Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

GEODETICHE SU VARIETÀ RIEMANNIANE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
GIOVANNA CITTI

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA CAPOGNA

Presentata da:
GIULIA MARTINI

III Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Indice

Introduzione

L'obiettivo della tesi è quello di descrivere il problema delle geodetiche in varietà Riemanniane.

Le varietà Riemanniane sono state introdotte da Riemann nella seconda metà del XIX secolo, e permettono di descrivere strutture geometriche non Euclidee. In particolare strutture Rimanniane sono le varietà immerse in R^n, o strutture differenziali non isotrope. L'anisotropia della struttura è espressa da una metrica sulla varietà, ovvero un prodotto scalare definito su ciascuno dei suoi piani tangenti, che induce una distanza fra coppie di punti della struttura, detta distanza Riemanniana.

In queste strutture verranno studiate le geodetiche, che possono essere viste come le curve "naturali" dello spazio, nel senso che hanno accelerazione nulla, o equivalentemente che minimizzano la distanza fra coppie di punti. Le geodetiche hanno assunto una grande importanza all'inizio del XX secolo, per il loro ruolo nella relatività generale. Lo spazio-tempo è infatti uno spazio dotato di una metrica non Euclidea di dimensione 4, in cui le geodetiche descrivono la traiettoria di un punto materiale in presenza di un campo gravitazionale.

Questo lavoro inizia con un capitolo sulle varietà Riemanniane, in cui viene introdotta la definizione di metrica Riemanniana su una varietà differenziabile e se ne dà l'espressione in coordinate. Sono inoltre presentati alcuni esempi di metriche, quali la metrica indotta, la metrica prodotto e le metriche conformi.

Nel capitolo successivo viene definito il concetto di geodetica. Per farlo si introducono preliminarmente i concetti di connessione, derivata covariante e trasporto parallelo, che permettono di definire le derivate direzionali di campi vettoriali. A questo punto le geodetiche vengono definite come le curve la cui accelerazione è identicamente nulla.

Nel terzo capitolo viene introdotta la connessione Riemanniana o di Levi-Civita, le cui geodetiche verificano una proprietà di compatibilità con le proprietà della metrica. Tramite la mappa esponenziale, che stabilisce un diffeomorfismo locale fra la varietà e il suo spazio tangente, le sfere sulla varietà sono descritte come immagine delle sfere Euclidee sul piano tangente. In altre parole si codifica nelle geodetiche e nell'esponenziale tutta la deformazione operata dalla metrica Riemanniana.

Nel quarto capitolo si riconosce che le geodetiche sono curve che minimizzano localmente il funzionale della lunghezza, e viceversa i minimi di questo sono geodetiche.

L'ultimo capitolo è dedicato ad applicazioni ed esempi concreti di varietà Riemanniane: lo spazio Euclideo, la sfera Euclidea con la metrica indotta, le superfici di rotazione e il gruppo di Heisenberg con una metrica Riemanniana dipendente da un parametro ϵ. In questo caso particolare si è verificato che al tendere a 0 del parametro, la metrica dà luogo a una struttura totalmente degenere, nella quale vale ancora la proprietà di connettività e si possono dare le nozioni di lunghezza e di geodetiche.

Capitolo 1

Varietà Riemanniane

In questo capitolo introduciamo la nozione di varietà Riemanniana, e le sue prime proprietà: la rappresentazione in coordinate e la nozione di metrica indotta e di metrica prodotto.

1.1 Definizione di varietà Riemanniana

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale. Un *prodotto scalare su* V è una forma bilineare simmetrica definita positiva, cioè un'applicazione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

(i) $g(u_1 + u_2, v) = g(u_1, v) + g(u_2, v) \quad \forall\ u_1, u_2, v \in V$

(ii) $g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) \quad \forall\ u, v \in V, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $g(u, v) = g(v, u) \quad \forall\ u, v \in V$

(iv) $g(u, u) \geq 0 \quad \forall\ u \in V$, con $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Definizione 1.2. Una *metrica Riemanniana* g su una varietà differenziabile M è una funzione che a ogni punto p di M associa un prodotto scalare g_p, definito sullo spazio tangente T_pM, che dipende differenziabilmente da p.

In altri termini, per ogni coppia di campi vettoriali X e Y, l'applicazione $p \longrightarrow g_p(X_p, Y_p)$ è differenziabile.

Definizione 1.3. Una *varietà Riemanniana* è una coppia (M, g), dove M è una varietà differenziabile e g una metrica Riemanniana su M.

Nel seguito, ogni volta non ci sia rischio di ambiguità, indicheremo il prodotto scalare dei vettori tangenti $X, Y \in T_pM$ con il simbolo $\langle X, Y\rangle$, omettendo il pedice p. Analogamente, ove la metrica g sia fissata, indicheremo solo con M la varietà (M, g). Inoltre, qualche volta indicheremo g_M la metrica definita su una varietà differenziabile M.

Definizione 1.4. Dato un punto p di una varietà Riemanniana (M, g), si definisce la *lunghezza* o *norma* di un vettore $X \in T_pM$ come

$$|X| := \sqrt{\langle X, X\rangle}.$$

Due vettori non nulli $X, Y \in T_pM$ si dicono *ortogonali* se $\langle X, Y\rangle = 0$. I vettori $E_1 \dots E_k$ si dicono *ortonormali* se hanno tutti lunghezza 1 e sono a due a due ortogonali.

Definizione 1.5. Siano (M, g) e $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ due varietà Riemanniane. Un diffeomorfismo $\phi : M \longrightarrow \widetilde{M}$ si dice un'*isometria* se $\phi^*\widetilde{g} = g$, cioè se

$$(\phi^*\widetilde{g})_p(v, w) = \widetilde{g}_{\phi(p)}(D_p\phi(v), D_p\phi(w)) = g_p(v, w),$$

per ogni $p \in M$ e $v, w \in T_pM$. In questo caso anche ϕ^{-1} è un'isometria.

M e $\widetilde{M}$ si dicono *isometriche* se esiste almeno un'isometria tra di loro.

1.1.1 L'espressione in coordinate di una metrica

Fissato un sistema di coordinate locali $x^1, \dots, x^n$ intorno a un punto x, indicheremo (g_{ij}) la matrice simmetrica e definita positiva associata al prodotto scalare nella base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ di TM. In coordinate la metrica si esprimerà quindi

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Qui e nel seguito sarà sempre omesso il simbolo di sommatoria in i e j, e si utilizzerà la notazione di Einstein. Se attorno al punto x, oltre al sistema di coordinate precedente, sono definite delle nuove coordinate $(y^1, \dots, y^n)$ tali che $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, la matrice (g'_{ij}) della metrica rispetto alle nuove coordinate sarà diversa. Considerando il legame tra i sistemi di coordinate dato da

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

si ottiene che i coefficienti della nuova matrice sono definiti da

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}.$$

1.1.2 La metrica indotta e la metrica prodotto

Sia $\iota : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ un'immersione con $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ varietà Riemanniana e M sottovarietà di $\widetilde{M}$. Si può definire una metrica Riemanniana g su M, detta *metrica indotta*, mediante il pull back $g = \iota^* \widetilde{g}$. Si avrà quindi

$$g_p(v, w) = \widetilde{g}_{\iota(p)}(D_p\iota(v), D_p\iota(w)) \quad \forall\, p \in M \quad \forall\, v, w \in T_pM. \tag{1.1}$$

La metrica indotta su M non è altro che la restrizione di $\widetilde{g}$ ai vettori tangenti a M, e siccome la restrizione di un prodotto scalare è ancora un prodotto scalare, la metrica indotta è una metrica Riemanniana su M.

Un esempio di metrica ottenuta così è la metrica indotta sulla sfera S^n dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$ (si veda la sezione 5.2).

Siano ora (M_1, g_1) e (M_2, g_2) due varietà Riemanniane. Il loro prodotto $M_1 \times M_2$ può essere dotato della metrica Riemanniana $g = g_1 \oplus g_2$, chiamata metrica prodotto, definita da

$$g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2),$$

con $X_i, Y_i \in T_pM_i$ e $T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2 = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

Date le coordinate locali $(x^1, \ldots, x^n)$ su M_1 e $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ su M_2, si hanno su $M_1 \times M_2$ le coordinate $(x^1, \ldots, x^{m+n})$. Rispetto a queste coordinate la metrica prodotto ha l'espressione locale $g = g_{ij}dx^i dx^j$, dove (g_{ij}) è la matrice diagonale a blocchi

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} ((g_1)_{ij}) & 0 \\ 0 & ((g_2)_{ij}) \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Metriche conformi

Definizione 1.6. Due metriche Riemanniane g_1 e g_2 su una varietà M si dicono *conformi* se esiste una funzione positiva $f \in C^\infty(M)$ tale che $g_2 = fg_1$.
Due varietà Riemanniane (M_1, g_1) e (M_1, g_2) si dicono *conformemente equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$, detto *equivalenza conforme*, tale che $\phi^* g_2$ sia conforme a g_1.
(M_1, g_1) si dice *localmente conforme* a (M_2, g_2) se per ogni $p \in M_1$ esistono un intorno $U \subseteq M_1$ di p e un diffeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq M_2$ tale che $\phi^* g_2|_{F(U)}$ sia conforme a $g_1|_U$.
Infine, si dice che (M, g) è *localmente conformemente piatta* se è localmente conforme a $\mathbb{R}^n$ con la metrica Euclidea, dove $n = \dim M$.

Nella sezione 5.2.1 si proverà che le sfere sono localmente conformemente piatte.

Capitolo 2

Geodetiche e trasporto parallelo

In questo capitolo, introduciamo il concetto di geodetica, ovvero vogliamo generalizzare alle varietà Riemanniane il concetto di linee rette nello spazio Euclideo. La definizione di geodetica si può dare in vari modi. Una definizione possibile è quella di curve che minimizzano la distanza tra due punti. Alternativamente si può cercare di generalizzare al contesto delle varietà Riemanniane il fatto che l'accellerazione delle rette risulta identicamente nulla. Noi abbiamo preferito questa seconda definizione.

Per dare senso alle idee di accelerazione di una curva e di geodetica su una varietà verranno introdotti connessioni, derivate covarianti e trasporto parallelo. Questi concetti generalizzano le derivate direzionali nello spazio Euclideo e permettono di definire le derivate direzionali di campi vettoriali.

2.1 Il problema di differenziare i campi vettoriali

La nozione di geodetica che vogliamo dare estende alle varietà Riemanniane il concetto di curva con derivata seconda nulla. Intuitivamente per fare questo occorre introdurre la definizione di derivata del vettore tangente alla curva. Se si volesse definire $\ddot{\gamma}$ differenziando semplicemente $\dot{\gamma}$ rispetto a t, si avrebbe un rapporto incrementale che contiene la differenza tra i vettori $\dot{\gamma}(t)$ e $\dot{\gamma}(t_0)$. Ma non è possibile calcolare direttamente questa differenza, perché questi vettori appartengono rispettivamente a $T_{\gamma(t)}$ e $T_{\gamma(t_0)}$, che sono due spazi vettoriali isomorfi ma diversi. Perciò per definire l'accelerazione di una curva su una varietà astratta è necessario introdurre la nozione di derivata di un campo vettoriale $\dot{\gamma}$ lungo la curva. Per farlo bisogna comparare i valori di un campo vettoriale in punti diversi della curva cercando di identificare i vari spazi tangenti. Vedremo che le connessioni e il trasporto parallelo sono gli strumenti che permettono queste identificazioni.

2.2 Connessioni

Verrà data dapprima la definizione di connessione per differenziare sezioni di fibrati vettoriali. Questa definizione verrà adattata successivamente al caso dei campi vettoriali lungo le curve.

Definizione 2.1. Sia $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale su una varietà M, e sia $\mathcal{E}(M)$ lo spazio delle sezioni lisce di E. Una *connessione* su E è una mappa

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

tale che:

(i) $\nabla_X Y$ è $C^\infty(M)$-lineare in X:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$$

per ogni $X_1, X_2 \in \mathcal{T}(M)$, $Y \in \mathcal{E}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$;

(ii) $\nabla_X Y$ è $\mathbb{R}$-lineare in Y:

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{E}(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$;

(iii) ∇ soddisfa la proprietà del prodotto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, $Y \in \mathcal{E}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

$\nabla_X Y$ è chiamata *derivata covariante di Y nella direzione di X*. Una connessione su TM viene detta *connessione lineare* o connessione su M.

Il Lemma seguente dimostra che una connessione è un operatore di tipo locale.

Lemma 2.2.1. *Sia $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale su M e $\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$ una connessione. Se $X, \widetilde{X} \in \mathcal{T}(M)$ e $Y, \widetilde{Y} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $X = \widetilde{X}$ e $Y = \widetilde{Y}$ in un intorno di $p \in M$, allora si ha $\nabla_X Y(p) = \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}(p)$.*

Dimostrazione. Per prima cosa si prova che se $Y \equiv 0$ in un intorno U di p allora $\nabla_X Y(p) = 0$ per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$. Sia $\phi \in C^\infty(M)$ una funzione test a supporto in U tale che $\phi(p) = 1$. Allora $\phi Y \equiv 0$, quindi per la $\mathbb{R}$-linearità rispetto a Y si ha $\nabla_X(\phi Y) = \nabla_X(0 \cdot \phi Y) = 0$, da cui, per la proprietà del prodotto:

$$0 \equiv \nabla_X(\phi Y)(p) = \phi(p)\nabla_X Y(p) + (X\phi)(p)Y(p) = \nabla_X Y(p) \quad \forall\ X \in \mathcal{T}(M).$$

Dunque se $Y, \widetilde{Y} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $Y = \widetilde{Y}$ in un intorno di p, si ha $Y - \widetilde{Y} \equiv 0$ in un intorno di p, e quindi $\nabla_X Y(p) = \nabla_X \widetilde{Y}(p)\ \forall\ X \in \mathcal{T}(M)$.

Analogamente si dimostra che se $X \equiv 0$ in un intorno U di p, allora $\nabla_X Y(p) = 0$ per ogni $Y \in \mathcal{E}(M)$. Infatti, si consideri ancora la funzione test $\phi \in C^\infty(M)$. Si ha $\phi X \equiv 0$, per cui $\nabla_{\phi X} Y = \nabla_{0\phi X} Y = 0\nabla_{\phi X} Y \equiv 0$ e quindi

$$0 = \nabla_{\phi X} Y(p) = \phi(p)\nabla_X Y(p) = \nabla_X Y(p).$$

Perciò se $X = \widetilde{X}$ in un intorno di p allora $\nabla_X Y(p) = \nabla_{\widetilde{X}} Y(p)$ per ogni $Y \in \mathcal{E}(M)$. □

Il lemma precedente prova che il valore di $\nabla_X Y$ in p dipende solo dal comportamento di X e Y in un intorno di p. In realtà si osserva che per calcolare $\nabla_X Y(p)$ è sufficiente conoscere Y intorno a p e X in p.

