_H \\ &= \lambda\langle u, Aw\rangle_H + \mu\langle v, Aw\rangle_H \\ &= \lambda\langle A^*u, w\rangle_H + \mu\langle A^*v, w\rangle_H \\ &= \langle \lambda A^*u + \mu A^*v, w\rangle_H \quad \forall\, w \in H \end{aligned}$$

e quindi $A^*[\lambda u + \mu v] = \lambda A^* u + \mu A^* v$.

2)
$$\begin{aligned} ||A^*u||^2 = \langle A^*u, A^*u\rangle_H &= \langle AA^*u, u\rangle_H \\ &\leq ||AA^*u||\,||u|| \\ &\leq ||A||\,||u||\,||A^*u|| \end{aligned}$$

Allora $||A^*u|| \leq ||A||\,||u||\,,\ \forall\, u \in H$. □

Definiamo adesso cosa intendiamo per operatore compatto, che ci servirà nel teorema di Fredholm

Definizione 2.2. Siano X, Y spazi di Banach reali e $K : X \to Y$ un operatore lineare. K si dice *compatto* se $\forall\, \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ limitata, la successione $\{Ku_n\}_{n=1}^{\infty}$ è precompatta in Y, ovvero se ha chiusura compatta in Y o equivalentemente, se esiste una sottosuccessione $\{u_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tale per cui $\{Ku_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ sia convergente in Y.

Proposizione 2.2.2. *i) Un operatore lineare compatto è anche limitato*

ii) Se $u_k \rightharpoonup u$, allora $Ku_k \to Ku$.

iii) Se H è uno spazio di Hilbert, $K : H \to H$ lineare e compatto, allora lo è anche $K^* : H \to H$.

Dimostrazione. i-ii) La seconda asserzione deriva direttamente dalla prima poiché se K è limitato allora è un operatore continuo. Per la prima, invece, procedendo per assurdo abbiamo che $\forall\, n\ \exists\, x_n$ *tc.* $||Kx_n|| > n||x_n||$. Ponendo $\tilde{x_n} = \frac{x_n}{||x_n||}$ otteniamo $||K\tilde{x_n}|| = \frac{||Kx_n||}{||x_n||} > n$, rinominando si ricava che $\exists\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ ||x_n|| = 1$ tc. $||Kx_n|| \to \infty$. Ma per compattezza di K, $\exists \{Kx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente, e questo è assurdo.

iii) Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in H, vogliamo trovarne una sottosuccessione per cui $K^*u_{k_j} \to K^*u$. Essendo H riflessivo, per il teorema 1.0.1 possiamo estrarre una sottosuccessione debolmente convergente $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in H. L'obiettivo è quello di provare che $K^*u_{k_j} \to K^*u$.

$$\begin{aligned} ||K^*u_{k_j} - K^*u||^2 &= \langle K^*u_{k_j} - K^*u, K^*(u_{k_j} - u)\rangle_H \\ &= \langle KK^*u_{k_j} - KK^*u, u_{k_j} - u\rangle_H. \end{aligned}$$

Ora, essendo K^* lineare e limitato, allora anche $K^*u_{k_j} \rightharpoonup K^*u$ su H, e quindi $KK^*u_{k_j} \to KK^*u$.

□

Teorema 2.2.3 (Alternativa di Fredholm)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e $K : H \to H$ un operatore lineare e compatto. Allora valgono:*

1) $Ker(I - K)$ ha dimensione finita,

2) $Im(I-K)$ è chiusa in H,

3) $Im(I-K) = Ker(I-K^*)^{\perp}$,

4) $Ker(I-K) = \{0\} \iff Im(I-K) = H$,

5) $dim\,Ker(I-K) = dim\,Ker(I-K^*)$.

Corollario 2.2.4. *i) Il precedente teorema di Fredholm in particolare afferma che o*

(α) $\forall\, f \in H,\ \exists!\, u$ soluzione dell'equazione $u - Ku = f$

oppure

(β) $\exists\, u \neq 0$ soluzione dell'equazione omogenea $u - Ku = 0$

ii) Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $u - Ku = 0$ ha dimensione finita ed equivale quella dello spazio delle soluzioni di $v - K^*v = 0$

iii) Infine esiste una soluzione dell'equazione $u-Ku = f$ se e solo se $f \in Ker(I-K^*)^{\perp}$.

Dimostrazione. (β) corrisponde al caso in cui $Ker(I-K) \neq \{0\}$ mentre dal caso $Ker(I-K) = \{0\}$ si deduce (α) utilizzando *4*).
ii) si deduce direttamente da *1*) e da *5*) ed infine *iii*) si deriva da *3*). □

Definizione 2.3. i) Definiamo L^*, *l'operatore autoaggiunto di* L, come:

$$L^*v := -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{i,j}v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=i}^{n} b^i v_{x_i} + (c - \sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i})v$$

a patto che $b^i \in C^1(\bar{U}) \quad (i = 1, \dots, n)$.

ii) La *forma bilineare auto aggiunta*

$$\begin{aligned} B^* :\ H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [v,u] &\mapsto B[u,v] \quad \forall\, u, v \in H^1_0(U) \end{aligned}$$

Analogamente a come abbiamo fatto per B associato ad L, si dimostra che B^* è associato all'operatore L^*, quindi

iii) Diremo che $v \in H^1_0(U)$ *è soluzione debole del problema autoaggiunto* L^*

$$\begin{cases} L^*u = f & \text{in } U \\ \quad u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{2.5}$$

se $B^*[v,u] = \langle f, u\rangle \quad \forall\, u \in H^1_0(U)$.

2.3 Secondo teorema di esistenza e unicità

Teorema 2.3.1 (Secondo teorema di esistenza di soluzioni deboli).

i) Vale una delle due affermazioni seguenti:

$$(\alpha)\begin{cases}\forall\, f \in L^2(U),\ \exists!\, u \text{ soluzione debole} \\ di \begin{cases} Lu = f & in\ U \\ u = 0 & in\ \partial U\end{cases} \quad (1.5)\end{cases} \qquad (\beta)\begin{cases}\exists\, u \neq 0 \text{ soluzione debole} \\ di \begin{cases} Lu = 0 & in\ U \\ u = 0 & in\ \partial U\end{cases} \quad (1.6)\end{cases}$$

ii) Se è verificata (β)*, allora la dimensione del sottospazio* $\mathcal{N} \subset H_0^1(U)$ *delle soluzioni del problema omogeneo è finita ed equivale alla dimensione di* $\mathcal{N}^*$*, spazio della soluzioni di* $\begin{cases} L^*u = 0 & in\ U \\ u = 0 & in\ \partial U\end{cases}$

iii) Inoltre $\begin{cases} Lu = f & in\ U \\ u = 0 & in\ \partial U\end{cases}$ *ha soluzione debole* $\iff \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{N}^*$.

Dimostrazione. Sappiamo già grazie al teorema 2.1.1 che se $\gamma = 0$ allora è verificata (α) e quindi consideriamo solo il caso $\gamma > 0$. Similmente alla dimostrazione del Teorema 2.1.1 prendiamo $\mu = \gamma$ e definiamo la forma bilineare

$$B_\gamma[u,v] := B[u,v] + \gamma\langle u,v\rangle \quad \forall\, u,v \in H_0^1(U)$$

corrispondente all'operatore $L_\gamma u := Lu + \gamma u$. A questo punto sappiamo per Lax-Milgram che

$$\forall\, g \in L^2(U),\ \exists!\, u = u(g) \in H_0^1(U) \text{ tale che } B_\gamma[u,v] = \langle g, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(U) \tag{2.6}$$

Scriviamo in questo senso $u = L_\gamma^{-1} g$.
Supponiamo che $\exists\, u \in H_0^1(U)$ soluzione debole del problema (1.5), conseguentemente lo è anche del problema

$$\begin{cases} L_\gamma u = \gamma u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U\end{cases}$$

ovvero solo se u soddisfa

$$B_\gamma[u,v] = \langle \gamma u + f, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(U). \tag{2.7}$$

