Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

I *GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE*

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Prof.ssa
SILVIA
BENVENUTI

Correlatore:
Prof.ssa
ALESSIA
CATTABRIGA

Presentata da:
FEDERICO
CAPPELLI

I Sessione
Anno Accademico 2018/2019

*Così nella matematica moderna ha una parte eminente la questione relativa all'*impossibilità *di certe soluzioni o di certi problemi, e lo sforzo per rispondere ad una questione di questo tipo è stato spesso motivo per la scoperta di nuovi e più fecondi campi di ricerca.*

D. Hilbert, *Fondamenti della geometria*, Conclusione.

Indice

Introduzione

La presente tesi è stata scritta con l'obbiettivo dichiarato di studiare una delle opere magne della matematica del ventesimo secolo: i *Grundlagen der Geometrie*, di David Hilbert. Tale opera, tradotta in italiano con il titolo *Fondamenti della geometria*, prevede una riscrittura della geometria su una base assiomatica, costituita da cinque gruppi di assiomi.

Si è detto riscrittura, perché non è certo vero che il lavoro di Hilbert non avesse precedenti. Nel corso della storia della matematica sono stati più d'uno i lavori che si erano prefissati lo stesso compito; molto più antico, ma certamente assai noto, è il celebre trattato di Euclide: gli *Elementi*. È proprio per questa ragione che la tesi è stata strutturata in un'ottica di confronto fra le due opere; e di qui la suddivisione in due capitoli.

Il primo dei capitoli è incentrato proprio sugli *Elementi* di Euclide. Quest'ultima è un'opera vastissima che racchiude, in un'esposizione logica e coerente, l'intera conoscenza della matematica elementare sviluppatasi fino ad allora. Data la vastità degli argomenti trattati, si è deciso di soffermarci su quelli che sarebbero stati più consoni per il confronto con il lavoro di Hilbert. Ci si soffermerà, perciò, in particolare sul Libro I, con poi qualche accenno ai Libri V, X e XII (soprattutto per quanto concerne la teoria delle proporzioni e il metodo di esaustione). Anche il Libro I, tuttavia, non verrà esattamente preso in esame nella sua interezza: le ultime proposizioni, dalla trentaquattresima alla quarantottesima, le quali concernono la teoria dell'area, non verrano molto approfondite, e in generale la teoria dell'area stessa verrà perlopiù ignorata. Ci soffermeremo con molta maggior attenzione sulle proposizioni precedenti, e con maggior attenzione ancora sul metodo che seguì Euclide, quel metodo assiomatico, e quell'impostazione logico-deduttiva, che affondano le loro radici nelle definizioni, nei postulati e nelle nozioni comuni.

Gli *Elementi* costituiscono una delle opere matematiche più famose della storia, e benché la loro scrittura risalga al III secolo a.C., sono continuati ad essere un punto di riferimento anche nei secoli successivi. Viene dunque da chiedersi per quale ragione, al termine del diciannovesimo secolo, il matematico tedesco Hilbert abbia voluto dare alle stampe un trattato di geometria che aveva i medesimi intenti di quello euclideo. Bisogna, a questo proposito, tenere presente che il lavoro svolto da Euclide, per quanto estremamente elaborato e rigoroso per l'epoca in cui fu scritto, non è esente da criticità. Il metodo assiomatico che venne adottato dal matematico alessandrino - si vedrà - presenta diverse lacune: in questo senso Euclide molto spesso fa ricorso a un'intuizione fisica dello spazio, certamente comprensibile se si tiene presente quale era la visione della geometria al suo tempo (Sezione 1.2), ma non pienamente accettabile agli occhi della matematica moderna; altresì concetti come "stare fra" - all'apparenza tanto intuitivi - vengono da Euclide adoperati senza essere in alcun modo definiti; le stesse definizioni, d'altra parte, sono spesso lacunose o fanno ricorso a dei circoli viziosi (come quello presente nella definizione VIII) che impediscono di introdurre rigorosamente gli enti in questione; inoltre, tra i postulati spicca il V, divenuto celebre per i moltissimi dubbi che creò nello stesso Euclide e in tanti dei matematici ad esso posteriori, e la lunga storia di tentativi di dimostrazione che lo ha caratterizzato. Tutti questi fattori saranno approfonditi nel Capitolo 1, in modo da rendere chiare le esigenze che spinsero Hilbert a scrivere i *Fondamenti*.

Nel tentativo di analizzare gli *Elementi*, daremo una breve prospettiva storica sull'autore e sul clima culturale in cui si trovò a vivere (Sezione 1.1), cercando anche di contestualizzare il lavoro di Euclide all'interno del pensiero matematico greco. Seguiremo, per questa parte storica, in particolare *Storia della matematica* di C. B. Boyer [3]; mentre per le questioni più strettamente matematiche faremo forte riferimento ai lavori di Frajese (*Gli Elementi di Euclide*, [4]) e di Hartshorne (*Geometry: Euclid and Beyond*, [5]).

Il secondo capitolo, dal canto suo, è invece interamente dedicato ai *Fondamenti* di Hilbert. Una volta appurato che la trattazione di Euclide presenti delle lacune, e dunque reso chiaro il motivo per cui i fondamenti della geometria richiedessero una nuova formulazione - questa volta rigorosa - passeremo ad analizzare in che modo ognuna delle lacune esibite nel capitolo precedente venga portata a correzione.

Il lavoro di Hilbert apparirà molto più complesso rispetto a quello del matematico di Alessandria: si tratta di una formulazione della geometria assai più astratta che, e si vedano ad esempio le Sezioni 2.1 e 2.2, rinuncia addirittura a dichiarare la natura degli enti trattati (cosa siano punti e rette non verrà mai esplicitato). Inoltre, dovendo necessariamente fare ricorso ad un maggior rigore rispetto a Euclide, e rinunciando a qualsiasi forma di intuizione spaziale, Hilbert si vedrà costretto a fornire un sistema di assiomi ben più corposo e articolato se paragonato a quello degli *Elementi*: in luogo dei soli cinque postulati euclidei, Hilbert fornirà ben cinque gruppi di assiomi, i quali, però, permetteranno di trattare in maniera rigorosa anche quelle relazioni che Euclide aveva lasciato all'arbitrio dell'intuizione (si è già detto, ad esempio, lo "stare fra").

La trattazione di Hilbert prevederebbe una sistemazione della geometria piana *e* di quella spaziale; quest'ultima, tuttavia, non verrà da noi citata. Si è preferito, in tal senso, mantenerci più aderenti a un livello di confronto con il Libro I degli *Elementi*, il quale tratta di sola geometria piana. In tal modo, ricostruendo passo dopo passo il lavoro di Hilbert, mostreremo in che modo egli abbia apportato una soluzione a tutte le criticità che avevamo segnalate nel primo capitolo; arrivando così alla Sezione 2.3, dove potremo finalmente, e a ragione, stabilire la riuscita del progetto del matematico tedesco di totale e rigorosa rifondazione della geometria. Da lì seguirà una breve digressione sull'assioma delle parallele (il V postulato euclideo) e sul suo utilizzo all'interno dei *Fondamenti*, come anche sulla geometria assoluta, che nasce dall'esclusione di tale assioma, e sui teoremi di Legendre (Sezione 2.3.2).

