

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# IL DECADIMENTO $\beta$ ALL'INTERNO DELLE STELLE

Relatore:  
Dott. Paolo Finelli

Presentata da:  
Camillo Bussolati

Correlatore:  
Dott. Alberto Mengoni

Anno Accademico 2018/2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Il decadimento <math>\beta</math></b>	<b>5</b>
2.1	Teoria di Fermi . . . . .	6
2.1.1	Densità degli stati finali . . . . .	6
2.1.2	Elemento di matrice di transizione . . . . .	6
2.1.3	Costante di decadimento e vita media . . . . .	8
2.1.4	Vita media ridotta . . . . .	8
<b>3</b>	<b>La nucleosintesi stellare</b>	<b>9</b>
3.1	Produzione degli elementi leggeri . . . . .	9
3.2	Produzione di elementi più pesanti del ferro: i processi R e S . . . . .	12
3.2.1	Il processo R . . . . .	12
3.2.2	Il processo S . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Approccio teorico</b>	<b>15</b>
4.1	Introduzione . . . . .	15
4.2	Modello di equilibrio . . . . .	16
4.2.1	Dati atomici . . . . .	16
4.2.2	Calcolo della depressione del continuo . . . . .	17
4.2.3	Calcolo della funzione di partizione canonica . . . . .	20
4.3	Tassi di transizione all'interno delle stelle . . . . .	20
4.3.1	Aspetti energetici . . . . .	21
4.3.2	Tassi di transizione . . . . .	22
4.4	Esempi numerici e commenti . . . . .	24
4.4.1	Importanza cosmocronologica . . . . .	24
4.4.2	Importanza nel processo S . . . . .	25
4.4.3	Cattura degli elettroni orbitali . . . . .	28

<b>5</b>	<b>Sviluppo del modello numerico</b>	<b>31</b>
5.1	Introduzione . . . . .	31
5.2	Il modello numerico . . . . .	31
5.2.1	Test . . . . .	37
5.3	Risultati . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>41</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Questo lavoro di tesi trae ispirazione dal progetto PANDORA [1] - Plasmas for Astrophysics, Nuclear Decays Observation and Radiation for Archaeometry - che mira alla costruzione di una nuova struttura in grado di confinare plasmi estremamente energetici al fine di svolgere una attività di ricerca interdisciplinare. I campi di interesse sono l'astrofisica nucleare, la fisica dei plasmi e le applicazioni alle scienze dei materiali e all'archeometria. I plasmi diventano l'ambiente per misurare, per la prima volta, i tassi di transizione nucleari in condizioni paragonabili a quelle presenti all'interno delle stelle. Su suggerimento del dott. Alberto Mengoni e del dott. Paolo Finelli, è stato considerato un articolo pubblicato nel 1983 da K. Takahashi e K. Yokoi intitolato *Nuclear  $\beta$ -decays of highly ionized heavy atoms in stellar interiors*, in cui viene presentato un modello teorico per il calcolo delle costanti di decadimento nell'ambiente plasmatico che esiste all'interno delle stelle. Infatti - a differenza delle caratteristiche del decadimento  $\beta$  in ambiente terrestre, dove le proprietà dipendono unicamente dai nuclei - all'interno delle stelle incidono anche temperatura, densità e composizione. L'approccio seguito porta a delle relazioni che legano le proprietà del decadimento a questi parametri fisici. Si procede dapprima trovando le distribuzioni degli stati di ionizzazione nel plasma come soluzioni dell'equazione di Saha e poi le si mettono in relazione con i tassi di decadimento.

Data la natura di questa tesi, il mio lavoro si sofferma dal punto di vista operativo solo sulla prima parte. Ho sviluppato un programma che trova le soluzioni dell'equazione di Saha, una volta assegnati come parametri in ingresso proprio temperatura, densità e composizione. Per dare completezza e continuità al lavoro ho anche approfondito da un punto di vista teorico il ruolo dei decadimenti  $\beta$  in ambito astrofisico. L'argomento è molto attuale sia perché manca ancora una teoria consolidata a riguardo sia per l'importanza fisica del problema, giocando il decadimento  $\beta$  un ruolo chiave nei processi di nucleosintesi stellare.

Essendo io uno studente del triennio ho voluto scrivere una tesi che fosse comprensibile ad uno qualsiasi dei miei compagni di corso e i contenuti sono stati scelti di conseguen-

za. Nel primo e nel secondo capitolo si richiamano le proprietà generali del decadimento  $\beta$  e della nucleosintesi stellare, soffermandosi in particolare modo su quei processi in cui è coinvolto il  $\beta$ . Nel terzo capitolo si spiega l'approccio teorico di K. Takahashi e K. Yokoi e nel quarto sono illustrati il modello numerico ed i risultati ottenuti.

Nella notazione matematica si usa la convenzione di indicare i vettori in grassetto.

## Capitolo 2

### Il decadimento $\beta$

Il decadimento  $\beta$  è una trasformazione spontanea tra nuclei isobari<sup>1</sup>. È un tipo di decadimento radioattivo e, come tale, segue la seguente legge statistica di decadimento:

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t} \quad (2.1)$$

dove  $\lambda$  è detta costante di decadimento, ha le dimensioni  $[T]^{-1}$  e rappresenta l'inverso del tempo di decadimento  $\tau$ :

$$\omega \equiv \lambda = \frac{1}{\tau} \quad (2.2)$$

Sono possibili i seguenti processi:

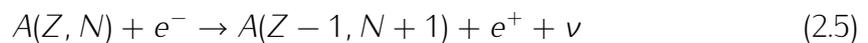
- decadimento  $\beta^-$



- decadimento  $\beta^+$



- cattura elettronica (CE)



dove si indica con  $e^-$  l'elettrone, con  $e^+$  la sua antiparticella (il positrone), con  $\nu$  il neutrino e con  $\bar{\nu}$  l'antineutrino.  $Z$  è il numero atomico, ovvero il numero di protoni,  $N$  è il numero di neutroni e  $A$ , detto numero di massa, rappresenta il numero totale di nucleoni, ovvero  $Z + N$ .

---

<sup>1</sup>In fisica nucleare sono detti isobari i nuclidi con ugual numero di massa  $A$ .

## 2.1 Teoria di Fermi

Nella teoria di Fermi [2, cap. 7 sez. 5] il decadimento  $\beta$  è considerato come il risultato dell'interazione di un nucleone del nucleo con il campo di forze prodotto dalla coppia elettrone-neutrino. La debolezza dell'interazione permette di sfruttare i metodi della teoria perturbativa, per cui la probabilità per unità di tempo che avvenga una transizione è:

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \frac{dN}{dE} \quad (2.6)$$

dove  $H_{if}$  rappresenta l'elemento di matrice di transizione dallo stato iniziale a quello finale e dipende dalle caratteristiche intrinseche delle forze che determinano l'interazione;  $\frac{dN}{dE}$  è detta densità degli stati finali e dipende dall'energia liberata nel decadimento, essendo  $E$  l'energia disponibile per gli elettroni. Per il suo significato  $\omega$  coincide con la costante di decadimento  $\lambda$  che compare in (2.1).

### 2.1.1 Densità degli stati finali

Il numero di stati disponibili per gli elettroni in moto libero in un volume  $\Omega$  con impulso compreso tra  $\mathbf{p}_e$  e  $\mathbf{p}_e + d\mathbf{p}_e$  è dato dalla relazione:

$$dn_e = \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 d\mathbf{p}_e \quad (2.7)$$

Per l'antineutrino si ha una espressione analoga:

$$dn_{\bar{\nu}} = \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p_{\bar{\nu}}^2 d\mathbf{p}_{\bar{\nu}} \quad (2.8)$$

Si ottiene dunque la densità degli stati finali dal prodotto di (2.7) con (2.8):

$$d^2N = dn_e dn_{\bar{\nu}} = \left(\frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3}\right)^2 p_e^2 d\mathbf{p}_e p_{\bar{\nu}}^2 d\mathbf{p}_{\bar{\nu}} \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Elemento di matrice di transizione

L'elemento di matrice di transizione è definito dalla relazione:

$$H_{if} = \int \Psi_f^* H \Psi_i d\tau \quad (2.10)$$

dove  $\Psi_i = u_i$  è l'autofunzione del nucleo iniziale e  $\Psi_f = u_f \Psi_e \Psi_{\bar{\nu}}$  è il prodotto delle autofunzioni delle particelle finali,  $H$  è un operatore (che rappresenta un potenziale) e nella teoria di Fermi vale l'ipotesi di interazione di contatto per cui:

$$H = g \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_{\bar{\nu}} - \mathbf{r}). \quad (2.11)$$

dove  $\delta(\dots)$  è la funzione di Dirac. Se si assume l'ipotesi che, per il raggio di azione nullo di  $H$ , elettrone e antineutrino, sono particelle in moto libero una volta emessi, si possono esprimere le rispettive autofunzioni come:

$$\Psi_e = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^{1/2} e^{i\frac{p_e r}{\hbar}} \quad (2.12)$$

$$\Psi_{\bar{\nu}} = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^{1/2} e^{i\frac{p_{\bar{\nu}} r}{\hbar}} \quad (2.13)$$

$$\Psi_e \Psi_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Omega} e^{i\frac{(p_e + p_{\bar{\nu}})r}{\hbar}} = \frac{1}{\Omega} e^{i\mathbf{k}r} \quad (2.14)$$

con  $\Omega$  volume di normalizzazione arbitrario. Si sviluppa poi l'onda piana in armoniche sferiche ( $\mathbf{k}r \ll 1$ ):

$$e^{i\mathbf{k}r} = e^{i\mathbf{k}r \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (\mathbf{k}r)^l P_l(\cos \theta) \quad (2.15)$$

con  $l$  momento angolare del moto relativo della coppia elettrone-antineutrino rispetto al nucleo; l'elemento di matrice di transizione si esprime ora come:

$$H_{if} = \sum_l H_{if}^l = \frac{g}{\Omega} \sum_l M_{if}^l \quad (2.16)$$

$$M_{if}^l = \int i^l \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (\mathbf{k}r)^l P_l(\cos \theta) u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.17)$$

Il valore di  $|M_{if}^l|^2$  nelle ipotesi fatte decresce rapidamente al crescere di  $l$ , per cui le transizioni con emissione della coppia elettrone-antineutrino con momento angolare  $l = 0$  sono molto più probabili di quelle per cui  $l > 0$ . Le transizioni con  $l = 0$  sono dette favorite, per cui valgono le seguenti relazioni:

$$\Psi_e \Psi_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Omega} \quad (2.18)$$

$$H_{if} = \frac{g}{\Omega} M_{if} \quad (2.19)$$

$$M_{if} = M_{if}^0 = \int u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.20)$$

$M_{if}$  dipende allora unicamente dalle caratteristiche del nucleo iniziale e finale. Per le transizioni favorite lo spettro energetico dei  $\beta$  ha un andamento lineare. Le transizioni per cui  $l > 0$  avvengono tra nuclei con variazione di parità e di spin nucleare; l'elemento di matrice nucleare ha un valore piccolo, perciò sono dette proibite (o svaforite) e lo spettro può assumere diverse forme (maggiori dettagli in [2, cap.7 sez. 5.5]).

### 2.1.3 Costante di decadimento e vita media

La probabilità di transizione per unità di tempo è espressa dalla rel. 2.6 ed è la probabilità che vengano emessi elettroni con impulso qualsiasi. Il valore di  $\omega \equiv \lambda$  si ottiene allora integrando  $\frac{d\omega}{d\mathbf{p}_e}$  nel dominio dell'impulso dell'elettrone, ovvero:

$$\omega(\mathbf{p}_e^{max}) \equiv \lambda = \frac{1}{\tau} = \int_0^{p_e^{max}} \left( \frac{d\omega}{d\mathbf{p}_e} \right) d\mathbf{p}_e = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} f(\mathbf{p}_e^{max}) \quad (2.21)$$

$$f(\mathbf{p}_e^{max}) = \int_0^{p_e^{max}} |\Psi_e(0)|^2 (E_0 - E_e)^2 p_e^2 d\mathbf{p}_e \quad (2.22)$$

dove nell'ultimo passaggio della eq. 2.21 sono stati sostituiti i risultati ottenuti nelle sezioni precedenti. La eq. 2.21 mette in relazione quattro fattori principali:

- $f(\mathbf{p}_e^{max})$ , che dipende essenzialmente dall'energia liberata ed è calcolabile;
- $\tau = \frac{1}{\lambda}$ , che è determinabile sperimentalmente;
- $M_{if}$ , che può essere calcolato almeno in casi specifici;
- la costante d'interazione  $g$ .

### 2.1.4 Vita media ridotta

La vita media dei nuclei dipende dalle caratteristiche intrinseche dell'interazione debole (dalla costante  $g$ ), dalle caratteristiche dei nuclei iniziale e finale ( $|M_{if}|$ ) e dall'energia liberata, rappresentata dalla funz. 2.22. Ponendo poi:

$$f = \frac{f(\mathbf{p}_e^{max})}{m_e^5 c^7} \quad (2.23)$$

si può considerare la seguente grandezza:

$$f\tau = \frac{2\pi^3 \hbar^7 c^3}{g^2 |M_{if}|^2} \quad (2.24)$$

detta vita media ridotta. Per transizioni favorite questa quantità è indipendente dal particolare nucleo considerato e dall'energia liberata. Inoltre, essendo anche  $g$  indipendente dal nucleo,  $f\tau$  ha circa lo stesso valore per tutte le transizioni favorite. Nel caso di transizioni proibite il valore di  $f\tau$  cresce all'aumentare della diversità (parità e momento angolare) fra nucleo iniziale e finale.

