Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

PREZZO CRITICO PER UN'OPZIONE AMERICANA VICINO A MATURITÁ

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
FELETTI CHIARA

3 Sessione
Anno Accademico 2010 - 2011

Indice

Introduzione **5**

1 UNA PRIMA ANALISI PRELIMINARE **7**

2 COMPORTAMENTO DI $s_e(t)$ VICINO A T **13**

3 COMPORTAMENTO DI $s^*(t)$ VICINO A T **19**

Bibliografia **23**

Introduzione

All'interno di questa tesi cercheremo di trattare le opzioni americane di tipo put, ossia quel particolare tipo di titolo derivato che conferisce al possessore il diritto di vendere uno strumento finanziario ad un determinato prezzo (strike price) in un qualunque momento compreso tra la data di inizio e quella di scadenza o maturitá. Avvalendoci del modello di Black & Scholes e definiamo il payoff di un'opzione americana di tipo put scritta sul titolo di prezzo $S_t = S_0 e^{(\sigma W_t + (\frac{\mu - \sigma^2}{2}))}$ come $\max\left(K, \dfrac{r}{q}K\right)$ con K strike price, S_0 valore iniziale fisso, σ varianza del ritorno del capitale e W_t moto browniano standard. Il nostro compito, nelle prossime pagine, sará cercare di dare un'approssimazione vicino a maturitá del prezzo critico $s^*(t)$ definito come

$$s^*(t) = \sup\{x \geq 0 | P_a(t,x) = (K-x)^+\} \tag{1}$$

Analizzando l'andamento del prezzo d'arbitraggio del derivato, definito $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathcal{R}^T$ da

$$P_a(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} E\left(e^{-rT}K - xe^{\sigma W_r - \sigma^2 \frac{\tau}{2}}\right)^+ \tag{2}$$

sappiamo che dall'istante $t_0 = 0$ alla maturutá T il dominio della soluzione di $P_a(t,x) = (K-x)^+$ puó essere suddiviso in due regioni:

- una in cui il valore dell'opzione é uguale al payoff, chiamata R_e o regione di esercizio anticipato;

- una in cui $P_a(t,x) > (K-x)^+$ chiamata R_c o regione di continuazione, in cui non conviene esercitare l'opzione.

Il bordo che separa R_e e R_c non é un dato assegnato del problema; al contrario viene usualmente chiamato un 'problema a frontiera libera' e la determinazione del problema costituisce una parte essenziale del problema. Infatti, dal punto di vista finanziario, la frontiera libera individua l'istante e il prezzo ottimali d'esercizio. La nostra intenzione sará di provare come il prezzo critico $s^*(t)$ con $t \to T$ soddisfi

$$K - s^*(t) \approx K\sigma\sqrt{(T-t)\lg(\frac{1}{T-t})} \tag{3}$$

dando una dimostrazione alternativa a quella di Barles(basata sulle sottosoluzioni e soprzsoluzioni della disuguazlianza variazionale soddisfatta da P_a), cercando di studiare $s_e(t)$ e di dare una stima a $s^*(t) - s_e(t)$ senza ricorrere alle supersoluzioni.

Capitolo 1

UNA PRIMA ANALISI PRELIMINARE

Prima di iniziare questa trattazione, mi sembra doveroso introdurre alcuni concetti fondamentali per avvicinare anche i meno esperti al campo della matematica finanziaria. Innanzitutto definiamo l'oggetto di questa tesi:

- OPZIONE Con questo termine si intende quel particolare tipo di titolo derivato che conferisce al possessore il diritto di acquistare o vendere il titolo sul quale l'opzione stessa é scritta (strumento sottostante), ad un determinato prezzo (strike price) e/o entro una determinata data. Il possessore puó esercitarla se ne trae convenienza economica.

- AMERICANA Si definisce opzione americana un contratto che puó essere esercitato in un qualunque momento compreso tra la sua data di inizio e quella di scadenza. La differenza sostanziale tra le opzioni americane e quelle europee corrispondenti consiste nella possibilitá per le prime di avere un esercizio anticipato, mentre per le seconde di essere esercitate solo a scadenza.