Dato che stiamo supponendo l'esistenza di u, la funzione $\gamma u + f$ è ben definita ed utilizzando (2.6), sappiamo che $\exists!\, \tilde{u}$ per cui $B_\gamma[\tilde{u}, v] = \langle \gamma u + f, v\rangle$, $\forall\, v \in H_0^1(U)$. Ma u soddisfa anche (2.7), quindi

$$\begin{aligned} &B_\gamma[\tilde{u}, v] = B_\gamma[u,v] \quad \forall\, v \in H_0^1(U) \\ &\implies \tilde{u} = u \\ &\implies u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f). \end{aligned}$$

Vediamo adesso che $L_\gamma^{-1} : L^2(U) \to H_0^1(U)$ è lineare: $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, f, g \in L^2(U)$

$$\begin{aligned}
B_\gamma[L_\gamma^{-1}(\alpha f + \beta g), v] &= \langle \alpha f + \beta g, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(U)\\
&= \alpha\langle f, v\rangle + \beta g, v\rangle\\
&= \alpha B_\gamma[L_\gamma^{-1}(f), v] + \beta B_\gamma[L_\gamma^{-1}(g), v]\\
&= B_\gamma[\alpha L_\gamma^{-1}(f) + \beta L_\gamma^{-1}(g), v]
\end{aligned}$$

$$\implies L_\gamma^{-1}(\alpha f + \beta g) = \alpha L_\gamma^{-1}(f) + \beta L_\gamma^{-1}(g)$$

Quindi $u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) = \gamma L_\gamma^{-1} u + L_\gamma^{-1} f$. Definendo

$$\begin{aligned}
K : L^2(U) &\to L^2(U) \qquad\qquad h := L_\gamma^{-1} f\\
g &\mapsto Kg := \gamma L_\gamma^{-1} g
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto che $\exists\, u \in H_0^1(U)$ soluzione debole di (1.5) solamente se $\exists\, u$ soluzione dell'equazione $u - Ku = h$ e, nel caso, le u sono le medesime.
L'operatore K eredità la linearità direttamente da L_γ^{-1}, vediamo essere anche compatto così da poter applicare il teorema di Fredholm. Per il teorema delle stime energetiche, se $u = L_\gamma^{-1} g$, allora

$$\begin{aligned}
\beta ||u||^2_{H_0^1(U)} \leq B[u, u] + \gamma\langle u, u\rangle &= B_\gamma[u, u]\\
&= \langle g, u\rangle \leq ||g||_{L^2(U)} ||u||_{L^2(U)}\\
&\leq ||g||_{L^2(U)} ||u||_{H_0^1(U)}\\
\implies \beta ||u||_{H_0^1(U)} &\leq ||g||_{L^2(U)}\\
\beta ||L_\gamma^{-1} g||_{H_0^1(U)} &\leq ||g||_{L^2(U)}\\
\frac{\beta}{\gamma} ||Kg||_{H_0^1(U)} &\leq ||g||_{L^2(U)} \quad (\gamma > 0)\\
||Kg||_{H_0^1(U)} &\leq C\, ||g||_{L^2(U)} \quad (g \in L^2(U))
\end{aligned}$$

Il punto *iii*) del teorema di Rellich-Kondrakov 1.0.4 ci dice che $H_0^1(U) \subset\subset L^2(U)$ e quindi per definizione 1.6 sappiamo che ogni successione $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ limitata in $H_0^1(U)$ è precompatta in $L^2(U)$. Quindi per qualsiasi $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ limitata in $L^2(U)$, grazie alla relazione appena trovata, $\{Kg_n\}_{n=1}^\infty$ è limitata in $H_0^1(U)$ e quindi è precompatta in $L^2(U)$ dimostrando così la compattezza di K.

Posiamo a questo punto applicare il corollario 2.2.4 per il quale o vale che:

$$(\alpha) \begin{cases} \forall\, h \in L^2(U), \text{ l'equazione}\\ u - Ku = h\\ \text{ha un'unica soluzione } u \in L^2(U) \end{cases} \tag{2.8}$$

oppure vale che

$$(\beta)\begin{cases}\text{l'equazione}\\ u - Ku = 0\\ \text{ha una soluzione non nulla} \in L^2(U)\end{cases} \tag{2.9}$$

Per quello che abbiamo detto fino ad ora, se vale (α), so che esiste unica $u \in L^2(U)$ che risolve $u - Ku = h$. Scegliendo $h = L_\gamma^{-1} f$ ho che vale $u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f)$ e quindi $u \in H_0^1(U)$ ed è anche soluzione debole di (1.5).

Abbiamo fatto vedere che lo spazio $\mathcal{N}$ delle soluzioni deboli del problema omogeneo (1.6) è l'insieme delle soluzioni di $u - Ku = 0$ e potendo ripercorrere tutta la dimostrazione con L^* al posto di L, e B^* al posto di B, chiameremmo $L_\gamma^{*-1} g \in H_0^1(U)$ la soluzione debole di (2.5), quindi tale che

$$B_\gamma^*[L_\gamma^{*-1}(g), u] = \langle g, u\rangle \quad \forall\, u \in H_0^1(U),\, g \in L^2(U)$$

ricordando anche che per $L_\gamma^{-1}(f) \in H_0^1(U)$ vale

$$B_\gamma[L_\gamma^{-1}(f), v] = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(U),\, f \in L^2(U)$$

Unendo queste due relazioni, otteniamo che $\forall\, f, g \in L^2(U)$

$$\langle f, L_\gamma^{*-1}(g)\rangle = B_\gamma[L_\gamma^{-1}(f), L_\gamma^{*-1}(g)] = B_\gamma^*[L_\gamma^{*-1}(g), L_\gamma^{-1}(f)] = \langle g, L_\gamma^{-1}(f)\rangle$$
$$\Longrightarrow \langle f, \gamma L_\gamma^{*-1}(g)\rangle = \langle g, \gamma L_\gamma^{-1}(f)\rangle = \langle g, Kf\rangle$$

Allora abbiamo dimostrato che γL_γ^{*-1} è proprio l'operatore autoaggiunto K^* di K, che è quindi lineare e compatto. A questo punto, proseguendo come sopra, $\mathcal{N}^*$ è anche l'insieme delle soluzioni dell'equazione $v - K^* v = 0$. Per il punto *ii*) del corollario 2.2.4 abbiamo che la dimensione di $\mathcal{N}$ è finita ed equivale alla dimensione di $\mathcal{N}^*$.

Concludiamo la dimostrazione del teorema notando che da *iii*) del corollario 2.2.4, l'equazione $u - Ku = h$ ha soluzione se e solo se

$$\langle h, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in Ker(I - K^*),\ \text{ovvero}\ \forall\, v \in \mathcal{N}^*$$

Utilizzando $h = L_\gamma^{-1} f = \dfrac{1}{\gamma} K f$

$$\langle h, v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle Kf, v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, K^* v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in \mathcal{N}^*$$

Di conseguenza, il problema (1.5) ammette soluzione debole se e solo se $\langle f, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{N}^*$ □

2.4 Terzo teorema di esistenza e unicità

Completiamo i risultati di esistenza e unicità di soluzioni deboli con il terzo teorema formulato con lo spettro di L. Per fare ciò abbiamo bisogno di alcuni teoremi sullo spettro degli operatori:

Definizione 2.4. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare limitato con X spazio di Banach.

i) Si definisce *insieme risolvente di A*

$$\rho(A) := \{\eta \in \mathbb{R} \mid (A - \eta I) \text{ sia invertibile}\}$$

Dove $I : X \to X$ è l'operatore identità.

ii) Lo *spettro di A* è

$$\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \rho(A)$$

iii) Diremo che $\eta \in \sigma(A)$ è un *autovalore di A* se

$$Ker(A - \eta I) \neq \{0\}$$

Denotiamo con $\sigma_p(A)$ la collezione di autovalori di A; $\sigma_p(A)$ è lo *spettro puntuale di A.*

iv) Se η è un autovalore per A e $w \neq 0$ soddisfa

$$Aw = \lambda w,$$

diciamo che w è *l'autovettore associato all'autovalore* λ.

Proposizione 2.4.1. *Sia X un Banach ed $A : X \to X$ un operatore lineare e limitato, allora*

i) $\sigma(A) \subset [-||A||, ||A||]$

ii) $\rho(A)$ *è aperto in* $\mathbb{R}$

Diretta conseguenza di queste due affermazioni è che $\sigma(A)$ è compatto poiché chiuso e limitato.