Lemma 2.2.2. *Con le notazioni del Lemma 2.2.1 si ha che $\nabla_X Y(p)$ dipende solo dai valori di Y in un intorno di p e da $X(p)$.*

Dimostrazione. Basta mostrare che $X(p) = X_p = 0$ implica $\nabla_X Y(p) = 0$ per ogni $Y \in \mathcal{T}(M)$. Sia (U, ϕ) una carta locale con $p \in U$, e si scriva $X|_U = X^i \partial_i$ in coordinate su U, con $X^i = 0$ per $i = 1, \ldots, n$ in quanto $X(p) = 0$. Allora

$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{X^i \partial_i} Y(p) = X^i(p)\nabla_{\partial_i} Y(p) = 0,$$

dove nella prima uguaglianza si è usato il Lemma 2.2.1 e nella seconda la $C^\infty(M)$-linearità rispetto a X di $\nabla_X Y$. □

Grazie all'ultimo lemma, si può scrivere $\nabla_{X_p} Y$ invece di $\nabla_X Y(p)$. Questo può essere pensato come una derivata direzionale di Y in p lungo la direzione del vettore X_p.

2.2.1 Connessioni lineari

Come si è accennato in precedenza, una connessione lineare su M, o connessione su M, è una connessione su TM, cioè una mappa

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

che soddisfa le proprietà elencate nella Definizione 2.1. Osserviamo che una connessione lineare non è tensoriale in entrambi i suoi argomenti, in quanto è $C^\infty(M)$-lineare in X ma solo $\mathbb{R}$-lineare in Y.

Diamo ora l'espressione in componenti di una connessione lineare. Sia E_i un riferimento locale per TM su un aperto $U \subset M$ (di solito si sceglie $E_i = \partial_i$, ma qui è trattato il caso generale). Se i e j sono fissati, il vettore $\nabla_{E_i} E_j$ sarà esprimibile in termini degli elementi della base, E_k con opportuni coefficienti che indicheremo Γ_{ij}^k

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k. \tag{2.1}$$

Questo definisce n^3 funzioni Γ_{ij}^k su U, chiamate *simboli di Christoffel* di ∇ rispetto al riferimento E_i.

Il lemma seguente mostra che i simboli di Christoffel determinano completamente la connessione ∇ su U. Successivamente si vedrà come a partire da ogni scelta di n^3 funzioni lisce Γ_{ij}^k sarà possibile costruire una connessione.

Lemma 2.2.3. *Sia ∇ una connessione lineare e siano $X = X^i E_i$ e $Y = Y^j E_j$ le espressioni locali di $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. Allora*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. É sufficiente usare le proprietà che definiscono una connessione e calcolare:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j E_j) &= (XY^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j = XY^j E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\ &= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k.\end{aligned}$$

Rinominando l'indice j del primo addendo si ha la tesi. □

2.2.2 I simboli di Christoffel

Un esempio di connessione lineare su $\mathbb{R}^n$ è dato dalla *connessione Euclidea*, definita da

$$\bar{\nabla}_X(Y^j\partial_j) = (XY^j)\partial_j. \tag{2.3}$$

$\bar{\nabla}_X$ non è altro che il campo vettoriale le cui componenti sono le derivate direzionali delle componenti di Y lungo la direzione X. In questo caso tutti i simboli di Christoffel sono nulli.

Ci sono molte altre connessioni su $\mathbb{R}^n$ e su ogni varietà in cui è possibile trovare un atlante costituito da un'unica carta. Si vedrà ora come costruirle esplicitamente.

Lemma 2.2.4. *Sia M una varietà coperta da una sola carta. C'è una corrispondenza biunivoca tra le connessioni lineari su M e le scelte di n^3 funzioni lisce $\{\Gamma^k_{ij}\}$ su M, data da*

$$\nabla_X Y = (X^i\partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Considerando come sistema di coordinate $E_i = \partial_i$, si ha che le equazioni (2.4) e (2.2) sono equivalenti. Quindi per ogni connessione i simboli di Christoffel $\{\Gamma^k_{ij}\}$, definiti da (2.1), soddisfano (2.4).

D'altra parte, date le funzioni lisce $\{\Gamma^k_{ij}\}$, possiamo definire la mappa che ad (X, Y) associa la quantità $\nabla_X Y$ introdotta in (2.4). Verifichiamo che si tratta di una connessione. Questa è liscia se lo sono X e Y, $\mathbb{R}$-lineare in Y e $C^\infty(M)$-lineare in X. Rimane solo da provare che vale la proprietà del prodotto, cioè che

$$\begin{aligned}
\nabla_X(fY) &= X^i\partial_i(fY^k)\partial_k + X^i fY^j\Gamma^k_{ij}\partial_k \\
&= (X^i\partial_i f)Y^k\partial_k + fX^i\partial_i Y^k\partial_k + fX^iY^j\Gamma^k_{ij}\partial_k \\
&= (Xf)Y + f(X^i\partial_i Y^k + X^iY^j\Gamma^k_{ij})\partial_k \\
&= f\nabla_X Y + (Xf)Y.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.2.5. *Ogni varietà ammette almeno una connessione lineare.*

Dimostrazione. Si considerano le carte locali $\{U_\alpha\}$ che ricoprono M. Il lemma precedente garantisce che esiste una connessione ∇^α su ciascuno degli U_α. Si sceglie poi una partizione dell'unità $\{\phi_\alpha\}$ subordinata a $\{U_\alpha\}$, cioè tale che il supporto di ogni ϕ_α sia contenuto in U_α. Infine si estende la connessione su tutta la varietà M mediante le connessioni ∇^α e la formula

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \phi_\alpha \nabla^\alpha_X Y.$$

Anche in questo caso è facile vedere che questa espressione è liscia, $\mathbb{R}$-lineare in Y e $C^\infty(M)$-lineare in X. Facciamo dettagliatamente la prova del prodotto, perché in generale la combinazione lineare di connessioni non è necessariamente una connessione. Si ha

$$\begin{aligned}
\nabla_X(fY) &= \sum_\alpha \phi_\alpha\nabla^\alpha_X(fY) = \sum_\alpha \phi_\alpha((Xf)Y + f\nabla^\alpha_X Y) \\
&= (Xf)Y + f\sum_\alpha \phi_\alpha\nabla^\alpha_X Y \\
&= (Xf)Y + f\nabla_X Y.
\end{aligned}$$

□

Vediamo ora come varia l'espressione dei simboli di Christoffel al variare del sistema di riferimento.

Sia ∇ una connessione su M e siano $\{E_i\}$, $\{F_j\}$ due riferimenti locali su un aperto $U \subset M$ tali che $E_i = A^i_j F_j$, per una matrice di funzioni (A^i_j). Siano Γ^k_{ij} i simboli di Christoffel rispetto al riferimento $\{F_i\}$, allora i simboli di Christoffel rispetto al riferimento $\{E_j\}$ sono definiti dalla relazione

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i} E_j &= \nabla_{A^m_i F_m} A^n_j F_n = A^m_i \nabla_{F_m} A^n_j F_n = A^m_i[(F_m A^n_j)F_n + A^n_j(\nabla_{F_m} F_n)] \\ &= A^m_i (F_m A^n_j) F_n + A^m_i A^n_j \Gamma^p_{mn} F_p \\ &= A^m_i (F_m A^n_j)(A^{-1})^k_n E_k + A^m_i A^n_j \Gamma^p_{mn} (A^{-1})^k_p E_k \\ &= [A^m_i (F_m A^n_j)(A^{-1})^k_n + A^m_i A^n_j \Gamma^p_{mn} (A^{-1})^k_p] E_k.\end{aligned}$$

Osservazione 2.1. Si consideri ora il caso particolare della connessione Euclidea su una varietà M con il riferimento $\{\partial_i\}$ tale che $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$ con $\Gamma^k_{ij} = 0$. Sia $\{E_i\}$ un riferimento locale legato a $\{\partial_i\}$ secondo la relazione $E_i = A^i_j \partial_j$. I simboli di Christoffel $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ della connessione Euclidea rispetto al riferimento $\{E_i\}$ saranno definiti dalla relazione

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i} E_j &= \nabla_{A^m_i \partial_m} A^n_j \partial_n = A^m_i \nabla_{\partial_m} A^n_j \partial_n \\ &= A^m_i [(\partial_m A^n_j)\partial_n + A^n_j (\nabla_{\partial_m} \partial_n)] = A^m_i (\partial_m A^n_j)\partial_n \\ &= A^m_i (\partial_m A^n_j)(A^{-1})^k_m E_k.\end{aligned}$$

2.3 Campi vettoriali lungo curve

Le curve su una varietà M sono definite come delle applicazioni lisce $\gamma : I \longrightarrow M$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo reale. Nei casi in cui l'intervallo I è chiuso o semichiuso, si può estendere γ a una curva liscia definita su un intervallo aperto che contenga I, lavorare con questa nuova curva e poi restringersi all'intervallo iniziale. Si può quindi assumere per comodità che γ sia definita su un intervallo aperto.

Definizione 2.2. Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia su M. Il vettore tangente definito tramite il push-forward
$$\dot\gamma(t) = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}(t)\right) \in T_{\gamma(t)}M,$$
che agisce sulle funzioni $f \in C^\infty(M)$ secondo la legge
$$\dot\gamma(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$$
è chiamato *vettore velocità di* γ al punto $\gamma(t)$.

Sia $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ una rappresentazione in coordinate di γ, allora l'espressione locale di $\dot\gamma$ è data da
$$\dot\gamma(t) = \dot\gamma^i(t)\partial_i = \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\partial_i. \tag{2.5}$$

Definizione 2.3. Un *campo vettoriale lungo una curva* $\gamma : I \longrightarrow M$ è una mappa liscia $V : I \longrightarrow TM$ tale che $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ per ogni $t \in I$. Lo spazio dei campi vettoriali lungo γ verrà indicato con $\mathcal{T}(\gamma)$.

Esempio 2.1. Un esempio di campo vettoriale lungo una curva γ è il vettore velocità: $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ per ogni t. La sua espressione in coordinate data dalla (2.5) mostra che è liscio. Un altro esempio è il seguente: data una curva γ in $\mathbb{R}^2$, sia $N(t) = J\dot\gamma(t)$, dove J è la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario, quindi $N(t)$ è perpendicolare a $\dot\gamma(t)$ per ogni t. In componenti N si esprime come $N(t) = (-\dot\gamma^2(t), \dot\gamma^1(t))$, quindi è un campo vettoriale liscio lungo γ.

Un'ampia classe di esempi si ottiene restringendo a γ dei campi vettoriali su M nella seguente maniera. Siano $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva e $\widetilde{V} \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su M. Per ogni $t \in I$, $V(t) := \widetilde{V}_{\gamma(t)}$ è un campo vettoriale lungo γ.

Definizione 2.4. Un campo vettoriale V lungo γ si dice *estendibile* se esiste un campo vettoriale $\widetilde{V}$ definito su un intorno U dell'immagine di γ tale che $V(t) = \widetilde{V}(\gamma(t))$.

Se per una curva γ si ha $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ma $\dot\gamma(t_1) \neq \dot\gamma(t_2)$, allora $\dot\gamma$ non è estendibile.

2.3.1 Derivate covarianti lungo curve

La seguente definizione permette di definire la derivata direzionale di un campo vettoriale lungo una curva.

Lemma 2.3.1. *Sia ∇ una connessione lineare su M. Per ogni curva $\gamma : I \longrightarrow M$, ∇ determina un unico operatore:*

$$D_t : \mathcal{T}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

tale che:

(i) D_t è lineare su $\mathbb{R}$:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW \quad \text{per } a, b \in \mathbb{R};$$

(ii) D_t soddisfa la proprietà del prodotto:

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV \quad \text{per } f \in C^\infty(I);$$

(iii) Se V è estendibile, allora per ogni estensione $\widetilde{V}$ di V,

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\widetilde{V}.$$

Per ogni $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, D_tV è detta derivata covariante di V lungo γ.

Dimostrazione. Per provare l'unicità, supponiamo che D_t sia un operatore con le proprietà richieste nell'enunciato e sia $t_0 \in I$. Con un ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione del Lemma 2.2.1, si dimostra che $D_tV(t_0)$ dipende solo dai valori di V in un intorno di t_0. Proviamo ora che, se l'operatore D_t esiste, è univocamente determinato. Per questo scegliamo delle coordinate locali intorno a $\gamma(t_0)$ e scriviamo

$$V(t) = V^j(t)\partial_j$$

intorno a t_0. Allora per le proprietà di D_t si ha

$$
\begin{aligned}
D_t V(t_0) &= \dot{V}^j(t_0)\partial_j + V^j(t_0)\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}\partial_j &(2.6)\\
&= \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\right)\partial_k, &(2.7)
\end{aligned}
$$

dove si è sfruttato il fatto che ∂_j è estendibile. Quindi, se questo operatore esiste, è univocamente determinato.

Per quanto riguarda l'esistenza, se l'immagine di γ è contenuta in una sola carta, si può usare la (2.7) come definizione di D_t. Nel caso generale si copre $\gamma(I)$ con delle carte locali e si usa la (2.7) per definire D_t su ciascuna di queste carte. Nelle intersezioni si hanno più operatori che soddisfano le proprietà richieste, e che quindi coincidono per l'unicità. Si è così definito D_t globalmente. □

Si può migliorare il Lemma 2.2.1 mostrando quanto segue:

Lemma 2.3.2. *Sia $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ una curva con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$, e siano Y e $\widetilde{Y}$ campi vettoriali che coincidono lungo γ. Allora $\nabla_{X_p} Y = \nabla_{X_p}\widetilde{Y}$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se $Y \circ \gamma \equiv 0$ allora $\nabla_{X_p} Y = 0$. Sia $\{E_1, \dots, E_n\}$ un riferimento locale per E intorno a p e sia $Y = Y^i E_i$. Da $Y(p) = Y(\gamma(0)) = 0$ si ottiene $Y^1(p) = \dots = Y^n(p) = 0$ e quindi

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_p} Y &= \nabla_X Y(p) = \nabla_X Y^i E_i(p) = Y^i(p)\nabla_X E_i(p) + X(p)(Y^i)E_i(p)\\
&= \frac{d(Y^i \circ \gamma)}{dt}(0)E_i(p) = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi se $Y \circ \gamma = \widetilde{Y} \circ \gamma$ allora $\nabla_{X_p} Y = \nabla_{X_p}\widetilde{Y}$. □

In particolare da questo lemma segue che la derivata covariante di $\nabla_{X_p} Y$ dipende solo dai valori di Y lungo un'arbitraria curva γ tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$.

2.4 Geodetiche

Definizione 2.5. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, e sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva su M. L'*accelerazione* di γ è il campo vettoriale $D_t\dot{\gamma}$ lungo γ.
Si dice che γ è una *geodetica* per ∇ se la sua accelerazione è nulla, cioè se

$$D_t\dot{\gamma} \equiv 0.$$

Esempi di geodetiche in metriche Riemanniane sono riportate nel capitolo 5.