- PUT Le opzioni di questo tipo sono contratti che conferiscono al possessore il diritto di vendere uno strumento finanziario data una scadenza futura e un prezzo prefissato; si differenziano dalle opzioni 'call' che invece permettono l'acquisto dello strumento finanziario.

Introdotta la terminologia essenziale, vediamo ora di addentrarci in questa breve tesi dove intendiamo studiare il prezzo e la copertura delle opzioni americane: dato che, come visto sopra, tale opzione é contraddistinta dal fatto che puó essere esercitata in un qualunque istante minore od uguale alla maturitá T, per caratterizzarla é necessario per ogni tempo $t < T$ conoscere il valore del payoff, cioé la quantitá di denaro che occorre sborsare se il detentore dell'opzione decide di esercitarla al tempo t. Il prezzo di un opzione americana viene calcolato utilizzando formule matematiche e statistiche, sebbene vi siano diversi modelli tra cui poter scegliere: data la sua diffusione e la facilitá di utilizzo,in questa sede ci avvaliamo del modello di Black & Sholes, una formula matematica per il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call o put di tipo europeo. In accordo con questo modello se prendiamo un'opzione put americana scritta sul titolo di prezzo S_t il payoff é $\max\{K - S_t, 0\} = (K - S_t)^+$ dove il prezzo del titolo

$$S_t = S_0 e^{(\sigma W_t + (\frac{\mu - \sigma^2}{2}))} \tag{1.1}$$

é l'unica soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = rdt + \sigma dW_t \tag{1.2}$$

Arrivati a questo punto, bisogna introdurre la terminologia necessaria per proseguire con i calcoli prima di creare confusione nelle teste dei lettori:

- il tasso di interesse r(variabile economica che misura il costo del denaro) sia una costante positiva e tale che la sua crescita provochi una diminuzione del valore dell'opzione put;
- S_0 sia un valore iniziale fissato;

- σ sia la varianza del ritorno del capitale. In modo intuitivo misura l'ampiezza delle fluttuazioni del prezzo dell'opzione: maggiore é il suo valore, maggiore é la probabilitá che vi siano ampie oscillazioni del prezzo;

- $(W_t)_{t\geq 0}$ sia un moto browniano standard(o moto di Wiener) sotto $\mathcal{P}$, con $W_{(t)} \approx N(0,t)$ dove $N(\mu,\sigma^2)$ denota una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2;

- K sia il prezzo d'esercizio (strike price), ossia il prezzo fissato da entrambe le parti a cui poter vendere o comprare il sottostante(a seconda che sia una put o una call);

- T é la data di maturitá, data entro la quale si puó esercitare l'opzione.

- non siano presenti dividendi, ossia si reinvestano tutti gli utili generati nel corso dell'esercizio;

Sono tuttavia presenti anche altri fattori difficili da quantificare che influiscono sul prezzo dell'opzione (vedi ad esempio le aspettative sulla futura performance e sulla futura volatilitá del sottostante) ma che non possono essere inseriti in un modello matematico di valutazione. Vediamo ora di addentrarci nel problema vero e proprio di questa trattazione, ossia come determinare il prezzo di un'opzione americana a un tempo t vicino a scadenza.
La valutazione di un'opzione americana da' luogo ad un problema con frontiera libera: in corrispondenza di ciascun momento $t < T$ esiste un prezzo del bene sottostante al di sopra del quale é conveniente procedere all'esercizio e al di sotto del quale si ha la 'regione di continuazione'. La condizione a frontiera libera che un'opzione call americana deve soddisfare per ogni istante t é:

$$C^A(S_t,t) \geq P^A(S_t,t) = (S_t - K)^+ \tag{1.3}$$

La determinazione della politica ottima d'arresto prevede di trovare la coppia $(t*, S_{t*})$ in corrispondenza della quale l'esercizio dell'opzione americana (prima della scadenza) risulta ottimale. La possibilitá dell'esercizio anche prima della scadenza rende, ovviamente, piú complicato il problema di valutazione delle opzioni americane rispetto a quello delle opzioni europee. D'altra parte si osservi che dalle disuguaglianze