# Capitolo 3

## La nucleosintesi stellare

La nucleosintesi stellare è l'insieme di quelle reazioni nucleari che avvengono all'interno di una stella, con l'effetto di produrre i nuclei degli elementi chimici. Nelle stelle vengono prodotte tutte le specie chimiche tranne l'idrogeno, che fa da carburante iniziale. L'elio, benché sintetizzato in quantità, è già ampiamente presente nell'Universo come prodotto del big bang (nel modello cosmologico standard, generalmente adottato) e la massa apportata dalle stelle è contenuta. Per tutti gli altri elementi, compresa la maggioranza degli atomi che compongono il nostro pianeta, assenti o presenti nel gas interstellare, le stelle sono le principali responsabili della loro esistenza. In particolare le stelle di massa elevata producono le maggior parte degli elementi fino al ferro-56, mentre i nuclei più pesanti possono essere creati, per esempio, nell'esplosione di una supernova, che avviene alla fine della vita di una stella massiccia. Il decadimento  $\beta$  gioca un ruolo chiave nella nucleosintesi, specialmente nei processi che portano alla produzione delle specie pesanti.

### 3.1 Produzione degli elementi leggeri

La produzione degli elementi più leggeri del ferro-56 avviene in buona parte per fusione nucleare.

La fusione dell'idrogeno [3, cap. 5] nelle stelle può avvenire attraverso due diversi processi che includono il decadimento  $\beta^+$ : la catena protone-protone (catena p-p) e il ciclo carbonio-azoto-ossigeno (ciclo CNO). La catena p-p è un processo che trasforma i nuclei di idrogeno ( $Z = 1$ , protoni) in nuclei di elio ( $Z = 2$ ); il ciclo CNO parte da quattro protoni e porta alla produzione di una particella  $\alpha$  (cioè un nucleo di elio) con carbonio ( $Z = 6$ ), azoto ( $Z = 7$ ) e ossigeno ( $Z = 8$ ) che giocano il ruolo di catalizzatori.

La fusione dell'elio [3, cap. 7] avviene fondamentalmente in due modalità, in cui non

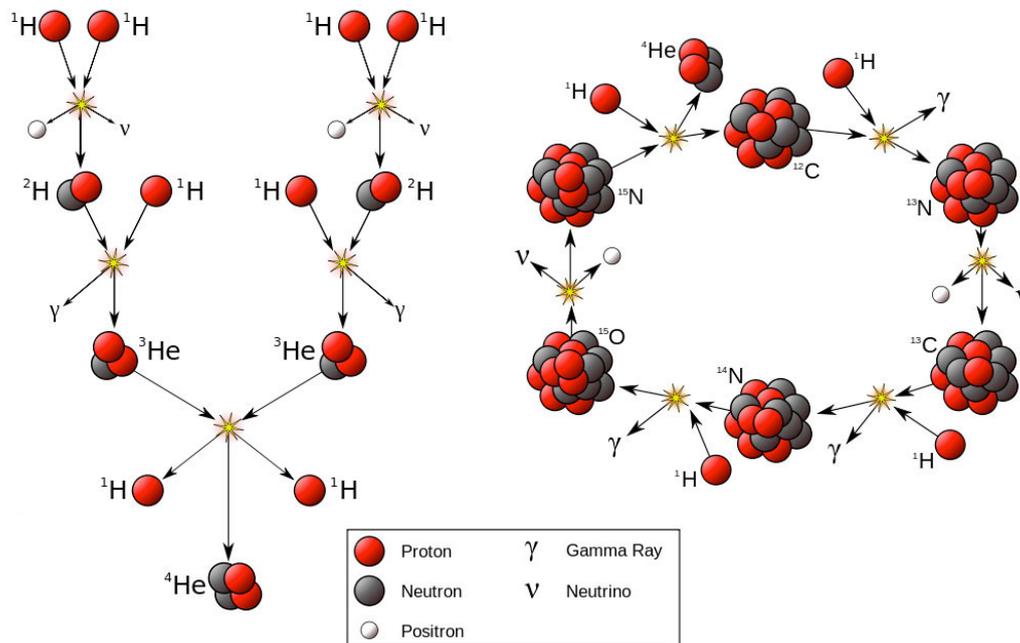


Figura 3.1: Schema della catena p-p (a sinistra) e del ciclo CNO (a destra).

è coinvolto il decadimento  $\beta$ : il processo triplo- $\alpha$  e il processo  $\alpha$ .

Il processo triplo- $\alpha$  è il processo per cui tre nuclei di elio sono alla fine trasformati in carbonio. Dapprima due particelle  $\alpha$  si fondono in un atomo di berillio ( $Z = 4$ ) e questa si fonde poi con un'ulteriore particella  $\alpha$  per creare carbonio ( $Z = 6$ ). Questo processo è possibile solo in abbondanza di elio a temperatura elevata ( $\simeq 10^8 K$ ), condizioni che si verificano a seguito della catena p-p e del ciclo CNO.

Il processo  $\alpha$  avviene solo quando nella stella si è già prodotto del carbonio, a partire dal quale possono essere sintetizzati elementi più pesanti ed ha una frequenza molto bassa, così da non contribuire alla produzione di energia della stella.

Gli elementi successivi che partecipano a reazioni di fusione [3, vedi cap. 8, 9] sono il carbonio, il neon, l'ossigeno e il silicio. Il decadimento  $\beta$  è presente solo nella fusione del silicio.

Il processo di fusione del carbonio avviene nelle stelle massicce (almeno 8 volte la massa solare) quando hanno esaurito tutti gli elementi più leggeri nel loro nucleo. Richiede elevate temperature ( $\simeq 6 \cdot 10^8 K$ ) e densità ( $\simeq 2 \cdot 10^5 g/cm^3$ ). Le reazioni di fusione del carbonio possono produrre magnesio ( $Z = 12$ ), sodio ( $Z = 11$ ), neon ( $Z = 10$ ) o ossigeno ( $Z = 8$ ).

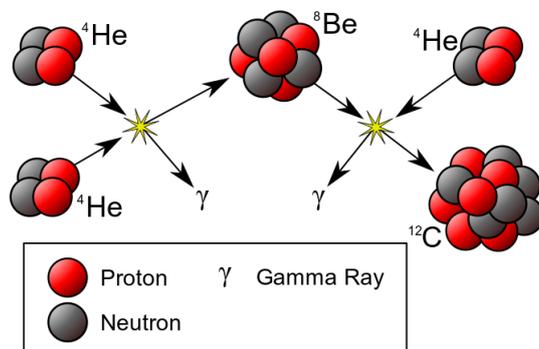


Figura 3.2: Schema del processo triplo- $\alpha$ .

La fusione del Neon avviene dopo che il processo di fusione del carbonio è terminato, richiede alta temperatura e alta densità ( $\simeq 1.2 \cdot 10^9 \text{K}$ ,  $\simeq 4 \cdot 10^6 \text{g/cm}^3$ ). Il neon si fonde con l'elio per creare magnesio.

Il processo di fusione dell'ossigeno comprende una serie di reazioni di fusione nucleare che avviene in una stella massiccia quando questa ha esaurito gli elementi più leggeri. La fusione avviene a temperature di  $\simeq 1.5 \cdot 10^9 \text{K}$  e densità di  $\simeq 10^7 \text{g/cm}^3$ . Le reazioni principali che possono aver luogo portano alla creazione di silicio ( $Z = 14$ ) e fosforo ( $Z = 15$ ).

Il processo di fusione del silicio è una reazione di fusione nucleare che avviene nelle stelle massicce. Richiede temperature di  $\simeq 2.7 \cdot 10^9 \text{K}$  e densità di  $\simeq 3 \cdot 10^7 \text{g/cm}^3$  ed include il decadimento  $\beta^+$ .

Il processo di fusione del silicio è estremamente rapido: una stella mediamente brucia il silicio accumulato nelle fasi precedenti in un solo giorno. Questo è anche l'ultimo passo nella vita di una stella, in quanto il prodotto finale (il ferro-56) è uno degli isotopi a maggiore stabilità nucleare. La fusione non può procedere ulteriormente, se non tramite processi endotermici (quali la cattura di neutroni, vedi processo R e S), che richiedono per avvenire più energia di quanta ne producano.

Il nucleo della stella non può produrre più energia e quindi si raffredda. Allora la contrazione gravitazionale non è più compensata dalla produzione di energia e il collasso della stella è inevitabile. Questo termina con l'esplosione di una supernova e con la formazione di una stella di neutroni (o anche di un buco nero, se la stella è sufficientemente massiccia). La supernova rilascia un'enorme quantità di energia che rende possibile la formazione di nuclei più pesanti del ferro.

## 3.2 Produzione di elementi più pesanti del ferro: i processi R e S

La produzione degli elementi più pesanti del ferro-56 avviene attraverso meccanismi di cattura di neutroni che si differenziano per durata e velocità. Il processo R (R = rapid) ha una scala di durata di qualche secondo, mentre il processo S (S = slow) di migliaia di anni.

### 3.2.1 Il processo R

Il processo R [3, cap. 13] è un processo di nucleosintesi che può verificarsi durante l'esplosione di una supernova ed è responsabile della creazione di circa metà dei nuclei atomici ricchi di neutroni più pesanti del ferro.

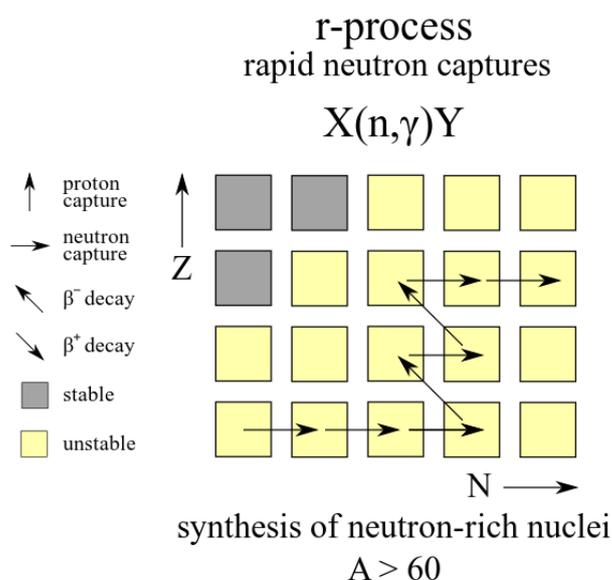


Figura 3.3: Schema del processo R.

Il processo comporta una successione di catture neutroniche rapide mediante nuclei *seed* pesanti, tipicamente ferro-56. Le catture sono rapide nel senso che i nuclei non devono avere il tempo di decadere  $\beta^-$  prima della cattura del neutrone successivo e solo quando diventa fisicamente impossibile legare un altro neutrone avviene il decadimento. Il processo R deve quindi avvenire in un ambiente caratterizzato da un'alta densità di neutroni liberi e questo è il caso delle supernovae in cui avviene il collasso del nucleo. In questa condizione fisica gli elettroni subiscono una forte compressione e così il decadimento  $\beta^-$  si inibisce, in quanto la densità elettronica è così alta da riempire

tutti gli stati disponibili per gli elettroni liberi fino a un'energia di Fermi che supera l'energia necessaria per il decadimento  $\beta^-$ . Parallelamente avviene la cattura di questi elettroni liberi, portando ad una crescente neutronizzazione della materia (il processo in cui protoni ed elettroni si fondono per formare un neutrone con l'emissione di un neutrino). Ne risulta una densità estremamente elevata di neutroni liberi che non possono decadere, dando conseguentemente luogo a un grande flusso neutronico e ad alte temperature. In seguito all'espansione e al raffreddamento del flusso, la cattura neutronica da parte dei nuclei pesanti ancora esistenti avviene molto più velocemente del decadimento  $\beta^-$ . Il risultato del processo R è dunque la creazione di nuclei ricchi di neutroni altamente instabili.

### 3.2.2 Il processo S

Il processo S, o processo di cattura lenta dei neutroni, è un processo di nucleosintesi che avviene nelle stelle in condizioni di bassa densità neutronica (rispetto a quelle disponibili nel caso di supernovae) e di media temperatura. È responsabile della creazione di

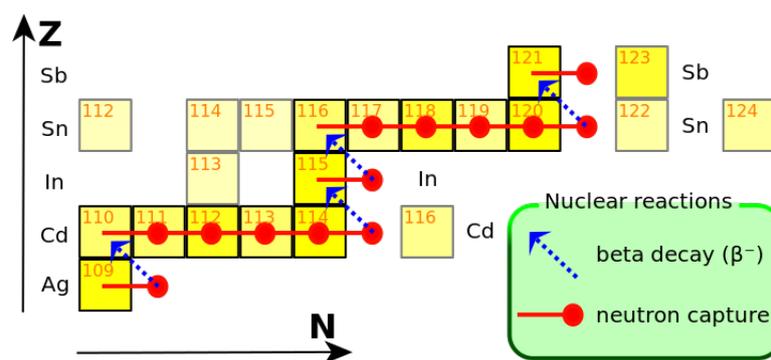


Figura 3.4: Schema del processo S per i nuclei compresi tra argento (Ag, Z=47) e antimonio (Sb, Z=51).

circa metà degli elementi più pesanti del ferro presenti nell'Universo e di conseguenza gioca un ruolo cruciale nella determinazione della composizione chimica delle galassie. Il sito astrofisico di interesse sono le stelle poste nel ramo asintotico delle giganti<sup>1</sup> AGB (asymptotic giant branch). In questo processo un nucleo seed cattura un neutrone formando un isotopo con numero di massa aumentato di una unità. Se l'isotopo così creato è stabile, avvengono altre catture neutroniche con annesso aumento del numero di massa; se invece è instabile, l'isotopo decade  $\beta^-$  e il risultato è la produzione di

<sup>1</sup>Il ramo asintotico delle giganti comprende stelle luminose e fredde, di massa piccola e intermedia (0.6 ÷ 10 masse solari) giunte a uno stadio avanzato della loro evoluzione. La composizione chimica comprende prevalentemente  $^4\text{He}$  dalla fusione dell'idrogeno,  $^{14}\text{N}$  dal ciclo CNO,  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$  dalla fusione dell'elio.

un nucleo del numero atomico successivo. Il processo S è determinato dal tasso di produzione dei neutroni all'interno della stella e dalla disponibilità iniziale di ferro che funge da materiale di partenza del processo di sintesi dei nuovi elementi.