Sia (U, ϕ) una carta locale e siano (x^i) delle coordinate su U. Per la (2.7), γ è una geodetica se e solo se le sue componenti $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ soddisfano l'*equazione delle geodetiche*

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0. \tag{2.8}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, che può essere trasformato in un sistema del primo ordine introducendo delle variabili ausiliarie $v^1, \dots, v^n$ tali che $v^i = \dot{x}^i$. Effettuando la sostituzione si ottiene

$$\begin{cases} \dot{v}^k(t) = -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) \\ \dot{x}^i(t) = v^k(t). \end{cases} \tag{2.9}$$

Il seguente teorema prova l'esistenza e l'unicità delle geodetiche.

Teorema 2.4.1. *Sia M una varietà dotata di una connessione lineare. Per ogni $p \in M$, $v \in T_pM$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, esistono un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$ e una geodetica $\gamma : I \longrightarrow M$ tale che $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = V$.*
Inoltre, data ogni altra geodetica σ che soddisfa le stesse condizioni, γ e σ coincidono sull'intersezione dei loro domini.

Dimostrazione. Il teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie applicato al sistema (2.9) assicura

che per ogni $(p, V) \in U \times \mathbb{R}^n$ esistono $\epsilon > 0$ e una curva $\eta : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ che risolva il sistema soddisfando la condizione iniziale $\eta(t_0) = (p, V)$.
Scrivendo le componenti di η come $\eta(t) = (x^i(t), v^i(t))$, si ottiene l'esistenza con $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ in U.

Per provare l'unicità, siano $\gamma, \sigma : I \longrightarrow M$ due geodetiche tali che $\gamma(t_0) = \sigma(t_0)$ e $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{\sigma}(t_0)$. Per l'unicità del teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie, γ e σ coincidono in un intorno di t_0. Sia β il più grande tra i b tali che γ e σ coincidono su $[t_0, b]$. Se $\beta \in I$, allora per continuità $\gamma(\beta) = \sigma(\beta)$ e $\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\sigma}(\beta)$, ma applicando l'unicità locale a in un intorno di β si ha che le due geodetiche coincidono su un intervallo più grande, il che è una contraddizione. Un ragionamento analogo a sinistra di t_0 porta a concludere che γ e σ coincidono su tutto I. □

Ragionando come nella prova dell'unicità del precedente teorema si deduce l'esistenza di geodetiche massimali.

Definizione 2.6. Siano ∇ una connessione su una varietà M, $p \in M$ e $V \in T_pM$. Si dice *geodetica massimale* l'unica geodetica $\gamma : I \longrightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V$ che non può essere estesa a un intervallo più grande di I. Una geodetica massimale è anche chiamata *geodetica con punto iniziale p e velocità iniziale V* e si indica con γ_V.

2.5 Trasporto parallelo

Il trasporto parallelo è un concetto legato strettamente a quello di connessione e permette di trasportare vettori lungo curve sulla varietà, in modo che rimangano paralleli rispetto alla connessione. Più precisamente

Definizione 2.7. Sia M una varietà dotata di una connessione lineare ∇. Un campo vettoriale V lungo una curva γ è detto *parallelo lungo* γ rispetto a ∇ se $D_t V \equiv 0$.

V è *parallelo* se è parallelo lungo ogni curva.

Facendo riferimento alla Definizione 2.5 si osserva che una geodetica è caratterizzata come una curva il cui campo vettoriale velocità è parallelo lungo la curva.

Esempio 2.2. Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Perché un campo vettoriale V sia parallelo lungo γ rispetto alla connesione Euclidea si deve avere per ogni $t_0 \in I$

$$D_t V(t_0) = \Big(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{V}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\Big)\,\partial_k = \dot{V}^k(t_0)\partial_k = 0,$$

cioè le componenti di V devono essere costanti.

Un fatto fondamentale riguardante i campi vettoriali paralleli è che dato un vettore tangente a un punto di una curva, questo può essere esteso in modo unico a un campo vettoriale parallelo lungo la curva.

Teorema 2.5.1. *Dati una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ con $t_0 \in I$ e un vettore $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, esiste un unico campo vettoriale V parallelo lungo γ tale che $V(t_0) = V_0$. Si dice che V è l'estensione parallela di V_0 lungo γ.*

Dimostrazione. Se $\gamma(I)$ è contenuto in un'unica carta, allora per la (2.7) si ha che V è parallelo lungo γ se e solo se

$$\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Questo è un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie, e il teorema di esistenza e unicità ne garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione su tutto I per ogni condizione iniziale $V(t_0) = V_0$.

Se invece $\gamma(I)$ non è contenuto in un'unica carta, sia β il più grande tra i $b > t_0$ tale che esiste un'unica estensione parallela su $[t_0, b]$. Per b in un opporuno intorno di t_0, $\gamma([t_0, b])$ è contenuto in un'unica carta e si può applicare il ragionamento precedente. Quindi esiste un'unica estensione parallela su $[t_0, \beta)$. Se per assurdo si avesse $\beta \in I$, si scelgono delle coordinate su un aperto contenente $\gamma(\beta - \delta, \beta + \delta)$ per $\delta > 0$. Allora esiste un'unica estensione parallela $\widetilde{V}$ su $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ che soddisfa la condizione iniziale $\widetilde{V}(\frac{\beta-\delta}{2}) = V(\frac{\beta-\delta}{2})$. Per l'unicità, $\widetilde{V} = V$ sull'intersezione dei loro domini, quindi $\widetilde{V}$ è un'estensione di V oltre β, che è una contraddizione. $\square$

Definizione 2.8. Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva con $t_0, t_1 \in I$, il *trasporto parallelo* è un operatore

$$\begin{aligned} P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M &\longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M \\ V_0 &\longmapsto V(t_1), \end{aligned}$$

dove V è l'estensione parallela di V_0 lungo γ.

Poiché l'equazione che determina il parallelismo è lineare, si ha che il trasporto parallelo è un isomorfismo lineare tra $T_{\gamma(t_0)}M$ e $T_{\gamma(t_1)}M$.

La prossima proposizione mostra come ottenere la derivata covariante lungo γ a partire dal trasporto parallelo; è in questo senso che una connessione "connette" spazi tangenti vicini.

Proposizione 2.5.2. *Sia ∇ una connessione su M e $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva su M con $t_0 \in I$. Allora*

$$D_t V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

Dimostrazione. La tesi può essere riscritta così:

$$D_t V(t_0) = \frac{d}{dt} P_{t_0 t}^{-1} V(t) \Big|_{t=t_0}.$$

Si consideri un riferimento locale $\{E_1, \dots, E_r\}$ parallelo lungo γ, cioè con $D_t E_j = 0$ e si scriva $V(t) = V^j(t)E_j(t)$. Lungo γ si ha:

$$P_{t_0 t}^{-1} V(t) = V^j(t)E_j(t_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} P_{t_0 t}^{-1} V(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0).$$

D'altra parte per la (2.7)

$$\begin{aligned} D_t V(t_0) = D_t(V^j E_j)(t_0) &= \frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0) + V^j(t_0)D_t E_j(t_0) \\ &= \frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0), \end{aligned}$$

in quanto gli E_j sono paralleli lungo γ. $\square$

Capitolo 3

Geodetiche Riemanniane

Si è visto che è possibile definire diverse connessioni sulla medesima varietà Riemanniana. In questo capitolo si definirà una particolare connessione detta connessione di Levi-Civita o connessione Riemanniana le cui geodetiche verificano una proprietà di compatibilità con le proprietà della metrica.

In seguito si presenterà la mappa esponenziale, che stabilisce un diffeomorfismo locale fra la varietà e il suo spazio tangente. Per questo permette di studiare come variano le geodetiche al variare delle condizioni iniziali, e di introdurre la nozione di intorni e coordinate normali, immagine delle coordinate Euclidee sul piano tangente.

3.1 La connessione Riemanniana

Per introdurre la connessione Riemanniana, ne diamo una prima definizione geometricamente piú intuitiva per sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ con la metrica indotta. In questo caso, infatti, la connessione è ottenuta proiettando sul tangente, la connessione definita in $\mathbb{R}^n$.

Sia M una sottovarietà immersa di $\mathbb{R}^n$; ogni campo vettoriale su M può essere esteso a un campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^n$. Si definisce la mappa

$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ ponendo

$$\nabla^\top_X Y := \pi^\top(\bar{\nabla}_X Y)$$

dove X e Y sono estesi arbitrariamente a $\mathbb{R}^n$, $\bar{\nabla}$ è la connessione Euclidea su $\mathbb{R}^n$, e per ogni $p \in M$, $\pi^\top : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ è la proiezione ortogonale. Il lemma seguente mostra che questa è una connessione lineare su M, chiamata *connessione tangente.*

Lemma 3.1.1. *L'operatore $\bar{\nabla}^\top$ è ben definito ed è una connessione su M.*

Dimostrazione. Poiché per il Lemma 2.2.2 il valore di $\bar{\nabla}_X Y$ in $p \in M$ dipende solo da X_p, allora $\nabla^\top_X Y$ è indipendente dalla scelta dell'estensione di X. D'altra parte, per il Lemma 2.3.2 si ha che il valore di $\bar{\nabla}_X Y$ dipende solo dai valori di Y lungo una curva il cui vettore tangente iniziale è X_p. Considerando una curva che giace su M si ha che $\nabla^\top_X Y$ dipende solo dal campo vettoriale iniziale $Y \in \mathcal{T}(M)$ non esteso, quindi $\nabla^\top$ è ben definito. Dalla definizione segue che $\nabla^\top_X Y$ è $C^\infty(M)$-lineare in X e $\mathbb{R}^n$-lineare in Y, quindi per mostrare che è una connessione resta da provare solo la proprietà del prodotto. Sia $f \in C^\infty(M)$ estesa arbitrariamente a $\mathbb{R}^n$, lungo M si ha

$$\begin{aligned} \nabla^\top_X(fY) &= \pi^\top(\bar{\nabla}_X(fY)) = (Xf)\pi^\top Y + f\pi^\top(\bar{\nabla}_X Y) \\ &= (Xf)Y + f\nabla^\top_X Y. \end{aligned}$$

Quindi $\nabla^\top$ è una connessione. □

Siccome si dimostra che ogni metrica Riemanniana su qualsiasi varietà può essere ottenuta come metrica indotta dall'immersione un uno spazio Euclideo, si potrebbero studiare solo le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, le loro metriche indotte e la connessione tangente. Vogliamo invece dare una definizione intrinseca dello stesso concetto, e che possa essere definita su ogni varietà astratta.

Una di queste proprietà si definisce a partire dalla proprietà del prodotto che la connessione Euclidea su $\mathbb{R}^n$ soddisfa rispetto alla metrica Euclidea:

$$\bar{\nabla}_X \langle Y, Z\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \bar{\nabla}_X Z\right\rangle .$$

Definizione 3.1. Sia g una metrica Riemanniana su una varietà M. Una connessione lineare ∇ si dice *compatibile con* g se per ogni vettore tangente X, Y, Z soddisfa la seguente proprietà del prodotto

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle .$$

Lemma 3.1.2. *Sia ∇ una connessione su una varietà Riemanniana (M, g), le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) ∇ *è compatibile con* g*.*

(ii) Per ogni coppia di campi vettoriali V e W lungo una curva γ

$$\frac{d}{dt} \langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle .$$

(iii) Per ogni coppia di campi vettoriali V e W paralleli lungo una curva γ, il prodotto $\langle V, W\rangle$ è costante.

(iv) Il trasporto parallelo $P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M :\longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ lungo una curva γ è un'isometria per ogni t_0, t_1.

Dimostrazione. Si ha:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Sia $p = \gamma(0)$ e X un campo vettoriale con $X_p = \dot{\gamma}(0)$ e si scelga una base ortonormale $\{E_i\}$ intorno a p. Allora poiché ∇ è compatibile con g

$$0 = \nabla_X \langle E_i, E_j\rangle = \langle \nabla_X E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \nabla_X E_j\rangle .$$

Siano $V = V^i E_i$ e $W = W^j E_j$ campi vettoriali lungo γ. Per la (2.7) si ha che $D_t V = \dot{V}^i E_i + V^i \nabla_X E_i$ e $D_t W = \dot{W}^j E_j + W^j \nabla_X E_j$, da cui

$$\begin{aligned}
&\langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle = \\
&= (\dot{V}^i W^j + V^i \dot{W}^j)\langle E_i, E_j\rangle + V^i W^j(\langle \nabla_X E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \nabla_X E_j\rangle) \\
&= \sum_i (\dot{V}^i W^i + V^i \dot{W}^i) = \frac{d}{dt}\sum_i V^i W^i \\
&= \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle .
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Essendo V e W paralleli lungo γ si ha $D_t V = D_t W \equiv 0$, da cui applicando la (ii) si ottiene

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle = 0,$$

quindi $\langle V, W\rangle$ è costante.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ La (iii) afferma proprio che il trasporto parallelo conserva la metrica.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sia $p \in M$ e sia γ una curva con $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = X_p$. Si fissi una base ortonormale $\{E_1, \dots, E_n\}$ di T_pM; per (iv) possiamo estendere ciascun E_i a un campo vettoriale parallelo lungo γ e tale che $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$ per ogni t. Si scrive $Y(\gamma(t)) = Y^h(t)E_h(t)$ e $Z(\gamma(t)) = Z^k(t)E_k(t)$, allora $\langle Y, Z\rangle = \sum_h Y^h Z^h$. Inoltre, per le proprietà che definiscono la derivata covariante nel Lemma 2.3.1, per Y e Z valgono le uguaglianze

$$D_{t_0} Y = \dot{Y}^h(t_0)E_h + Y^h(t_0)D_{t_0}E_h = \dot{Y}^h(t_0)E_h,$$

e

$$D_{t_0} Y = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} Y = \nabla_{X_p} Y.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_p} \langle Y, Z \rangle &= \frac{d}{dt} \langle Y(\gamma(t)), Z(\gamma(t)) \rangle \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_h V^h Z^h \right) \Big|_{t=t_0} \\
&= \sum_h (\dot{Y}^h(t_0) Z^h(t_0) + Y^h(t_0) \dot{Z}^h(t_0)) \\
&= \left\langle \dot{Y}^h(t_0) E_h, Z(t_0) \right\rangle + \left\langle Y^h(t_0), \dot{Z}(t_0) E_h \right\rangle \\
&= \langle D_{t_0} Y, D_{t_0} Z \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X_p} Y, \nabla_{X_p} Z \right\rangle .
\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.1. La connessione tangente su qualsiasi sottovarietà immersa di $\mathbb{R}^n$ è compatibile con la metrica Riemanniana.