$$C_t^A \geq C_t^E \geq (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \geq (S_t - K)^+ \tag{1.4}$$

segue immediatamente che, per le opzioni call americane, l'esercizio prima della scadenza non risulta mai vantaggioso, a meno che il bene sottostante non preveda la distribuzione di dividendi. L'esercizio anticipato infatti consente di incassare $(S_t - K)^+$ ma conporta la perdita del valore temporale che sommato al payoff incassato dá il valore dell'opzione. Per semplificare i calcoli, decidiamo di prendere un'opzione senza dividendi, ossia senza che una parte degli utili venga periodicamente distribuita ai possessori dei titoli. Il prezzo di un'opzione americana sarebbe max $\left(K, \frac{r}{q}K\right)$, dipendendo interamente dal valore del paramentro dell'interesse r e del dividendo q; quando il dividendo tende a 0 il valore dell'opzione tende all'infinito e ció coincide con il ben noto risultato per cui non c'é convenienza nell'esercizio del titolo prima della scadenza: da qui possiamo concludere che il suo valore coincide con quello dell'opzione europea. In accordo con il modello Black & Scholes sappiamo che il prezzo di un opzione put Europea é dato (al momento $t < T$) dal valore atteso, scontato, del payoff futuro attribuito all'opzione, che é $E(e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+|F_t)$, dove $(F_t)_{t\geq 0}$ é la filtrazione naturale. Questa attesa condizionale puó essere scritta nella seguente forma:

$$E((K - S_T)^+ e^{-r(T-t)}|F_t) = P(t, S_t) \tag{1.5}$$

dove la funzione $P(t, x)$ é definita, per $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{R}^+$ da

$$P(t,x) = E\left(e^{-r(T-t)}K - xe^{\sigma W_{T-t} - \sigma^2 \frac{(T-t)^2}{2}}\right)^+ \tag{1.6}$$

Da questa formula risulta evidente che $P(t,x)$ é una funzione di x convessa decrescente e fatta in modo tale da soddisfare $P(t,0) = Ke^{-r(T-t)}$ e $\lim_{x\to\infty} P(t,x) = 0$. Inoltre l'equazione $P(t,x) = (K-x)^+$ ammette un'unica soluzione nella variabile x nell'intervallo aperto $(0,K)$ se $t < T$, che successivamente denoteremo con $s_e(t)$. Tornando alle opzioni americane, il prezzo di un opzione put, con prezzo d'esercizio K e data di maturitá T é dato (al momento $t < T$) da

$$ess \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \sup E(e^{-r(T-t)}(K - S_\tau)^+ | F_t) \tag{1.7}$$

dove $\mathcal{T}_{t,T}$ é l'intervallo di tutti i valori stop con valori in $[t,T]$. Questo prezzo puó essere scritto come $P_a(t,S_t)$, dove la funzione $P_a(t,S_t)$ é definita, $\forall(t,x) \in [0,T] \times \mathcal{R}^T$ da

$$P_a(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T-t}} E\left(e^{-rT}K - xe^{\sigma W_r - \sigma^2\frac{\tau}{2}}\right)^+ \tag{1.8}$$

Da questa formula risulta evidente che anche $P_a(t,x)$ é una funzione convessa decrescente di x e che ció soddisfa $P_a(t,0) = K$ e $\lim_{x\to\infty} P_a(t,x) = 0$. Inoltre sappiamo da proposizione nota che $P_{europea} \leq P_{americana}$, da cui possimo concludere che $\forall x \in \mathcal{R}^+$

$$P(t,x) \leq P_a(t,x) \tag{1.9}$$

e

$$(K-x)^+ \leq P_a(t,x) \tag{1.10}$$

risultato che poteva essere ricavato anche osservando semplicemente la definizione delle due funzioni. Definendo prezzo critico stock al momento t con $t \in [0, T]$