In tutta questa trattazione si apriranno, occasionalmente, delle parentesi attraverso le quali verranno fatti dei brevi confronti tra il lavoro di Hilbert e altri lavori che avevano avuto simili obbiettivi: citeremo in questo modo i lavori di Legendre, di Veronesi e di Peano. Anche qui non mancherà una contestualizzazione storica dei *Fondamenti* e del loro autore, la quale renda chiaro quanto sentita fosse la necessità di un superamento delle lacune euclidee e di una rigorosa fondazione della geometria.

La Sezione 2.4, poi, si sofferma su quelle tre questioni logiche (coerenza, indipendenza e categoricità) che vengono richieste ad un sistema assiomatico, e dunque anche agli assiomi dei cinque gruppi di Hilbert. Parleremo in questo modo del problema della coerenza relativa e della fondazione della matematica; come ci interrogheremo se - e quali - assiomi possano venire dimostrati a partire dagli altri, proponendo in questo modo anche modelli alternativi di geometria oltre a quello canonico (che si vedrà essere $\mathbb{R}^2$); e infine dimostreremo come, se si desidera la validità di *tutti* gli assiomi, allora esista un unico modello possibile: proprio $\mathbb{R}^2$.

In questo capitolo abbiamo seguito l'originale *Fondamenti della geometria* [7], oltre che al già citato *Geometry: Euclid and Beyond* [5]. Si è in questo senso cercato di attenersi quanto più possibile alla formulazione originale data da Hilbert degli assiomi e della materia tutta, distaccandocene, per seguire il [5] o per intraprendere strade originali, solo in virtù di una semplificazione dell'esposizione. In ogni caso, qualora la formulazione di un'assioma differisse dall'originale, questo verrà fatto notare.

Le due appendici poste a conclusione dell'elaborato, infine, hanno due scopi distinti.

L'Appendice A approfondisce l'approccio che seguì Hilbert nell'atto di elaborazione dei *Fondamenti*, e delle critiche che per questa ragione gli furono mosse. Si approfondirà altresì anche la fallimentare conclusione che il progetto di fondazione, non più della sola geometria, ma della matematica tutta, intrapreso da Hilbert, era destinato ad avere: a sancire questo, i Teoremi di Gödel. Tra le critiche prima citate ce ne saranno di carattere strettamente matematico, e anche di carattere didattico, come quelle mosse da Poincaré in *Scienza e metodo* [8]. Sempre in termini didattici, apriremo una brevissima parentesi sul moderno approccio adottato nell'insegnamento della geometria all'interno delle scuole secondarie, seguendo a tal proposito il *Manuale di geometria* [1].

L'Appendice B contiene invece un elenco di tutte le definizioni e tutte le proposizioni del Libro I degli *Elementi*; utile per avere sempre sotto mano gli enunciati di tali definizioni e proposizioni, ogniqualvolta verranno citate nel corso della tesi.

Notazione: seguiremo, in atto di enunciare le proposizioni degli *Elementi*, una notazione del tipo (numero romano.numero arabo), dove il primo indica il libro in cui si trova la proposizione, il secondo la posizione assunta dalla proposizione all'interno dell'elenco delle proposizioni del libro stesso. In questo senso la Proposizione (I.27) è la ventisettesima proposizione del Libro I.

Sempre per quanto concerne gli *Elementi*: gli enunciati, che siano di definizioni, postulati o proposizioni, saranno sempre dati nella traduzione presa da [4].

Nota metodologica: per quanto concerne le dimostrazioni, qualora si dovesse dimostrare direttamente una delle proposizioni degli *Elementi* si è scelto di seguire l'originale dimostrazione euclidea, senza ovviamente presentarla con il medesimo linguaggio, onde non appesantire troppo l'esposizione; qualora, invece, si trattasse di un risultato presentato da Hilbert o da Hartshorne, si è tesi a seguire le loro stesse linee dimostrative, oppure a presentare un approccio originale.

Nota sulle figure: tutte le figure presenti, con la sola eccezione di quelle a pagina 2 e a pagina 22, sono state interamente disegnate a mano.

Capitolo 1

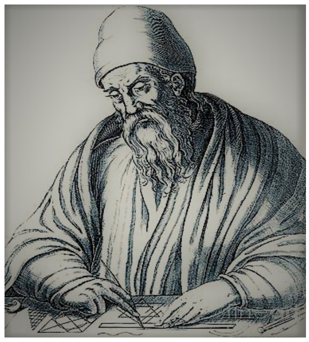
Gli *Elementi* di Euclide

In questo primo capitolo ci poniamo l'obbiettivo di introdurre, nei loro aspetti fondamentali, e analizzare - anche da una prospettiva critica - gli *Elementi* di Euclide. Trattasi di un'opera immensa; è quindi inevitabile che una completa trattazione richiederebbe un lavoro dedicato. In assenza di pretese di completezza ci limiteremo ad esaminare quelle sezioni per noi più significative, in vista soprattutto di un successivo confronto con l'opera di Hilbert. In particolare daremo una contestualizzazione storica e una visione globale sugli *Elementi*, concentrandoci, poi, sull'approfondire quelle che sono le particolarità che la caratterizzano e la differenziano dalle altre sue contemporanee; o sul capire le motivazioni che hanno reso così longevo il suo studio e così popolare il suo nome.

Per i riferimenti bibliografici si rimanda a *Storia della matematica* [3] (per la parte storica), *Gli Elementi di Euclide* [4] (per quella matematica degli *Elementi*), *Geometry: Euclid and Beyond* [5] e *Fondamenti della gometria* [7] (per quella sul metodo assiomatico).

1.1 Euclide e gli *Elementi*

In seguito alla morte di Alessandro Magno (323 a.C.) lotte intestine vennero a crearsi tra i generali del suo esercito. Gli immensi territori conquistati dal condottiero macedone furono così divisi e la parte egiziana dell'impero cadde nelle mani di Tolomeo I. Proprio in questa parte dell'impero era stata voluta, nel 332 a.C., dallo stesso Alessandro, la fondazione di una città, che prenderà poi il nome di Alessandria d'Egitto. Fra i primi decreti di Tolomeo I vi fu l'istituzione, nella stessa Alessandria, di un'accademia, nota con il nome di Museo (dal greco *museion*, tempio delle muse). Non dissimile dai moderni istituti d'insegnamento, il Museo vantava facoltà votate alla ricerca, altre all'amministrazione e altre ancora all'istruzione. I più eminenti studiosi del mondo vennero chiamati a insegnare in questa scuola, e fra di essi anche Euclide.



Nonostante la straordinaria fama di cui gode, pari a quella dell'opera da lui scritta, estremamente povere sono le notizie che abbiamo sulla sua vita. Egli è chiamato Euclide di Alessandria in virtù del suo lavoro presso il Museo (e anche per distinguerlo da altri suoi omonimi: non sono mancate le erronee identificazioni dell'Euclide degli *Elementi* con il filosofo Euclide di Megara). Si suppone che avesse studiato con gli allievi di Platone, forse all'Accademia stessa.

È quasi certo, a giudicare da diversi aneddoti che girano sul suo conto, che desse poca importanza all'aspetto pratico della matematica.[1] Autore di varie opere, di carattere anche fisico oltre che matematico, egli è certamente noto soprattutto per gli *Elementi*, tra i più antichi trattati greci di carattere matematico a essere giunti fino a noi.