Infatti per la compatibilità della connessione Euclidea si ha

$$\begin{aligned}
\nabla^{\top}_X \langle Y, Z \rangle &= \pi^{\top}(\bar{\nabla}_X \langle Y, Z \rangle) = \pi^{\top}(\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle) \\
&= \langle \nabla^{\top}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla^{\top}_X Z \rangle .
\end{aligned}$$

Chiedere che una connessione sia compatibile con la metrica non è sufficiente per definire un'unica connessione su ogni varietà, è necessaria anche un'altra proprietà della connessione tangente. Questa è espressa in termini del concetto di torsione di ∇ su M, definita come segue:

Definizione 3.2. Data una connessione lineare ∇ su M, si dice *torsione di* ∇ *su* M la mappa $\tau : \mathfrak{T}(M) \times \mathfrak{T}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}(M)$ definita ponendo

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

∇ è detta *simmetrica* se $\tau \equiv 0$.

Osservazione 3.2. Si ha che ∇ è simmetrica se e solo se i suoi simboli di Christoffel rispetto a qualsiasi sistema di coordinate sono simmetrici, cioè

$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Per provarlo si fissa una carta locale e si scrive $X = X^i\partial_i$ e $Y = Y^j\partial_j$. Allora per la (2.4) si ha:

$$\begin{aligned}\tau(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= (X^i\partial_i Y^k + X^iY^j\Gamma^k_{ij})\partial_k - (Y^j\partial_j X^k + Y^jX^i\Gamma^k_{ji})\partial_k - (X^i\partial_i Y^k - Y^j\partial_j X^k)\partial_k \\ &= X^iY^j(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k\end{aligned}$$

Quindi $\tau(X,Y) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ se e solo se i simboli di Christoffel sono simmetrici.

In particulare la connessione Euclidea su $\mathbb{R}^n$ è simmetrica, in quanto i suoi simboli di Christoffel sono tutti nulli.

3.1.1 Lemma fondamentale della geometria Riemanniana

Il seguente teorema è molto importante e viene chiamato lemma fondamentale della geometria Riemanniana.

Teorema 3.1.3. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Esiste un'unica connessione lineare ∇ su M che sia simmetrica e compatibile con g.*

Questa connessione è chiamata *connessione Riemanniana* o *connessione di Levi-Civita* di g.

Dimostrazione. Si inizia con la prova dell'unicità supponendo che ∇ sia una connessione simmetrica e compatibile con g. Siano $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ dei campi vettoriali; per la compatibilità con g di ∇ si ha

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle\,.\end{aligned}$$

Grazie alla simmetria di ∇ si ha ad esempio

$$\langle Y, \nabla_X Z \rangle = \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle ,$$

e sostituendo l'ultimo termine di ciascuna delle uguaglianze precedanti si ha

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle . \end{aligned}$$

Sommando le prime due equazioni e sottraendo la terza si ottiene

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle ,$$

Da cui, risolvendo rispetto a $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$,

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \right) . \tag{3.2}$$

Siano ora ∇^1 e ∇^2 due connessioni simmetriche e compatibili con g. Poiché il termine in (3.2) non dipende dalla connessione, si ha $\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z \rangle = 0$ per ogni X, Y, Z. Ma questo può accadere solo se $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$ per ogni X e Y, cioè solo se $\nabla^1 = \nabla^2$.

Per quanto riguarda l'esistenza, basta dimostrare che una connessione Riemanniana esiste in ogni carta, l'unicità assicura che le connessioni così costruite su ciascuna carta si equivalgono sulle intersezioni.

Sia $(U, (x^i))$ una carta locale e si applichi la (3.2) ai campi vettoriali $\{\partial_i\}$, le cui parentesi di Lie sono nulle. Si ottiene

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{2} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right) .$$

Sostituendo nell'equazione precedente le definizioni dei coefficienti della metrica $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e dei simboli di Christoffel $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^m_{ij} \partial_m$ si ha

$$\Gamma^m_{ij} g_{ml} = \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right) .$$

Si moltiplica infine per la matrice inversa g^{lk} e, poiché $g_{ml}g^{lk} = \delta^k_m$, si ha

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right). \tag{3.3}$$

Questa formula definisce una connessione su ogni carta, e siccome dalla precedente equazione risulta evidente che $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, la connessione è simmetrica per quanto dimostrato nell'Osservazione 3.2.
Resta da provare soltanto la compatibilità con la metrica:

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = \\
&\frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X,Z] \rangle - \langle Z, [Y,X] \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle \right) + \\
&\frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Z \langle Y, X \rangle - Y \langle Z, X \rangle - \langle Z, [X,Y] \rangle - \langle Y, [Z,X] \rangle + \langle X, [Y,Z] \rangle \right) = \\
&= X \langle Y, Z \rangle .
\end{aligned}$$

□

La formula (3.3) permette di calcolare i simboli di Christoffel della connessione Riemanniana su ogni carta. Le geodetiche rispetto a questa connessione sono chiamate *geodetiche Riemanniane* o semplicemente *geodetiche*.

Definizione 3.3. Sia γ una curva su una varietà Riemanniana, la *velocità* di γ al tempo t è la lunghezza del vettore velocità $|\dot{\gamma}(t)|$. Si dice che γ ha *velocità costante* se $|\dot{\gamma}(t)|$ non dipende da t e che ha *velocità unitaria* se la sua velocità è identicamente uguale a 1.

Lemma 3.1.4. *Tutte le geodetiche Riemanniane sono curve a velocità costante.*

Dimostrazione. Sia γ una geodetica Riemanniana, allora $\dot{\gamma}$ è parallelo lungo γ e quindi la sua lunghezza $|\dot{\gamma}| = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}$ è costante per l'affermazione (iii) del Lemma 3.1.2. □

La proposizione seguente mostra che le connessioni Riemanniane di comportano bene rispetto alle isometrie.

Proposizione 3.1.5. *Sia $\phi : (M, g) \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ un'isometria. Allora*

(i) ϕ porta la connessione Riemmanniana ∇ di g nella connessione $\widetilde{\nabla}$ di $\widetilde{g}$, nel senso che

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y),$$

(ii) Se γ è una curva su M e V è un campo vettoriale lungo γ, allora

$$\phi_* D_t V = \widetilde{D}_t(\phi_* V),$$

(iii) ϕ porta geodetiche in geodetiche: se γ è la geodetica di M con punto iniziale p e velocità iniziale V, allora $\phi \circ \gamma$ è la goedetica di $\widetilde{M}$ con punto iniziale $\phi(p)$ e velocità iniziale $\phi_* V$.

Dimostrazione. Si procede così:

(i) Si definisce un'applicazione $\phi^* \widetilde{\nabla} : \mathfrak{T}(M) \times \mathfrak{T}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}(M)$ tale che

$$(\phi^* \widetilde{\nabla})_X Y = \phi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y)).$$

$\phi^* \widetilde{\nabla}$ è detta *connessione pullback* su M ed è compatibile con la metrica g in quanto

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\phi^* \widetilde{\nabla})_X Y, Z \right\rangle_M + \left\langle Y, (\phi^* \widetilde{\nabla})_X Z \right\rangle_M = \\
&\left\langle \phi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y)), Z \right\rangle_M + \left\langle Y, \phi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Z)) \right\rangle_M = \\
&\left\langle \widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y), \phi_* Z \right\rangle_{\widetilde{M}} + \left\langle \phi_* Y, \widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Z) \right\rangle_{\widetilde{M}} = \\
&\phi_* X \left\langle \phi_* Y, \phi_* Z \right\rangle_{\widetilde{M}} = \phi_* X \left(\langle Y, Z \rangle_M \circ \phi^{-1} \right) = \\
&X \left\langle Y, Z \right\rangle_M ,
\end{aligned}$$

dove si è usato che $\widetilde{\nabla}$ è compatibile con $\widetilde{g}$. Inoltre per la simmetria di $\widetilde{\nabla}$ si ha che anche $\phi^* \widetilde{\nabla}$ è simmetrica, infatti

$$\begin{aligned}
(\phi^* \widetilde{\nabla})_X Y - (\phi^* \widetilde{\nabla})_Y X - [X, Y] &= \phi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y) - \widetilde{\nabla}_{\phi_* Y}(\phi_* X)) - [X, Y] \\
&= \phi_*^{-1}\left([\phi_* X, \phi_* Y]\right) - [X, Y] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Quindi $\phi^*\widetilde{\nabla}$ è una connessione Riemanniana di g su M. Per l'unicità data dal Teorema 3.1.3 risulta $\phi^*\widetilde{\nabla} = \nabla$.

(ii) Si definisce $\phi^*\widetilde{D}_t : \mathcal{T}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(\gamma)$ tale che

$$(\phi^*\widetilde{D}_t)V = \phi_*^{-1}(\widetilde{D}_t\phi_*V).$$

$\phi^*\widetilde{D}_t$ possiede le proprietà che caratterizzano una derivata covariante, quindi per l'unicità della derivata covariante data dal Lemma 2.3.1 si ha che $\phi^*\widetilde{D}_t = D_t$.

(iii) Sia γ una geodetica di M, ponendo $\sigma = \phi \circ \gamma$ si vuole dimostrare che σ è una geodetica di $\widetilde{M}$. Usando (ii) si ha

$$\widetilde{D}_t\dot{\sigma} = \widetilde{D}_t(\phi_*\dot{\gamma}) = \phi_* D_t\dot{\gamma} = \phi_* 0 = 0,$$

quindi $\phi \circ \gamma$ è una geodetica di $\widetilde{M}$ e ϕ porta geodetiche in geodetiche.

□

3.2 La mappa esponenziale

Per controllare il comportamento di tutte le geodetiche uscenti da un unico punto è necessario capire come queste dipendono dalle condizioni iniziali. Il Teorema 2.4.1 e la Definizione 2.6 assicurano che esiste un'unica geodetica massimale passante per ogni punto iniziale $p \in M$ con vettore velocità $V \in T_pM$. Si può quindi definire una mappa dal fibrato tangente all'insieme delle geodetiche di M come segue.

Definizione 3.4. Sia ∇ una connessione lineare su M. Il *dominio della mappa esponenziale* è l'insieme

$$\mathcal{E} := \{V \in TM \mid \gamma_V \text{ è definita in un intervallo che contiene } [0, 1]\}.$$

La *mappa esponenziale* $\exp : \mathcal{E} \longrightarrow M$ è definita da

$$\exp(V) = \gamma_V(1).$$

Inoltre per ogni $p \in M$ si pone $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_pM$ e si chiama *mappa esponenziale ristretta* $\exp_p$ la restrizione a $\mathcal{E}_p$ di exp.

Il lemma seguente permette di dimostrare alcune importanti proprietà della mappa esponenziale.

Lemma 3.2.1. *Per ogni* $p \in M$, $V \in T_pM$ *e* $c, t \in \mathbb{R}$

$$\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct) \tag{3.4}$$

se uno dei due membri è definito.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\gamma_{cV}(t)$ esiste e che vale la (3.4) quando $\gamma_V(ct)$ è definito; il viceversa segue sostituendo V, t e c rispettivamente con cV, ct e $\frac{1}{c}$.
Per alleggerire la notazione si scriverà $\gamma = \gamma_V$. Si definisce una curva $\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(ct)$ su $c^{-1}I := \{t \,|\, ct \in I\}$. Bisogna provare che $\widetilde{\gamma}$ è una geodetica di punto iniziale p e velocità iniziale cV; per l'unicità si avrà quindi che $\widetilde{\gamma} = \gamma_{cV}$.
Dalla definizione di $\widetilde{\gamma}$ segue che $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = p$. Inoltre, scrivendo γ in coordinate locali come $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ si ha

$$\dot{\widetilde{\gamma}}^i(t) = \frac{d}{dt}\gamma^i(ct) = c\dot{\gamma}^i(ct),$$

quindi in particolare $\dot{\widetilde{\gamma}}(0) = c\dot{\gamma}(0) = cV$.
Per dimostrare che $\widetilde{\gamma}$ è una geodetica, indichiamo con D_t e $\widetilde{D}_t$ le derivate covarianti rispettivamente lungo γ e $\widetilde{\gamma}$. Sfruttando il fatto che γ è una geodetica si ottiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_t\dot{\widetilde{\gamma}}(t) &= \left[\frac{d}{dt}\dot{\widetilde{\gamma}}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(\widetilde{\gamma}(t))\dot{\widetilde{\gamma}}^i(t)\dot{\widetilde{\gamma}}^j(t)\right]\partial_k \\
&= \left[c^2\ddot{\gamma}^k(ct) + c^2\Gamma^k_{ij}(\gamma(ct))\dot{\gamma}^i(ct)\dot{\gamma}^j(ct)\right]\partial_k \\
&= c^2 D_t\dot{\gamma}(ct).
\end{aligned}$$

Quindi anche $\widetilde{\gamma}$ è una geodetica e $\widetilde{\gamma} = \gamma_{cV}$. □

Proposizione 3.2.2. *La mappa esponenziale gode delle seguenti proprietà:*

(i) Ciascun $\mathcal{E}_p$ è stellato rispetto all'origine.

(ii) Per ogni $V \in TM$, la geodetica γ_V è data da

$$\gamma_V(t) = \exp(tV)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui uno dei due membri è definito.

(iii) La mappa esponenziale è liscia.

Dimostrazione. (ii) Applicando il Lemma 3.2.1 con $t = 1$ si ottiene che $\exp(cV) = \gamma_{cV}(1) = \gamma_V(c)$ se uno dei tre membri è definito, per cui *(ii)* è soddisfatta.

(i) Un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale si dice stellato rispetto a un suo punto x se per ogni $y \in S$, il segmento che congiunge x e y è contenuto in S.
Se $V \in \mathcal{E}_p$, per definizione γ_V è definita almeno nell'intervallo $[0, 1]$. Quindi per $0 \leq t \leq 1$, il Lemma 3.2.1 assicura che

$$\exp(tV) = \gamma_{tV}(1) = \gamma_V(t)$$

è definito, quindi ogni $\mathcal{E}_p$ è stellato rispetto all'origine.

(iii) Il fatto che la mappa esponenziale sia liscia segue dal teorema di esistenza e unicità delle geodetiche (Teorema 2.4.1). Per *(ii)* $\gamma_V(t) = \exp(tV)$, dove γ_V è soluzione dell'equazione delle geodetiche

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0$$

con condizioni iniziali $\gamma_V(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V$. Per i teorema di dipendenza continua dai dati iniziali delle equazioni differenziali si ha che exp è liscia.