$$s^*(t) = \sup\{x \geq 0 | P_a(t, x) = (K - x)^+\} \tag{1.11}$$

osserviamo che anche la funzione $t \mapsto s^*(t)$ é non decrescente, C^∞ su $[0, T)$ e che $\lim_{t \to T} s^*(t) = K$. Prima di entrare nel cuore di questa trattazione, ricordiamo ai fini delle successive dimostrazioni un risultati noto: prese f e g definite su $[0, T]$, se abbiamo che $f(t) \approx g(t)$ con $t \to T$, allora $\lim_{t \to T} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$;

Teorema 1.0.1. *Se $t \to T$, il prezzo critico soddisfa il seguente*

$$K - s^*(t) \approx K\sigma \sqrt{(T - t) \lg(\frac{1}{T - t})} \tag{1.12}$$

Lo scopo di questa trattazione sará dare una dimostrazione di questo risultato alternativa a quella di Barles, basata sulla costruzione delle sottosoluzioni e soprasoluzioni della disuguaglianza variazionale soddisfatta da P_a. Attualmente, la sottosoluzione considerata é solamente $P(t, x)$ e si usa la disuguaglianza $s_e(t) \geq s^*(t)$, che segue intuitivamente da $P \leq P_a$. la supersoluzione é della forma $f(t)P(t, x)$. Il nostro metodo consiste nello studiare $s_e(t)$ e nel dare una stima a $s^*(t) - s_e(t)$, senza ricorrere alle supersoluzioni.

Capitolo 2

COMPORTAMENTO DI $s_e(t)$ VICINO A T

Teorema 2.0.2. *Definendo, per* $t \in [0, T]$,

$$\phi(t) = \frac{\lg(\frac{K}{s_e})}{\sigma(\sqrt{T-t})} \tag{2.1}$$

si ha che se $t \to T$, $\phi(t)^2 e^{\frac{\phi(t)^2}{2}} \approx \dfrac{\sigma}{r\sqrt{2\pi(T-t)}}$.

Arrivati a questo risultato, seguirá

$$K - s_e(t) \approx K\sigma\sqrt{(T-t)\lg(\frac{1}{T-t})} \tag{2.2}$$

se $t \to T$. Prima di dimostrare il teorema 2.0.2, consideriamo il seguente lemma.

Lemma 2.0.3.

$$\lim_{t \to T} \frac{K - s_e(t)}{\sqrt{T-t}} = \infty \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Per quanto ne sappiamo, questa proprietá venne osservata la prima volta da Charretour e Viswarathan; per essere piú chiari diamo ora una breve dimostrazione. Come noto dall'introduzione di questa trattazione, definendo $s_e(t)$ come unica soluzione di $P(t,x) = (K-x)^+$ nell'intervallo aperto $(0,K)$ con $t < T$, con opportuni calcoli otteniamo

$$K - s_e(t) = E\left(Ke^{-r(T-t)} - s_e(t)e^{\sigma W_{T-t} - \sigma^2\frac{(T-t)^2}{2}}\right)^+ = \tag{2.4}$$

$$E\left(Ke^{-r(T-t)} - s_e(t)e^{\sigma W_{T-t} - \sigma^2\frac{(T-t)^2}{2} - r(T-t) + r(T-t)}\right)^+$$

Dividendo per $\sqrt{T-t}$ e raccogliendo $e^{-r(T-t)}$, definito $\vartheta = T - t$

$$\frac{K - s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}} = E\left[e^{-r\vartheta}\left(\frac{K - s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}} + s_e(t)\frac{1 - e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\vartheta + \sigma\sqrt{\vartheta}g}}{\sqrt{\vartheta}}\right)^+\right] \tag{2.5}$$

dove g é una una variabile aleatoria normale standard. Avvalendoci del lemma di Fatou e del fatto che, essendo $q = 0$, $\lim_{t\to T} s_e(t) = K$ possiamo stabilire che

$$\liminf_{t\to T} \frac{K - s_e(t)}{\sqrt{T-t}} \geq E\left[\liminf_{t\to T} e^{-r\vartheta}\left(\frac{K - s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}} + s_e(t)\frac{1 - e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\vartheta + \sigma\sqrt{\vartheta}g}}{\sqrt{\vartheta}}\right)^+\right] \tag{2.6}$$