Dimostrazione. Procedendo per assurdo, mostriamo che se $|\lambda| > ||A||$ allora $A - \lambda I$ è biettiva e quindi $\lambda \notin \sigma(A)$. Qualsiasi sia $f \in X$, l'operatore $u \mapsto \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ è una contrazione poiché:

$$\begin{aligned} ||\frac{1}{\lambda}(Au - f) - \frac{1}{\lambda}(Av - f)|| &= \frac{1}{|\lambda|}||Au - Av|| \\ &\leq \frac{||A||}{|\lambda|}||u - v|| \quad (\frac{||A||}{|\lambda|} < 1) \end{aligned}$$

Quindi per il teorema delle contrazioni $\exists! u \in X$ soluzione di $u = \frac{1}{\lambda}(Au - f)$ qualsiasi sia f. Allora $Au - \lambda u = f$, cioè $A - \lambda I$ è iniettiva e suriettiva.
Fissiamo ora $\lambda_0 \in \rho(A)$ e vediamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo, esiste unica soluzione di $Au - \lambda u = f$ per qualsiasi $f \in X$. Quest'ultima equazione si può riscrivere come $Au - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, cioè

$$u = (A - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u]$$

Si vede che il teorema delle contrazioni è nuovamente applicabile per

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(A - \lambda_0 I)^{-1}||}$$

e quindi $\rho(A)$ è aperto. $\square$

Teorema 2.4.2. *Se $K : X \to X$ è un operatore lineare compatto ed X è uno spazio di Banach con $dim X = \infty$ allora:*

i) $0 \in \sigma(K)$

ii) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$

e vale una delle seguenti proprietà:

$$iii) \begin{cases} \sigma(K) = \{0\} \\ \sigma(K) \setminus \{0\} \text{ è finito} \\ \sigma(K) \setminus \{0\} \text{ è una successione che tende a zero.} \end{cases}$$

Dimostrazione. 1. Assumiamo che $0 \notin \sigma(K)$, allora K è biettivo e così $I = K \circ K^{-1}$. Essendo K lineare e limitato lo è anche K^{-1}, considerando quindi qualsiasi successione $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitata, allora è limitata anche $\{K^{-1}u_n\}_{n=1}^{\infty}$ e per compattezza ne esiste una sottosuccessione per cui $\{KK^{-1}u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ è convergente ma questo è assurdo poiché la dimensione di X non è finita.

2. L'inclusione $\sigma(K) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ è ovvia, vediamo l'altra. Per assurdo assumiamo che $0 \neq \eta \in \sigma(K)$ ma che $Ker(K - \eta I) = \{0\}$ questo è verso

$$\begin{aligned} &\iff Ker(I - \frac{1}{\eta}K) = \{0\} \\ &\iff Im(I - \frac{1}{\eta}K) = X \\ &\iff Im(K - \eta I) = X \implies \eta \in \rho(K) \end{aligned}$$

che è assurdo.

3. Mostriamo adesso che, se esistessero, ogni successione convergente di $\sigma(K) \setminus \{0\}$, converge forzatamente a 0, sfruttando poi la compattezza di $\sigma(K)$ vediamo che è un insieme al massimo numerabile.
Supponiamo $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di elementi distinti di $\sigma(K) \setminus \{0\}$ convergente a η. Dato che $\eta_n \in \sigma_p(K)$, sappiamo esistere $w_n \neq 0$ tali che $Kw_n = \eta_n w_n$. Denotiamo con $E_n = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ lo spazio generato dai primi n autovettori. Dimostriamo che $E_n \subsetneq E_{n+1}$ facendo vedere che per ogni n, $w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti. Ammettiamo il risultato vero per n e supponiamo per assurdo che $w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$

per certi $a_i \in \mathbb{R}$. Allora

$$K(w_{n+1}) = K(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i w_i \qquad \text{e anche}$$
$$K(w_{n+1}) = \eta_{n+1} w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_{n+1} w_i$$

cioè $a_i(\eta_{n+1} - \eta_i) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ ma ciò significa che gli a_i sono tutti nulli che è assurdo.
D'altra parte si vede che $(K - \eta_n I)E_n \subseteq E_{n-1}$, è possibile quindi scegliere una successione $\{u_n\}_{n=2}^{\infty} \subset E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ con $||u_n|| = 1$. Per compattezza sappiamo che esiste una sottosuccessione $\{Ku_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ convergente in X, se inoltre $\eta_n \to \eta \neq 0$ allora anche la successione $\{\frac{Ku_{n_j}}{\eta_{n_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ convergerebbe. Possiamo però vedere che se $n > k$ allora $Ku_n - \eta_n u_n$, $Ku_k - \eta_k u_k$, $u_k \in E_{n-1}$ e quindi:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{Ku_n}{\eta_n} - \frac{Ku_k}{\eta_k} \right\|^2 &= \left\| \frac{Ku_n - \eta_n u_n}{\eta_n} - \frac{Ku_k - \eta_k u_k}{\eta_k} + u_n - u_k \right\|^2 \\
&= \|u_n\|^2 + \left\| \frac{Ku_n - \eta_n u_n}{\eta_n} - \frac{Ku_k - \eta_k u_k}{\eta_k} - u_k \right\|^2 + 2\langle \ldots, u_n \rangle \\
&= 1 + \|\ldots\|^2 \geq 1
\end{aligned}$$

abbiamo così raggiunto un assurdo, quindi $\eta_n \to 0$.
Concludiamo la dimostrazione osservando che, essendo

$$S_n = \sigma(K) \cap \left\{ \eta \in \mathbb{R} \mid |\eta| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

compatto poiché limitato e chiuso, se avesse infiniti punti distinti si avrebbe che ne esisterebbe una sottosuccessione convergente, ma dovrebbe convergere a 0 e ciò è impossibile. Essendo così S_n vuoto o finito,

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

può essere o un insieme finito, oppure un insieme numerabile di autovalori riordinabili in una successione convergente a 0. □

Osservazione 2.4.1. Abbiamo visto, con il primo teorema di esistenza che se $\mu \geq \gamma$ ($\gamma \geq 0$ delle stime energetiche) allora $\forall f \in L^2(U)$, $\exists!\, u \in H_0^1(U)$ soluzione debole del problema

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases}$$

Grazie ai risultati del secondo teorema di esistenza e unicità, ciò significa che il problema omogeneo

$$\begin{cases} Lu + \mu u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases}$$

ha come unica soluzione quella nulla. Definendo adesso l'insieme dei valori per cui è risolvibile il problema vicino:

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\Sigma^{\mathsf{c}} := \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall f \in L^2(U)\ \exists! u \in H_0^1(U) \text{ soluzione debole di (2.10)}\right\}$$

sappiamo quindi che $\forall \mu \geq \gamma,\ -\lambda \in \Sigma^{\mathsf{c}}$ e quindi con la sostituzione $\lambda = -\mu$ otteniamo che $\forall \lambda \leq -\gamma,\ \lambda \in \Sigma^{\mathsf{c}}$.
Osserviamo infine che se $\gamma = 0$, il problema al bordo (1.5) ha un'unica soluzione debole per qualsiasi $f \in L^2(U)$, ovvero che $0 \in \Sigma^{\mathsf{c}}$

Definizione 2.5. Chiamiamo Σ, l'insieme complementare di Σ^{c}, lo *spettro reale dell'operatore L*. Dal secondo teorema di esistenza otteniamo che:

$$\Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in L^2(U) \text{ per cui non esiste soluzione debole del problema (2.10)}\right\}$$

$$\Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \text{abbia una soluzione non banale.}\right\}$$

In questo caso chiamiamo λ *autovalore* di L.
Abbiamo infine già visto che se $\lambda \leq -\gamma$ allora $\lambda \notin \Sigma$ e quindi Σ è formato da elementi sempre strettamente maggiori di $-\gamma$:

$$\Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_{>-\gamma} \mid \begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \text{abbia una soluzione non banale.}\right\}$$

Vediamo adesso con il terzo teorema di esistenza e unicità la struttura di Σ.