Gli *Elementi* sono strutturati in tredici libri trattanti diversi argomenti, così suddivisi:

I-VI: geometria piana elementare;

VII-IX: teoria dei numeri;

X: incommensurabili;

XI-XIII: geometria solida.

Manca completamente qualsiasi introduzione o qualsiasi preambolo; l'inizio del Libro I è un elenco di ventitre definizioni, cui seguono i celebri cinque postulati e le cinque nozioni comuni. Conclusa questa parte Euclide comincia subito con il dimostrare le prime proposizioni e i primi teoremi. Approfondiremo questi aspetti nelle sezioni successive del capitolo, manteniamo per il momento una prospettiva generale.

L'opera di Euclide raccoglie lo sviluppo della matematica fino all'inizio del III secolo a.C. Di fatto, gran parte dei risultati contenuti nei tredici libri erano già noti ai matematici ben prima della nascita di Euclide: alcuni teoremi sono attribuiti a Talete, altri ai pitagorici, ed è ormai certo che il Teorema di Pitagora (enunciato e dimostrato al termine del Libro I) fosse già noto addirittura ai babilonesi e forse anche agli egizi (si parla di almeno due millenni prima della nascita di Cristo). Euclide stesso non aveva alcuna pretesa di originalità (e a tal proposito è stato fatto notare come rispetti la tradizione matematica precedente, di cui lascia traccia anche se non necessario ai fini dell'opera[2]); tuttavia bisogna riconoscere che sicuramente la disposizione della materia è opera sua, così come alcune dimostrazioni. La grandezza degli *Elementi* è quindi quella di presentare un'esposizione sobria, logicamente strutturata e coerente, degli elementi fondamentali della matematica elementare.

Per comprendere ancor meglio la grandezza e l'importanza del lavoro euclideo è forse necessario approfondire l'approccio alla geometria che avevano gli antichi matematici greci - e i loro predecessori - per confrontarlo con quello invece adottato da Euclide.

[1] [3, p. 119]; [4, p. 14]
[2] [4, p. 15]

1.2 Dalla geometria dei campi all'assiomatica

Un primo approccio, o modo di vedere la geometria, - sicuramente il più elementare - è quello di concepirla come una semplice collezione di proposizioni e di verità circa il mondo empirico. La nascità stessa della geometria è probabilmente da legarsi con l'esigenza delle popolazioni antiche di compiere misurazioni di campi agricoli, o di costruire dimore, templi e altari. Si pensi per esempio ai popoli egiziani della valle del Nilo: ogni anno le piene del fiume innondavano i campi dei contadini. Quando le acque si ritiravano e si veniva a ristabilire la calma erano necessarie misurazioni di una certa precisione perché i confini dei campi fossero ripristinati correttamente. Da questo punto di vista la geometria è legata a doppio filo con la realtà e detiene una funzione per lo più pratica.[3] Inoltre in questo momento è assente l'idea di una dimostrazione: le verità empiriche cui fa riferimento la geometria non sono mai provate, vengono mostrati casi in cui sono valide e nulla più.

Ci riferiamo a questa geometria come a una *geometria dei campi*.

Il passo successivo richiede un processo di astrazione non indifferente e corre parallelo all'esigenza di slegare la geometria dalla sua dipendenza dal fine utilitaristico nel "mondo reale".

Grazie alla scuola pitagorica (V secolo a.C.) la matematica diviene un'arte *liberale*, distaccandosi dallo studio strettamente pratico delle misure dei campi e volgendo lo sguardo a enti geometrici idealizzati, può così mirare ad una teoria geometrica di precisione. Ciò è riscontrabile anche successivamente, e non solo negli ambienti unicamente matematici: nella filosofia di Platone (della cui scuola, ricordiamo, Euclide fu probabilmente allievo) viene posta una distinzione tra il mondo reale, imperfetto e mutevole, e il mondo delle idee, perfetto ed eterno. Lo studio della geometria si sposta sul secondo di questi mondi perché è ad esso che appartengono gli enti geometrici: il quadrato che viene studiato non sarà un campo agricolo da misurare, ma un ideale di quadrato - un ente astratto - di cui poi si possono trovare delle imperfette rappresentazioni reali (tra cui il suddetto campo). La matematica non è più una semplice scienza pratica o un'applicazione di regole di calcolo a esperienze della vita quotidiana, ma piuttosto una scienza che studia le relazioni tra gli enti astratti di questo mondo ideale. Una scienza che mira all'esattezza e non si accontenta più di mere approssimazioni, sufficienti nella geometria dei campi.

Inoltre, sempre per via dell'ambito legame con l'esattezza, come anche per il desiderio squisitamente filosofico di spiegazione delle ragioni prime della natura (e, se vogliamo, anche per la particolare realtà politica che si era creata), acquisisce, nell'ambiente greco, grande importanza la dimostrazione. Forse il merito primo va attribuito già ai pitagorici, forse a Talete; è comunque fuori di dubbio che è opera dei greci l'inserimento di una struttura logica e di un'impostazione deduttiva all'interno della geometria. Da questo momento si sentirà la necessità di provare qualsiasi proposizione, senza limitarsi all'enunciare esempi significativi: non ci si curerà più solo di alcune proprietà utili, ma anche del loro concatenamento logico.

[3]Non è comunque da escludere un forte utilizzo della matematica anche in ambienti cerimoniali. Come è da negare l'impossibilità di uno studio della matematica anche fine a sé stesso, presso le popolazioni dell'Egitto o della Mesopotamia. Per un approfondimento a riguardo si rimanda a [3, capp. 1-3]

È proprio in questa concezione di geometria che viene a muoversi Euclide. La sua è la geometria del mondo delle idee platonico, fatta di astrazione sia negli oggetti dello studio, sia nei processi dimostrativi. Approfondiamo quale fu il modus operandi del matematico di Alessandria: una dimostrazione, per essere valida, deve poter ricavare i propri risultati da una serie di passi logici che tengano conto unicamente di quelle proposizioni già in precedenza dimostrate, in una catena di deduzioni che ha la propria base nei postulati, asserzioni ritenute vere a priori. In poche parole si parla di *metodo assiomatico*: partire da un ristretto numero di assunzioni iniziali e definizioni, e da esse ricavare, attraverso un processo logico-deduttivo, tutte le proposizioni.

Il grande lavoro svolto da Euclide fu proprio quello di raccogliere la matematica del suo tempo e riuscire a riordinarla in un sistema organico dove ogni teorema ha, nella sua dimostrazione, riferimenti unicamente ai teoremi precedenti e ai postulati. Il motivo per cui Euclide è ricordato non è solo il suo lavoro geometrico (che come detto è per lo più da attribuirsi a matematici precedenti) quanto quello logico.