□

Proposizione 3.2.3. *Sia $\phi : (M, g) \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ un'isometria. Allora per ogni $p \in M$ il diagramma seguente commuta*

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{\phi_*} & T_{\phi(m)}\widetilde{M} \\ {\scriptstyle \exp_p}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\phi(p)}} \\ M & \xrightarrow{\phi} & \widetilde{M} \end{array}$$

Dimostrazione. Siccome ϕ è un'isometria si può usare la Proposizione 3.1.5. Quindi da un lato si ha

$$\phi(\exp_p V) = \phi(\exp_p \dot{\gamma}(0)) = \phi(\gamma_{\dot{\gamma}(0)}(1)) = (\phi \circ \gamma)_{\phi_* \dot{\gamma}(0)}(1),$$

che è una geodetica in $\widetilde{M}$ di punto iniziale $\phi(\gamma(0)) = \phi(p)$ e velocità iniziale $\phi_* V$. Dall'altro lato si ha $\exp_{\phi(p)}(\phi_* V)$, e anch'esso è per definizione una geodetica in $\widetilde{M}$ di punto iniziale $\phi(\gamma(0)) = \phi(p)$ e velocità iniziale $\phi_* V$. Per l'unicità delle geodetiche si conclude che il diagramma commuta. $\square$

3.3 Intorni e coordinate normali

Si è detto che la mappa esponenziale ristretta $\exp_p$ associa a elementi del sottoinsieme $\mathcal{E}_p$ di T_pM elementi di M.

Lemma 3.3.1. *Siano ∇ una connessione lineare su M e $p \in M$. Allora $(\exp_p)_*$ in 0 è l'identità. In particolare esistono un intorno $\mathcal{V}$ dell'origine in T_pM e un intorno $\mathcal{U}$ di p in M tali che* $\exp : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ *è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. La seconda affermazione segue dal teorema della funzione inversa dopo aver provato che $(\exp_p)_*$ è invertibile in 0. Essendo T_pM uno spazio vettorale, esso può essere identificato in maniera naturale con $T_0(T_pM)$. Per calcolare $(\exp_p)_* V$ per un vettore $V \in T_0(T_pM) = T_pM$ bisogna considerare una curva σ in T_pM che abbia punto iniziale 0 e vettore velocità iniziale V e calcolare il vettore velocità iniziale della curva

$\exp_p \circ \sigma(t)$.Sia questa curva $\sigma(t) = tV$. Allora

$$(\exp_p)_* V = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp_p \circ \sigma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p(tV) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_V(t) = V,$$

cioè $(\exp_p)_*$ è l'identità in 0. $\square$

Definizione 3.5. Ogni aperto $\mathcal{U}$ di $p \in M$ diffeomorfo tramite $\exp_p$ a un intorno stellato $\mathcal{V}$ di $0 \in T_pM$ è detto *intorno normale di p*. Sia $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ la palla aperta rispetto alla metrica g di centro l'origine e raggio $\epsilon > 0$. Se ϵ è tale che $\exp_p$ sia un diffeomorfismo su $B_\epsilon(0)$, allora l'immagine $\exp_p(B_\epsilon(0))$ è detta *palla geodetica* in M. Inoltre, se la palla chiusa $\bar{B}_\epsilon(0)$ è contenuta in un aperto $\mathcal{V} \subset T_pM$ sul quale $\exp_p$ è un diffeomorfismo, allora $\exp_p(\bar{B}_\epsilon(0))$ è chiamata *palla geodetica chiusa*, e $\exp_p(\partial\bar{B}_\epsilon(0))$ è detta *sfera geodetica*.

Sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è una base ortonormale di T_pM, essa definisce un isomorfismo $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ tale che $E(x^1, \ldots, x^n) = x^i E_i$. Se $\mathcal{U}$ è un intorno normale di p, si può comporre questo isomorfismo con la mappa esponenziale per ottenere le coordinate

$$\phi := E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Definizione 3.6. Le coordinate definite dall'equazione precedente sono dette *coordinate normali* centrate in p.

Dato $p \in M$ e $\mathcal{U}$ un intorno normale di p, c'è una corrispondenza biunivoca tra coordinate normali e basi ortonormali in p. Su ogni insieme con coordinate normali centrate in p si definisce la *distanza radiale* come

$$r(x) := \sqrt{\sum_i (x^i)^2}; \tag{3.6}$$

nello spazio Euclideo, essa equivale alla distanza dall'origine. Il *campo vettoriale radiale unitario* $\partial/\partial r$ è dato da

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x^i}{r}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.7}$$

Proposizione 3.3.2. *Siano* $(\mathcal{U}, (X^i))$ *delle coordinate normali centrate in* p.

(i) *Per ogni* $V = V^i\partial_i \in T_pM$, *la geodetica* γ_V *con punto iniziale* p *e vettore velocità iniziale* V *si rappresenta in coordinate normali tramite un segmento passante per l'origine*

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n) \tag{3.8}$$

finché γ_V *rimane all'interno di* $\mathcal{U}$.

(ii) *Le coordinate di* p *sono* $(0, \dots, 0)$.

(iii) *Le componenti della metrica in* p *sono* $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(iv) *Le derivate parziali prime di* g_{ij} *e i simboli di Christoffel si annullano in* p.

Dimostrazione. (i) Ricordando che $\gamma_V(t) = \exp(tV)$ e facendo riferimento alla (3.5) si ha

$$\phi(\gamma_V(t)) = E^{-1} \circ \exp_p^{-1}(\exp_p(tV)) = (tV^1, \dots, tV^n).$$

(ii) Essendo $\gamma_V(0) = p$, per la (i) si ha $p = (0, \dots, 0)$.

(iii) Siccome $(exp_p)_* = \text{id}$ si ha che $\partial_i = (exp_p)_* E_i = E_i$, allora

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial_i}, \frac{\partial}{\partial_j} \right\rangle = \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$$

(iv) γ_V è una geodetica quindi risolve l'equazione delle geodetiche

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Le componenti di γ_V sono $x^i(t) = tV^i$ per cui $\ddot{x}^i(t) = 0$ per ogni i e i simboli di Christoffel sono nulli.

Ma allora si ha anche $\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$ per ogni i e j. Quindi

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j \rangle = 0$$

$\square$

Definizione 3.7. Un aperto $\mathcal{W} \subset M$ si dice *uniformemente normale* se esiste $\delta > 0$ tale che $\mathcal{W}$ è contenuto in una palla geodetica di raggio δ centrata in ognuno dei suoi punti.

Capitolo 4

Geodetiche e distanza

In questo capitolo si analizzeranno le relazioni tra geodetiche, lunghezze e distanze su una varietà Riemanniana. Si dimostrerà che tutte le curve di minima lunghezza sono geodetiche e che, almeno localmente, tutte le geodetiche sono curve di minima lunghezza. La simmetria della connessione Riemanniana giocherà un ruolo fondamentale nelle dimostrazioni di questi fatti.
D'ora in poi si indicherà con M una varietà differenziabile di dimensione n dotata di una metrica Riemanniana g; tutte le derivate covarianti e le geodetiche sono da considerarsi rispetto alla connessione Riemanniana di g.

4.1 Lunghezze e distanze su varietà Riemanniane

A partire dalle definizioni di lunghezza di una curva e distanza tra due punti, si dimostrerà in questo paragrafo che una varietà Riemanniana è in maniera canonica uno spazio metrico.

4.1.1 Lunghezze di curve

Definizione 4.1. Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ una curva, definiamo la *lunghezza di* γ come

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

Poiché $|\dot{\gamma}(t)|$ è continua per quasi ogni t, la lunghezza è ben definita. A volte si scriverà L_g invece di L.
Si vedrà ora che la lunghezzza di una curva è indipendente dalla parametrizzazione.

Definizione 4.2. Una riparametrizzazione di γ è una curva della forma $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ dove $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ è una mappa liscia con inversa liscia.
Se $\dot{\phi} > 0$, la riparametrizzazione conserva l'orientazione di una curva, se $\dot{\phi} < 0$ la inverte.

Lemma 4.1.1. *Per ogni curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ e ogni riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$ di γ, si ha $L(\widetilde{\gamma}) = L(\gamma)$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} L(\widetilde{\gamma}) &= \int_c^d \left|\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\right| dt = \int_c^d \left|\frac{d}{dt}(\gamma \circ \phi)(t)\right| dt = \int_c^d \left|\dot{\gamma}(\phi(t))\dot{\phi}(t)\right| dt \\ &= \int_a^b |\dot{\gamma}(s)|\, ds = L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Per calcolare la distanza tra punti, è utile modificare la classe di curve che vengono prese in considerazione.

Definizione 4.3. Una *curva regolare* è una curva liscia $\gamma : I \longrightarrow M$ tale che $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Intuitivamente questa condizione fa sì che la curva non abbia cuspidi o punti angolosi. Formalmente, poiché il vettore tangente $\dot{\gamma}(t)$ è il push-forward $\gamma_*(d/dt)$, una curva regolare è un'immersione dell'intervallo I in M.
Si osservi che le geodetiche, avendo velocità costante, sono regolari.

Definizione 4.4. Una mappa continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ è detta *curva regolare a tratti* se esiste una suddivisione $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ è una curva regolare per ogni $i = 1, \ldots, k$.

Tutte le distanze su varietà Riemanniane verranno misurate su curve come queste, che verranno chiamate *curve ammissibili.* Anche una curva del tipo $\gamma : \{a\} \longrightarrow M$, $\gamma(a) = p$ è considerata una curva ammissibile. I limiti sinistro e destro del vettore velocità in ciascun a_i sono ben definiti, diversi da zero e non necessariamente uguali; verranno indicati con

$$\dot{\gamma}(a_i^-) := \lim_{t \to a_i^-} \dot{\gamma}(t),$$

$$\dot{\gamma}(a_i^+) := \lim_{t \to a_i^+} \dot{\gamma}(t), .$$

Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una curva ammissibile e sia data come in precedenza una suddivisione $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ di $[a, b]$. La lunghezza di γ è definita come la somma delle lunghezze dei tratti $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$. Si può estendere la definizione di riparametrizzazione che viene ad essere una curva ammissibile della forma $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ dove $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ è un omeomorfismo la cui restrizione ai sottointervalli $[c_{i-1}, c_i]$ è liscia con inversa liscia. Quindi anche la lunghezza di una curva ammissibile è indipendente dalla parametrizzazione.

Definizione 4.5. La *funzione lunghezza d'arco* di una curva ammissibile $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ è la funzione $s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$s(t) := L(\gamma|_{[a,t]}) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| \, du.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale s è liscia dove lo è γ, e $\dot{s}(t)$ è uguale alla velocità $|\dot{\gamma}(u)|$ di γ.
Tra tutte le possibili parametrizzazioni di una curva, quelle a velocità unitaria sono particolarmente importanti e ogni curva ammissibile ne ammette una.

Osservazione 4.1. Per ogni curva ammissibile $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ di lunghezza $L(\gamma) = l$ esiste un'unica riparametrizzazione $\widetilde{\gamma} : [0,l] \longrightarrow M$ che conserva l'orientazione tale che $\widetilde{\gamma}$ ha velocità unitaria.

Per provarlo basta cosiderare $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$, dove ϕ^{-1} è la funzione lunghezza d'arco di γ.

Si ha inoltre che data una curva γ con velocità unitaria, la cui parametrizzazione è definita sull'intervallo $[0,l]$, la funzione lunghezza d'arco di γ è $s(t) = t$, infatti

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}(u)|\, du = t.$$

In questo caso si dice che la curva è *parametrizzata d'arco*.

Definizione 4.6. Siano $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ una curva ammissibile e $f \in C^\infty[a,b]$, si definisce l'*integrale di f rispetto alla lunghezza d'arco* come

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(t)\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

Anche questa nozione è indipendente dalla parametrizzazione.

Definizione 4.7. Una mappa continua $V : [a,b] \longrightarrow TM$ tale che $V_t \in T_{\gamma(t)}M$ per ogni t è detta *campo vettoriale lungo γ liscio a tratti* se esiste una suddivisione, possibilmente più fine, $a = \widetilde{a}_0 < \widetilde{a}_1 < \ldots < \widetilde{a}_m = b$ tale che V sia liscio su ciascun sottointervallo $[\widetilde{a}_{i-1}, \widetilde{a}_i]$.

Dato un qualunque vettore $V_a \in T_{\gamma(a)}M$, esiste un unico campo vettoriale liscio a tratti parallelo a V_a lungo γ. Per trovarlo è sufficiente trasportare parallelamente V_a lungo il primo tratto di γ fino a $\gamma(a_1)$, poi trasportare parallelamente V_{a_1} lungo il secondo tratto e così via.

4.1.2 Distanza Riemanniana

Definizione 4.8. Sia M una varietà Riemanniana connessa. Per ogni coppia di punti $p, q \in M$ si definisce la distanza Riemanniana $d(p,q)$ come

$d(p,q) := \inf\{L(\gamma) \,|\, \gamma$ è una curva regolare a tratti con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q\}$.

Per dimostrare che la distanza è ben definita, è necessario verificare che due punti qualsiasi possono essere collegati con una curva ammissibile. Essendo M connessa, p e q possono essere collegati con un cammino continuo $c : [a,b] \longrightarrow M$. Per la compattezza, c'è una suddivisione di $[a,b]$ tale che $c([a_{i-1}, a_i])$ è contenuto in una singola carta per ogni i. Sostituendo ogni segmento con un cammino liscio in coordinate si ottiene una curva ammissibile da p a q.

Lemma 4.1.2. *Con la distanza d appena definita, ogni varietà Riemanniana connessa è uno spazio metrico la cui topologia indotta è proprio la topologia della varietà.*

Dimostrazione. Dalla definizione è chiaro che $d(p,q) = d(q,p) \geq 0$ e $d(p,p) = 0$. La disuguaglianza triangolare segue dal fatto che è possibile combinare una curva regolare a tratti da p a q con una da q a r ottenendo una curva regolare a tratti la cui lunghezza è la somma delle lunghezze delle due curve. Per dimostrare che la topologia indotta da d è quella della varietà confrontiamo la distanza Riemanniana e quella Euclidea in coordinate locali. Siano $x \in M$, U un intorno di x diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $B(x,\epsilon)$ la palla di centro x e raggio ϵ per il prodotto scalare Euclideo. Per ϵ abbastanza piccolo $B(x,\epsilon) \subset U$. Siccome la metrica Riemanniana g è liscia, esistono due costati $C_1, C_2 > 0$ tali che per ogni $p \in B(x,\epsilon)$ e per ogni $V \in \mathbb{R}^n$

$$C_1 \left|V\right|_{\bar{g}} \leq \left|V\right|_g \leq C_2 \left|V\right|_{\bar{g}} .$$

Quindi per ogni curva γ dentro $B(x,\epsilon)$ la lunghezza L_g di γ è limitata dal basso e dall'alto dalla lunghezza calcolata con la metrica Euclidea:

$$C_1 L_{\bar{g}}(\gamma) \leq L_g(\gamma) \leq C_2 L_{\bar{g}}(\gamma)$$

Sia adesso α piccolissimo e siano $p, q \in B(x, \epsilon\alpha)$. Se una curva γ che connette p e q esce da $B(x,\epsilon)$ allora la sua lunghezza è almeno $C_1\epsilon(1-\alpha)$ mentre il segmento tra p e q ha lunghezza al più $C_2 2\epsilon\alpha$, per cui se α è sufficientemente piccolo le curve usate per calcolare la distanza tra p e q non escono da $B(x,\epsilon)$. Dalla stima precedente segue che su $B(x,\epsilon\alpha)$ si ha

$$C_1 \left|p-q\right|_{\bar{g}} \leq d(p,q) \leq C_1 \left|p-q\right|_{\bar{g}}$$

per cui d è equivalente alla topologia naturale di M. □

4.2 Geodetiche e curve minimizzanti

Definizione 4.9. Una curva ammissibile $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ su una varietà Riemanniana si dice *minimizzante* se, data una qualsiasi altra curva ammissibile $\widetilde{\gamma}$ con gli stessi estremi si ha $L(\gamma) \leq L(\widetilde{\gamma})$, ovvero se e solo se $d(\gamma(a),\gamma(b)) = L(\gamma)$.