Teorema 2.4.3 (Terzo teorema di esistenza e unicità)**.** *Per Σ, l'insieme per cui*

$$\forall f \in L^2(U),\ \exists! u \in H_0^1(U) \textit{ soluzione debole di } \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \textit{in } U \\ u = 0 & \textit{in } \partial U \end{cases} (2.10) \iff \lambda \notin \Sigma$$

valgono una delle due seguenti affermazioni:

i) Σ è un insieme finito

ii) Σ è una successione infinita $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ non-decrescente con

$$\lambda_j \xrightarrow{j \to +\infty} +\infty$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità assumiamo che $\gamma > 0$ e sia $\lambda > -\gamma$.

$$\begin{aligned}
\lambda \notin \Sigma &\iff u \equiv 0 \text{ è l'unica soluzione di } \begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \\
&\iff u \equiv 0 \text{ è l'unica soluzione di } \begin{cases} Lu + \gamma u = (\lambda + \gamma) u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \\
&\iff u \equiv 0 \text{ è l'unica soluzione di } u = L_\gamma^{-1}[(\gamma + \lambda) u] \\
&\iff u \equiv 0 \text{ è l'unica soluzione di } u = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma} K u \\
&\iff Ker(\frac{\gamma + \lambda}{\gamma} K - I) = \{0\} \\
&\iff \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{ non è un autovalore di K}
\end{aligned}$$

$$\text{quindi } \lambda > -\gamma \implies (\lambda \in \Sigma \iff \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{autovalore di } K\,)$$

2. Per il teorema 2.4.2 sappiamo che $\sigma(K) \setminus \{0\}$ è o finito, e quindi lo sarebbe anche Σ, oppure è una successione $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ con $\mu_k \to 0$. I casi possibili ora sono due: o esistono solo finiti λ per cui $\dfrac{\gamma}{\gamma + \lambda}$ autovalore di K e quindi Σ sarebbe ancora finito, o altrimenti, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists k_j > j$ tc. $\dfrac{\gamma}{\gamma + \lambda_j} = \mu_{k_j}$, e quindi $\lambda_j = \gamma \dfrac{1 - \mu_{k_j}}{\mu_{k_j}}$. Dato che $\dfrac{\gamma}{\gamma + \lambda}$ è un valore sempre positivo, allora $\{\mu_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ convergono a 0 decrescendo, e quindi

$$\lambda_j \xrightarrow{j \to +\infty} +\infty$$

$\square$

2.5 Continuità della soluzione debole

Concludiamo questo capitolo con il teorema di continuità che lega la soluzione debole di un problema con il suo corrispettivo termine noto:

Teorema 2.5.1 (Continuità della soluzione debole sul termine noto)**.** $\lambda \notin \Sigma \implies \forall (f, u) \in L^2(U) \times H_0^1(U)$, *u unica soluzione debole di* (2.10), $\exists C = C(\lambda, U, a^{i,j}, b^i, c)$ *tc.*

$$||u||_{L^2(U)} \leq C\, ||f||_{L^2(U)}$$

Dimostrazione. Procedendo per assurdo, $\forall n = 1, 2 \ldots$ $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(U)$, $\exists \{u_n\}_{n=1}^\infty \subset H_0^1(U)$ tc.

$$\begin{cases} Lu_n = \lambda u_n + f_n & \text{in } U \\ u_n = 0 & \text{in } \partial U \end{cases} \quad \text{in senso debole}$$

con

$$||u_n||_{L^2(U)} > n\,||f_n||_{L^2(U)} \tag{2.11}$$

Possiamo assumere $||u_n|| = 1$ poiché se u_n risolve il problema con f_n allora $\tilde{u}_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$ risolve il problema con il termite noto $\tilde{f_n} = ||u_n|| f_n$. Quindi per (2.11) $f_n \to 0$ e per le stime energetiche applicate all'operatore $L_\gamma = L - \lambda I$:

$$\begin{aligned}
\beta ||u_n||^2_{H^1_0(U)} &\leq B_\lambda[u_n, u_n] + \gamma ||u_n||_{L^2(U)} \\
&= \langle f_n, u_n \rangle + \gamma \\
&\leq ||f_n||_{L^2(U)}\,||u_n||_{L^2(U)} + \gamma \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Essendo $H^1_0(U)$ uno spazio riflessivo e $H^1_0(U) \subset\subset L^2(U)$, $\exists\, \{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},\ u \in H^1_0(U)$ tc.

$$\begin{cases}
u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ in } H^1_0(U) & \text{Thm. (1.0.1)} \\
u_{n_k} \to u \text{ in } L^2(U) & \text{Def. (1.6)}
\end{cases}$$

Il che implica che

$$\begin{array}{ccc}
B_\lambda[u_{n_k}, v] = \langle f_{n_k}, v \rangle & \forall\, v \in H^1_0(U) \\
\downarrow \qquad\qquad \downarrow & \\
B_\lambda[u, v] \;=\; \langle 0, v \rangle = 0 &
\end{array}$$

e quindi u è la soluzione debole di (2.10) ma dato che $\lambda \notin \Sigma$ allora $u = 0$ ma per la continuità della norma arriviamo all'assurdo poiché $||u||_{L^2(U)} = 1$. $\square$

Capitolo 3

Regolarità

In questo capitolo affrontiamo il problema della regolarità delle soluzioni deboli: vedremo due teoremi grazie ai quali, secondo specifiche ipotesi sui dati iniziali, la soluzione u ammette derivate o gradi di regolarità superiori a quelle di $H_0^1(U)$. Per affrontare questo argomento abbiamo bisogno di alcuni risultati sui rapporti incrementali:

Definizione 3.1. Assumiamo $u \in L^1_{loc}(U)$

i) definiamo il *k-esimo rapporto incrementale di raggio h* il valore:

$$D_k^h u(x) := \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}$$

$\forall x \in V \subset\subset U$, dove $h \in \mathbb{R}$ tc. $0 < |h| < d(V, \partial U)$ ed e_k indica il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$

ii) $D^h u(x) := (D_1^h u(x), \ldots, D_n^h u(x))$

iii) Se $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) : U \to \mathbb{R}^n$ si definisce $D_k^h \mathbf{u}(x) := (D_k^h u_1(x), \cdots, D_k^h u_n(x))$

Proposizione 3.0.1. *Siano $v, w \in L^1_{loc}(U)$, $V \subset\subset U$ ed $0 < |h| < d(V, \partial U)$ allora, indicando con $v^h(x) = v(x + he_k)$ vale che*

$$D_k^h(vw) = v^h D_k^h(w) + w D_k^h(v) \tag{3.1}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
D_k^h(vw) &= \frac{v(x + he_k)w(x + he_k) - v(x)w(x)}{h} \\
&= \frac{v(x + he_k)w(x + he_k) - v(x + he_k)w(x) + v(x + he_k)w(x) - v(x)w(x)}{h} \\
&= \frac{v(x + he_k)[w(x + he_k) - w(x)] - w(x)[v(x + he_k) - v(x)]}{h} \\
&= v^h D_k^h(w) + w D_k^h(v)
\end{aligned}$$

□

Proposizione 3.0.2. *Sia* $\phi \in C_c^\infty(U)$, $w \in L^1_{loc}(U)$ *ed* $0 < |h| < \frac{1}{2}d(supp(\phi), \partial U)$ *allora:*

$$\int_U \phi\, D_k^{-h} w\, dx = -\int_U w\, D_k^h \phi\, dx \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che essendo $|h| < \frac{1}{2}d(supp(\phi), \partial U)$, allora $supp(\phi) + he_k = \{x + he_k \,|\, x \in supp(\phi)\} \subset U$ quindi:

$$\begin{aligned}
\int_U \phi(x)\, D_k^{-h} w(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, D_k^{-h} w(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, \frac{w(x - he_k) - w(x)}{-h}\, dx \\
&= -\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, w(x - he_k)\, dx + \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, u(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x + he_k)\, w(x)\, dx + \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, u(x)\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(x + he_k) - \phi(x)}{h}\, w(x)\, dx \\
&= -\int_{(supp(\phi)+he_k)\cup supp(\phi)} D_k^h \phi(x)\, w(x)\, dx \\
&= -\int_U w\, D_k^h \phi\, dx
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.0.3. *i) Supponiamo che* $1 \leq p < \infty$ *e* $u \in W^{1,p}(U)$, *allora* $\forall\, V \subset\subset U$ $\exists\, C > 0$ *tale che* $\forall\, |h| < d(V, \partial U)$

$$||\, |D^h u|\, ||_{L^p(V)} \leq C\, ||\, |Du|\, ||_{L^p(U)} \tag{3.3}$$

ii) Supponiamo ora che $1 < p < \infty$, $V \subset\subset U$, $u \in L^p(V)$ *e che esista una costante* C *tale che:*

$$||\, |D^h u|\, ||_{L^p(V)} \leq C \tag{3.4}$$

$\forall\, |h| < \frac{1}{2}d(V, \partial U)$ *allora si ha che*

$$u \in W^{1,p}(V), \text{ con } ||\, |Du|\, ||_{L^p(V)} \leq C \tag{3.5}$$

Dimostrazione. 1. Dimostriamo la prima parte del teorema inizialmente per $u \in C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$ concluderemo poi grazie al teorema di Meyers-Serrin 1.0.3 sfruttandone la densità in $W^{1,p}(U)$.