Tuttavia, in particolar modo agli occhi della matematica moderna, l'approccio di Euclide, e della matematica greca in generale, non può dirsi del tutto riuscito. Più di un fattore, infatti, si presenta ad inficiare il rigore della struttura logica edificata. La realtà sensibile rimane pur sempre un punto di riferimento, di cui il mondo ideale è un'astrazione. Le stesse argomentazioni di Euclide fanno, di tanto in tanto, riferimenti più o meno espliciti alla realtà: intere dimostrazioni, che Euclide lo volesse o meno, poggiano sulla rappresentazione all'interno del mondo fisico degli oggetti matematici. Gli stessi postulati, che hanno il ruolo di verità prime, non deducibili logicamente, vengono accettati in virtù di un'evidenza empirica (a tal proposito, vedremo in seguito come tale auto-evidenza metta in crisi il famoso V postulato). Questo porta intrinsecamente a una forma di squilibrio: esistonono due tipi di verità, la prima logica e necessaria, che discende la propria correttezza dal processo logico-deduttivo (ed è quella dei teoremi e delle dimostrazioni); la seconda è una verità empirica, basata sull'auto-evidenza degli assiomi. In poche parole la realtà sensibile si assumeva la responsabilità di garantire la legittimità della geometria. Proprio per questo la geometria greca è ancora una geometria del reale.

La matematica moderna (e qui si intende la matematica dalla fine del diciannovesimo secolo ai giorni nostri, e in particolare l'approccio formalista di Hilbert) muove un passo ulteriore. L'obbiettivo è quello di costruire una struttura matematica coerente, che non derivi più la propria validità dal mondo sensibile. La "verità" di un certo risultato nel mondo reale non ha più alcuna importanza, ciò che conta è che esso possa essere logicamente dedotto dalle assunzioni iniziali della teoria. Ovvero, alle proposizioni iniziali (gli assiomi) non è richiesto alcun carattere di evidenza, esse sono soltanto ipotesi che vengono assunte per vere, mera necessità al fine di fondare tutta la trattazione ulteriore. La forza e la verità di una teoria così formulata non risiedono dunque nella sua auto-evidenza, quanto nella sua non contraddittorietà, ovvero nell'impossibilità di ricavare delle contraddizioni all'interno della teoria stessa.

Soltanto *a posteriori* è possibile avviare un processo di associazione di significati empirici ai termini della teoria, in un procedimento di interpretazione che lega l'assiomatica alla realtà. In parole povere solo a posteriori, ed in via eventuale, la teoria formale spiega un fenomeno fisico.

Ulteriori aspetti e criticità del moderno approccio formalista verranno approfonditi nel Capitolo 2 e nell'Appendice A; per il momento limitiamoci a quanto detto.

1.3 Il Libro I

É giunto adesso il momento di entrare più nel dettaglio nello studio degli *Elementi*. Le definizioni, i postulati, le nozioni comuni e gli enunciati delle proposizioni verranno esposti nella loro traduzione presa da [4].

Partiremo, come d'altronde fa lo stesso Euclide, dalle definizioni del Libro I.

1.3.1 Le definizioni

L'elenco delle definizioni è piuttosto lungo e spazia tra concetti di punto, retta, angolo, circonferenza ecc... Riporteremo qui solo alcune di tali definizioni, quelle per noi di maggiore interesse; per un elenco completo si rimanda all'Appendice B.

Definizioni:

I. Punto è ciò che non ha parti.

II. Linea è lunghezza senza larghezza.

IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).

V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.

X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui e innalzata.

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Osserviamo che alcune delle definizioni riportate risultano essere soddisfacenti anche dal punto di vista del moderno formalismo matematico. In questo senso la definizione **X** introduce rigorosamente e senza vizi logici la nozione di angolo retto, facendo riferimento al concetto di angolo già precedentemente definito. Similmente anche la definizione **XXIII** esplicita il concetto di parallelismo chiedendo al lettore la sola nozione di linea retta. Questo discorso non può però essere esteso a tutte le altre definizioni, ed anzi, questa parte degli elementi mostra una forte debolezza: alcune di queste definizioni, di fatto, non definiscono nulla. Dire che un «punto è ciò che non ha parti», o che una «linea è lunghezza senza larghezza», o anche che una «superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza», è dire nulla. La proposizione «punto è ciò che non ha parti», non solo usa un linguaggio che alle orecchio di un moderno risulterebbe poco chiaro e decisamente fumoso, ma non sta definendo niente. Affinché si possa essere soddisfatti di una definizione è necessario che essa poggi unicamente su enti in precedenza già definiti. Frasi come le prime tre riportante in elenco non danno maggiori informazioni su punti, rette e piani di quante non se ne avesse in precedenza.

Ulteriori critiche, d'altra parte, possono essere mosse anche alla circolarità logica presente in alcune delle definizioni. Consideriamo per esempio la definizione **VIII**. Ricondurre la definizione di angolo al concetto di inclinazione reciproca di due rette è un procedimento viziato dal fatto che la nozione di inclinazione non è stata precedentemente definita e non è dunque più nota di quella di angolo.

È probabile che questa parte degli *Elementi*, più che di definizioni, tratti di nomenclatura. Euclide dà per scontato che il lettore già possegga, almeno a livello intuitivo, i concetti di punto, retta e piano; e si limita a dar loro un nome. Non dice cosa essi siano, ma ricorda a chi legge come si chiamano quei dati oggetti già presenti nella sua intuizione.

Questo non deve sorprendere: abbiamo già detto che la matematica greca non è ancora arrivata ad un pieno grado di astrazione, e il mondo della realtà sensibile mantiene ancora un ruolo non trascurabile. In questo senso, delle nozioni di punto o di retta il discepolo di Euclide ha già fatto esperienza e ha ben chiaro cosa siano. Non vi è rischio di ambiguità.

Osservazione 1. La retta è sempre intesa come finita. D'ora in avanti, fintanto che tratteremo della geometria degli *Elementi*, useremo indistintamente i termini *retta* e *retta terminata*, riferendoci in ambo i casi a quello che oggi è detto segmento.

Osservazione 2. La definizione **VIII**, curiosamente, esclude esplicitamente quegli angoli i cui lati giacciono sulla stessa retta, ovvero l'angolo piatto e l'angolo nullo; che pure sono, nella moderna geometria, accolti a pieno diritto come tutti gli altri.

1.3.2 I postulati e le nozioni comuni

Proseguiamo passando alla seconda parte del Libro I, quella dedicata all'assiomatica.

Euclide enuncia cinque postulati e cinque nozioni comuni. Si tratta di quelle proposizioni che vengono aprioristicamente assunte per vere e che costituiscono il tassello iniziale nel processo di costruzione logica dell'edificio della geometria. Da un punto di vista classico la scelta di tali postulati è da intendersi come una conseguenza della loro auto-evidenza e rimarca l'immagine di geometria come rappresentazione del mondo reale; da un punto di vista più moderno e astratto si tratta di semplici proposizioni arbitrariamente poste come punto di partenza di deduzioni logiche, e dunque non serve chiedersi se abbiano o meno una validità nel mondo fisico.

Comunque vengano intese queste dieci proposizioni, il confine tra postulato e nozione comune è sottile e per lo più arbitrario. Secondo alcuni commentatori i postulati sono tali se presentano uno specifico contenuto geometrico, dove invece le nozioni comuni hanno un carattere più universale e si applicano a tutte le scienze. Altri non fanno alcuna distinzione ed inseriscono le dieci supposizioni in un'unica categoria.

Qui di seguito l'esposizione delle dieci supposizioni.

Postulati. Risulti postulato:

I. che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II. E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Nozioni comuni:

1) Cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali anche tra loro.

2) E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.

3) E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

4) E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.

5) Ed il tutto è maggiore della parte.