Per provare che le curve minimizzanti sono geodetiche si considera L come un funzionale sull'insieme delle curve ammissibili su M; quindi cercare le curve minimizzanti equivale a cercare il minimo di questo funzionale con gli strumenti dati dal calcolo delle variazioni.
Infatti, se γ è una curva minimizzante e Γ_s è una famiglia di curve ammissibili con gli stessi estremi tale che $L(\Gamma_s)$ è una funzione differenziabile di s e $\Gamma_0 = \gamma$, allora la derivata rispetto a s di $L(\Gamma_s)$ deve essere nulla in $s = 0$ perché lì si ha un minimo del funzionale.

4.2.1 Famiglie ammissibili

Definizione 4.10. Una famiglia ammissibile di curve è una mappa $\Gamma : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \longrightarrow M$ che sia liscia su ogni rettangolo della forma $(-\epsilon,\epsilon) \times [a_{i-1},a_i]$ per qualche suddivisione $a = a_0 < \ldots < a_k = b$, e tale che $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ sia una curva ammissibile per ogni $s \in (-\epsilon,\epsilon)$.
Se Γ è una famiglia ammissibile, un *campo vettoriale lungo* Γ è una mappa continua $V : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \longrightarrow TM$ tale che $V(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}M$ per

ogni (s,t), e tale che $V|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[\widetilde{a}_{i-1},\widetilde{a}_i]}$ sia liscia per una suddivisione più fine $a = \widetilde{a}_0 < \ldots < \widetilde{a}_m = b$.

Ogni famiglia ammissibile Γ definisce due gruppi di curve: le *curve principali* $\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$ definite su $[a,b]$ fissando s, e le *curve trasverse* $\Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s,t)$ definite su $(-\epsilon,\epsilon)$ fissando t. Le curve trasverse sono lisce su $(-\epsilon,\epsilon)$ per ogni t, mentre le curve principali in generale sono soltanto regolari a tratti.

Quando Γ è liscio, i vettori tangenti a queste due famiglie di curve sono esempi di campi vettoriali lungo Γ; essi verranno indicati con

$$\partial_t\Gamma(s,t) := \frac{d}{dt}\Gamma_s(t), \qquad \text{e} \qquad \partial_s\Gamma(s,t) := \frac{d}{ds}\Gamma^{(t)}(s).$$

$\partial_s\Gamma$ è continuo su tutto il rettangolo $(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$: da un lato il suo valore sul segmento $(-\epsilon,\epsilon)\times\{a_i\}$ dipende solo dai valori di Γ su quel segmento in quanto la derivata è fatta solo rispetto a s; d'altra parte è continuo su ogni rettangolo $(-\epsilon,\epsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ e $(-\epsilon,\epsilon)\times[a_i,a_{i+1}]$ quindi i limiti destro e sinistro per $t = a_i$ devono essere uguali. Quindi $\partial_s\Gamma$ è sempre un campo vettoriale lungo Γ.
Dato un campo vettoriale V lungo Γ, possiamo calcolare la derivata covariante di V sia lungo le curve principali che lungo quelle trasverse; i campi vettoriali lungo Γ risultanti si indicano rispettivamente con D_tV e D_sV.

Il lemma seguente sfrutta la simmetria della connessione Riemanniana e verrà utilizzato più volte in segiuto.

Lemma 4.2.1. *Sia $\Gamma : (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \longrightarrow M$ una famiglia ammissibile di curve su una varietà Riemanniana. Su ogni rettangolo $(-\epsilon,\epsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ su cui Γ è liscia,*

$$D_s\partial_t\Gamma = D_t\partial_s\Gamma$$

Dimostrazione. Facendo il conto nelle coordinate locali (x^i) intorno a ogni punto $\Gamma(s_0,t_0)$ e scrivendo le componenti di Γ come $\Gamma(s,t) = (x^1(s,t),\ldots,x^n(s,t))$

si ha
$$\partial_t\Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t}\partial_k \qquad e \qquad \partial_s\Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s}\partial_k.$$
Usando la scrittura in coordinate della derivata covariante lungo una curva data dalla formula (2.7) si ottiene
$$D_s\partial_t\Gamma = \left(\tfrac{\partial^2 x^k}{\partial s\partial t} + \tfrac{\partial x^i}{\partial t}\tfrac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma^k_{ji}\right)\partial_k$$
$$D_t\partial_s\Gamma = \left(\tfrac{\partial^2 x^k}{\partial t\partial s} + \tfrac{\partial x^i}{\partial s}\tfrac{\partial x^j}{\partial t}\Gamma^k_{ji}\right)\partial_k.$$
Invertendo i ruoli di i e j nella seconda uguaglianza e usando la condizione di simmetria $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$ si osserva che le due espressioni sono uguali. □

Definizione 4.11. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una curva ammissibile, una *variazione di* γ è una famiglia ammissibile Γ tale che $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.
Questa è chiamata *variazione propria* o *variazione con estremi fissati* se si ha anche $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ e $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ per ogni s.
Sia Γ una variazione di γ, il *campo variazionale* di Γ è il campo vettoriale $V(t) = \partial_s\Gamma(0, t)$ lungo γ.
Un campo vettoriale V lungo γ si dice *proprio* se $V(a) = V(b) = 0$. Un campo vettoriale di una variazione propria è proprio.

Lemma 4.2.2. *Siano γ una curva ammissibile e V un campo vettoriale lungo γ, allora esiste una variazione Γ di γ che ha V come campo variazionale. Inoltre se V è proprio si può trovare Γ propria.*

Dimostrazione. Sia $\Gamma(s, t) = \exp(sV(t))$. Per la compattezza di $[a, b]$ esiste $\epsilon > 0$ tale che Γ è definito su $(-\epsilon, \epsilon)\times[a, b]$. Chiaramente Γ è continua su tutto il dominio e liscia su $(-\epsilon, \epsilon)\times[a_{i-1}, a_i]$ per ogni sottointervallo $[a_{i-1}, a_i]$ su cui V è liscia. Per le proprietà della mappa esponenziale il campo variazionale di Γ è V. Inoltre se $V(a) = V(b) = 0$, si ha che $\Gamma(s, a) \equiv \gamma(a)$ e $\Gamma(s, b) \equiv \gamma(b)$, quindi Γ è propria. □

4.2.2 Le curve minimizzanti sono geodetiche

Si può ora calcolare un'espressione per la derivata del funzionale lunghezza lungo una variazione propria; questa è chiamata *variazione prima.*

Proposizione 4.2.3. *Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ una curva ammissibile con velocità unitaria, Γ una variazione propria di γ, e V il suo campo variazionale. Allora*

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = -\int_a^b \langle V, D_t\dot\gamma\rangle\, dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i\dot\gamma\rangle\,, \tag{4.1}$$

dove $\Delta_i\dot\gamma = \dot\gamma(a_i^+) - \dot\gamma(a_i^-)$ è il salto del vettore tangente $\dot\gamma$ in a_i.

Dimostrazione. Si scriva

$$T(s,t) = \partial_t\Gamma(s,t) \qquad e \qquad S(s,t) = \partial_s\Gamma(s,t).$$

Su ogni sottointervallo $[a_{i-1}, a_i]$ su cui Γ è liscio, poiché il dominio di integrazione è compatto, si può differenziare sotto il segno di integrale e si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial s}\langle T, T\rangle^{1/2}\, dt\\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2}\langle T, T\rangle^{-1/2}\, 2\,\langle D_sT, T\rangle\, dt\\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T|}\langle D_tS, T\rangle\, dt,\end{aligned}$$

dove si è usato il Lemma 4.2.1 nell'ultimo passaggio. Fissando $s = 0$ e notando che $S(0,t) = V(t)$ e $T(0,t) = \dot\gamma(t)$ (che ha lunghezza unitaria), si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_tV, \dot\gamma\rangle\, dt\\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{d}{dt}\langle V, \dot\gamma\rangle - \langle V, D_t\dot\gamma\rangle\right) dt\\ &= \left\langle V(a_i), \dot\gamma(a_i^-)\right\rangle - \left\langle V(a_{i-1}), \dot\gamma(a_{i-1}^+)\right\rangle - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t\dot\gamma\rangle\, dt.\end{aligned}$$

Infine, sommando in i e notando che $V(a_0) = V(a_k) = 0$ in quanto Γ è una variazione propria, si ottiene la tesi. □

Poiché ogni curva ammissibile ha una parametrizzazione a velocità unitaria e la lunghezza è indipendente dalla parametrizzazione, è utile ma non è restrittivo richiedere, come nella proposizione precedente, che γ abbia velocità unitaria.

Teorema 4.2.4. *Ogni curva minimizzante è una geodetica quando è data una parametrizzazione a velocità unitaria.*

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ minimizzante e con velocità unitaria, e sia $a = a_0 < \ldots < a_k = b$ una suddivisione tale che γ sia liscia su $[a_{i-1}, a_i]$. Sia Γ una qualunque variazione propria di γ, siccome γ è minimizzante $dL(\Gamma_s)/ds(0) = 0$. Ogni campo vettoriale V proprio lungo γ è il campo variazionale di una variazione propria, quindi il termine a destra dell'uguale nella formula (4.1) è nullo per V.
Si vuole dimostrare che $D_t\dot{\gamma} = 0$ su ogni sottointervallo $[a_{i-1}, a_i]$, così si avrebbe che γ è una geodetica all'interno di ciascuno di essi. Si considera una funzione $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\phi > 0$ su (a_{i-1}, a_i) e $\phi = 0$ altrove. Allora la (4.1) con $V = \phi D_t\dot{\gamma}$ diventa

$$0 = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \phi \left|D_t\dot{\gamma}\right|^2 dt.$$

Poiché l'integrando è non negativo si ha $D_t\dot{\gamma} = 0$ su ogni sottointervallo.
Si vuole ora provare che $\Delta_i\dot{\gamma} = 0$, cioè che γ non ha spigoli. Per ogni $0 \leq i \leq k$ si considera un campo vettoriale lungo γ tale che $V(a_i) = \Delta_i\dot{\gamma}$ e $V(a_j) = 0$ per $j \neq i$. Allora la (4.1) si riduce a $-\left|\Delta_i\dot{\gamma}\right|^2 = 0$.
Dunque $\dot{\gamma}$ è continua; per l'unicità delle geodetiche tangenti a una certa direzione si ha che $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ è la continuazione di $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ e quindi γ è liscia ed è una geodetica dappertutto. $\square$

In realtà si è dimostrato qualcosa in più: per provare che γ era una geodetica non si è usato che fosse una curva minimizzante, ma solo che fosse un *punto critico* di L, cioè che

$$\frac{dL(\Gamma_s)}{ds}(0) = 0$$

per ogni variazione propria Γ_s di γ.
Allora il teorema precedente implica il seguente corollario.

Corollario 4.2.5. *Una curva ammissibile con velocità unitaria è un punto critico di L se e solo se è una geodetica.*

Dimostrazione. Per provare che γ è una geodetica sapendo che è un punto critico di L, si segue la dimostrazione del teorema precedente. Viceversa, se γ è una geodetica, il primo addendo della (4.1) si annulla perché $D_t\gamma = 0$, il secondo perché $\dot\gamma$ non ha salti. $\square$

4.2.3 Le geodetiche sono localmente minimizzanti

Il seguente teorema è detto lemma di Gauss ed è utile per dimostrare che le geodetiche sono localmente minimizzanti.

Teorema 4.2.6. *Sia $\mathcal{U}$ una palla geodetica centrata in $p \in M$. Il vettore radiale unitario $\partial/\partial r$ è g-ortogonale alle sfere geodetiche in $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Sia $q \in \mathcal{U}$ e sia $X \in T_qM$ un vettore tangente alla sfera geodetica per q. Siccome $\exp_p$ è un diffeomorfismo su $\mathcal{U}$, esistono un vettore $V \in T_pM$ tale che $q = \exp_p V$ e un vettore $W \in T_V(T_pM) = T_pM$ tale che $X = (\exp_p)_*W$. Allora $V \in \partial B_R(0)$ e $W \in T_V\partial B_R(0)$, con $R = d(p,q)$. La geodetica radiale da p a q è $\gamma(t) = \exp_p(tV)$, e il suo vettore tangente è $\dot\gamma(t) = R\partial/\partial r$. Bisogna allora dimostrare che X è ortogonale a $\dot\gamma(1)$ rispetto a g.
Sia $\sigma : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow T_pM$ su $\partial B_R(0)$ tale che $\sigma(0) = V$ e $\dot\sigma(0) = W$, e si consideri la variazione Γ di γ data da

$$\Gamma(s,t) = \exp_p(t\sigma(s)).$$

Per ogni $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\sigma(s)$ è un vettore di lughezza R, quindi Γ_s è una geodetica con velocità costante R. Scrivendo $S = \partial_s \Gamma$ e $T = \partial_t \Gamma$, si ha

$$\begin{aligned} S(0,0) &= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(0) = 0 \\ T(0,0) &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p(tV) = V \\ S(0,1) &= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\sigma(s)) = (\exp_p)_* \dot{\sigma}(0) = X \\ T(0,1) &= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=1} \exp_p(tV) = \dot{\gamma}(1). \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle S, T \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } (s,t) = (0,0) \\ \langle X, \dot{\gamma}(1) \rangle & \text{se } (s,t) = (0,1) \end{cases}$$

e per provare il teorema è sufficiente dimostrare che $\langle S, T \rangle$ è indipendente da t. Sfruttando il Lemma 4.2.1, il fatto che $D_t T \equiv 0$ perché ogni Γ_s è una geodetica e il fatto che $|T| = |\dot{\Gamma}_s| \equiv R$ per ogni (s,t), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle &= \langle D_t S, T \rangle = + \langle S, D_t T \rangle \\ &= \langle D_s T, T \rangle + 0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |T|^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Corollario 4.2.7. *Siano (x^i) le coordinate normali su una palla geodetica $\mathcal{U}$ centrata in $p \in M$, e sia r la distanza radiale definita in (3.6). Allora* $\operatorname{grad} r = \partial/\partial r$ *su $\mathcal{U} - \{p\}$, cioè per ogni $q \in \mathcal{U} - \{p\}$ e $Y \in T_q M$, si ha*

$$dr(Y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle.$$

Dimostrazione. La sfera geodetica $\exp_p(\partial B_R(0))$ per q è caratterizzata in coordinate normali dall'equazione $r = R$. Siccome $\partial/\partial r$ è perpendicolare alla sfera si può scomporre Y in componenti normale e tangenziale come $Y = \alpha \partial/\partial r + X$, dove α è una costante e X è un vettore tangente alla sfera.