Per ogni $x \in V$, $k = 1, \ldots, n$, e $0 < |h| < \frac{1}{2} d(V, \partial U)$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
u(x + he_k) - u(x) &= \int_0^1 u_{x_k}(x + the_k)\, h\, e_k\, dt \\
\implies |D_k^h u(x)| &\leq \int_0^1 |Du(x + the_k)|\, dt \\
\xRightarrow{Holder} |D_k^h u(x)|^2 &\leq \int_0^1 |Du(x + the_k)|^2\, dt \\
\implies |D^h u(x)|^2 &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 |Du(x + the_k)|^2\, dt \\
\xRightarrow{Holder} |D^h u(x)|^p &\leq C_p \sum_{k=1}^n \int_0^1 |Du(x + the_k)|^p\, dt \\
\implies \int_V |D^h u(x)|^p\, dx &\leq C_p \sum_{k=1}^n \int_V \int_0^1 |Du(x + the_k)|^p\, dt\, dx \\
\xRightarrow{T-F} \int_V |D^h u(x)|^p\, dx &\leq C_p \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_V |Du(x + the_k)|^p\, dx\, dt \\
&\leq C_p \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_U |Du(x)|^p\, dx\, dt \\
&\leq nC_p \int_U |Du(x)|^p\, dx\, dt \\
\implies ||\, |D^h u|\, ||_{L^p(V)}^p &\leq nC_p\, ||\, |Du|\, ||_{L^p(U)}^P
\end{aligned}$$

A questo punto se $u \in W^{1,p}(U)$ possiamo prendere una successione $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(U) \cap W^{1,p}(U)$ che converga ad u in norma $W^{1,p}(U) \implies ||u_j - u||_{L^p(V)} \to 0 \implies ||D^h u_j - D^h u||_{L^p(V)} \to 0 \implies ||\, |D^h u_j|\, ||_{L^p(V)} \to ||\, |D^h u|\, ||_{L^p(V)}$ e similmente $||\, |Du_j|\, ||_{L^p(U)} \to ||\, |Du|\, ||_{L^p(U)}$

2. Assumiamo ora $u \in L^p(U)$, per l'ipotesi (3.4) abbiamo che

$$\forall\, k = 1, \ldots, n \qquad \sup_{|h| < \frac{1}{2} d(V, \partial U)} ||\, |D_k^{-h} u|\, ||_{L^p(V)} \leq C$$

Essendo L^p riflessivo, esiste una successione $h_j \xrightarrow{j \to +\infty} 0$ e una funzione $v_k \in L^p(V)$ per cui $D_k^{-h_j} \xrightarrow{j \to +\infty} v_k$ (debolmente) in $L^p(V)$. Vediamo che v_k è in effetti la derivata debole di u: $\forall\, \phi \in C_c^{\infty}(U)$

$$\begin{aligned}
\int_U u\, \phi_{x_k}\, dx &= \lim_{j \to \infty} \int_U u\, D_k^{h_j} \phi\, dx = - \lim_{j \to \infty} \int_U D_k^{-h_j} u\, \phi\, dx \\
&= - \lim_{j \to \infty} \int_V D_k^{-h_j} u\, \phi\, dx \overset{*}{=} - \int_V v_k\, \phi\, dx \\
&= - \int_U v_k\, \phi\, dx
\end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza $*$ abbiamo utilizzato che la funzione $\int_V f\,\phi\,dx$ è lineare e continua per $f \in L^p(V)$ infatti per Holder vale che: $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

$$\left|\int_V f\,\phi\,dx\right| \le \int_V |f|\,|\phi|\,dx \le \left(\int_V |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V |\phi|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\,||f||_{L^p(V)}$$

Con questo abbiamo fatto vedere che $u_{x_k} = v_k \in L^P(V)$ in senso debole e quindi $u \in W^{1,p}(V)$. La dimostrazione del teorema si conclude osservando che $D_k^{-h_j}u \rightharpoonup u_{x_k} \implies ||u_{x_k}||_{L^P(V)} \le \liminf_{j\to\infty} ||D_k^{-h_j}u||_{L^P(V)} \le C$ □

3.1 Regolarità interna H^2

Teorema 3.1.1. *Assumiamo che $a^{i,j} \in C^1(U)$, $b^i, c \in L^2(U)$, $f \in L^2(U)$. Supponiamo inoltre $u \in H^1(U)$ soluzione debole del problema*

$$Lu = f \quad in\ U \tag{3.6}$$

allora

i) $u \in H^2_{loc}(U)$

ii) $\forall\, V \subset\subset U\ \exists\, C = C(V, U, a^{i,j}, b^i, c)$ *tc.*

$$||u||_{H^2(V)} \le C(||f||_{L^2(U)} + ||u||_{L^2(U)})$$

Osservazione 3.1.1. 1. Notiamo che in questo teorema, al contrario di quelli precedenti di esistenza, non stiamo richiedendo che u si annulli al bordo di U, proprio perché ne stiamo studiando la regolarità all'interno, per questo abbiamo richiesto solo che $u \in H^1(U)$.

2. Notiamo inoltre che se $u \in H^2(V)$, u possiede due derivate parziali e quindi nella formulazione di soluzione debole possiamo reintegrare per parti scaricando le derivate su u ottenendo che, $\forall\, v \in C_c^\infty(V)$, $V \subset\subset U$:

$$\begin{aligned}
B[u,v] &= \int_V \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=i}^n b^i u_{x_i} v + cuv\,dx \\
&= \int_V -\sum_{i,j=1}^n \left(a^{i,j}u_{x_i}\right)_{x_j} v + \sum_{i=i}^n b^i u_{x_i} v + cuv\,dx \\
&= \int_V Lu\,v\,dx \\
\implies & B[u,v] = \langle f, v\rangle = \langle Lu, v\rangle \quad \forall\, v \in C_c^\infty(V) \\
\implies & Lu = f \text{ quasi ovunque in } V
\end{aligned}$$

cioè u è una vera e propria soluzione dei problema.