Alcune considerazioni:

a) il V postulato ha da sempre ricoperto un ruolo singolare all'interno di questo insieme di assiomi. Poiché dà una condizione sufficiente affinché due rette non siano parallele è passato alla storia come *postulato delle parallele*. Noi ci riferiremo ad esso in ambo i modi.

Una delle sue particolarità risiede proprio nelle sua formulazione: essa ricorda molto più quella di un teorema che non di un assioma. Inoltre lo stesso Euclide sembra voler ritardare il suo utilizzo quanto più possibile. Eviterà infatti di ricorrere al postulato delle parallele per le prime ventotto proposizioni, cedendo, infine, nella Proposizione (I.29). Questo, probabilmente, è dovuto al fatto che lo stesso Euclide metteva in dubbio l'evidenza del postulato: dove i primi quattro postulati non creavano grandi incertezze, l'ultimo si presentava come molto più insidioso. Ricordiamo che le rette erano, per Euclide e per i matematici greci, limitate (o "terminate"). Che poi il II postulato garantisse la possibilità di estendere indefinitamente tali segmenti non eliminava il fatto che le rette avessero un punto d'inizio e uno di fine. Per Euclide la retta non era attualmente infinita, ma potenzialmente. Il quinto postulato richiede però una visione globale della retta; costringe il matematico greco a considerarla nella sua interezza, ovvero indefinitamente estesa. In questo processo è presente un passaggio dall'infinito potenziale, insito nel II postulato e nient'affatto problematico per i greci, all'infinito in atto, storicamente più arduo da affrontare.

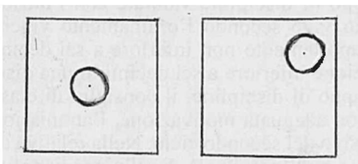
Certamente per l'assiomatica moderna questo è un problema irrilevante: che il postulato sia "vero" nel nostro mondo o meno non importa; esso verrà assunto, e si costruirà di conseguenza una teoria geometria il cui unico giudice sarà la coerenza logica. Ma nel corso della storia ben diverso è stato l'approccio seguito. In assenza di un'evidenza a farne da garante, molti matematici hanno cercato di *dimostrare* il postulato delle parallele a partire dagli altri quattro, trasformandolo quindi da assioma a teorema. Da qui è partita una lunga storia di tentativi di dimostrazione, che avrà culmine con la nascita delle geometrie non-euclidee nel diciannovesimo secolo.

Il V postulato divide in maniera netta il Libro I in due parti. La prima, che va dalla Proposizione (I.1) alla (I.28), non lo contempla in alcun modo e quindi i suoi risultati ne sono del tutto indipendenti: essa viene a costituire una geometria anche nota col nome di *geometria assoluta*; la seconda, che comprende la restante parte del Libro, deriva invece tutti i suoi risultati dal V postulato. Questa seconda parte deduce la propria validità dall'accettazione della validità del V postulato; la negazione di questo porta all'esclusione di tutte le proposizioni dalla (I.29) alla (I.48), e alla formulazione di una - o più - geometrie, dette *geometrie non-euclidee.*

b) Si può poi notare come i postulati - ad eccezione al più del quarto - abbiano un forte carattere costruttivo: essi rendono possibile la costruzione di rette o di circonferenze. In un certo senso questi postulati corrispondono a un uso di riga e compasso, benché Euclide non nomini mai tali strumenti, forse per non contaminare con la pratica una trattazione che vuole mantenere puramente teoretica. È tuttavia innegabile che la sua geometria sia una geometria costruttivista. Questo varrà non solo per i postulati, ma anche per le proposizioni, dove addirittura la costruibilità di un ente geometrico avrà valore di garanzia della sua esistenza.

c) Le nozioni comuni danno essenzialmente una definizione di *uguaglianza.* Non è del tutto chiaro se tale nozione di uguaglianza sia da identificarsi con la nostra nozione di equivalenza, o piuttosto con quella di congruenza. Seguendo [4, p. 58] attribuiremo al termine uguaglianza il significato di equivalenza di grandezze (estensione per le figure piane, volume per le solide). D'altra parte, intendendo l'uguaglianza come congruenza, le nozioni comuni (2) e (3) risulterebbero smentibili da alcuni esempi notevoli. A tal proposito si osservi il seguente esempio.

Esempio 1.1. Supponiamo le nozioni comuni riferite alla nozione di congruenza. Consideriamo i due quadrati congruenti in figura. Individuiamo nel primo un cerchio interno con centro nel centro di simmetria del quadrato; mentre nel secondo individuiamo un cerchio congruente ma con centro non sovrapposto al centro di simmetria. Rimossi i due cerchi (congruenti) dovremmo, per la terza nozione comune, avere due figure congruenti. Questo è evidentemente falso.



d) L'ultima delle nozioni comuni - in un certo senso tanto evidente - non è al giorno d'oggi più accettata con la stessa naturalezza di Euclide. Se, infatti, essa risulta vera per gli insiemi di cardinalità finita, non si può dire lo stesso per gli insiemi *infiniti*. Di più: gli insiemi infiniti vengono ad essere definiti proprio dalla negazione di questa proprietà.

1.3.3 Le proposizioni

Veniamo quindi alle proposizioni enunciate e dimostrate nel Libro I. Le dimostrazioni che verranno riportate sono le medesime adottate da Euclide, benché magari espresse con un diverso linguaggio. Come già accennato - e come a breve si potrà constatare - molte di queste dimostrazioni hanno infatti un approccio costruttivo (come d'altronde anche i loro enunciati), risultando quindi di lettura un poco pesante. Abbiamo dunque voluto fare qualche sacrificio sul piano della filologia per guadagnarne sulla semplicità espositiva.

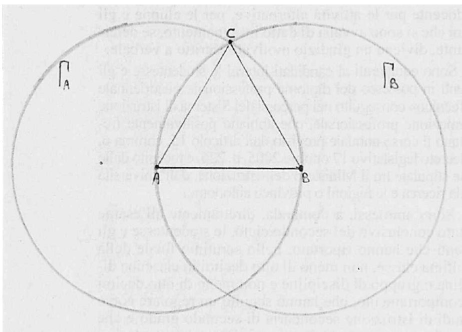
Anche in questo caso ci limiteremo a discuterne solamente alcune, quelle più significative in ottica di critica al metodo assiomatico seguito da Euclide. Per un elenco delle proposizioni del Libro I si rimanda all'Appendice B.

Partiamo dall'inizio:

Proposizione (I.1)**.** *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.*

Dimostrazione. Consideriamo una qualsiasi retta AB nel piano.

Descriviamo una circonferenza Γ_A con centro nel punto A e di raggio la retta AB. Tale costruzione è legittimata dal III postulato. Analogamente descriviamo la circonferenza Γ_B con centro in B e raggio AB. Sia C il punto di intersezione tra queste due circonferenze.



Congiungiamo C con A (costruzione resa lecita dal I postulato) e poi con B. Poiché A è il centro della circonferenza Γ_A, e C e B appartengono alla circonferenza stessa, allora AC ed AB sono uguali. Discorso analogo per BC e AB. Poiché, per la nozione comune (1), cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro, allora è valida l'uguaglianza tra AB, BC e AC.