Osservando che $dr(\partial/\partial r) = 1$ e $dr(X) = 0$ perché X è tangente a un insieme di livello di r, si ha

$$dr(Y) = dr\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r} + X\right) = \alpha dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + dr(X) = \alpha.$$

D'altra parte $\partial/\partial r$ è un vettore unitario, quindi

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha\frac{\partial}{\partial r} + X\right\rangle = \alpha\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|^2 + \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, X\right\rangle = \alpha,$$

dove si è usato il lemma di Gauss per concludere che X è ortogonale a $\partial/\partial r$. $\square$

Proposizione 4.2.8. *Siano $p \in M$ e q in una palla geodetica intorno a p. Allora (a meno di riparametrizzazioni) la geodetica radiale da p a q è l'unica curva minimizzante da p a q in M.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ tale che $\exp_p(B_\epsilon(0))$ è una palla geodetica che contiene q. Sia $\gamma : [0, R] \longrightarrow M$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, per cui $\gamma(t) = \exp_p(tV)$ per un opportuno vettore unitario $V \in T_pM$. Allora $L(\gamma) = R$ siccome γ ha velocità unitaria, bisogna dimostrare che ogni curva ammissibile da p a q ha lunghezza strettamente maggiore di R.
Sia $S_R = \exp_p(\partial B_R(0))$ la sfera geodetica di raggio R e sia $\sigma : [0, b] \longrightarrow M$ una curva ammissibile da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Si inizia dimostrando che $L(\sigma) \geq L(\gamma)$, poi si dimostrerà che la disuguaglianza è stretta.
Sia $a_0 \in [a, b]$ tale che $\sigma(t) \neq p$ per per $t > a_0$ e sia $b_0 \in [a, b]$ tale che $\sigma(t) \in S_R$ per ogni $a_0 < t < b_0$. Per ogni $t \in [a, b]$ si può scomporre $\dot\sigma(t)$ così

$$\dot\sigma(t) = \alpha(t)\frac{\partial}{\partial r} + X(t),$$

dove $X(t)$ è tangente alla sfera geodetica per $\sigma(t)$.
Per il lemma di Gauss questa le due componenti sono ortogonali, quindi $|\dot\sigma(t)|^2 = \alpha(t)^2 + |X(t)|^2 \geq \alpha(t)^2$. Inoltre per il Corollario 4.2.7 si ha

$\alpha(t) = \langle \partial/\partial r, \dot\sigma(t)\rangle = dr(\dot\sigma(t))$. Perciò

$$\begin{aligned} L(\sigma) \geq L(\sigma|_{[a_0,b_0]}) &= \lim_{\delta\to 0}\int_{a_0+\delta}^{b_0} |\dot\sigma(t)|\, dt \geq \lim_{\delta\to 0}\int_{a_0+\delta}^{b_0} \alpha(t)dt \\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{a_0+\delta}^{b_0} dr\,(\dot\sigma(t))\, dt = \lim_{\delta\to 0}\int_{a_0+\delta}^{b_0} \frac{d}{dt} r\,(\sigma(t))\, dt \\ &= r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) = R = L(\gamma). \end{aligned}$$

Quindi γ è minimizzante.
Se si avesse $L(\sigma) = R$, entrambe le disuguaglianze nella formula precedente sarebbero uguaglianze. Siccome σ ha velocità unitaria, la prima uguaglianza implica che $a_0 = 0$ e $b_0 = b = R$, perché altrimenti i tratti di σ prima di a_0 e dopo b_0 contribuirebbero con lunghezze positive. La seconda uguaglianza implica che $X(t) \equiv 0$ e $\alpha(t) > 0$, quindi $\dot\sigma(t)$ è un multiplo positivo di $\partial/\partial r$. Perché σ abbia velocità unitaria si deve avere $\dot\sigma(t) = \partial/\partial r$. Quindi σ e γ sono entrambi curve integrali di $\partial/\partial r$ passanti per q al tempo $t = R$, quindi $\sigma = \gamma$. □

Corollario 4.2.9. *In ogni palla geodetica intorno a $p \in M$, la distanza radiale $r(x)$ definita in (3.6) è uguale alla distanza Riemanniana da p a x.*

Dimostrazione. La geodetica radiale da p a x è minimizzante per la proposizione precedente. Siccome la sua velocità è $\partial/\partial r$, che è un vettore unitario sia rispetto alla norma g che rispetto a quella Euclidea, la g-lunghezza di γ è uguale alla sua lunghezza Euclidea, cioè $r(x)$. □

Questo corollario suggerisce una diversa notazione per palle e sfere geodetiche su M. Se $\mathcal{U} = \exp_p(B_R(0)$ è una palla geodetica intorno a p, il corollario afferma che $\mathcal{U}$ è la palla di raggio R e centro p. Analogamente la sfera di raggio R è l'insieme dei punti la cui distanza da p è R. Si possono usare le notazioni $B_R(p) = \exp_p(B_R(0))$, $\bar B_R(p) = \exp_p(\bar B_R(0))$ e $S_R(p) = \exp(\partial B_R(0))$ per palle geodetiche aperte e chiuse e sfere geodetiche.

Definizione 4.12. Una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ si dice *localmente minimizzante* se per ogni $t_0 \in I$ esiste un intorno $\mathcal{U} \subset I$ tale che $\gamma|_{\mathcal{U}}$ è minimizzante per ogni coppia di punti di $\mathcal{U}$.

Teorema 4.2.10. *Ogni geodetica Riemanniana è localmente minimizzante.*

Dimostrazione. Siano $\gamma : I \longrightarrow M$ una geodetica e $t_0 \in I$. Sia poi $\mathcal{W}$ un intorno uniformemente normale di $\gamma(t_0)$, e sia $\mathcal{U} \subset I$ la componente connessa di $\gamma^{-1}(\mathcal{W})$ contenente t_0. Dati $t_1, t_2 \in \mathcal{U}$ e $q_i = \gamma(t_i)$, per definizione di intorno uniformemente normale, q_2 è contenuto in una palla geodetica intorno a q_1. Allora per la proposizione 4.2.8 la geodetica radiale da q_1 a q_2 è l'unica curva minimizzante tra questi due punti. Ma la restrizione di γ è una geodetica da q_1 a q_2 nella stessa palla geodetica, quindi γ deve essere questa geodetica minimizzante. $\square$

Capitolo 5

Applicazioni

5.1 Lo spazio Euclideo

L'esempio più semplice e importante di varietà Riemanniana è $\mathbb{R}^n$ con la metrica Euclidea $\bar{g}$, data da:

$$\bar{g} = \sum_i dx^i dx^i = \sum_i (dx^i)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

Considerando $\mathbb{R}^2$ con le coordinate (x, y), la matrice che descrive la metrica è

$$(\bar{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.1.1 La metrica Euclidea in coordinate polari

Si può scrivere la metrica Euclidea nelle coordinate polari. In generale, passando dalle coordinate Cartesiane a un qualunque altro sistema di coordinate q^i dello spazio Euclideo, si ha che i coefficienti della nuova matrice della metica Euclidea sono dati da

$$g'_{ij} = \delta_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^l}{\partial q^j} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}.$$

In particolare le coordinate polari sono definite da:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

La matrice Jacobiana del cambio di coordinate è

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi, si ha che la matrice della metrica Euclidea in coordinate polari è

$$\bar{g}_{pol} = J^{\mathrm{T}} I J = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -r\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta \\ -r\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta & r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

5.1.2 La connessione Riemanniana e le geodetiche sullo spazio Euclideo

Per capire come è fatta la connessione Riemanniana su $\mathbb{R}^n$ con la metrica Euclidea $\bar{g}$ si osserva che i coefficienti della metrica sono costanti nel sistema di coordinate standard, quindi i simboli di Christoffel sono nulli e la connessione Riemanniana dello spazio Euclideo è quella definita in (2.3).

Per determinare le geodetiche dobbiamo quindi risolvere:

$$D_t\dot{\gamma}(t_0) = \left(\frac{d\dot{\gamma}^k}{dt}(t_0) + \dot{\gamma}^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\right)\partial_k = \frac{d\dot{\gamma}^k}{dt}(t_0)\partial_k.$$

Le geodetiche sono quindi le rette che hanno parametrizzazioni con velocità costante, cioè tali che $\ddot{\gamma} \equiv 0$.

5.2 Le sfere

Indichiamo S^n_R la sfera di raggio R in R^n. Indicata ι la sua inclusione in $\mathbb{R}^{n+1}$, si ha che S^n_R può essere dotata della metrica $\mathring{g}_R$ indotta dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$. Volendo dare l'espressione esplicita di $\mathring{g}$ nel caso di S^2_R in R^3, si danno le equazioni in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

con $-\pi < \theta < \pi$ e $0 < \phi < \pi$. La metrica Euclidea può essere scritta nella forma $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, e calcolando dx, dy e dz si trova

$$\begin{aligned} dx &= R(\phi'\cos\phi\cos\theta - \theta'\sin\phi\sin\theta) \\ dy &= R(\phi'\cos\phi\sin\theta + \theta'\sin\phi\cos\theta) \\ dz &= R\phi'\sin\phi. \end{aligned}$$

Quindi l'espressione della metrica sferica è:

$$d\sigma^2 = R^2 d\phi^2 + R^2\sin^2\phi d\theta^2.$$

Si può ottenere un'altra espressione locale della metrica $\mathring{g}$ indotta sulla sfera, attraverso un procedimento diverso. Si consideri la parametrizzazione locale della calotta superiore di S^2_R data da

$$\varphi : (x, y) \longmapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}).$$

Una base per lo spazio tangente $T_{\phi(x,y)}S^2_R$ è allora data dalle derivate parziali di φ

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(1, 0, \tfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) \\ X_2 &= \left(0, 1, \tfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right). \end{aligned}$$

Per la definizione di metrica indotta data dalla (1.1) si ha che

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{g}(X_i, X_j) = \bar{g}(D\iota(X_i), D\iota(X_j) = \bar{g}(X_i, X_j) \quad i, j = 1, 2$$

quindi si ottiene ad esempio

$$\mathring{g}_{11} = \mathring{g}(X_1, X_1) = \left\langle \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right), \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) \right\rangle$$
$$= 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Svolgendo i calcoli al variare di i e j si ottiene che la matrice associata alla metrica è

$$(\mathring{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} & \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2} \\ \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2} & 1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}.$$

5.2.1 Le sfere sono localmente conformemente piatte

Una caratteristica interessante della sfera è che è localmente conformemente piatta. Lo dimostriamo studiando le proprietà della proiezione stereografica dal polo nord $N = (0, \ldots, 0, R)$, $\sigma : S^n_R - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Questa funzione associa a ciascun $p \in S^n_R - \{N\}$ l'intersezione della retta passante per N e p con l'iperpiano $\{x^{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, iperpiano che può essere identificato con $\mathbb{R}^n$. La retta per N e p è parametrizzata da $t \mapsto N + t(p - N)$. Quindi interseca l'iperpiano $\{x^{n+1} = 0\}$ quando t soddisfa l'equazione $R + t(p^{n+1} - R) = 0$. Per cui la proiezione stereografica è data dalla mappa liscia

$$\sigma(p) = \frac{R}{R - p^{n+1}}(p_1, \ldots, p_n).$$

Per vedere che σ è un diffeomorfismo tra $S^n_R - \{N\}$ e $\mathbb{R}^n$ è sufficiente calcolare l'inversa

$$\sigma^{-1}(x) = \left(\frac{2R^2x^1}{|x|^2 + R^2}, \ldots, \frac{2R^2x^n}{|x|^2 + R^2}, R\frac{|x|^2 - R^2}{|x|^2 + R^2}\right).$$

Proposizione 5.2.1. *S^n_R è localmente conformemente piatta.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che la proiezione stereografica dal polo nord è un'equivalenza conforme, cioè che $(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R = \bar{g}$.
Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $v = v^j \partial_j \in T_x\mathbb{R}^n$, si deve calcolare

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R(v, v) = \mathring{g}_R(D_x\sigma^{-1}(v), D_x\sigma^{-1}(v)) = \left|D_x\sigma^{-1}(v)\right|^2.$$

Ora,

$$D_x\sigma^{-1}(v) = v^j \frac{\partial(\sigma^{-1})^h}{\partial x^j}\partial_h = \frac{2R^2}{|x|^2 + R^2}v - \frac{4R^2 < v, x >}{(|x|^2 + R^2)^2}(x^h\partial_h - R\partial_{n+1}),$$

quindi

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R(v, v) = \frac{4R^4}{(|x|^2 + R^2)^2} |v|^2,$$

cioè

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R = \frac{4R^4}{(|x|^2 + R^2)^2}\bar{g},$$

quindi $(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R$ è conforme alla metrica Euclidea, e la proiezione stereografica è un'equivalenza conforme. □

5.2.2 I simboli di Christoffel

Si è visto che la metrica sferica di raggio R si scrive in coordinate sferiche

$$\mathring{g}_R = R^2 d\phi^2 + R^2 \sin^2\phi d\theta^2.$$

I coefficienti della metrica e della sua inversa sono quindi:

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= R^2, \quad g_{\phi\theta} = g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\theta\theta} = R^2 \sin^2\phi, \\ g^{\phi\phi} &= \tfrac{1}{R^2}, \quad g^{\phi\theta} = g^{\theta\phi} = 0, \quad g^{\theta\theta} = \tfrac{1}{R^2 \sin^2\phi}. \end{aligned}$$

Per calcolare i simboli di Christoffel si usa la formula

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})\, g^{lk}}{2}.$$

Effettuando i calcoli si ha

$$\begin{aligned}\Gamma^{\theta}_{\phi\theta} &= \frac{(\partial_\phi g_{\theta l} + \partial_\theta g_{\phi l} - \partial_l g_{\phi\theta})\, g^{l\theta}}{2}\\ &= \frac{(\partial_\phi g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\theta})\, g^{\phi\theta}}{2} + \frac{(\partial_\phi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\phi\theta} - \partial_\theta g_{\phi\theta})\, g^{\theta\theta}}{2}\\ &= \partial_\phi(R^2 \sin^\phi)\frac{1}{R^2\sin^2\phi} = \arctan\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} &= \frac{(\partial_\theta g_{\theta l} + \partial_\theta g_{\theta l} - \partial_l g_{\theta\theta})\, g^{l\phi}}{2}\\ &= \frac{(\partial_\theta g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\theta\phi} - \partial_\phi g_{\theta\theta})\, g^{\phi\phi}}{2} + \frac{(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta})\, g^{\theta\phi}}{2}\\ &= -\partial_\phi(R^2 \sin^\phi)\frac{1}{R^2} = -\sin\phi\cos\phi,\end{aligned}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \frac{(\partial_\theta g_{\theta l} + \partial_\theta g_{\theta l} - \partial_l g_{\theta\theta})\, g^{l\theta}}{2} = \frac{(\partial_\theta g_{\theta\theta}) g^{\theta\theta}}{2} = 0,$$

e analogamente si ottiene che tutti gli altri simboli di Christoffel sono nulli.