Con l'introduzione della quantità

$$\eta = \int N_n v_T dt \quad (3.1)$$

detta esposizione neutronica (espressa in  $mbarn^{-1}$ ,  $1barn = 10^{-24}cm^2$ ,  $N_n[cm^{-3}]$  è la densità neutronica e  $v_T[cm/s]$  la velocità termica dei neutroni), si classifica il processo S in due componenti distinte:

- componente *weak* ( $\eta \simeq 0.06mbarn^{-1}$ ): produce la maggior parte degli isotopi aventi massa atomica  $A \leq 90$  (dal ferro allo stronzio) ed è ritenuta avvenire nelle AGB massive.
- componente *main* ( $\eta \simeq 0.3mbarn^{-1}$ ): è responsabile della produzione di isotopi aventi massa atomica  $A > 90$  (dallo stronzio al bismuto) ed è ritenuta generarsi nelle stelle AGB di piccola massa.

Poiché il processo S avviene in condizioni di flusso neutronico di bassa intensità ( $10^5 \div 10^{11}neutroni/(cm^2 \cdot s)$ ), esso non può produrre isotopi radioattivi pesanti - ad esempio il torio ( $Z=90$ ) o l'uranio ( $Z=92$ ) - e termina infatti con il bismuto ( $Z=83$ ), l'elemento stabile più pesante.

# Capitolo 4

## Approccio teorico

### 4.1 Introduzione

Come illustrato nel capitolo precedente i decadimenti  $\beta$  giocano un ruolo di prima importanza in molti processi di nucleosintesi, in particolar modo nei processi R ed S. Risulta quindi chiaro che una approfondita conoscenza delle proprietà del decadimento è essenziale nello studio di questi fenomeni. Lo studio condotto nel 1983 da K. Takahashi e K. Yokoi [4] fornisce una stima per i tassi efficaci di decadimento in ambiente astrofisico. Nella discussione dei decadimenti  $\beta$ , si caratterizza l'ambiente stellare attraverso la temperatura  $T$ , la densità  $\rho$  e la composizione  $X_i$ . In questo modello si assume che:

- le presenza di specie nucleari pesanti è da considerarsi trascurabile in una materia composta prevalentemente da elementi leggeri (H, He);
- la temperatura  $T$  è sufficientemente alta da poter considerare gli elementi leggeri completamente ionizzati;
- gli elettroni sono in condizioni di bassa degenerazione e la presenza di positroni può essere trascurata;
- è assunta la condizione LTE (local thermodynamic equilibrium)<sup>1</sup>.

A seguito delle precedenti ipotesi, la neutralità complessiva del sistema considerato (che è un plasma) permette di mettere in relazione la densità e la composizione con la densità di elettroni  $n_e$ :

$$n_e \simeq \rho \cdot \sum_l \frac{(X_l Z_l) / A_l}{m_u} \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>In condizioni LTE ogni elemento di volume infinitesimo in posizione  $r$  risulta essere in equilibrio termodinamico alla temperatura  $T(r)$ .

dove  $Z_l$ ,  $A_l$  e  $X_l$  sono rispettivamente il numero atomico, il numero di massa e la frazione di massa dell'elemento leggero  $l$  completamente ionizzato;  $m_u$  è l'unità di massa atomica. Per la presenza di questa relazione è conveniente scegliere  $T$  e  $n_e$  come parametri indipendenti. In questo studio si calcolano i tassi di decadimento  $\beta$  per nuclei pesanti per valori  $5 \cdot 10^7 K \leq T \leq 5 \cdot 10^8 K$  e  $10^{26} cm^{-3} \leq n_e \leq 3 \cdot 10^{27} cm^{-3}$ . I risultati sono applicabili alle condizioni che si trovano nei processi S e nelle prime fasi di evoluzione stellare.

## 4.2 Modello di equilibrio

Il primo passo da compiere è il calcolo delle popolazioni dei diversi stati ionizzati per il generico elemento  $i$ . Sotto l'ipotesi LTE e in condizioni di non degenerazione e basse velocità ( $v \ll c$ ), queste si ottengono come soluzioni dell'equazione di Saha:

$$\frac{n_{ij+1}}{n_{ij}} = \frac{b_{ij+1}}{b_{ij}} \left( \frac{M_{ij+1}}{M_{ij}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{-\chi_{ij}}{kT} - \eta \right) \quad (4.2)$$

dove si indica con  $n_{ij}$  la densità numerica (in  $cm^{-3}$ ) dell'elemento  $i$  nel suo  $j$ -esimo stato ionizzato, con  $b_{ij}$  la funzione di partizione canonica, con  $M_{ij}$  la massa, con  $\chi_{ij}$  il potenziale di ionizzazione, con  $k$  la costante di Boltzmann e con  $T$  la temperatura, mentre  $\eta$  - il parametro di degenerazione degli elettroni - è legato alla densità numerica di elettroni liberi  $n_e$  dalla relazione:

$$n_e = \frac{F(\eta, \beta)}{\pi^2 \lambda^3} \quad (4.3)$$

in cui  $\lambda = \frac{h}{m_e c}$  e  $\beta = \frac{m_e c^2}{kT}$ .  $F(\eta, \beta)$  è l'integrale relativistico di Fermi-Dirac:

$$\int_1^\infty W(W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} f_{FD}(\eta, \beta) dW \quad (4.4)$$

con

$$f_{FD}(\eta, \beta) = [1 + \exp(\beta(W - 1) - \eta)]^{-1} \quad (4.5)$$

Le popolazioni  $n_{ij}$  possono ora essere calcolate risolvendo iterativamente le equazioni 4.2-4.5, una volta assegnati  $T$ ,  $\rho$  e  $X_i$ , se si conoscono tutte le  $b_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  e  $M_{ij}$ . In termini pratici la conoscenza delle masse non è necessaria, in quanto si approssima  $M_{ij} \simeq M_{i0}$ , ottenendo così  $\left( \frac{M_{ij+1}}{M_{ij}} \right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1$ .

### 4.2.1 Dati atomici

La distribuzione del potenziale all'interno e in prossimità di uno ione è determinata non solo dagli elettroni legati allo ione, ma anche da alcuni *perturbers*, ovvero gli elettroni

liberi circostanti e gli altri ioni. L'effetto netto dell'interazione elettrostatica con questi perturbatori sullo stato interno di uno ione può essere descritta come una depressione del continuo[5]: il potenziale di ionizzazione efficace  $\chi_{ij}$  è stimato essere minore di quello calcolato in laboratorio  $I_{ij}$  di una certa quantità  $\Delta_{ij}$ , così da avere:

$$\chi_{ij} = I_{ij} - \Delta_{ij} \quad (4.6)$$

Dato che i dati sperimentali per il potenziale non corretto  $I_{ij}$  sono scarsi, il suo valore è calcolato con il metodo autoconsistente di Liberman [6].

Il modo di calcolare  $\Delta_{ij}$  è soggetto a controversie [5] e in questo studio si assume un modello di Thomas-Fermi<sup>2</sup> studiato da Stewart e Pyatt [7], in cui  $\Delta_{ij} = \Delta_j$  è funzione della sola carica ionica  $j$ , una volta che  $T$ ,  $\rho$  e  $X_i$  sono assegnate.

La funzione di partizione canonica è definita da:

$$b_{ij} = \sum_k b_{ijk} \exp\left(-\frac{e_{ijk}^*}{kT}\right) \quad (4.7)$$

dove  $b_{ijk}$  e  $e_{ijk}^*$  sono rispettivamente il peso statistico e l'energia di eccitazione del  $k$ -esimo stato eccitato del  $j$ -esimo stato ionizzato dell'elemento  $i$ .

L'influenza del potenziale dato dai perturbatori sull'energia della singola particella è quasi indipendente dall'orbita dell'elettrone se la densità non è così alta. Dunque si considerano i valori di laboratorio per  $e_{ijk}^*$ .

Nella sommatoria 4.7 si applica il convenzionale metodo di cut-off: il contributo di quei livelli la cui energia di eccitazione supera il potenziale di ionizzazione corretto  $\chi_{ij}$  è trascurato.

Per il calcolo dei pesi statistici  $b_{ij}$  i dati sperimentali sono scarsi e i valori teorici possono essere derivati dalle eigen-energies della singola particella [6]. Dato che la procedura è complessa e consuma troppo tempo computazionale si utilizza un modello *hydrogen-like* con cariche efficaci.

## 4.2.2 Calcolo della depressione del continuo

Nel modello di Stewart e Pyatt [7] il primo passo è considerare un nucleo con carica  $Z$  e fisso in un mare di elettroni (legati+liberi) e ioni circostanti e puntiformi. La distribuzione del potenziale  $\Phi(r)$ , assunta con simmetria sferica, segue allora l'equazione di Poisson:

$$r^{-1} \frac{d^2(r\Phi)}{dr^2} = -4\pi e \left[ \sum_{ij} j n_{ij}(r) - n_e(r) \right] \quad (4.8)$$

---

<sup>2</sup>Il modello di Thomas-Fermi, sviluppato da Llewellyn Thomas e da Enrico Fermi nel 1927 descrive gli elettroni attorno al nucleo come un sistema di fermioni che interagiscono secondo il potenziale  $U(r)$  contenente l'approssimazione di campo medio.

dove le densità numeriche locali  $n_{ij}(r)$  e  $n_e(r)$  degli ioni e degli elettroni non relativistici e non degeneri sono date da:

$$n_{ij}(r) = n_{ij}(\infty) \exp\left(\frac{-je\Phi}{kT}\right) \quad (4.9)$$

$$n_e(r) = n_e(\infty) F\left(\frac{e\Phi}{kT} + \eta, \beta\right) / F(\eta, \beta) \quad (4.10)$$

con le densità numeriche asintotiche  $n_{ij}(r)$  e  $n_e(r)$  che soddisfano la neutralità di carica  $\sum_{ij} j n_{ij}(\infty) = n_e(\infty)$ . Le condizioni al contorno per la eq. 4.8 sono

$$\Phi(\infty) = 0, \quad \Phi(r) \rightarrow \frac{Ze}{r} \quad \text{se } r \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

In termini di quantità adimensionali:

$$y = \frac{e\Phi}{kT}, \quad x = \frac{r}{D}, \quad D^{-2} = \frac{4\pi e^2}{kT} \sum_{ij} (j^2 + j) n_{ij}(\infty) \quad (4.12)$$

la eq. 4.8 si legge come:

$$x^{-1} \frac{d^2(xy)}{dx^2} = \left[ \frac{F(y + \eta, \beta)}{F(\eta, \beta)} - \langle \exp(-jy) \rangle \right] \frac{1}{(1 + \langle j \rangle)} \quad (4.13)$$

con la definizione di:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{ij} X j n_{ij}(\infty)}{\sum_{ij} j n_{ij}(\infty)} \quad (4.14)$$

Il secondo passo è estrarre gli effetti dati dai perturbbers. Il potenziale  $\Phi_p$  associato agli elettroni liberi e agli ioni circostanti è descritto da:

$$x^{-1} \frac{d^2(xv)}{dx^2} = S(x) \quad (4.15)$$

in termini di:

$$v = \frac{e\Phi_p}{kT}, \quad S(x) = \left[ \frac{G(y + \eta, \beta, y)}{F(\eta, \beta)} - \langle \exp(-jy) \rangle \right] \frac{1}{(1 + \langle j \rangle)} \quad (4.16)$$

dove:

$$G(y + \eta, \beta, y) = \int_{1+\frac{y}{\beta}}^{\infty} W(W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} [1 + \exp(\beta(W - 1) - \eta - y)]^{-1} dW \quad (4.17)$$

Gli elettroni liberi sono qui definiti come quelli la cui energia cinetica eccede  $e\Phi$ . Si fissa lo zero del potenziale in modo che  $v(\infty) = 0$  e si ottiene:

$$v(x) = -x^{-1} \int_0^\infty S(Z)z^2 dz + x^{-1} \int_x^\infty S(z)z^2 dz - \int_x^\infty S(z)z dz \quad (4.18)$$

Notando poi che per  $x \gg 1$ ,  $y(x) - v(x)$  tende asintoticamente a una forma coulombiana che dipende solo dalla carica ionica  $j$  e che  $y(x)$  decresce esponenzialmente, si può ottenere la carica ionica netta a seguito della ionizzazione dalla relazione:

$$\frac{(j+1)e^2}{DkT} = \int_0^\infty S(z)z^2 dz \quad (4.19)$$

Come ci si aspettava il potenziale di perturbazione dipende fortemente dalle densità, tuttavia per valori non estremamente alti ( $\leq 10^4 g/cm^3$ ), la sua dipendenza radiale è debole fino a grandi distanze. A causa di questa costanza locale, la decrescita del potenziale di ionizzazione può essere ben approssimata da  $-v(0)kT$ . Ovvero  $\Delta_{ij}$  può essere sostituito con:

$$\Delta_j \equiv -v(0)kT = kT \int_0^\infty S(z)z dz \quad (4.20)$$

Si considera inoltre la condizione in cui le specie nucleari pesanti sono immerse in piccola quantità in una materia di specie leggere (H, He) ad alte temperature  $10^6 K \div 10^9 K$  e densità  $10^{-4} g/cm^3 \div 10^4 g/cm^3$  (tipica di varie fasi di evoluzione stellare e del processo S). In queste circostanze l'idrogeno e l'elio sono quasi completamente ionizzati e le soluzioni iterative delle equazioni di Saha e Thomas-Fermi convergono molto velocemente. Questa situazione ci permette di esprimere la depressione del continuo  $\Delta_j$  come una funzione della temperatura  $T$ , della densità numerica di elettroni liberi  $n_e$  e dalla carica ionica netta  $j$ . I risultati numerici possono essere approssimati come:

$$\log \Delta_j (keV) = [d_1 \log T_7 + d_2] \log(j+1) + [d_3 (\log T_7)^2 + d_4 \log T_7 + d_5] \quad (4.21)$$

dove  $T_7$  è la temperatura espressa in  $10^7 K$  e:

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.00135(\log N)^2 - 0.0002(\log N) + 0.01 \\ d_2 &= -0.00297(\log N)^2 + 0.00563(\log N) + 0.99 \\ d_3 &= -0.000518(\log N)^2 - 0.0058(\log N) + 0.001 \\ d_4 &= 0.00358(\log N)^2 + 0.000297(\log N) - 0.5 \\ d_5 &= -0.00445(\log N)^2 + 0.5171(\log N) - 4.658 \end{aligned}$$

con  $N = n_e$ , in  $\left[ \frac{cm^{-3}}{5.2 \cdot 10^{18}} \right]$ . Questa approssimazione conduce a degli errori dell'ordine del 10% in  $\Delta_{ij}$ .