Il triangolo è dunque equilatero. □

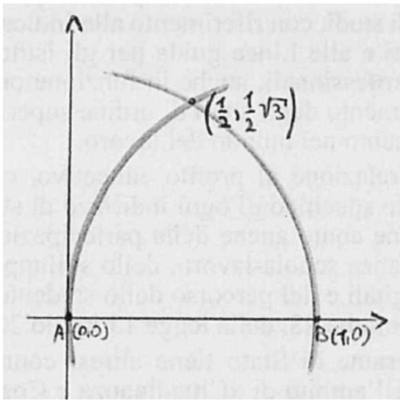
Osservazione 3. Questa prima proposizione è emblematica del lavoro di Euclide. Specificato ciò che desidera dimostrare, egli comincia la costruzione. Ogni singolo passaggio della dimostrazione è giustificato: così egli può costruire le due circonferenze per il III postulato e può congiungere i punti per il postulato I. Trattandosi della prima proposizione non può che far affidamento sui postulati e le nozioni comuni, e così fa.

Tuttavia già in questa prima dimostrazione è presente un notevole errore. Infatti in un certo passaggio Euclide chiede di considerare il punto C, intersezione delle due circonferenze. Chi garantisce che queste circonferenze abbiano intersezione non vuota? Euclide non dà nessuna dimostrazione di ciò, né è presente alcun postulato che garantisca l'esistenza del punto C. Certamente la cosa appare ovvia dal disegno, ma il metodo assiomatico voluto da Euclide non può fare riferimento che ai postulati, e non certo ad una evidenza visiva.

Due circonferenze, in generale, non hanno intersezione: possono essere l'una interna all'altra oppure troppo distanziate. Che non si ricada in uno di questi due casi, benché ovvio dalla figura, non viene dimostrato. D'altra parte, pure supponendo che la posizione reciproca delle circonferenze non sia come appena detto, come facciamo ad avere garanzia che le curve abbiano un punto in comune? È presente un'implicita accettazione della continuità dello spazio (e della curva); ma anche questo punto è problematico.

Proviamo a tradurre questo problema all'interno della geometria analitica. Dato che per i greci il termine numero è sempre riferito ai numeri naturali, ed al più possiamo considerare il loro rapporti, Euclide non può muoversi all'infuori dell'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$. Volendo ricorrere al piano cartesiano, dovremo per necessità costruirlo sopra il campo dei razionali.

Prendiamo quindi la retta in $\mathbb{Q}^2$ di estremi i punti $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$ e seguiamo il procedimento indicato dalla dimostrazione. Le due circonferenze che troviamo si intersecano in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ e in $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$; ma questi non sono elementi del piano cartesiano che abbiamo preso in esame. Ne consegue che le due circonferenze hanno intersezione vuota e la dimostrazione si interrompe.



Ovviamente quest'ultimo modo di ragionare è del tutto estraneo ad Euclide, ciononostante è interessante notare come il problema possa essere tradotto anche in termini della matematica moderna.

Principii di errore si possono dunque scorgere fin dalla primissima proposizione, e questo è solo uno dei casi dove Euclide fa implicito uso di postulati inespressi all'interno delle sue dimostrazioni; altri ancora seguiranno.

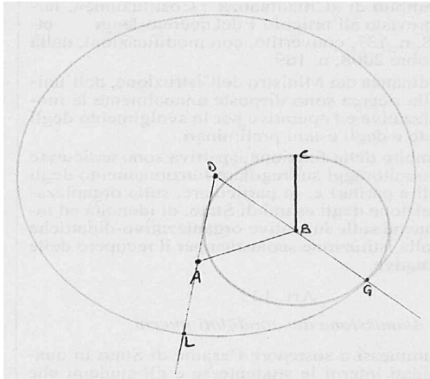
(Per vedere come Hilbert sia in grado di dare una dimostrazione rigorosa a questo enunciato si veda la Proposizione 2.49).

Enunciamo, giusto per mostrare come Euclide si rapporti al trasporto dei segmenti, anche la proposizione seconda:

Proposizione (I.2)**.** *Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto A e una retta BC. Applichiamo il I postulato e congiungiamo A con B. Sulla retta AB costruiamo il triangolo equilatero ABD (Proposizione (I.1)). Prolunghiamo DA e DB, rispettivamente oltre i punti A e B, determinando le corrispettive rette DA e DB (II postulato); dopodiché tracciamo il cerchio di centro B e raggio BC (III postulato). Sia dunque G il punto d'intersezione tra questo cerchio e la retta DB. Di nuovo, tracciamo il cerchio di centro D e raggio DG. Sia L il punto d'intersezione tra questo secondo cerchio e la retta DA.

Vogliamo dimostrare che AL è uguale a BC. Vale infatti, per costruzione, che BC e BG sono uguali, come anche DL e DG. Ma DL è composta da DA e AL, mentre DG è composta da DB e BG. Applicando allora le nozioni comuni sull'uguaglianza, ricaviamo proprio che AL è uguale a BG.

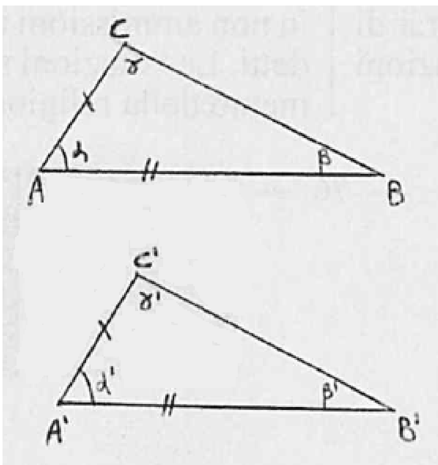


□

Veniamo alla celebre quarta proposizione:

Proposizione (I.4)**.** *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo].*

Dimostrazione. Consideriamo i due triangoli ABC e $A'B'C'$. Chiamiamo α, β e γ gli angoli interni al primo triangolo rispettivamente in A, B e C; analogamente α', β' e γ' in A', B' e C'. Per ipotesi sono uguali AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, α e α'.



Ora, se si *sovrappone* il triangolo ABC al triangolo $A'B'C'$, posto il punto A sopra A' e la retta AB sopra $A'B'$, il punto B coinciderà col punto B', dato che AB è uguale ad $A'B'$; e coincidendo la retta AB con la retta $A'B'$, anche la retta AC coinciderà con $A'C'$, perché l'angolo α è uguale all'angolo α'. Dunque anche il punto C coinciderà col punto C', perchè la retta AC è uguale alla retta $A'C'$.

Perciò la base BC si sovrapporrà alla base $B'C'$; e dunque, coincidendo il punto B col punto B' e C con C' la base BC sarà uguale alla base $B'C'$. Ma sovrapponendosi la base BC alla base $B'C'$, anche tutto il triangolo ABC si sovrapporrà a tutto il triangolo $A'B'C'$, e gli altri angoli si sovrapporranno agli altri angoli e saranno uguali ad essi, cioè l'angolo β all'angolo β', e l'angolo γ all'angolo γ'. □

Osservazione 4. La proposizione appena enunciata corrisponde a quello che, nelle scuole, viene insegnato come *primo criterio di congruenza* dei triangoli (I C.d.C.).

Ricordiamo che per Euclide in termine uguale ha il significato di equivalente. La Proposizione (I.4) non si limita a sancire l'uguaglianza, e dunque l'equivalenza, dei due triangoli, ma anche l'uguaglianza ordinata di tutti i loro elementi (lati ed angoli). In questo senso Euclide dimostra, implicitamente, che i due triangoli non sono soltanto equivalenti, ma bensì anche congruenti.