Sviluppando con Taylor l'ultima parte avremo che

$$E\left[\liminf_{t\to T} e^{-r\vartheta}\left(\frac{K-s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}}+s_e(t)\frac{1-e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\vartheta+\sigma\sqrt{\vartheta}g}}{\sqrt{\vartheta}}\right)^+\right]= \quad (2.7)$$

$$E\left[\liminf_{t\to T} e^{-r\vartheta}\left(\frac{K-s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}}+s_e(t)\frac{1-(1+(r-\frac{\sigma^2}{2})\vartheta+\sigma\sqrt{\vartheta}g+o((r-\frac{\sigma^2}{2})\vartheta+\sigma\sqrt{\vartheta}g)}{\sqrt{\vartheta}}\right)^+\right]=$$

$$E\left[\liminf_{t\to T} e^{-r\vartheta}\left(\frac{K-s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}}-s_e(t)\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}-s_e(t)\frac{\sigma\sqrt{\vartheta}g}{\sqrt{\vartheta}}+\frac{o((r-\frac{\sigma^2}{2})\vartheta+\sigma\sqrt{\vartheta}g)}{\sqrt{\vartheta}}+\right)^+\right]=$$

$$E\left[\liminf_{t\to T}(\frac{K-s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}})-Kg\sigma\right]$$

da cui

$$\liminf_{t\to T}\frac{K-s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}}\geq E\left(\liminf_{t\to T}\frac{K-s_e(t)}{\sqrt{\vartheta}}-K\sigma g\right)^+ \quad (2.8)$$

Preso $\eta\in\mathcal{R}$, di sicuro avremo che $(\eta-K\sigma g)^+\geq\eta-K\sigma g$ e la disuguaglianza risulterá stretta qualora si verifichi $\eta-K\sigma g<0$. Da qui, calcolando l'attesa di entrambi i membri di 2.6, abbiamo $E(\eta-K\sigma g)^+>\eta$ per qualunque η finito, provando che $\liminf_{t\to T}\dfrac{K-s_e(t)}{\sqrt{T-t}}=+\infty$. □

Dimostrazione. (2.0.2) Definiamo anche qui $\vartheta=T-t$ e g una variabile aleatoria normale standard e deriviamo quindi dall'equazione 2.4 che

$$K-s_e(t)=e^{-r\vartheta}K-s_e(t)+E\left(Ke^{-r\vartheta}-s_e(t)e^{\sigma\sqrt{\vartheta}g-\sigma^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^- \quad (2.9)$$

da cui, eliminando $s_e(t)$ da entrambi i membri, portando $Ke^{r\vartheta}$ nel primo membro e raccogliendo K,

$$(1-e^{-r\vartheta})K = E\left(Ke^{-r\vartheta} - s_e(t)e^{\sigma\sqrt{\vartheta}g-\sigma^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^- \tag{2.10}$$

Ora dividiamo entrambi i membri per $s_e(t)$ e poniamo

$$\alpha = \alpha(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\left(\lg\left(\frac{K}{s_e(t)}\right) - \left(r - \frac{\vartheta^2}{2}\right)\vartheta\right) \tag{2.11}$$

Notiamo, dal lemma 2.0.3, che $\lim_{t\to T}\alpha(t) = +\infty$, $\lim_{t\to T}\alpha(t)\sqrt{T-t} = 0$ e $s_e(t) \to K$. Date queste notazioni abbiamo

$$\left(1-e^{-r\vartheta}\right)\frac{K}{s_e(t)} = E\left[e^{-\frac{\sigma^2}{2}}(e^{\alpha\sigma\sqrt{\vartheta}} - e^{\sigma\sqrt{\vartheta}g})^-\right] \tag{2.12}$$