È necessario sottolineare che la procedura seguita si applica solo alle condizioni assunte in questo studio e non ad altre, come quella di alta densità e bassa temperatura in cui le assunzioni considerate porterebbero a soluzioni dell'equazione di Saha decisamente diverse.

### 4.2.3 Calcolo della funzione di partizione canonica

Il problema del calcolo della funzione di partizione canonica si traduce nella stima dei pesi statistici e delle energie di eccitazione dei diversi stati ionici. La prima semplificazione è quella di considerare gli elettroni come singole particelle che riempiono le orbite in base ai numeri quantici principale e orbitale ( $n$  e  $l$ ). Questa ipotesi è ragionevole quando il grado di ionizzazione è alto [8]. Il livello fondamentale viene caratterizzato dai numeri quantici  $n_0$  e  $l_0$  dell'ultimo elettrone e dal numero di elettroni nell'orbita  $N(n_0 l_0)$ . Il numero totale di elettroni nella shell  $n_0$  è dato da  $N(n_0) = 2l_0^2 + N(n_0 l_0)$ . Se  $N(n_0) \neq 2n_0^2$  e  $n_0 \neq 1$  gli elettroni nella shell possono occupare stati eccitati, che vengono trattati trascurando eventuali differenze energetiche tra le subshells. Secondo questo semplice modello, i pesi statistici  $b_{ijk}$  sono dati da:

$$b_{ijk} = C[2(2l_0 + 1), N(n_0 l_0)] \quad k = 0 \quad (4.22)$$

$$b_{ijk} = C[2n_0^2, N(n_0)] - b_{ij0} \quad k = 1 \quad (4.23)$$

$$b_{ijk} = 2(n_0 + k - 1)^2 C[2n_0^2, N(n_0^2), N(n_0) - 1] \quad k \geq 2 \quad (4.24)$$

dove  $C[s, t] = \frac{s!}{[t!(s-t)!]}$ .

L'energia di eccitazione dei livelli è approssimata da:

$$e_{ijk}^* = I_{ij} - Ry \frac{(j+1)^2}{(n_0 + k - 1)^2} \quad (4.25)$$

per  $k \geq 1$  se  $b_{ij1} \neq 0$  e per  $k \geq 2$  se  $b_{ij1} = 0$ , dove  $I_{ij}$  è il potenziale di ionizzazione e  $Ry$  rappresenta l'unità di energia di Rydberg. Questo risultato è stato ottenuto applicando la classica formula hydrogen-like agli ultimi elettroni, che sono nella shell  $n = n_0 + k - 1$  e che sentono la carica netta  $(j+1)e$ . Questo modello, combinato con il metodo di cut-off è abbastanza grossolano per il calcolo della funzione di partizione canonica individuale. Tuttavia, e fortunatamente, la soluzione dell'equazione di Saha richiede la conoscenza dei rapporti fra le funzioni di partizione canonica e, in questo modo, la precisione del modello è sufficiente.

## 4.3 Tassi di transizione all'interno delle stelle

Si considera il dominio di temperature  $10^6 K \div 10^9 K$  e di densità  $10^{-4} g/cm^3 \div 10^4 g/cm^3$  e si discutono i seguenti decadimenti  $\beta$  per nuclei pesanti nella materia in equilibrio (come trattato nella sezione precedente):

- decadimento  $\beta^-$  stato continuo

$$(Z, N, j, Kk)_I \rightarrow (Z + 1, N - 1, j + 1; K'k')_F + \bar{\nu} \quad (4.26)$$

- decadimento  $\beta^-$  stato legato

$$(Z, N, j, Kk)_I \rightarrow (Z + 1, N - 1, j; K'k')_F + e^- + \bar{\nu} \quad (4.27)$$

- cattura di un  $e^-$  orbitale

$$(Z, N, j, Kk)_I \rightarrow (Z - 1, N + 1, j; K'k')_F + \nu \quad (4.28)$$

- decadimento  $\beta^+$  stato continuo

$$(Z, N, j, Kk)_I \rightarrow (Z - 1, N + 1, j - 1; K'k')_F + e^+ + \nu \quad (4.29)$$

- cattura di un  $e^-$  libero

$$(Z, N, j, Kk)_I + e^- \rightarrow (Z - 1, N + 1, j - 1; K'k')_F + e^+ + \nu \quad (4.30)$$

$(Z, N, j, Kk)$  rappresenta lo stato iniziale I o finale F, caratterizzato dal numero atomico  $Z$ , dal numero di neutroni  $N$  e dal grado di ionizzazione  $j$ , mentre le variabili  $K$  e  $k$  rappresentano lo stato nucleare e atomico, rispettivamente. Nelle condizioni fisiche stellari di interesse i neutrini (e gli antineutrini), assunti privi di massa, possono scappare liberamente senza essere intrappolati.

### 4.3.1 Aspetti energetici

I Q-values<sup>3</sup> dei decadimenti 4.26-4.30 senza considerare la depressione del continuo sono dati da:

$$Q_0 = q_0 \quad (4.26 - 4.28) \quad (4.31)$$

$$Q_0 = q_0 - 2m_e c^2 \quad (4.29) \quad (4.32)$$

$$Q_0 = q_0 + K_e \quad (4.30) \quad (4.33)$$

con:

$$q_0 = [M_{I0} - M_{F0}]c^2 + [E_{IK}^* - E_{FK'}^*] + [B_{I0} - B_{F0}] - [B_{Ij} - B_{jF}] + [e_{ijk}^* - e_{jFk'}^*] \quad (4.34)$$

<sup>3</sup>Il Q-value è definito come l'energia liberata in un decadimento, ovvero la differenza di massa tra parente e figlio.

dove  $M_{i_0}$  ( $i = I, F$ ) sono le masse a riposo dei rispettivi atomi neutri,  $E_{iK}^*$  l'energia di eccitazione nucleare,  $B_{ij}$  l'energia di legame totale degli elettroni legati nel  $j$ -esimo stato ionizzato dell'atomo,  $e_{ijk}^*$  è l'energia di eccitazione ionica e  $K_e$  è l'energia cinetica di un elettrone libero da catturare.

Ora si consideri la depressione del continuo e i risultati ottenuti nella sezione 4.2.1. I corrispondenti  $Q$ -values con l'effetto della depressione del continuo - inclusa come una perturbazione - possono essere approssimati da:

$$Q \simeq Q_0 + \sum_{j_I}^{Z_I-1} \Delta_j - \sum_{j_F}^{Z_F-1} \Delta_j \quad (4.35)$$

in termini di  $\Delta_j$ , così come definita in eq. 4.20. Dato che  $\Delta_j$  è positivo e cresce con  $j$ , la depressione del continuo porta a una diminuzione dei  $Q$ -values per le transizioni  $Z \rightarrow Z + 1$  e ad un incremento per quelle  $Z \rightarrow Z - 1$ .

### 4.3.2 Tassi di transizione

#### Relazione con le costanti di decadimento terrestri

In quanto segue tratteremo solo le transizioni favorite ( $l=0$ ) e le prime proibite ( $l=1$ ) (vedi sez 2), che predominano nella determinazione della costante di decadimento complessiva per la maggior parte dei nuclei pesanti. Classificando le transizioni come favorite (f), proibite non-uniche (pnu) e proibite uniche (pu)<sup>4</sup>, si possono approssimare le costanti di decadimento per le reazioni 4.26-4.30 come:

$$\lambda_{IF}^{(m)} = \left[ \frac{\ln 2}{f_0 \tau} \right] f_{IF(m)}^* \quad m = f, pnu \quad (4.36)$$

$$\lambda_{IF}^{(m)} = \left[ \frac{\ln 2}{f_1 \tau} \right] f_{IF(m)}^* \quad m = pu \quad (4.37)$$

dove i valori  $f_0 \tau$ ,  $f_1 \tau$  sono le vite medie ridotte ( $f \tau$ ) [9] delle corrispondenti reazioni terrestri, mentre la funzione  $f_{IF(m)}^*$  rappresenta il volume di fase leptonic in condizioni stellari (vedi prossima sottosezione).

#### Volume di fase leptonic all'interno delle stelle

Di seguito vengono date le funzioni di volume di fase leptonic  $f_{IF(m)}^*$  per le reazioni 4.26-4.30 in condizioni stellari.

<sup>4</sup>Le transizioni  $\beta$  possono essere descritte tramite la matrice nucleare introdotta nel cap. 2. Alla matrice - come spesso si fa in fisica - si associa un operatore. Quelle transizioni che sono descritte da un solo operatore sono dette uniche, se invece ne sono necessari di più sono dette non-uniche.

Nel caso del decadimento  $\beta\pm$  stato continuo si ha:

$$f_{IF(m)}^* = \int_1^{W_{max}} (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} W q^2 F_0 S_{(m)} f_d dW \quad (4.38)$$

dove  $W_{max} = \frac{Q}{m_e c^2} + 1$ ,  $q = W_{max} - W$ ,  $F_0$  è la funzione di Fermi [10], la funzione  $f_d$  include il principio di esclusione di Pauli e vale  $1 - f_{FD}(\eta, \beta) = f_{FD}(-\eta, -\beta)$  per i decadimenti  $\beta-$  e  $1 - f_{FD}(-\eta - 2\beta, \beta) = f_{FD}(\eta + 2\beta, -\beta)$  per i decadimenti  $\beta+$  ed infine  $S_{(m)}$  sono i fattori di forma spettrale e valgono:

$$S_{(m)} = L_0 \quad m = f, pnu \quad (4.39)$$

$$S_{(m)} = q^2 L_0 + 9L_1 \quad m = pu \quad (4.40)$$

dove  $L_0$  e  $L_1$  sono certe combinazioni [10][11] della funzione d'onda radiale dell'elettrone (o positrone) valutate ad un appropriato raggio nucleare  $R$ .

In maniera simile, per la cattura dell'elettrone libero si ottiene:

$$f_{IF(m)}^* = \int_{W_{min}}^{\infty} (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} W \left( \frac{Q}{m_e c^2} \right)^2 F_0 S_{(m)} f_C dW \quad (4.41)$$

dove  $W_{min} = 1$  se il Q-value è positivo per elettroni con  $K_e = 0$  e  $W_{min} = 1 + \left[ \frac{Q(K_e=0)}{m_e c^2} \right]$  altrimenti, mentre  $f_C = f_{FD}(\eta, \beta)$ .

Per il decadimento  $\beta-$  stato legato e per la cattura dell'elettrone orbitale si ha:

$$f_{IF(m)}^* = \sum_x \sigma_x \left( \frac{\pi}{2} \right) [g_x o f_x]^2 q^2 S_{(m)x} \quad (4.42)$$

dove  $\sigma_x$  rappresenta lo spazio vuoto (per i decadimenti  $\beta-$  stato legato) o lo spazio occupato (per le catture  $e^-$  orbitale) dell'orbita  $x$  dell'elettrone ed assume valori tra 0 ed 1,  $[g_x o f_x]$  è la componente maggiore della funzione d'onda radiale dell'elettrone valutata ad  $R$ ,  $q = \frac{Q}{m_e c^2}$  e i fattori di forma spettrale  $S_{(m)x}$  sono dati all'ordine più basso da:

$$S_{(m)x} = 1 \quad m = f, pnu \quad x = ns_{\frac{1}{2}}, np_{\frac{1}{2}} \quad (4.43)$$

$$S_{(m)x} = q^2 \quad m = pu \quad x = ns_{\frac{1}{2}}, np_{\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

$$S_{(m)x} = \frac{9}{R^2} \quad m = pu \quad x = np_{\frac{3}{2}}, nd_{\frac{3}{2}} \quad (4.45)$$

$$S_{(m)x} = 0 \quad altrimenti \quad (4.46)$$

La valutazione della funzione d'onda elettronica all'interno delle stelle è complessa a causa degli effetti di schermatura dovuti agli elettroni legati e ai perturbatori, in quanto l'elettrone che decade sente diversi campi. Le funzioni d'onda sono così ottenute interpolando tra lo stato di atomo neutro [12] e lo stato di nucleo nudo [13].