La dimostrazione procede per una semplice sovrapposizione dei due triangoli in questione, e per l'osservazione che necessariamente i vertici dovranno venire a coincidere e così i due triangoli nella loro interezza, e così anche i due angoli rimanenti.

Tuttavia anche in questo caso si può notare una mancanza da parte di Euclide: il principio stesso che il triangolo ABC possa essere possa essere trasportato rigidamente, in senso meccanico, sopra al secondo non è garantito da nessun postulato, né dalle proposizioni precedenti. Per quanto intuitivo possa essere questo procedimento, non c'è nulla negli assiomi che garantisca l'esistenza dei moti rigidi. Si potrebbe obbiettare che la Proposizione (I.2) permetta il trasporto dei segmenti, ed è vero, ma rimane impossibile il trasporto degli angoli, e dunque delle figure poligonali. Si potrebbe, nuovamente, obbiettare che la Proposizione (I.23) consente il trasporto degli angoli; ma tale proposizione ha nella sua dimostrazione il ricorso alla Proposizione (I.8), la quale, similmente alla (I.4), richiede i movimenti rigidi. Si tratterebbe dunque di un circolo vizioso. Si osservi poi a tal proposito che il IV postulato diverrebbe del tutto superfluo se si ammettesse di poter muovere rigidamente qualsiasi figura.

Altro elemento problematico risiede nell'ultima parte della dimostrazione: Euclide deduce che, eseguita la sovrapposizione, B coinciderà con B' e C con C', allora saranno coincidenti anche le rette BC e $B'C'$. Questo passaggio in verità non è consentito: Euclide sta tacitamente intendendo che per due punti distinti sia unica la retta congiungente, ma il I postulato garantisce la sola esistenza della retta e non vieta che possa esisterne più d'una.

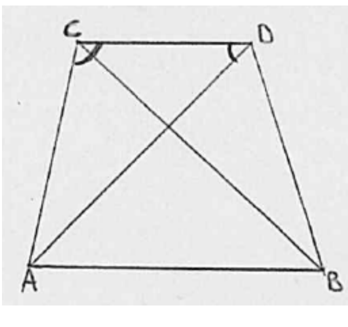
Siamo dunque ancora di fronte ad un uso improprio del metodo assiomatico.

Procediamo oltre:

Proposizione (I.7). *Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite ed aventi un diverso punto d'incontro.*

Dimostrazione. Sia data la retta AB. Supponiamo per assurdo di poter costruire su di essa le due rette AC e BC, che si incontrano nel punto C, e *anche* le rette AD e BD, uguali rispettivamente ad AC e a BC, dalla *stessa parte*, e aventi punto d'intersezione D diverso da C.

Si congiunga ora C con D.



Il triangolo ACD è isoscele e dunque, per la Proposizione (I.5), ha angoli alla base uguali; ovvero $\widehat{ACD}$ è uguale a $\widehat{ADC}$. Per cui l'angolo $\widehat{ADC}$ è maggiore dell'angolo $\widehat{DCB}$ (nozione comune (5)); e l'angolo $\widehat{CDB}$ è molto maggiore dell'angolo $\widehat{DCB}$.

Osservando che anche il triangolo BCD è isoscele, si ricava che gli angoli $\widehat{CDB}$ e $\widehat{DCB}$ sono uguali, quando si era però appena dimostrato che l'uno è molto maggiore dell'altro. Da cui l'assurdo. □

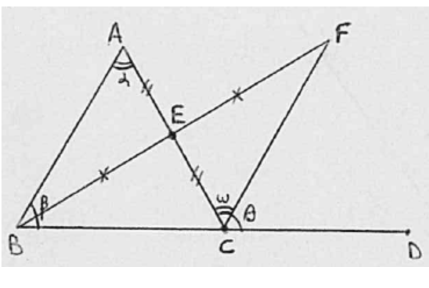
Osservazione 5. Della Proposizione (I.7) vorremmo sottolineare sostanzialmente due aspetti cruciali.

Nella prima parte della dimostrazione, Euclide chiede di costruire due triangoli a partire da una retta data, per i quali valgano alcune uguaglianze, e i cui lati si trovino *«dalla stessa parte»* (rispetto alla retta data). Ora, il dubbio è: cosa significa stare "dalla stessa parte" rispetto alla retta? Come è possibile, dunque, stabilire se due punti arbitrari del piano giacciono dalla stessa parte o da parti opposte? Euclide non ne da una definizione. Sicuramente l'intuizione, supportata da una figura, risponde alle due domande appena poste; cionondimeno manca sia una definizione rigorosa di "stare dalla stessa parte", che un procedimento che permetta di verificare se due punti soddisfano o meno questa proprietà.

Una seconda problematica emerge nella parte finale della dimostrazione, esattamente dove viene richiamata la nozione comune (5). Euclide usa il fatto che l'angolo $\widehat{DCA}$ sia maggiore dell'angolo $\widehat{DCB}$, e successivamente che $\widehat{BDC}$ sia maggiore di $\widehat{ADC}$. Come si giustifica questa affermazione? La nozione comune (5), come si può essere sicuri di poterla usare? Ovvero, da dove deriva la certezza che l'angolo $\widehat{DCB}$ sia parte dell'angolo $\widehat{DCA}$? Prima di dare una risposta enunciamo e dimostriamo un'altra proposizione; rimandiamo dunque all'Osservazione 6.

Proposizione (I.16). *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo opposto esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Usiamo le notazioni presenti in figura. Prolunghiamo la retta BC oltre il punto C e fino ad un punto D (possibile per il II postulato).



Sia E il punto medio di AC (lo possiamo determinare per la Proposizione (I.10)). Congiungiamo B con E e prolunghiamo la retta trovata oltre E, fino ad un punto F. Per la Proposizione (I.3) possiamo supporre che EF sia uguale a BE. Congiungiamo ora C con F.

I triangoli ABE e FEC sono uguali ed hanno uguali ordinatamente tutti i lati e gli angoli; infatti AE è uguale a EC per costruzione e così anche BE a EF; inoltre i due angoli interni in E sono opposti al vertice e dunque uguali a loro volta (Proposizione (I.15)). Ne consegue che sono uguali anche l'angolo α e l'angolo ω. In particolare quest'ultimo è minore dell'angolo esterno θ (nozione comune (5)) e perciò anche α è minore di θ.

Ripetendo la stessa costruzione, solo prolungando AC oltre C e secando a metà BC, è possibile dimostrare che β è minore di θ.

La procedura può poi essere ripetuta anche per gli altri angoli esterni. $\square$

Osservazione 6. Anche in questa dimostrazione abbiamo voluto sottolineare la forte consequenzialità tra le proposizioni e i postulati: ogni passaggio deve essere motivato in virtù di ciò che è già stato dimostrato in precedenza.

Anche in questo caso, però, e presente una falla: si afferma che l'angolo ω è minore di θ; ma ciò non è affatto dimostrato. Pare ovvio, poiché la retta CF *sta dentro* all'angolo θ; e a questo punto è sufficiente richiamare la nozione comune "il tutto è maggiore della parte"; ma ciò che manca è una definizione di *stare dentro*, senza la quale non possiamo legittimare l'ultimo passaggio della dimostrazione. In parole povere non siamo certi che CF sia tale da far sì che ω sia "parte" di θ.