Dimostrazione. Scegliamo un qualsiasi insieme aperto $V \subset\subset U$ e un secondo insieme aperto W tale che $V \subset\subset W \subset\subset U$. Prendiamo adesso una funzione cutoff $\phi \in C_c^\infty(U)$ che soddisfa:

$$\begin{cases} \phi \equiv 0 & \text{su} \quad \mathbb{R}^n \setminus W \\ 0 \leq \phi \leq 1 \\ \phi \equiv 1 & \text{su} \quad V \end{cases}$$

Il motivo dell' introduzione di questa funzione è quello di restringere tutti i calcoli all'insieme W, che sappiamo avere distanza positiva da ∂U, questo è necessario perché non abbiamo informazioni riguardanti il comportamento di u vicino alla frontiera di U. Dato che u è soluzione debole di (3.6), allora $\forall\, v \in H_0^1(U)$

$$\begin{aligned} \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=i}^n b^i u_{x_i} v + cuv\, dx &= \int_U fv\, dx \\ \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{i,j} u_{x_i} v_{x_j}\, dx &= \int_U fv\, dx - \sum_{i=i}^n \int_U b^i u_{x_i} v - \int_U cuv\, dx \\ \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_U a^{i,j} u_{x_i} v_{x_j}\, dx}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbf{A}}} &= \underbrace{\int_U \tilde{f} v\, dx}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbf{B}}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Chiamando con

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu$$

Ora sostituiamo a v la funzione $-D_k^{-h}(\phi^2 D_k^h u)$ dove $k \in \{1, \ldots, n\}$ ed $|h|$ abbastanza piccolo. Stimiamo innanzitutto **A**:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{i,j}\,u_{x_i}\big[-D_k^{-h}(\phi^2 D_k^h u)\big]_{x_j}\,dx = -\sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{i,j}\,u_{x_i}\,D_k^{-h}(\phi^2 D_k^h u)_{x_j}\,dx\\
&\overset{3.0.2}{=} \sum_{i,j=1}^{n}\int_U D_k^h(a^{i,j}\,u_{x_i})\big[\phi^2 D_k^h u\big]_{x_j}\,dx\\
&\overset{3.0.1}{=} \sum_{i,j=1}^{n}\int_U \big(a^{i,j;h}D_k^h u_{x_i} + u_{x_i}D_k^h a^{i,j}\big)[\phi^2 D_k^h u]_{x_j}\,dx \qquad \big(\, a^{i,j;h}(x) := a^{i,j}(x+he_k)\,\big)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{i,j;h}D_k^h u_{x_i}(\phi^2 D_k^h u)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n}\int_U (D_k^h a^{i,j})u_{x_i}(\phi^2 D_k^h u)_{x_j}\,dx\\
&= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{i,j;h}D_k^h u_{x_i}\phi^2 D_k^h u_{x_j}}_{A_1}\\
&\quad + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{i,j;h}D_k^h u_{x_i}2\phi\phi_{x_j}D_k^h u + (D_k^h a^{i,j})u_{x_i}2\phi\phi_{x_j}D_k^h u + (D_k^h a^{i,j})u_{x_i}\phi^2 D_k^h u_{x_j}\,dx}_{A_2}
\end{aligned}
$$

Iniziamo stimando A_1, grazie alla condizione di ellitticità

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi| \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R},\ q.o\ x\in U\\
\Longrightarrow\ &\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j;h}(x)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi| \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R},\ q.o\ x\in W
\end{aligned}
$$

scegliendo $\xi = D_k^h Du$, si ottiene che:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_W \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j;h}D_k^h u_{x_i}D_k^h u_{x_j}\,\phi^2\,dx\\
&\ge \int_W \theta\,|D_k^h Du|^2\,\phi^2\,dx\\
&\ge \theta\int_U |D_k^h Du|^2\,\phi^2\,dx \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Consideriamo adesso A_2. Essendo ϕ è nulla su $U\setminus W$, allora su questo insieme è nulla anche ogni derivata ϕ_{x_j} e perciò la funzione $a^{i,j;h}\phi_{x_j}$ ha massimo su U. Utilizzando allora che:

i) $|D_k^h u_{x_j}(x)| \le |D_k^h Du(x)|$

ii) $|u_{x_j}(x)| \leq |Du(x)|$

iii) $M := \max_{x\in U}\{a^{i,j;h}(x)\phi_{x_j}(x),\ D_k^h a^{i,j}(x)\phi_{x_j}(x),\ D_k^h a^{i,j}(x)\phi(x)\}_{i,j=1}^n$

$$\begin{aligned}
|A_2| &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_U 2M\,|D_k^h Du|\,\phi\,|D_k^h u| + 2M\,|Du|\,\phi\,|D_k^h u| + M\,|Du|\,\phi\,|D_k^h Du|\,dx \\
&\leq \underbrace{2n^2 M}_{C=C(U,a^{i,j})} \int_U |D_k^h Du|\,\phi\,|D_k^h u| + |Du|\,\phi\,|D_k^h u| + |Du|\,\phi\,|D_k^h Du|\,dx \\
&= C\int_W |D_k^h Du|\,\phi\,|D_k^h u| + |Du|\,\phi\,|D_k^h u| + |Du|\,\phi\,|D_k^h Du|\,dx
\end{aligned}$$

Sfruttiamo le disuguaglianze di Cauchy:

i) $C\phi|D_k^h Du||D_k^h u| \leq \frac{\epsilon}{2}\phi^2|D_k^h Du|^2 + \frac{C^2}{2\epsilon}|D_k^h u|^2$

ii) $C\phi|D_k^h Du||Du| \leq \frac{\epsilon}{2}\phi^2|D_k^h Du|^2 + \frac{C^2}{2\epsilon}|Du|^2$

iii) $\phi|D_k^h u||Du| \leq \frac{1}{2}|D_k^h u|^2 + \frac{1}{2}|Du|^2$

Sommando, scegliendo $\epsilon = \frac{\theta}{2}$ e richiamando $C = \frac{1}{2} + \frac{C^2}{\theta}$ si ottene

$$|A_2| \leq \int_W \frac{\theta}{2}\,\phi^2\,|D_k^h Du|^2 + C\,(\,|D_k^h u|^2 + |Du|^2)\,dx$$

Utilizzando la stima (3.3), abbiamo che:

$$\int_W |D_k^h u|^2 \leq c\int_U |Du|^2$$

e quindi:

$$|A_2| \leq \int_U \frac{\theta}{2}\,\phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx + C\int_U |Du|^2\,dx$$

per una certa costante $C = C(U, a^{i,j})$ abbastanza grande. A questo punto abbiamo una stima generale per $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = A_1 + A_2 &\geq A_1 - |A_2| \\
&\geq \theta\int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx - \frac{\theta}{2}\int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx - C\int_U |Du|^2\,dx \\
\implies \mathbf{A} &\geq \frac{\theta}{2}\int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx - C\int_U |Du|^2\,dx \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Stimiamo ora **B**:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{B}| &\leq \int_U |\tilde{f}|\,|v|\,dx \\
&\leq \int_U \big(\,|f| + \sum_{i=1}^{n} |b^i|\,|u_{x_i}| + |c|\,|u|\,\big)\,|v|\,dx \\
&\leq \int_U \big(\,|f| + C\,|Du| + C\,|u|\,\big)\,|v|\,dx \qquad C = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty(U)}, ||c||_{L^\infty(U)} \right\} \\
&\leq C \int_U \big(\,|f| + |Du| + |u|\,\big)\,|v|\,dx \qquad C = \max\{C, 1\}
\end{aligned}
$$

con $C = C(b^i, c)$. Scegliendo come per **A**, $v(x) = -D_k^{-h}(\phi^2(x) D_k^h u(x))$, vediamo che

$$
\begin{aligned}
\int_U |v|^2\,dx &= \int_W |D_k^{-h}(\phi^2 D_k^h u)|^2\,dx \\
&\leq \int_W |D(\phi^2 D_k^h u)|^2\,dx \\
&= \int_W \sum_{i=i}^{n} \left(\left| \frac{\partial \phi^2}{\partial x_i} \right| |D_k^h u| + \phi^2\,|D_k^h u_{x_i}| \right)^2\,dx \\
&\leq \int_W 2 \left(n\overline{C}^2\,|D_k^h u|^2 + \phi^4 \sum_{i=i}^{n} |D_k^h u_{x_i}|^2 \right)\,dx \qquad \overline{C} = \max_{\substack{i=1,\cdots,n \\ x\in U}} \left\{ \left| \frac{\partial \phi^2}{\partial x_i}(x) \right| \right\} \\
&\leq \overline{C} \int_U |Du|^2\,dx + 2\int_W \phi^4\,|D_k^h Du|^2\,dx \qquad \overline{C} = 2n\overline{C}^2 \\
&\leq \overline{C} \int_U |Du|^2 + \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx \qquad \overline{C} = \max\{2, \overline{C}\}
\end{aligned}
$$

Possiamo a questo punto unire le due stime ottenendo dalla disuguaglianza di Cauchy:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{B}| &\leq \int_U \epsilon\,|v|^2 + \frac{C^2}{4\epsilon}\big(\,|f| + |Du| + |u|\,\big)^2\,dx \qquad (\epsilon = \frac{\theta}{4\overline{C}}) \\
&\leq \int_U \frac{\theta}{4}\big(\,|Du|^2 + \phi^2\,|D_k^h Du|^2\big) + \frac{\overline{C}C^2}{\theta}\big(\,|f| + |Du| + |u|\,\big)^2\,dx \\
&\leq \frac{\theta}{4} \int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx + C\int_U |f|^2 + |Du|^2 + |u|^2\,dx
\end{aligned}
$$

con $C = C(a^{i,j}, b^i, c) = \frac{4\overline{C}C^2}{\theta} + \frac{\theta}{4}$