## Costanti di decadimento totali

Il K-esimo stato eccitato del nucleo del tipo  $i$  decade con la costante efficace:

$$\lambda_{i(K)} = \frac{\sum_j n_{ij} \lambda_{i(K)j}}{\sum_j n_{ij}} \quad (4.47)$$

con

$$\lambda_{i(K)j} = \frac{\sum_{K'kk'} b_{ijk} \exp\left(\frac{-e_{ijk}^*}{kT}\right) \lambda_{IF}^{(m)}}{\sum_k b_{ijk} \exp\left(\frac{-e_{ijk}^*}{kT}\right)} \quad (4.48)$$

dove  $m$  rappresenta le transizioni di tipo  $f$ ,  $pnu$ ,  $su$ .

Se gli stati di eccitazione nucleare sono in equilibrio termico, la costante di decadimento totale del nucleo  $i$  è data da:

$$\lambda_i = \frac{\sum_K G_{iK} \exp\left(\frac{-E_{iK}^*}{kT} \lambda_{i(K)}\right)}{\sum_K G_{iK} \exp\left(\frac{-E_{iK}^*}{kT}\right)} \quad (4.49)$$

dove  $G_{iK}$  è il peso di spin del K-esimo livello nucleare.

Questa formula è applicabile alla maggior parte dei casi, eccetto eventualmente per nuclei pesanti caratterizzati da vita lunga degli stati isomerici. In questi casi infatti la scala di tempo di equilibrio è paragonabile o maggiore di quella delle reazioni nucleari e/o del cambio delle condizioni astrofisiche.

## 4.4 Esempi numerici e commenti

### 4.4.1 Importanza cosmocronologica

Si considera il renio-187 ( $Z=75$ ). Di questo nucleo è nota la transizione  $\beta^-$  unica prima proibita ( $l=1$ ) al livello fondamentale dell'osmio-187 ( $Z=76$ ).



Per via del lungo tempo di dimezzamento  $\tau_{1/2} = (4.28 \pm 0.08) \cdot 10^{10}y$  [14] la coppia  ${}^{187}\text{Re} - {}^{187}\text{Os}$  è considerata uno dei più affidabili orologi cosmologici. È spesso stata discussa la possibilità che il tasso di transizione di questo decadimento aumentasse all'interno delle stelle. Uno studio di Perrone [15, vedi] aveva portato alla conclusione che un eventuale incremento non avrebbe influenzato l'orologio. Tuttavia questa affermazione è piuttosto discutibile, in quanto la possibilità di una transizione non unica prima proibita dallo stato fondamentale del  ${}^{187}\text{Re}$  al primo stato eccitato dell' ${}^{187}\text{Os}$  non è stata tenuta in considerazione. A causa di ciò, le costanti di decadimento stellari presentate

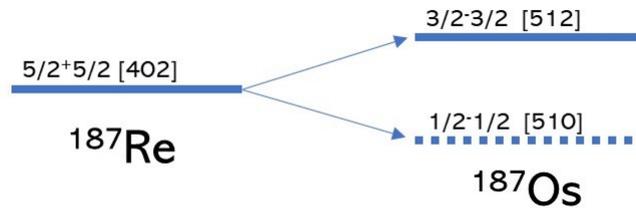


Figura 4.1: Livelli nucleari più importanti nella reazione  $^{187}\text{Re} - ^{187}\text{Os}$ . Le energie di eccitazione sono in  $keV$ .

da Perrone sottostimano drasticamente quelle effettive. Nel seguito della discussione si considereranno solo i livelli nucleari riportati in Figura 4.1. L'inclusione degli altri livelli ha un effetto trascurabile nell'ambiente fisico che si trova all'interno delle stelle appartenenti alla sequenza principale<sup>5</sup> o nei processi S ( $T \simeq 3 \cdot 10^8 K$ ). I  $Q_0$ -values (i  $Q$ -values in assenza della depressione del continuo) per il decadimento  $\beta^-$  stato legato sono rappresentati in Figura 4.2 come una funzione del numero di elettroni legati al  $^{187}\text{Re}$ .

I  $Q$ -values efficaci possono essere ottenuti come  $Q = Q_0 - \Delta_{75}$ , con  $\Delta_{75}$  dato dall'eq. 4.21. La transizione del renio-187 al primo stato eccitato dell'osmio-187 è possibile quando il grado di ionizzazione è alto e  $\Delta_{75}$  è piccolo. In questo caso il contributo della transizione non unica prima proibita  $^{187}\text{Re} - ^{187}\text{Os}$  è di grande rilevanza nel calcolo della costante di decadimento complessiva del  $^{187}\text{Re}$ , essendo le transizioni non uniche molto più veloci di quelle uniche.

Le componenti principali delle funzioni d'onda radiale per gli elettroni dell' $^{187}\text{Os}$  sono valutate ad un raggio efficace  $R = 1.2 \cdot A^{1/3} fm$  e sono rappresentate in figura 4.3.

Le costanti per il decadimento  $\beta^-$  stato legato del  $^{187}\text{Re}$  sono rappresentate in figura 4.4. Le drastiche deviazioni dei tassi totali rispetto a quelli parziali delle transizioni uniche allo stato fondamentale dell'osmio-187 indicano chiaramente l'importanza della transizione non unica al primo stato eccitato ( $9.75keV$ ) all'interno delle stelle.

#### 4.4.2 Importanza nel processo S

Si considera il caso del disprosio-163 ( $Z=66$ )  $^{163}\text{Dy}$ . Il tasso di decadimento stellare di questo elemento (stabile in ambiente terrestre) è stato studiato nel tentativo di spiegare le abbondanze di erbio-164 ( $Z=68$ )  $^{164}\text{Er}$  nel Sole.

Il primo step per la produzione di  $^{164}\text{Er}$  durante il processo S è il decadimento  $\beta^-$  degli

<sup>5</sup>La fase della sequenza principale è lo stadio evolutivo delle stelle nel quale l'energia prodotta dalla fusione dell'idrogeno nel nucleo è la sola sorgente di energia.

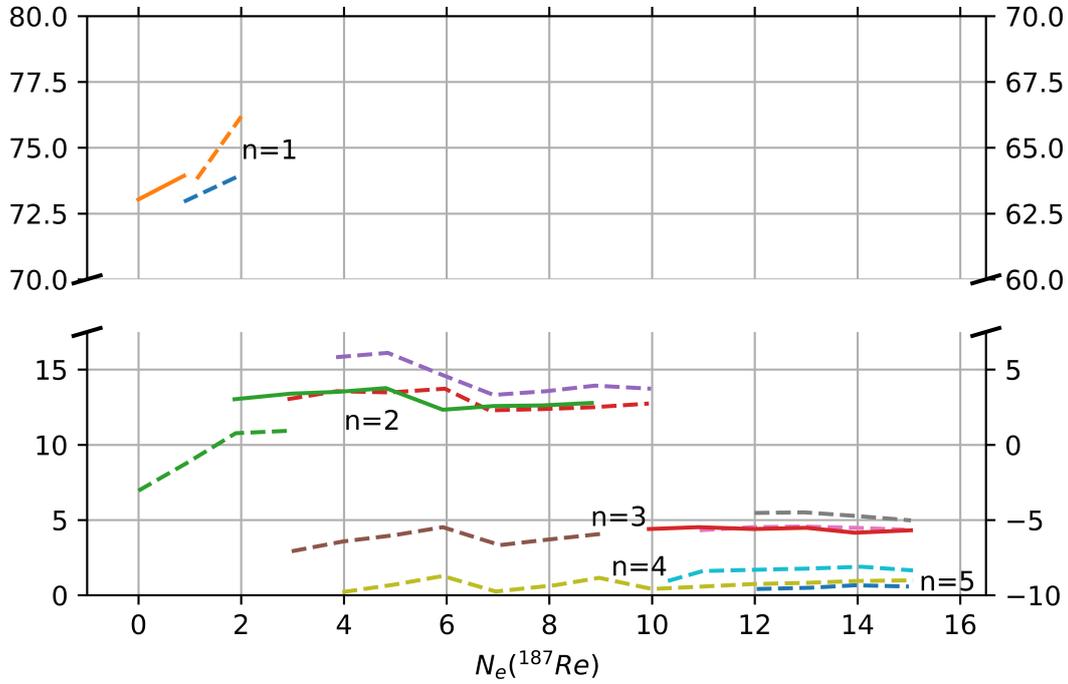


Figura 4.2: Q-values (in  $keV$ ) per la transizione  $^{187}\text{Re} - ^{187}\text{Os}$  in assenza di depressione del continuo.  $N_e(^{187}\text{Re})$  è il numero di elettroni legati a  $^{187}\text{Re}$  e  $n$  è il numero quantico principale dell'elettrone che sarà creato. La scala di sinistra (destra) si riferisce alla transizione unica (non unica) prima proibita al livello fondamentale (primo stato eccitato  $9.75keV$ ) dell' $^{187}\text{Os}$ . Le linee piene rappresentano le transizioni livello fondamentale - livello fondamentale, quelle tratteggiate le transizioni che includono stati eccitati iniziali o finali.

stati eccitati del  $^{163}\text{Dy}$  (in particolare uno a  $73.4keV$ ):



seguito dalle reazioni:



Si hanno condizioni favorevoli per il processo S durante la fase di pulsazione di una stella di media massa (e.g. il Sole). Al contrario questa situazione non è favorevole per le reazioni 4.52-4.53; infatti, l'assenza di neutroni durante il periodo di interpulsazione porterebbe l' $^{163}\text{Ho}$  a catturare un elettrone (libero o orbitale), tornando così allo stato

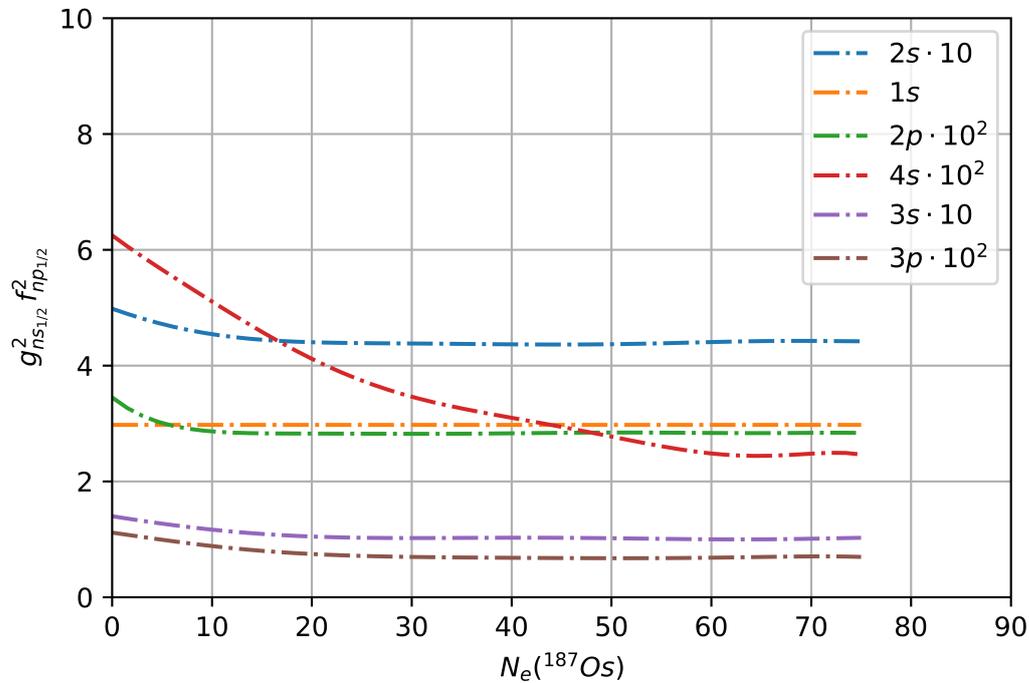


Figura 4.3: È rappresentato il modulo quadrato della componente principale della funzione d'onda radiale dell'elettrone dell' $^{187}Os$ .  $N_e$  è il numero di elettroni legati e i risultati - presentati per i valori più bassi del numero quantico principale  $n$  - sono ottenuti con il metodo di Liberman *et al.* [6] per la configurazioni di energia inferiore.

fondamentale dell' $^{163}Dy$ . Inoltre - a causa delle temperature relativamente basse che caratterizzano il periodo di interpulsazione - la popolazione termica dello stato eccitato sarebbe minore di quella del periodo di pulsazione. Il risultato netto sarebbe dunque l'assenza quasi totale di  $^{163}Ho$  che aspetta la successiva pulsazione per catturare neutroni.

In questo studio si considera la possibilità del decadimento  $\beta$ - stato legato dello stato fondamentale del  $^{163}Dy$ . Questa transizione non è mai stata precedentemente considerata, nonostante sia abbastanza veloce da produrre l' $^{164}Ho$  durante il periodo di pulsazione e da permettere all' $^{163}Ho$  di sopravvivere durante la fase di interpulsazione. I livelli nucleari di interesse durante un tipico processo S sono rappresentati in Figura 4.6.

Nelle circostanze descritte gli atomi di  $^{163}Dy$  sono così altamente ionizzati che il decadimento  $\beta$ - stato legato alle shell di ordine K (almeno a quelle di ordine L), contribuiscono in maniera dominante nel calcolo del tasso di transizione totale. I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 4.7.