Grazie a Taylor vediamo facilmente come la parte sinistra sia uguale a $r\vartheta$ se $t \to T$; per stimare la parte destra invece, poniamo

$$f(\vartheta) = E[(e^{\alpha\sigma\sqrt{\vartheta}} - e^{\sigma\sqrt{\vartheta}g})^-] = E[(e^{\sigma\sqrt{\vartheta}g} - e^{\alpha\sigma\sqrt{\vartheta}})_{1_{\{g>\alpha\}}}] \tag{2.13}$$

Usando $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$ abbiamo che

$$|f(\vartheta) - E(\sigma\sqrt{\vartheta}(g-\alpha)_{1_{g>\alpha}})| \leq \frac{\sigma^2\vartheta}{2}E\left(g^2 e^{\sigma\sqrt{\vartheta}|g|}_{1_{g>\alpha}}\right) + \frac{\sigma^2\vartheta\alpha^2}{2}e\alpha\sqrt{\vartheta}\sigma_{P_{g>\alpha}} \tag{2.14}$$

Nel caso in cui $t \to T$, $\vartheta \to 0$ e $\alpha \to \infty$ allora

$$f(\vartheta) = \sigma\sqrt{\vartheta}E((g-\alpha)_{1_{\{g>\alpha\}}}) + o(\vartheta) \tag{2.15}$$

Sapendo che $f(\vartheta) \approx r\vartheta$ abbiamo

$$r\vartheta \approx \sigma\sqrt{\vartheta}E((g-\alpha)_{1_{g>\alpha}}) = \sigma\sqrt{\vartheta}_\alpha\int^{+\infty}(y-\alpha)e^{\frac{y^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dy \tag{2.16}$$

e ponendo $x = \alpha(y - \alpha)$

$$\frac{\sigma\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{2\pi}\alpha^2 e^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^{+\infty} x e^{-x-\frac{x^2}{2\alpha^2}} dx \tag{2.17}$$

Da qui

$$\alpha^2(t) e^{\frac{\alpha^2(t)}{2}} \approx \frac{\sigma}{r\sqrt{2\pi(T-t)}} \tag{2.18}$$

e si otterrá facilmente il teorema 2.0.2 da

$$\phi(t) - \alpha(t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \tag{2.19}$$

$\square$

Capitolo 3

COMPORTAMENTO DI $s^*(t)$ VICINO A T

Il teorema 1.0.1 é una diretta conseguenza del Teorema 2.0.2 e della seguente stima

Lemma 3.0.4. *Esiste una costante* $C > 0$ *tale che,* $\forall t \in [0, T]$

$$0 \leq s_e(t) - s^*(t) \leq C\sqrt{T-t} \tag{3.1}$$

Diamo nelle pagine successive una dimostrazione di questo fatto. Preso $t \in [0, T)$, la disuguaglianza $0 \leq s_e(t) - s^*(t)$ segue da $P(t, x) \leq P_a(t, x)$. Prima di dimostrare l'altra disuguaglianza, ricordiamo che $P(t, .)$ é C^1 su $[0, +\infty)$ (cf. [14], teorema 11.2)e C^∞ su $(s^*(t), +\infty)$ e che la seguente disuguaglianza vale per $t < T$ e $x > s^*(t)$

$$\frac{\partial P_a(t)}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, x) + rx\frac{\partial P_a(t, x)}{\partial x}(t, x) - rP_a(t, x) = 0 \tag{3.2}$$

Con $s_e(t) \geq s^*(t)$ possiamo applicare la formula di Taylor :

$$P_a(t, s_e(t)) = P_a(t, s^*(t)) + (s_e(t) - s^*(t))\frac{\partial P}{\partial x}(t, s^*(t)) + \frac{(s_e(t) - s^*(t))^2}{2}\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, \xi) \tag{3.3}$$