5.2.3 Le geodetiche della sfera

Mediante l'equazione delle geodetiche (2.8) è possibile verificare che ogni meridiano $(\theta(t), \phi(t)) = (\theta_0, t)$ è una geodetica. In coordinate sferiche l'equazione diventa

$$\begin{cases} \ddot{\phi} - \dot{\theta}^2 \sin\phi\cos\phi = 0 \\ \ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\theta}\arctan\phi = 0 \end{cases}$$

e siccome per i meridiani si ha $\ddot{\phi} = \ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, andando a sostituire si conclude che essi sono geodetiche.

Nel caso della sfera, che è omogenea e isotropica, c'è un modo semplice di trovare le geodetiche in ogni dimensione.

Proposizione 5.2.2. *Le geodetiche su S^n_R sono tutti e soli i cerchi massimi (cioè le intersezioni di S^n_R con i piani passanti per l'origine), con parametrizzazioni a velocità costante.*

Dimostrazione. Si consideri una geodetica con punto iniziale $N = (0, \dots, 0)$ e velocità iniziale V che sia multiplo di ∂_1.
Per la simmetria questa geodetica deve rimanere lungo il meridiano $x^2 = \dots = x^n = 0$. Infatti, supponendo il contrario dovrebbe esistere un tempo t_0 tale che $x^i(t_0) \neq 0$ per qualche $2 \leq i \leq n$. La mappa lineare $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ che manda x^i in $-x^i$ lasciando fisse la altre coordinate è un'isometria della sfera che lascia fissi $N = \gamma(0)$ e $V = \dot{\gamma}(0)$, quindi porta γ in sé stesso. Ma si ha una contraddizione perché $\phi(\gamma(t_0)) \neq \gamma(t_0)$.
Quindi, siccome le geodetiche hanno velocità costante, la geodetica con punto iniziale N e velocità iniziale $c\partial_1$ deve appartenere all'intersezione tra S^n_R e il piano (x^1, x^{n+1}) e avere una parametrizzazione a velocità costante.
Poiché c'è una mappa ortogonale che porta ogni punto iniziale in N e ogni vettore iniziale in uno della forma $c\partial_1$, e siccome le mappe ortogonali portano piani per l'origine in piani per l'origine, ne segue che le geodetiche su S^n_R sono esattamente le intersezioni di S^n_R con i piani passanti per l'origine. □

5.3 Superfici di rotazione

Sia I un aperto di $\mathbb{R}$ e sia $\gamma(t) = (a(t), b(t))$, con $t \in I$, una curva liscia e iniettiva nel piano xz tale che $a(t) > 0$ e $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.
L'immagine di γ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$; ruotandola intorno all'asse z si ottiene una superficie di rotazione $M \subset \mathbb{R}^3$, parametrizzata da

$$\begin{aligned} \phi :& \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &(\theta, t) \longmapsto (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t)). \end{aligned}$$

Si vuole ora calcolare l'espressione della metrica g indotta su M dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle coordinate (θ, t). Una base per lo spazio tangente $T_{\phi(\theta,t)}M$ è data dalle derivate parziali di ϕ

$$X_1 := \phi_\theta = (-a(t)\sin\theta, a(t)\cos\theta, 0)$$

$$X_2 := \phi_t = (\dot{a}(t)\cos\theta, \dot{a}(t)\sin\theta, \dot{b}(t))$$

Per la definizione di metrica indotta data dalla (1.1) si ha che

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) = \bar{g}(D\iota(X_i), D\iota(X_j) = \bar{g}(X_i, X_j) \quad i, j = 1, 2$$

quindi si ottiene

$$\begin{gathered} g_{11} = g(X_1, X_1) = \langle X_1, X_1 \rangle_{\bar{g}} = (a(t))^2, \\ g_{12} = g_{21} = g(X_1, X_2) = \langle X_1, X_2 \rangle_{\bar{g}} = 0, \\ g_{22} = g(X_2, X_2) = \langle X_2, X_2 \rangle_{\bar{g}} = (\dot{a}(t))^2 + (\dot{b}(t))^2. \end{gathered}$$

Si può quindi scrivere la metrica g in coordinate locali (θ, t) come

$$g = (a(t))^2(d\theta)^2 + [(\dot{a}(t))^2 + (\dot{b}(t))^2](dt)^2.$$

5.3.1 I simboli di Christoffel e le geodetiche

Per semplificare i calcoli si supponga che la curva che genera M sia parametrizzata d'arco. Per calcolare i simboli di Christoffel si usa la formula (3.3), cioè

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})\, g^{lk}}{2},$$

e si ottiene

$$\begin{gathered} \Gamma_{11}^1 = \tfrac{1}{2}(a(t))^2(\partial_t g_{11} + \partial_t g_{11} - \partial_t g_{11}) = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = \tfrac{1}{2}0 + \tfrac{1}{2[(\dot{a}(t))^2+(\dot{b}(t))^2]}(\partial_\theta g_{12} + \partial_\theta g_{12} - \partial_t g_{11}) = -\tfrac{a(t)\dot{a}(t)}{(\dot{a}(t))^2+(\dot{b}(t))^2} \\ \Gamma_{12}^1 = \tfrac{1}{2}(a(t))^2(\partial_\theta g_{21} + \partial_t g_{11} - \partial_\theta g_{12}) + \tfrac{1}{2}0 = \tfrac{a(t)\dot{a}(t)}{(a(t))^2} \\ \Gamma_{12}^2 = \tfrac{1}{2}0 + \tfrac{1}{2[(\dot{a}(t))^2+(\dot{b}(t))^2]}(\partial_\theta g_{22} + \partial_t g_{12} - \partial_t g_{12}) = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = \tfrac{1}{2}(a(t))^2(\partial_t g_{21} + \partial_t g_{21} - \partial_\theta g_{22}) + \tfrac{1}{2}0 = 0 \\ \Gamma_{22}^2 = \tfrac{1}{2}0 + \tfrac{1}{2[(\dot{a}(t))^2+(\dot{b}(t))^2]}(\partial_t g_{22} + \partial_t g_{22} - \partial_t g_{22}) = \tfrac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)+\dot{b}(t)\ddot{b}(t)}{(\dot{a}(t))^2+(\dot{b}(t))^2}. \end{gathered}$$

L'equazione delle geodetiche (2.8) in questo caso diventa

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dot{t}\dot{\theta}\Gamma_{12}^1 = 0 \\ \ddot{t} + \dot{\theta}^2\Gamma_{11}^2 + \dot{t}^2\Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Si verifica che i meridiani $\{\theta = \theta_0\}$ sono geodetiche su M. Infatti osservando il sistema

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dot{t}\dot{\theta}\frac{a\dot{a}}{a^2} = 0 \\ \ddot{t} - \dot{\theta}^2\frac{a\dot{a}}{\dot{a}^2+\dot{b}^2} + \dot{t}^2\frac{\dot{a}\ddot{a}+\dot{b}\ddot{b}}{\dot{a}^2+\dot{b}^2} = 0, \end{cases}$$

si ha che i meridiani soddisfano entrambe le equazioni. La prima perché $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, la seconda in quanto, essendo la curva parametrizzata d'arco, si ha

$$(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)\dot{t}^2 = 1,$$

quindi $\dot{t}^2 = \frac{1}{\dot{a}^2+\dot{b}^2}$, da cui, derivando

$$2\dot{t}\ddot{t} = \frac{2(\dot{a}\ddot{a} + \dot{b}\ddot{b})}{(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)^2}\dot{t} = \frac{2(\dot{a}\ddot{a} + \dot{b}\ddot{b})}{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}\dot{t}^3,$$

cioè, siccome $\dot{t} \neq 0$,

$$\ddot{t} = -\dot{t}^2\frac{\dot{a}\ddot{a} + \dot{b}\ddot{b}}{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}.$$

Quindi i meridiani sono geodetiche.

5.4 Il gruppo di Heisenberg

5.4.1 Una metrica Riemanniana sul gruppo

Si dice gruppo di Heisenberg lo spazio R^3, con una opportuna legge di gruppo non commutativa. Ai fini del nostro esempio, ci interessa però soltanto una metrica Riemanniana definita sul gruppo. Considereremo pertanto la metrica

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4(x^2)^2}{\epsilon} & -\frac{4x^1x^2}{\epsilon} & -\frac{2x^2}{\epsilon} \\ -\frac{4x^1x^2}{\epsilon} & 1 + \frac{4(x^2)^2}{\epsilon} & \frac{2x^1}{\epsilon} \\ -\frac{2x^2}{\epsilon} & \frac{2x^1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Si verifica subito che questa matrice definisce una metrica Riemanniana, definita su tutto lo spazio.

5.4.2 I simboli di Christoffel nella metrica

Al fine di calcolare i simboli di Christoffel calcoliamo innanzitutto l'inversa della metrica.

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x^2 \\ 0 & 1 & -2x^1 \\ 2x^2 & -2x^1 & 4((x^1)^2 + (x^2)^2) + \epsilon \end{pmatrix}.$$

Per determinare poi i simboli facciamo uso della (3.3), cioè

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})\, g^{lk}}{2}.$$

I simboli di Christoffel sono in tutto $3^3 = 27$; effettuando i calcoli si ottiene

$$\Gamma^1_{21} = \frac{4x^2}{\epsilon}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{8x^1}{\epsilon} \quad \Gamma^1_{32} = -\frac{2}{\epsilon}, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{8x^2}{\epsilon}, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{4x^1}{\epsilon}, \quad \Gamma^2_{31} = \frac{2}{\epsilon},$$

$$\Gamma^3_{21} = -\frac{8((x^1)^2 - (x^2)^2)}{\epsilon}, \quad \Gamma^3_{22} = -\frac{16x^1x^2}{\epsilon}, \quad \Gamma^3_{31} = -\frac{4x^1}{\epsilon}, \quad \Gamma^3_{32} = -\frac{4x^2}{\epsilon}.$$

5.4.3 Le geodetiche

Una curva $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^3(t))$ è una geodetica se e solo se le sue componenti soddisfano l'equazione delle geodetiche (2.8), che in questo caso diventa

$$\begin{cases} \ddot{x}^1(t) = \frac{4}{\epsilon}\dot{x}^2(-2x^2\dot{x}^1 + 2x^1\dot{x}^2 + \dot{x}^3) \\ \ddot{x}^2(t) = -\frac{4}{\epsilon}\dot{x}^1(-2x^2\dot{x}^1 + 2x^1\dot{x}^2 + \dot{x}^3) \\ \ddot{x}^3(t) = \frac{8}{\epsilon}(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2)(-2x^2\dot{x}^1 + 2x^1\dot{x}^2 + \dot{x}^3). \end{cases}$$

Queste equazioni possono essere integrate direttamente:

$$2x^2\ddot{x}^1(t) - 2x^1\ddot{x}^2(t) = \ddot{x}^3(t),$$

quindi

$$-2x^2\dot{x}^1(t) + 2x^1\dot{x}^2(t) + \dot{x}^3(t) = C_0,$$

per una opportuna costante C_0. Sostituendo nelle equazioni delle geodetiche si ottiene allora

$$\begin{cases} \ddot{x}^1(t) = \frac{4C_0}{\epsilon}\dot{x}^2 \\ \ddot{x}^2(t) = -\frac{4C_0}{\epsilon}\dot{x}^1 \\ \ddot{x}^3(t) = \frac{8C_0}{\epsilon}(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2). \end{cases}$$

Posto $C_1 = \frac{4C_0}{\epsilon}$, si ha

$$\begin{cases} \ddot{x}^1(t) = C_1\dot{x}^2 \\ \ddot{x}^2(t) = -C_1\dot{x}^1 \\ \ddot{x}^3(t) = 2C_1(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2), \end{cases}$$

mentre l'espressione che definisce C_0 diviene

$$-2x^2\dot{x}^1(t) + 2x^1\dot{x}^2(t) + \dot{x}^3(t) = \frac{\epsilon C_1}{4}.$$

Dalle prime due equazioni si ottiene l'espressione di x^1 e x^2. Supponendo che il punto iniziale sia $(0, 0, 0)$, si ha quindi

$$x^1(t) = -A\sin(C_1t + C_2)$$

$$x^2(t) = A\cos(C_1t + C_2)$$

Inoltre:

$$\dot{x}^3(t) = \frac{\epsilon C_1}{4} + 2x^2\dot{x}^1(t) - 2x^1\dot{x}^2(t) = \frac{\epsilon C_1}{4} + 2C_1((x^1)^2 + (x^2)^2) = \frac{\epsilon C_1}{4} + 2C_1A^2.$$

$$x^3(t) = (\frac{\epsilon C_1}{4} + 2C_1A^2)t.$$

5.4.4 Una metrica totalmente degenere sul gruppo di Heisenberg

Si osserva che passando al limite per $\epsilon \to 0$ non si ottiene una metrica Riemanniana, anzi la metrica degenera completamente. Precisamente la matrice g_{ij} puo' essere rappresentata nella forma:

$$(g^{ij})= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2y & -2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, se restringiamo la forma quadratica associata a g^{ij} al solo sottospazio generato dai vettori

$$X_1 = \partial_1 + 2x^2\partial_3, X_2 = \partial_2 - 2x^1\partial_3.$$

la metrica non degenera al limite per ϵ che tende a 0, È notevole osservare che le geodetiche che abbiamo determinato non scoppiano per ϵ che tende a 0, ma hanno limite finito. Inoltre è chiaro, che ogni punto del piano può essere connesso all'origine con una curva del tipo:

$$x^1(t) = -A\sin(C_1 t + C_2)$$

$$x^2(t) = A\cos(C_1 t + C_2)$$

$$x^3(t) = 2C_1 A^2 t.$$

Queste curve sono le candidate naturali ad essere considerate le geodetiche nella metrica limite. L'interesse di questo esempio risiede nel fatto che dimostra che la definizione di distanza che abbiamo dato nel caso Riemanniano può essere estesa anche a setting più generali di quello Riemanniano.

Bibliografia

[1] Do Carmo Manfredo P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1988.

[2] Gallot Sylvestre, Hulin Dominique e Lafontaine Jacques, *Riemannian Geometry*, Terza edizione, Springer-Verlag, Berlino 2004.

[3] Henderson David W., *Differential Geometry: A Geometric Introduction*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 1998.

[4] Morgan Frank, *Riemannian Geometry: A Beginner's guide*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA 1993.

[5] Munkres James R., *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991.

[6] Lee John M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York 1997.

[7] Oprea John, *Differential Geometry and Its Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 1997.

[8] Petersen Peter, *Riemannian Geometry*, Seconda edizione, Springer-Verlag, New York 1998.

[9] Troutman John L., *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer-Verlag, New York 1983.