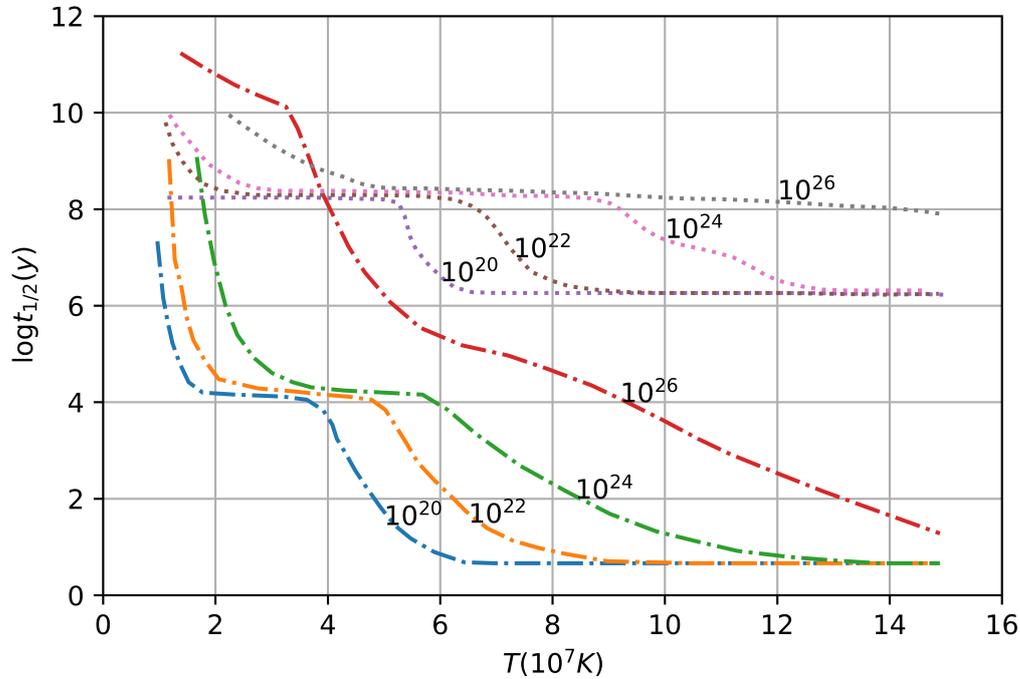


Figura 4.4: Tempi di dimezzamento per il decadimento  $\beta^-$  stato legato del  $^{187}\text{Re}$  calcolato per varie temperature  $T$  e densità elettroniche  $N_e$  (potenze di 10 in figura). Le linee tratteggiate-puntate rappresentano il tempo di dimezzamento complessivo, le linee puntate il tempo di dimezzamento parziale relativo alla transizione unica.

### 4.4.3 Cattura degli elettroni orbitali

Il calcolo del tasso per la reazione di cattura elettronica orbitale può essere eseguito con un approccio alternativo più semplice, quando le energie di transizione sono abbastanza alte da rendere dominanti le catture degli elettroni nella shell K; si può infatti applicare la formula di Stromgen [53] per calcolare il numero medio  $N_n$  di elettroni nell'orbita con numero quantico principale  $n$ :

$$N_n = \frac{2n^2}{1 + \exp(-\frac{X_n}{kT} - \eta)} \quad (4.54)$$

dove  $X_n = RyZ^2/n^2$ , essendo  $Ry$  l'unità energetica di Rydberg. I valori che si ottengono possono essere confrontati con quelli ottenuti risolvendo l'equazione di Saha (vedi sez.

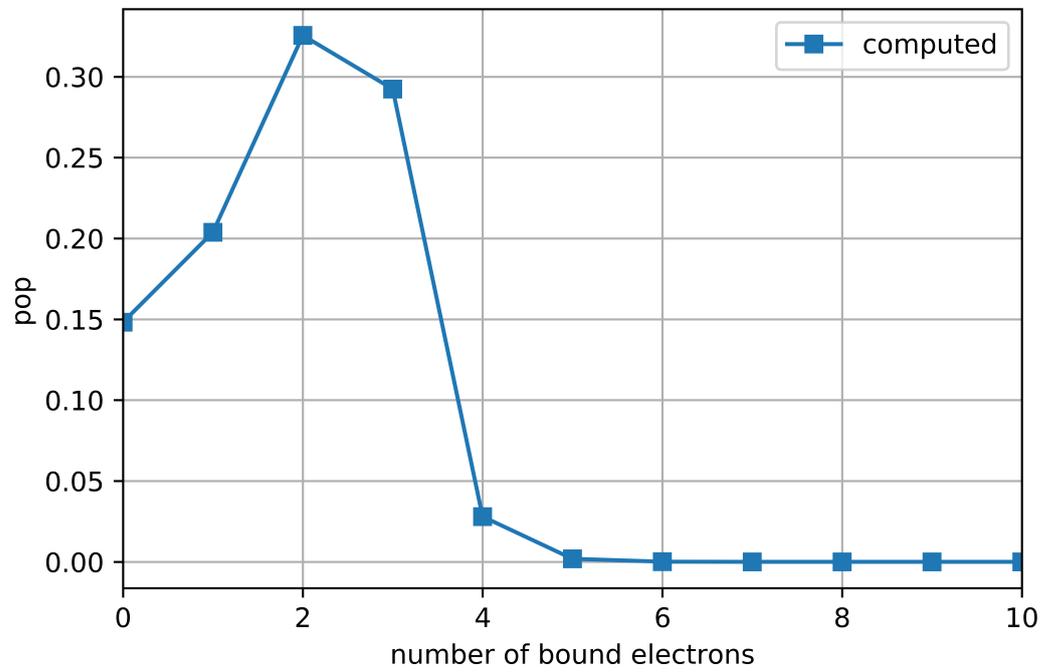


Figura 4.5: Distribuzione di carica  $^{163}\text{Dy}$  in condizioni fisiche da processo  $S$ ,  $T = 3 \cdot 10^8 K$ ,  $\chi_{\text{He}} = 1$ , ottenuta con il mio modello numerico (vedi cap. 5).

5.2.1).

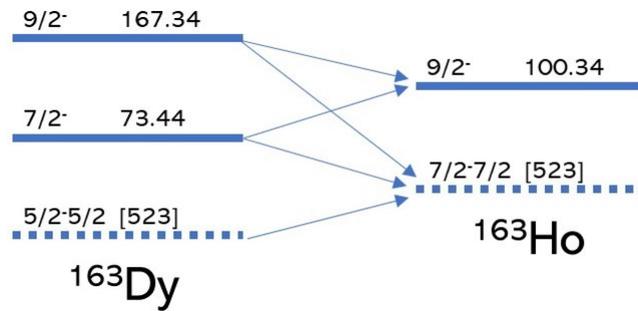


Figura 4.6: Livelli nucleari più importanti per il calcolo del tasso di decadimento  $\beta$ - stato legato del  $^{163}\text{Dy}$  in condizioni di processo S. Le energie di eccitazione sono in  $\text{keV}$ .

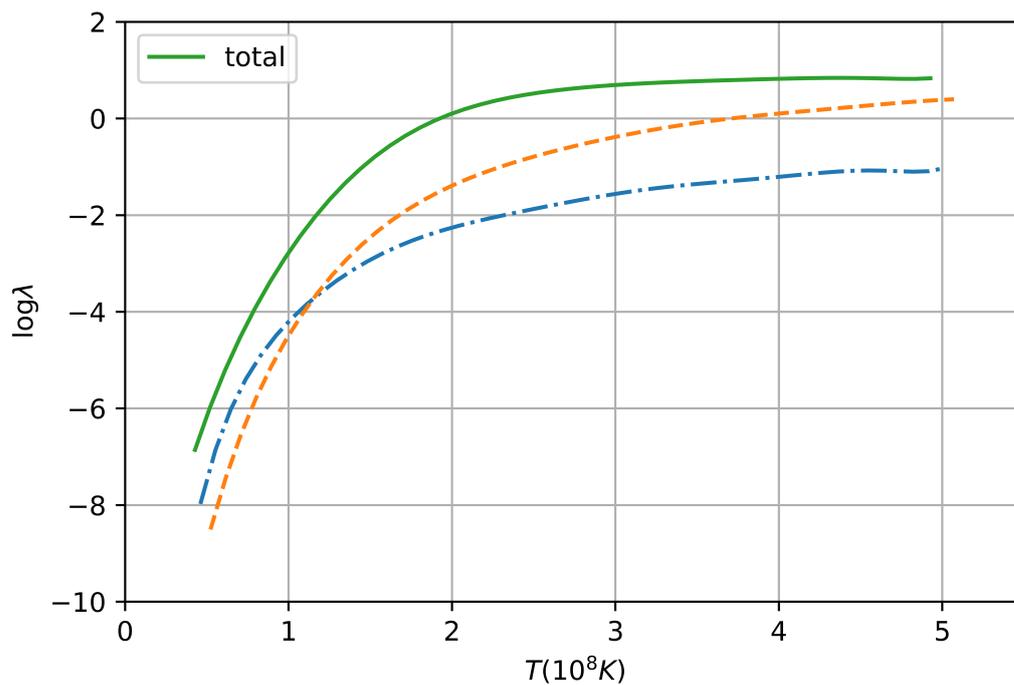


Figura 4.7: Tassi di transizione calcolati per il decadimento  $\beta$ - del  $^{163}\text{Dy}$  in una materia composta interamente da  $\text{He}$  di densità  $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{g/cm}^3$ , in funzione della temperatura  $T$ . Il contributo maggiore al tasso di decadimento totale del  $^{163}\text{Dy}$  (curve solide) viene dal  $\beta$ - stato legato del suo stato fondamentale, mentre contributi minori sono dati dal  $\beta$ - stato legato (linee tratteggiate) e stato continuo (linee tratteggiate-puntate) degli stati eccitati.

# Capitolo 5

## Sviluppo del modello numerico

### 5.1 Introduzione

Il lavoro di K. Takahashi e K. Yokoi è suddiviso in due parti: la ricerca delle distribuzioni di carica e il calcolo dei tassi di decadimento. Come detto nell'introduzione, il mio studio si sofferma solo sulla prima parte, ovvero sulla risoluzione dell'equazione di Saha:

$$\frac{n_{ij+1}}{n_{ij}} = \frac{b_{ij+1}}{b_{ij}} \left( \frac{M_{ij+1}}{M_{ij}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{-X_{ij}}{kT} - \eta \right) \quad (5.1)$$

Seguendo l'approccio teorico descritto nel capitolo 4 è stato sviluppato un modello numerico che riceve in input i parametri indipendenti del problema (ovvero temperatura  $T$ , densità  $\rho$ , concentrazione  $X_i$  e numero atomico  $Z$ ) e restituisce in output le popolazioni dei diversi stati di carica.

Il linguaggio scelto è il *Python*, versione 3.7.1. È un linguaggio di programmazione ad alto livello, orientato agli oggetti, adatto, tra gli altri usi, alla computazione numerica. Si utilizzano le librerie *math*, *NumPy*, *SciPy* e *Matplotlib*. Il modulo *math* fornisce l'accesso alle funzioni matematiche definite dallo standard C. *NumPy* aggiunge supporto per le operazioni con vettori multidimensionali e con funzioni matematiche di alto livello. *SciPy* contiene diversi strumenti matematici e - in questo caso - sono stati usati i moduli per l'integrazione e l'ottimizzazione. *Matplotlib* è una libreria per la creazione di grafici.

### 5.2 Il modello numerico

Di seguito si include il listato del codice in una versione più scarna possibile, priva di parti superflue contenenti istruzioni di output e lettura. Il programma completo e il materiale associato sono reperibili a [questo indirizzo](#).

```
1 import math
```

```

2 import numpy as np
3 import scipy.integrate as integrate
4 import scipy.optimize as optimize
5
6 #constants
7 k_boltz = 8.61673324*math.pow(10,-5) #Boltzmann constant in eV/K
8 Ry = 13.6056923 #Rydberg constant in eV
9 m_e = 0.5109989461*math.pow(10, 6) #electron mass in eV
10 h_bar = 0.19732697*math.pow(10, -4) #reduced Planck constant in eV*s
11 lamb = h_bar/(m_e) #reduced compton wave lenght in m
12
13 #inputs
14 Z = int(input("type the atomic number"))
15 T_8 = float(input("type the temperature in 10^8 K"))
16 ro = float(input("type the density in g/cm^-3"))
17 X_H = float(input("type the Hydrogen fraction"))
18 X_He = float(input("type the Helium fraction"))
19 T = T_8*math.pow(10, 8)
20 beta = m_e/(k_boltz*T)
21
22 #compute the electron density
23 def get_n_e(ro, X_H, X_He):
24     m_u = 1.66*math.pow(10, -24)
25     n_e = ro*(X_H + X_He*0.5)/m_u
26     return n_e
27
28 #read the values of ionization potential
29 def get_l_ij(j):
30     l_ij = np.genfromtxt("076_Os.txt")
31     return l_ij[j][1]
32
33 #read the charge average state for (Z, T, n_e) input configuration
34 def get_zav(Z, T, n_e):
35     ...
36     return zav
37
38 #calculate the depression of continuum D_ij
39 def get_D_j(j):
40     T_7 = T/math.pow(10, 7) #temperature in unit of 10^7 K
41     N = get_n_e(X_H, X_He, ro)/(5.2*math.pow(10, 18))
42     logN = math.log(N,10)
43     d_1 = 0.00135*math.pow(logN, 2) - 0.0002*logN + 0.01
44     d_2 = -0.00297*math.pow(logN, 2) + 0.00563*logN + 0.99
45     d_3 = -0.000518*math.pow(logN, 2) - 0.0058*logN + 0.001
46     d_4 = 0.00358*math.pow(logN, 2) + 0.000297*logN - 0.5
47     d_5 = -0.00445*math.pow(logN, 2) + 0.5171*logN - 4.658
48     log_D_j = (d_1*math.log(T_7, 10) + d_2)*math.log(j+1, 10) \
49     +(d_3*math.pow(math.log(T_7, 10), 2) + d_4*math.log(T_7, 10) + d_5)
50     D_j = math.pow(10, log_D_j)*1000