Unendo quest' ultima stima di $|\mathbf{B}|$ alla stima (3.9) e ricordando che $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ otteniamo che:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta}{2}\int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx - \int_U C\,|Du|^2\,dx \leq \frac{\theta}{4}\int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx + C\int_U |f|^2 + |Du|^2 + |u|^2\,dx \\
&\qquad \Longrightarrow \; \frac{\theta}{4}\int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx \leq C\int_U |f|^2 + |Du|^2 + |u|^2\,dx
\end{aligned}
$$

dato che $\phi \equiv 1$ su tutto V allora:

$$\int_V |D_k^h Du|^2\,dx = \int_V \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx \leq \int_U \phi^2\,|D_k^h Du|^2\,dx$$

e quindi infine abbiamo che:

$$\begin{aligned}\int_V |D_k^h u_{x_i}|^2\,dx &\leq \int_V |D_k^h Du|^2\,dx \\ &\leq C\int_U |f|^2 + |Du|^2 + |u|^2\,dx \leq C(\,||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{H^1(U)}\,)\end{aligned}$$

A questo punto dato che $u \in H^1(U)$, vale che $u_{x_i} \in L^2(U)$ e per il teorema 3.0.3 vale $u_{x_i} \in H^1_{loc}(U)$, e quindi $u \in H^2_{loc}(U)$ con

$$\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(V)} = ||\,|Du_{x_i}|\,||^2_{L^2(V)} \leq C(\,||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{H^1(U)}\,)$$

ovvero

$$||u||^2_{H^2(V)} = ||u||^2_{H^1(V)} + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(V)} \leq C(\,||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{H^1(U)}\,)$$

$$\implies ||u||_{H^2(V)} \leq C\left(\,||f||_{L^2(U)} + ||u||_{H^1(U)}\,\right)$$

Per una cerca costante $C = C(V, U, a^{i,j}, b^i, c)$. Applicando lo stesso teorema piuttosto che su $V \subset\subset U$ a $V \subset\subset W$ si ottiene che

$$||u||_{H^2(V)} \leq C\left(\,||f||_{L^2(W)} + ||u||_{H^1(W)}\,\right) \tag{3.10}$$

per una costante C che dipenderà in questo caso da V, W e dai coefficienti di L. Analogamente a come abbiamo già fatto, prendiamo un'altra funzione cutoff ψ che soddisfa:

$$\begin{cases} \psi \equiv 1 \text{ su } W \\ 0 \leq \psi \leq 1 \\ supp(\psi) \subset U \end{cases}$$

Inserendo ora $v = \psi^2 u$ nell'identità (3.7) si ottiene:

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_U a^{i,j}\,\psi^2\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,dx}_{A_1'} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_U 2\,\psi\,\psi_{x_j}\,u_{x_j}\,u\,dx}_{A_2'} = \underbrace{\int_U \tilde{f}\,\psi^2\,u\,dx}_{B'} \tag{3.11}$$

Come abbiamo già fatto precedentemente, per A' usiamo la condizione di ellitticità con $\xi = Du$ ottenendo:

$$A_1' \geq \theta \int_U \psi^2\,|Du|^2\,dx \tag{3.12}$$

Dato che $u \in H^1(U)$ possiamo semplicemente scrivere che $|A_2'| \leq c_1 = c_1(a^{i,j}, U)$ Per B' invece procediamo così:

$$
\begin{aligned}
|B'| &\leq C \int_U (|f| + |Du| + |u|)\psi^2 |u| \, dx \qquad C = \max\left\{ \sum_{i=1}^n ||b^i||_{L^\infty(U)}, ||c||_{L^\infty(U)}, 1 \right\} \\
&\leq 4C \int_U |f|^2 + |Du|^2 + |u|^2 \, dx \\
&\leq C \int_U |f|^2 + |u|^2 \, dx
\end{aligned}
$$

Per $C = C(b^i, c)$ abbastanza grande. Unendo le tre stime abbiamo che:

$$
\theta \int_U \psi^2 \, |Du|^2 \, dx - c_1 \leq C \int_U |f|^2 + |u|^2 \, dx
$$

e quindi

$$
\int_U \psi^2 \, |Du|^2 \, dx \leq C \int_U |f|^2 + |u|^2 \, dx = C \left(||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{L^2(U)} \right)
$$

per una certa costante positiva $C = C(a^{i,j}, b^i, c, U)$. Ma dato che:

$$
\int_W |Du|^2 \, dx \leq \int_U \psi^2 \, |Du|^2 \, dx
$$

$$
\begin{aligned}
\implies ||u||^2_{H^1(W)} &= ||u||^2_{L^2(W)} + || \, |Du| \, ||^2_{L^2(W)} \\
&\leq ||u||^2_{L^2(U)} + C \left(||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{L^2(U)} \right) \\
&\leq C \left(||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{L^2(U)} \right)
\end{aligned}
$$

rinominando $C = C+1$. Possiamo finalmente integrare questa relazione con la precedente (3.10) concludendo la dimostrazione, infatti:

$$
\begin{aligned}
||u||_{H^2(V)} &\leq C \left(||f||_{L^2(W)} + C \left(||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{L^2(U)} \right) \right) \\
&\leq C \left(||f||^2_{L^2(U)} + ||u||^2_{L^2(U)} \right)
\end{aligned}
$$

□

3.2 Regolarità interna H^{m+2}

Teorema 3.2.1 (Maggiore regolarità interna). *Assumiamo che $a^{i,j}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$, $f \in H^m(U)$. Supponiamo inoltre $u \in H^1(U)$ soluzione debole del problema*

$$
Lu = f \quad in \, U \tag{3.13}
$$

allora

i) $u \in H^{m+2}_{loc}(U)$

ii) $\forall\, V \subset\subset U \ \exists C = C(V, U, a^{i,j}, b^i, c)$ *tc.*

$$||u||_{H^{m+2}(V)} \leq C(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)})$$

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per induzione su m, se $m = 0$ allora il teorema non è altro che il teorema 3.1.1. Supponiamo quindi che sia valido per $m-1$ è dimostriamolo per m. Per ipotesi sappiamo che $a^{i,j}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$, $f \in H^m(U)$ e per ipotesi induttiva $u \in H^{m+1}_{loc} \cap H^1(U)$ con la stima:

$$||u||_{H^{m+1}(W)} \leq C_I(||f||_{H^{m-1}(U)} + ||u||_{L^2(U)}) \tag{3.14}$$

per ogni $W \subset\subset U$ e una certa costante $C_I = C_I(W, U, L, m)$. Fissiamo adesso α un multi-indice con $|\alpha| = m$ e sia $\tilde{v} \in C^\infty_c(W)$. Per ipotesi sappiamo che $\forall\, v \in H^1_0(U)$ vale che

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} u_{x_i} v_{x_j}\, dx + \int_U \sum_{i=i}^{n} b^i u_{x_i} v\, dx + \int_U cuv\, dx = \int_u fv\, dx$$

sostituiamo in questa formula $v = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v} \in C^\infty_c(W)$ ed analizziamo ogni termine:

1)
$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} u_{x_i} \big((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v}\big)_{x_j} = (-1)^{|\alpha|} \sum_{i,j=1}^{n} \int_W a^{i,j} u_{x_i} D^\alpha(\tilde{v}_{x_j})\, dx$$