Preso poi $\xi \in (s^*(t), s_e(t))$ e $\frac{\partial P_a}{\partial x}(t, s^*(t)) = -1$ avremo

$$P_a(t, s_e(t)) = K - s^*(t) - (s_e(t) - s^*(t)) + \frac{(s_e(t) - s^*(t))^2}{2}\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, \xi) = \quad (3.4)$$
$$P(t, s_e(t)) + \frac{(s_e(t) - s^*(t))^2}{2}\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, \xi)$$

Ora calcoliamo la seguente formula relativa a P_a e P (cf. [12], Corollario 3.1)

$$P_a(t, x) - P(t, x) = rK_0 \int^{T-t} e^{-ru} P((r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W_u < \lg(\frac{s^*(t+u)}{x}))du \quad (3.5)$$

che implica $P_a(t, x) - P(t, x) \leq rK(T - t)$. Inoltre, ritornando all' equazione 3.4

$$\frac{(s_e(t) - s^*(t))^2}{2}\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, \xi) \leq rk(T - t) \quad (3.6)$$

Ora, poiché abbiamo posto $\xi > s^*(t)$, si avrá

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, \xi) = -\frac{\partial P_a}{\partial t}(t, x) - r\xi\frac{\partial P_a}{\partial x}(t, \xi) + rP_a(t, x) \geq r\xi(-\frac{\partial P_a}{\partial x}(t, x)) \quad (3.7)$$

visto che l'equazione $t \longmapsto P_a(t, x)$ é non crescente. Inoltre segue dall'equazione 3.5 che neanche la funzione $x \longmapsto P_a(t, x) - P(t, x)$ é crescente, per cui, dato $\frac{\partial P_a}{\partial x}(t, x) \leq \frac{\partial P}{\partial x}(t, \xi)$, segue

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2}(t, \xi) \geq r\xi(-\frac{\partial P}{\partial x}(t, \xi)) \quad (3.8)$$

Un ultimo facile calcolo mostra come, preso $x < K$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \mathcal{P}(g < \frac{\lg(\frac{K}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\vartheta}}) \geq \mathcal{P}(g < -(r + \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T - t}) \quad (3.9)$$

da cui otterremo, per t vicino a T

$$-\frac{\partial P}{\partial x}(t,\xi) \geq \frac{1}{4} \tag{3.10}$$

Sappiamo anche che $(s_e(t) - s^*(t))^2 \leq C(T-t)$ per t vicino a T, il che é sufficiente a dimostrare la Proposizione 3.0.4

Bibliografia

[1] http://www.formazione-finanza.com

[2] http://it.wikipedia.org

[3] http://www.springerlink.com/content/j0h164721883369l

[4] http://www.dma.unive.it/ pianca/matfin/americane.pdf

[5] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano, N. Sanscen, 'Estimation de la frontiere libre des options americainesau voisinage de l'echeance', C.R. Acad Sci. Paris, Serie I 316 (1993), 171 - 174

[6] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano, N. Sanscen, 'Critical stock price near expiration (to appear in Mathematical Finance)

[7] F.Charretour, R.J.Elliot, R.Myneni, R Viswanathan, 'Paper presented at the Oberwolfach meeting on mathematical finance', Agosto 1992

[8] A.Friedman 'Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary' J.Funct.Anal. 18(1975), 151-176

[9] S.D.Jacka 'Optimal stopping and the American put price', Math.Finance 1 (1991), 1-14

[10] I.Karatzas 'Optimization problems in the theory of continuos trading', SLAM J. Control Optim. 27 (1989), 1221-1259

[11] I.Karatzas 'On the pricing of American optins' Appl.Math.Optim. 17 (1988), 37-60

[12] R.Myneni 'The pricing of the American Option' Ann.Appl.Probab. 2 (1992), 1-23

[13] P.L.J.Van Moerbeke 'On optimal stopping and free boundary problems' Arch.Rational Mech.Anal 60(1976), 101-148

[14] Pascucci Andrea, 'PDE and Martingale methods in option pricing' Bocconi University Press