```

```

51     return D_j
52
53 #calculate the corrected ionization potential X_ij
54 def get_X_ij(j):
55     X_ij = get_l_ij(j) - get_D_j(j)
56     return X_ij
57
58 #return the value of quantum numbers
59 def get_n0_l0(j):
60     ...
61     return [n0, l0, N_n0_l0, N_n0]
62
63 def operation_C(s, t):
64     r = math.fabs(s-t)
65     C = math.factorial(s)/(math.factorial(t)*math.factorial(r))
66     return C
67
68 #calculate the statistical weights b_ijk and excitation energies e_ijk
69 def get_b_ijk(j):
70     n0 = get_n0_l0(j)[0]
71     l0 = get_n0_l0(j)[1]
72     N_n0_l0 = get_n0_l0(j)[2]
73     N_n0 = get_n0_l0(j)[3]
74     e_ijk_list = []
75     l_ij = get_l_ij(j)
76     X_ij = get_X_ij(j)
77     stat_weight = []
78     B_ij0 = operation_C(2*(2*l0+1), N_n0_l0)
79     B_ij1 = operation_C(2*math.pow(n0, 2), N_n0)-B_ij0
80     e_ij0 = 0
81     e_ijk_list.append(e_ij0)
82     if B_ij1 == 0:
83         e_ij1 = 0
84         e_ijk_list.append(e_ij1)
85         for K in range(2, Z):
86             e_ijk = l_ij - Ry*math.pow(j+1, 2)/math.pow(n0+K-1, 2)
87             if e_ijk > X_ij:
88                 break
89             else:
90                 e_ijk_list.append(e_ijk)
91     else:
92         for K in range(1, Z):
93             e_ijk = l_ij - Ry*math.pow(j+1, 2)/math.pow(n0+K-1, 2)
94             if e_ijk > X_ij:
95                 break
96             else:
97                 e_ijk_list.append(e_ijk)
98     e_ijk_len = len(e_ijk_list)
99     if e_ijk_len == 1:

```

```

100     stat_weight.append(B_ij0)
101     else:
102         stat_weight.append(B_ij0)
103         stat_weight.append(B_ij1)
104         for K in range(2, e_ijk_len):
105             B_ijk = operation_C(2*math.pow(n0, 2), N_n0-1)*\
106                 2*math.pow(n0+K-1, 2)
107             stat_weight.append(B_ijk)
108     e_ijk_exp = []
109     for a in range(e_ijk_len):
110         exp_k = math.exp(-e_ijk_list[a]/(k_boltz*T))
111         e_ijk_exp.append(exp_k)
112     return [stat_weight, e_ijk_exp]
113
114 #return canonical partion function
115 def get_b_ij(j):
116     if j == Z:
117         b_ij = 1
118     else:
119         b_ij = np.dot(get_b_ijk(j)[0], get_b_ijk(j)[1])
120     return b_ij
121
122 #compute Fermi integral
123 def F(e):
124     f = lambda W: W*math.pow((math.pow(W, 2)-1), 0.5)*\
125         math.pow(1+math.exp(beta*(W-1)-e), -1)
126     sup = 1 + 10/beta
127     r = 1/(math.pow(math.pi, 2)*math.pow(lamb, 3))
128     F = integrate.quad(f, 1, sup)
129     F_lamb = F[0]*r
130     return F_lamb
131
132 #find eta
133 n_e = get_n_e(X_H, X_He, ro)
134 f_zero = lambda e: n_e - F(e)
135 eta = optimize.fsolve(f_zero, -2)[0]
136 zav = get_zav(Z, T, n_e)
137 j_start = zav - 5
138
139 #solving Saha equation
140 start_value = math.pow(10, -99)
141 n_ij_list_old = start_value
142 n_ij_list = []
143
144 for a in range(Z+1):
145     n_ij_list.append(0)
146
147 for a in range(j_start):
148     n_ij_list[a] = 0

```

```

149
150 for a in range(j_start, Z):
151     x_b_j = get_b_ij(a+1)/get_b_ij(a)
152     espo = get_X_ij(a)/(k_boltz*T)+eta
153     x_espo = math.exp(-espo)
154     n_ij_list_new = x_b_j*x_espo*n_ij_list_old
155     n_ij_list[a] = n_ij_list_old
156     n_ij_list[a+1] = n_ij_list_new
157     n_ij_list_old = n_ij_list_new
158
159 norm = sum(n_ij_list)
160
161 for a in range(j_start, Z+1):
162     n_ij_list[a] = n_ij_list[a]/norm
163 Z_j =tuple(range(Z+1))
164 av_charge = np.dot(n_ij_list, Z_j)

```

Con riferimento al listato, il programma è strutturato come di seguito. Si importano le librerie descritte nella sezione precedente e si dichiarano le costanti che caratterizzano il problema: la costante di Boltzmann, l'unità energetica di Rydberg [eV/K], la massa dell'elettrone [eV], la costante di Planck ridotta [eV · s] e la lunghezza d'onda Compton ridotta [m]. Si chiedono in input l'elemento (il numero atomico  $Z$ ), la temperatura in unità  $10^8 K$ , la densità in  $g/cm^3$ , la frazione di idrogeno  $X_H$  e quella di elio  $X_{He}$ . Si implementano le funzioni:

- `get_n_e(X_H, X_He, ro)`

riceve come argomenti la densità e le frazioni di  $H$  e di  $He$  e restituisce la densità elettronica corrispondente secondo la relazione 4.1;

- `get_l_ij(j)`

legge e restituisce i valori <sup>1</sup> del potenziale di ionizzazione  $I_{ij}$  per lo stato di carica  $j$  assegnato;

- `get_zav(Z, T, n_e)`

legge e restituisce lo stato di carica medio <sup>2</sup> dell'elemento  $Z$  corrispondente ai valori di  $T$  e  $n_e$  passati come argomento;

- `get_D_j(j)`

riceve come argomento il grado di ionizzazione  $j$  e segue la procedura illustrata nella sezione 4.2.2 per calcolare  $\Delta_j$ ;

<sup>1</sup>I valori tabulati sono stati presi da <https://nlte.nist.gov/FLY/>.

<sup>2</sup>I valori tabulati sono stati presi da <https://nlte.nist.gov/FLY/>.

- `get_X_ij(j)`  
restituisce il potenziale di ionizzazione corretto  $\chi_{ij}$  per il grado di ionizzazione  $j$  assegnato, calcolato come nell'eq. 4.6;
- `get_n0_l0(j)`  
legge e restituisce i valori dei numeri quantici  $n_0$  e  $l_0$  secondo la regola di Madelung;
- `operation_C(s, t)`  
svolge un'operazione utilizzata nel calcolo dei pesi statistici  $b_{ijk}$ ;
- `get_b_ijk(j)`  
riceve come argomento lo stato di carica  $j$  e segue il procedimento spiegato nella sez. 4.2.3 per il calcolo dei pesi statistici  $b_{ijk}$  e delle energie di eccitazione ionica  $e_{ijk}$ . Restituisce due liste: quella dei pesi statistici e quella dell'esponenziale delle energie di eccitazione (utile per il calcolo della  $b_{ij}$ );
- `get_b_ij(j)`  
assegnato il grado di ionizzazione  $j$ , restituisce il valore della funzione di partizione canonica  $b_{ij}$ .
- `F(e)`  
calcola l'integrale di Fermi 4.4 per il valore  $e$  (rappresentante  $\eta$ ) passato come argomento. L'intervallo d'integrazione è  $[1, \infty]$ , tuttavia l'integranda è molto piccata nell'intorno dell'estremo di integrazione inferiore, dunque - onde evitare problemi di overflow - si fissa l'estremo di integrazione superiore tramite la relazione  $1+10/\beta$  ottenuta eseguendo diversi test.

Si procede definendo la funzione `f_zero = lambda e: n_e - F(e)` che secondo la rel. 4.3 vale 0 per il valore di  $\eta$  cercato. Si trova quindi  $\eta$  con l'istruzione `eta = optimize.fsolve(f_zero, -2)`, in cui si sfrutta il metodo `optimize.fsolve` di NumPy per la ricerca dello zero di `f_zero`. Applicando questa strategia si riduce il costo computazionale per la ricerca di  $\eta$ , richiedendo la ricerca di uno zero molti meno passaggi di quella di un altro valore. Si definisce il grado di ionizzazione `j_start` da cui iniziare il ciclo per la soluzione dell'equazione di Saha. `j_start = zav - 5` in quanto le popolazioni degli stati di carica lontani dal valore medio hanno di fatto probabilità nulla. Il valore di `zav` è quello tabulato che risulta dalla lettura eseguita da `get_zav(Z, T, n_e)` e si utilizza unicamente per fissare il punto di partenza del ciclo. Alla popolazione corrispondente allo stato di carica `j_start` si associa un valore iniziale `start_value` di

$10^{-99}$ , in modo da assegnarli una probabilità nulla. Le istruzioni che seguono risolvono iterativamente l'equazione di Saha con un ciclo `for` da `j_start` allo stato di carica massimo  $j = Z$ . Infine - volendo ottenere una distribuzione di probabilità - si normalizzano le popolazioni e si calcola lo stato di carica medio.

### 5.2.1 Test

L'affidabilità del modello numerico sviluppato può essere garantita, oltre che dall'accordo con i risultati di Takahashi e Yokoi (vedi sez. 5.3), dal confronto del valore del numero di occupazione  $N_n$  calcolato con la formula di Stromgen (vedi eq. 4.54) con quello ottenuto risolvendo l'eq. di Saha.  $N_n$  è il numero medio di elettroni nell'orbita con numero quantico principale  $n$ . Nelle tabelle 5.1 e 5.2 si riportano i risultati ottenuti.

$T$	$\rho$	Stromgen	Saha
1	1	1.973	1.964
1	3	1.991	1.996
1	10	1.998	2.000
3	1	0.209	0.217
3	3	0.521	0.533
3	10	1.092	1.252

Tabella 5.1: Numeri di occupazione calcolati con la formula di Stromgen e di Saha per  $n=1$  nel caso dell'olmio ( $Z=67$ ) in una materia composta esclusivamente da elio. La temperatura è in unità  $10^8 K$  e la densità in  $10^3 g/cm^3$ . Come si può osservare l'accordo è molto buono.

$T$	$\rho$	Stromgen	Saha
1	1	2.131	1.648
1	3	4.253	3.082
1	10	6.512	4.892
3	1	0.155	0.065
3	3	0.452	0.159
3	10	1.359	0.672

Tabella 5.2: Numeri di occupazione calcolati con la formula di Stromgen e di Saha per  $n=2$  nel caso dell'olmio ( $Z=67$ ) in una materia composta esclusivamente da elio. La temperatura è in unità  $10^8 K$  e la densità in  $10^3 g/cm^3$ . Come si può osservare l'accordo è complessivamente buono.

### 5.3 Risultati

Seguendo l'articolo di Takahashi e Yokoi [4] è stato eseguito il programma per cinque configurazioni notevoli (vedi sez. 4.4) di  $T$ ,  $\rho$ ,  $X_H$  e  $X_{He}$  nel caso dell'osmio. Inoltre sono stati digitalizzati i grafici presentati nell'articolo in modo da estrapolare i dati e sovrapporre i miei risultati (linea blu) con i loro (linea arancione).

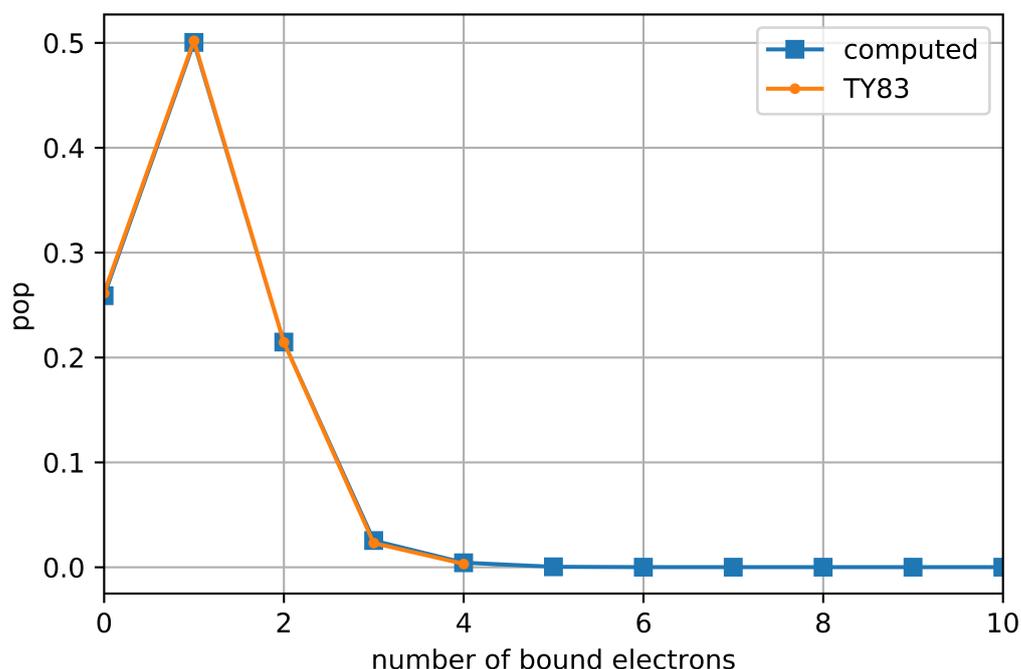


Figura 5.1: Distribuzione di carica per l' $^{187}\text{Os}$  per valori  $T = 3 \cdot 10^8\text{K}$ ,  $\rho = 10^3\text{g/cm}^3$ ,  $X_H = 0$  e  $X_{He} = 1$ .