(integrando per parti)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_W D^\alpha(a^{i,j} u_{x_i}) \tilde{v}_{x_j}\, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_W \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i} \tilde{v}_{x_j}\, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_W \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i} \tilde{v}_{x_j}\, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_W a^{i,j} D^\alpha u_{x_i} \tilde{v}_{x_j}\, dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_W \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \big(D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i}\big)_{x_j} \tilde{v}\, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_W a^{i,j} (D^\alpha u)_{x_i} \tilde{v}_{x_j}\, dx
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v} &= \sum_{i=1}^{n} \int_W D^\alpha(b^i u_{x_i}) \tilde{v} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_W \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i} \tilde{v}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_W \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i} \tilde{v}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_W b^i (D^\alpha u)_{x_i} \tilde{v}\, dx
\end{aligned}$$

ed in maniera estremamente analoga:

$$\mathbf{3)} \qquad \int_U cu(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v} = \int_W \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \beta\ne\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} c D^\beta u \tilde{v}\, dx + \int_W c(D^\alpha u)\tilde{v}\, dx$$

$$\mathbf{4)} \qquad \int_U (-1)^{|\alpha|} f D^\alpha \tilde{v} = \int_W (D^\alpha f)\tilde{v}\, dx$$

Quindi se definiamo

$$\tilde{u} := D^\alpha u \in H^1(W)$$

$$\tilde{f} := D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \beta\ne\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left[-\sum_{i,j=1}^n \left(D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i} \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i} + D^{\alpha-\beta} c D^\beta u \right]$$

otteniamo che $B[\tilde{u}, \tilde{v}] = \langle \tilde{f}, \tilde{v} \rangle_{L^2(W)}$ $\forall\, \tilde{v} \in C_c^\infty(W)$. E quindi per approssimazione abbiamo che $\tilde{u} \in H^1(W)$ è soluzione debole di

$$L\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{su } W$$

Vale inoltre che $\tilde{f} \in L^2(W)$:

$$\begin{aligned} ||\tilde{f}||_{L^2(W)} \le{} & ||D^\alpha f||_{L^2(W)} + \\ & + \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \beta\ne\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{i,j=1}^n ||\left(D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i} \right)_{x_j}||_{L^2(W)} + \\ & + \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \beta\ne\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n ||D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i}||_{L^2(W)} + \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \beta\ne\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} ||D^{\alpha-\beta} c D^\beta u||_{L^2(W)} \end{aligned}$$

Dato che abbiamo $f \in H^m(U)$:

$$||D^\alpha f||_{L^2(W)} \le ||f||_{H^m(W)} \le ||f||_{H^m(U)}$$

e $a^{i,j}, b^i, c \in C^{m+1}(\overline{W})$, con $\overline{W}$ compatto, posso chiamare

$$M := \max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ x\in\overline{W} \\ \beta\le\alpha}} \left\{ |D^{\alpha-\beta} a^{i,j}|, |D^{\alpha-\beta} b^i|, |D^{\alpha-\beta} c| \right\}$$

per stimarne le norme:

1. $$\begin{aligned} ||\left(D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i} \right)_{x_j}||_{L^2(W)} &\le ||D^{\alpha-\beta} a^{i,j}_{x_j} D^\beta u_{x_i}||_{L^2(W)} + ||D^{\alpha-\beta} a^{i,j} D^\beta u_{x_i x_j}||_{L^2(W)} \\ &\le M||D^\beta u_{x_i}||_{L^2(W)} + M||D^\beta u_{x_i x_j}||_{L^2(W)} \end{aligned}$$

(vale che $\forall\,|\gamma| \leq m+1$, $||D^{\gamma}u||_{L^2(W)} \leq ||u||_{H^{m+1}(W)}$)

$$\leq 2M||u||_{H^{m+1}(W)}$$

2. $$||D^{\alpha-\beta}b^iD^{\beta}u_{x_i}||_{L^2(W)} \leq M||D^{\beta}u_{x_i}||_{L^2(W)} \leq M||u||_{H^{m+1}(W)}$$

3. $$||D^{\alpha-\beta}cD^{\beta}u_{x_i}||_{L^2(W)} \leq M||D^{\beta}u_{x_i}||_{L^2(W)} \leq M||u||_{H^{m+1}(W)}$$

Abbiamo così ottenuto che $\tilde{f} \in L^2(W)$ con:

$$\begin{aligned} ||\tilde{f}||_{L^2(W)} &\leq ||f||_{H^m(U)} + 4M||u||_{H^{m+1}(W)} \\ &\overset{(3.14)}{\leq} ||f||_{H^m(U)} + 4MC_I(||f||_{H^{m-1}(U)} + ||u||_{L^2(U)}) \\ &\leq C_M\left(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)}\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Con $C_M = C_M(W,U,L,m) = 4MC_I + 1$ opportuna. Abbiamo così mostrato le ipotesi del teorema 3.1.1 e quindi $\tilde{u} \in H^2_{loc}(W)$ con la stima: ($V \subset\subset W \subset\subset U$)

$$||\tilde{u}||_{H^2(V)} \leq C_T\left(||\tilde{f}||_{L^2(W)} + ||\tilde{u}||_{L^2(W)}\right)$$

con $C_T = C_T(V,W,L)$. Osservando che $||\tilde{u}||_{L^2(W)} \leq ||D^{\alpha}u||_{L^2(W)} \leq ||u||_{H^{m+1}(W)}$, allora:

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}||_{H^2(V)} &\overset{(3.15)}{\leq} C_T\left(C_M\left(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)}\right) + ||u||_{H^{m+1}(W)}\right) \\ &\overset{(3.14)}{\leq} C_T\left(C_M\left(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)}\right) + C_I(||f||_{H^{m-1}(U)} + ||u||_{L^2(U)})\right) \\ &\leq C_F\left(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)}\right) \end{aligned}$$

con $C_F = C_F(V,W,U,L,m) = \max\{C_TC_M, C_I\}$. Con questo, se $\tilde{u} = D^{\alpha}u \in H^2(V)$ per ogni $|\alpha| = m$, allora $u \in H^{m+2}(V)$, considerando che

$$\begin{aligned} ||u||^2_{H^{m+2}(V)} &= ||u||^2_{H^{m-1}(V)} + \underbrace{\sum_{\beta=m}||D^{\beta}u||^2_{L^2(V)} + \sum_{\gamma=m+1}||D^{\gamma}u||^2_{L^2(V)} + \sum_{\delta=m+2}||D^{\delta}u||^2_{L^2(V)}}_{\sum_{|\alpha|=m}||D^{\alpha}u||^2_{H^2(V)}} \\ &\leq ||u||^2_{H^{m+1}(W)} + \sum_{|\alpha|=m}||D^{\alpha}u||^2_{H^2(V)} \\ &\leq \left(||u||_{H^{m+1}(W)} + \sum_{|\alpha|=m}||D^{\alpha}u||_{H^2(V)}\right)^2 \end{aligned}$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}||u||_{H^{m+2}(V)} &\leq ||u||_{H^{m+1}(W)} + \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{H^2(V)} \\ &\leq C_I(||f||_{H^{m-1}(U)} + ||u||_{L^2(U)}) + \sum_{|\alpha|=m} C_F\,(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)}) \\ &\leq C\,(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)})\end{aligned}$$

con $C = C(V, U, L, m)$. □

Bibliografia

[1] [Evans] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society, 1997.

[2] [G-T] Gilbarg-Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer Verlag, 2013.

[3] [KR] N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder Spaces,* American Mathematical Society, 1996.

[4] [L-U] Ladyzhenskaya-Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations,* Mathematics in Science and Engineering, 1968.

Ringraziamenti

Da dove cominciare? Un ringraziamento speciale è dedicato alla mia famiglia, i miei genitori e mia sorella, che mi hanno permesso di intraprendere questo intenso percorso e sempre sostenuto durante ogni sua fase. Un caloroso grazie è destinato a tutte quelle persone e quegli amici, che, durante questi anni, hanno creato i gradini della mia evoluzione: Riccardo ed i compagni Yuri e Giacomo, uniti dalla comune guerra alla comprensione. Joshua, Ale e Cliff con i quali ho creato un secondo significato di casa. Annachiara, con e grazie alla quale ho costruito i pilastri della mia persona. Elena, Caterina, Enrico, Simone e Federico con cui ho condiviso le inerpicate gioie della vita. Elisa, Angela e Dario che hanno sempre portato aria fresca nelle mie giornate. Michelangelo, Edoardo, Emma e Laura, una famiglia di cui sento troppo spesso la mancanza.
Volevo infine ringraziare la professoressa Annamaria Montanari per la disponibilità e l'aiuto datomi nello svolgimenti di questa tesi.