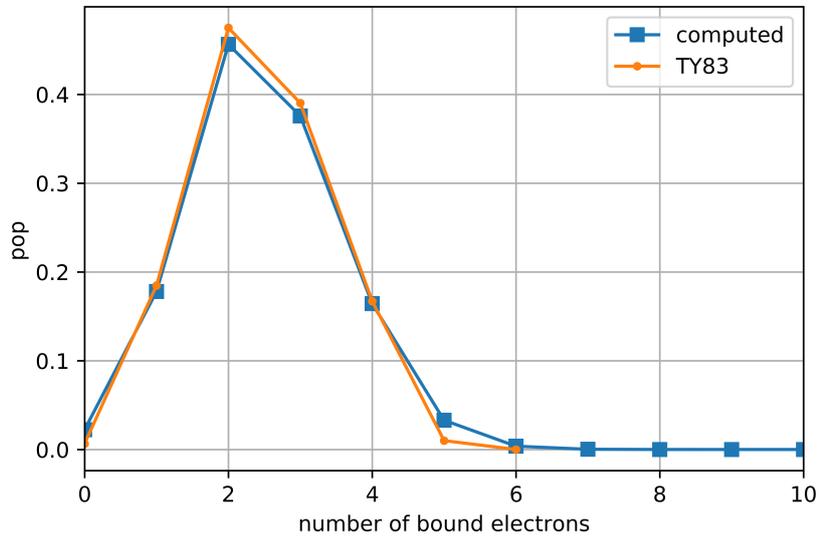


Figura 5.2: Distribuzione di carica per  $^{187}\text{Os}$  per valori  $T = 2 \cdot 10^8 \text{ K}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ g/cm}^3$ ,  $X_H = 0$  e  $X_{\text{He}} = 1$ .

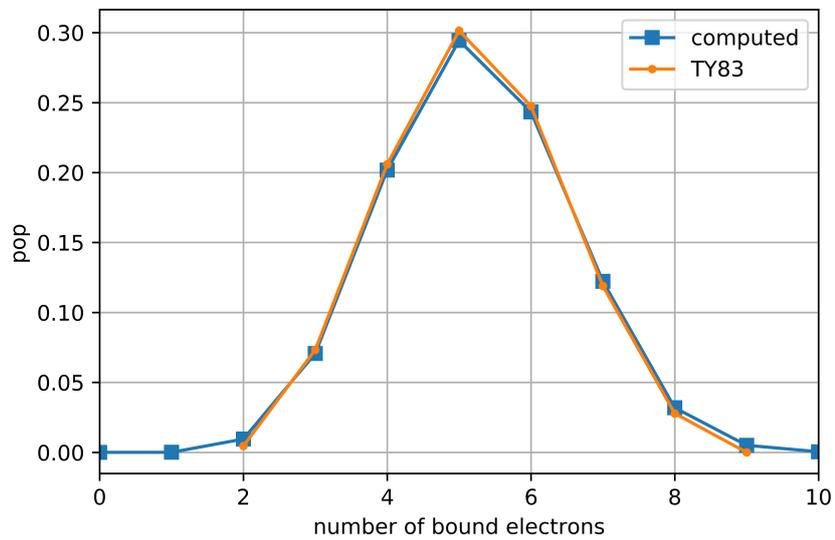


Figura 5.3: Distribuzione di carica per  $^{187}\text{Os}$  per valori  $T = 1 \cdot 10^8 \text{ K}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ g/cm}^3$ ,  $X_H = 0$  e  $X_{\text{He}} = 1$ .

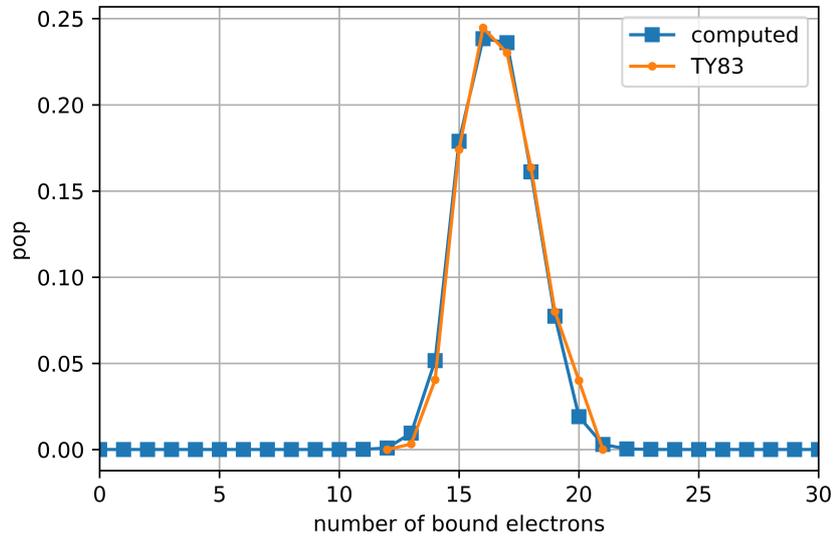


Figura 5.4: Distribuzione di carica per  $l^{187}Os$  per valori  $T = 10^7 K$ ,  $\rho = 10^{-1} g/cm^3$ ,  $X_H = 0.75$  e  $X_{He} = 0.25$ .

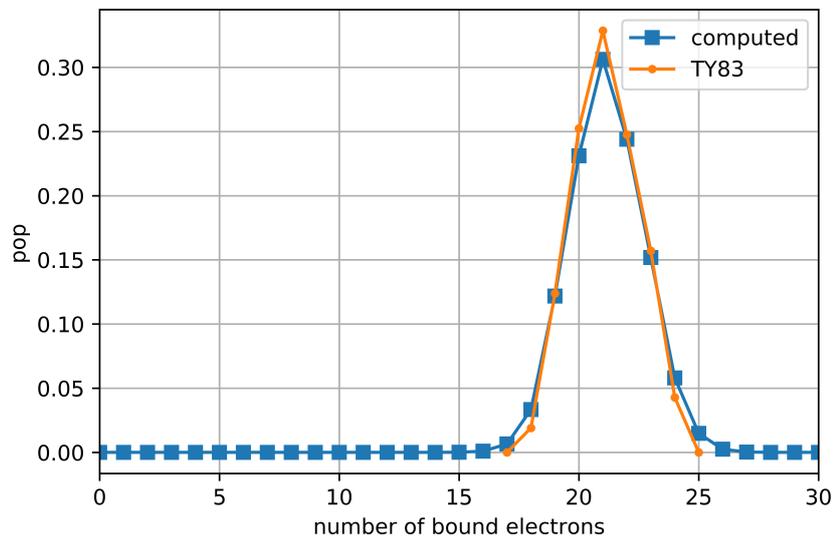


Figura 5.5: Distribuzione di carica per  $l^{187}Os$  per valori  $T = 10^7 K$ ,  $\rho = 1 g/cm^3$ ,  $X_H = 0.75$  e  $X_{He} = 0.25$ .

## Capitolo 6

### Conclusioni

Il modello numerico funziona correttamente ed i risultati ottenuti dalle esecuzioni sono in ottimo accordo con quelli presentati da K. Takahashi e K. Yokoi nel loro articolo del 1983. La validità del loro approccio è stata e viene tutt'ora confermata da numerose ricerche in questo ambito. In particolare nel 1996 è stato svolto un esperimento [16] al fine di misurare la vita media del nucleo  $^{187}\text{Re}$  completamente ionizzato, ottenendo per il tempo di dimezzamento un valore di soli  $\tau_{1/2} = 32.9 \pm 2.0\text{yr}$ , estremamente inferiore alla vita media del  $^{187}\text{Re}$  neutro ( $\tau_{1/2} = 42\text{Gyr}$ ).

La teoria di K. Takahashi e K. Yokoi presenta un limite nell'assunzione di LTE (local thermodynamic equilibrium), una condizione che si applica bene a situazioni fisiche di bassa temperatura e alta densità. Tuttavia nella maggior parte delle fasi di evoluzione stellare queste circostanze non sono soddisfatte, trovandosi a temperature alte e densità medio-basse. In questi casi è più adeguata l'ipotesi di NLTE (non local thermodynamic equilibrium), che più precisamente si verifica quando il tasso di assorbimento di fotoni è molto maggiore del tasso di collisione tra gli elettroni. In NLTE la condizione di equilibrio è data dal bilancio del tasso di ogni processo con il suo inverso. L'equazione di Saha non è più valida ed è necessaria una trattazione diversa e - come si può osservare in figura 6.1 - i risultati cambiano notevolmente.

L'argomento è ancora attuale e si attendono risultati importanti dall'attività di ricerca condotta all'interno del progetto PANDORA.

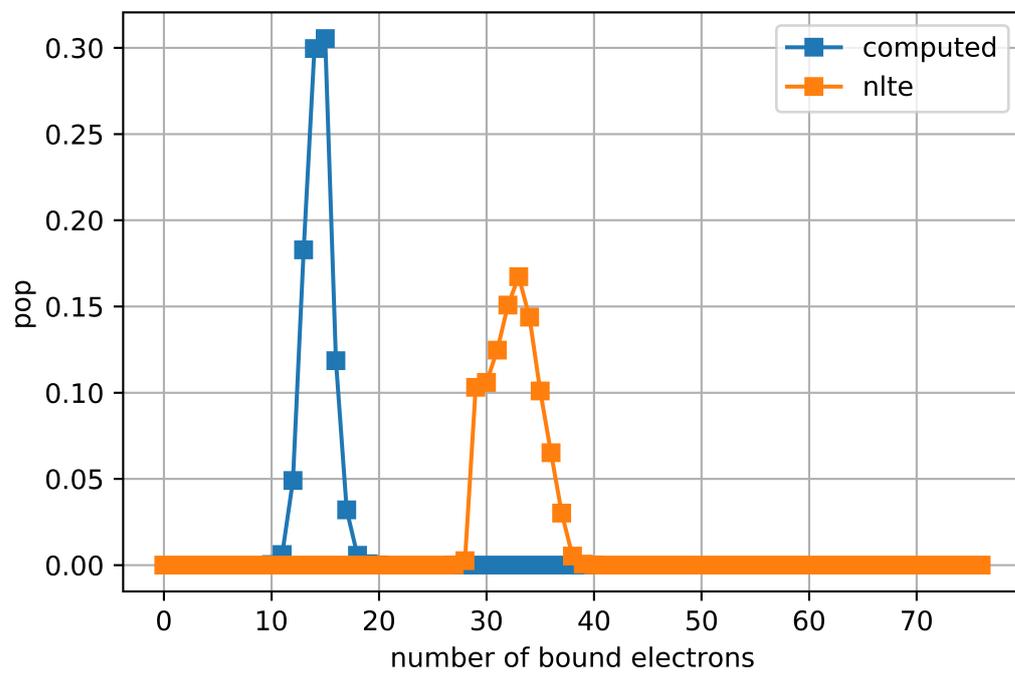


Figura 6.1: Distribuzione di carica dell'osmio  $Os$  in condizioni LTE (linea blu) e NLTE (linea arancione) per  $kT = 845eV$  e  $n_e = 10^{22}cm^{-3}$ . I dati LTE sono il risultato di un'esecuzione del mio programma, quelli NLTE sono stati presi da <https://www-amdis.iaea.org/FLYCHK/>.

# Bibliografia

- [1] D. Mascali et al. «Pandora a New Facility for Interdisciplinary In-Plasma Physics». In: ().
- [2] Giorgio Bendiscioli. *Fenomeni radioattivi. Dai nuclei alle stelle*.
- [3] Giora Shaviv. *The Synthesis of the Elements*.
- [4] Koichi Yokoi Kohji Takahashi. «Nuclear  $\beta$ -decays of highly ionized heavy atoms in stellar interiors». In: (1983).
- [5] R.T. Giuli J.P. Cox. *Principles of stellar structure*. 1968.
- [6] J.T. Waber D.A. Liberman D.T. Cromer. In: *Computer Physics Communications* (1971).
- [7] J.C. Stewart e K.D. Pyatt. In: *Journal of Astrophysics and Astronomy* (1966).
- [8] C.W. Nestor T.A. Carlson. In: *Atomic Data* (1970).
- [9] M.J. Martin N.B. Gove. In: *Nuclear Data Tables* (1971).
- [10] G.E. Uhlenbeck E.J. Konopinski. In: *Phys. Rev.* (1941).
- [11] J.P. Davidson. In: *Phys. Rev.* (1951).
- [12] M. Yamada. In: *Bull. Sci. Eng. Res. Lab. Waseda Univ.* (1966).
- [13] M.E. Rose. «Relativistic electron theory». In: (1961).
- [14] J.L. Birck J.M. Luck. In: *Nature* (1980).
- [15] F. Perrone. «Tesi di dottorato, Rice University». In: (1971).
- [16] F. Bosch et al. «Observation of Bound-State  $\beta^-$  decay of fully ionized  $^{187}\text{Re}$ :  $^{187}\text{Re}$ - $^{187}\text{Os}$  Cosmochronometry». In: (1996).