Il problema è lo stesso della Proposizione (I.7): anche in questo caso Euclide si appella implicitamente alla rappresentazione grafica senza dare una motivazione logica.

Questo, in realtà, è solo un esempio di una problematica più grande presente negli *Elementi*: l'autore più volte chiede di *prendere un punto che giaccia fra A e B*, oppure *una linea che giaccia entro un angolo* (si possono vedere, a tal proposito, anche le dimostrazioni delle Proposizioni (I.10), (I.18) e (I.24)); ma i concetti di *stare fra*, di *giacere fra due punti*, non vengono mai definiti e rimangono lasciati all'intuizione, rendendo vane tutte le costruzioni che facciano appello su di loro. Una conseguenza è proprio la fallacità della dimostrazione della Proposizione (I.16).

Una dimostrazione rigorosa è però possibile, ed è data (seguendo Hilbert) nella Proposizione 2.35.

1.3.4 Conclusioni sul Libro I

Da quanto enunciato fino ad ora emerge un'immagine della teoria euclidea caratterizzata da diversi limiti ed errori. Sono presenti definizioni che non definiscono, una struttura assiomatica che non è seguita con il sufficiente rigore, postulati tacitamente ammessi, un ricorso frequente all'intuizione e alla rappresentazione nel reale delle figure geometriche, e concetti (come quello dello "stare fra") che non vengono mai definiti, per quanto spesso usati.

Ciò non deve però sminuire quello che è stato il grande passo avanti fatto da Euclide (e dalla matematica greca in generale). Non del tutto corretto sarebbe esprimere un giudizio intorno agli *Elementi* mantenendo una prospettiva strettamente moderna e dimendicandosi dell'epoca in cui furono scritti. D'altronde i criteri di rigore evolvono con i tempi e per quanto agli occhi moderni il lavoro di Euclide pare peccare su questo fronte, al suo tempo esso costituiva evidentemente la più rigorosa sistemazione logica della matematica; per oltre duemila anni la maggior parte dei matematici ha considerato come soddisfacente la trattazione euclidea e bisognerà attendere il lavoro di David Hilbert per trovarne una altrettanto completa ma più rigorosa.

1.4 I Libri V, X e XII

Dedichiamo questa breve sezione non tanto ad un'azione di critica degli *Elementi*, quanto ad un piccolo approfondimento sul *postulato di Archimede* per come è utilizzato da Euclide. L'obbiettivo è dare poi un senso al confronto con l'uso che di tale postulato farà Hilbert (Sezione 2.2.5).

Parleremo in partiolare della *teoria delle proporzioni*, e successivamente del *metodo di esaustione*. Non ci soffermeremo in questa sede né sulle dimostrazioni, né in generale sugli aspetti più tecnici; come non daremo un elenco esaustivo di tutte le proposizioni o le definizioni presenti nei Libri V, X e XII e che si rifacciano ai due argomenti sopra detti. La prospettiva sarà quella di una visione generale di ciò che fu l'approccio euclideo (ma si vedrà non solo suo) all'infinito dell'incommensurabile.

1.4.1 La teoria delle proporzioni

Argomento principale del Libro V degli *Elementi* è la teoria delle proporzioni. Come già fu per la geometria piana del Libro I, anche in questo caso i contributi di Euclide non vanno visti in un'ottica di originalità, quanto piuttosto in quella di riorganizzazione di una materia pervenutagli dai matematici greci antecedenti. Se però le fonti della geometria contenuta nel Libro I erano varie, e spaziavano da Talete ai pitagorici, per quanto riguarda la teoria delle proporzioni è possibile risalire ad un padre fondatore ben preciso: Eudosso di Cnido (IV secolo a.C.). È a lui che fin dai tempi più antichi viene attibuita la genesi di questa teoria.

L'esigenza di una sistemazione rigorosa delle proporzioni nasceva con la scoperta degli incommensurabili: fintanto che, infatti, le grandezze in gioco erano tra loro commensurabili, i numeri razionali adempivano più che sufficientemente alla descrizione del loro rapporto, ed anche una teoria ingenua (o intuitiva) delle proporzioni poteva bastare. Il discorso diveniva più complesso con le grandezze incommensurabili, e sarà proprio il matematico di Cnido che permetterà il superamento dell'ostacolo.

Quando si parla di teoria delle proporzioni si fa riferimento a grandezze in senso del tutto astratto: possono essere segmenti con la loro estensione, come anche superfici, ma non necessariamente debbono essere riconducibili ad enti geometrici. La richiesta, in vero fondamentale, è che siano *omogenee*, ovvero che sia possibile effettuare un confronto fra di loro. La terza definizione che Euclide inserisce in apertura del Libro V rimarca proprio questo fatto:

> **Definizione III**: Rapporto fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità.

Un'altra condizione richiesta alle grandezze, ed espressa nella definizione successiva, è invece oggi nota come postulato di Archimede:

> **Definizione IV**: Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.

Nota anche nella sua formulazione scolastica: «dati due segmenti, che non siano congruenti o nulli, esiste sempre segmento un multiplo del minore che supera il maggiore» (estratto da [1, p. 19]), con il nome di *postulato di Eudosso-Archimede*. In effetti, benché la nomenclatura moderna associ tale assioma ad Archimede, esso è molto probabilmente dovuto a Eudosso.

Ora, Euclide esprime il postulato come definizione, nel senso che definisce due grandezze come aventi un rapporto tra loro quando soddisfano il postulato. Poco cambia, la fondamentale richiesta è che le grandezze siano archimedee.

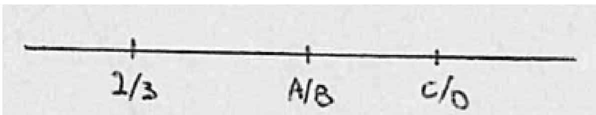
Le implicazioni della condizione di Archimede sono immediate, perché sarà già nella definizione quinta che se ne farà ricorso. Qui sarà infatti definita la proporzione: Euclide (ma tale definizione è con quasi certezza da attribuirsi in toto a Eudosso) definisce il rapporto per via astratta, e non direttamente:

> **Definizione V**: Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se cosiderati appunto nell'ordine rispettivo.

In poche parole, prese due grandezze A e B, non viene definito cosa sia il loro rapporto (scritto in termini moderni, $A : B$), ma si stabilisce quando queste due grandezze hanno medesimo rapporto rispetto ad altre due C e D. Cioè si suppone l'esistenza di un qualche cosa, di un *quid*, che caratterizza coppie di grandezze omogenee (e archimedee), e che coppie di grandezze possono avere uguale tra loro o diseguale.

Traducendo in termini moderni, ciò che viene detto è che, date quattro grandezze (omogenee e archimedee) A, B, C e D, vale che A e B sono nello stesso rapporto di C e D se, per ogni coppia di numeri naturali m, n, allora si ha che $mA > nB$ implica $mC > nD$; $mA = nB$ implica $mC = nD$ e $mA < nB$ implica $mC < nD$. Ovvero è presente una *concordanza di segni*.

Questa definizione si riferisce alle grandezze commensurabili quanto a quelle incommensurabili, anzi, permette proprio il superamento di qualsiasi difficoltà derivasse dalle seconde. In questa definizione, infatti, è insita quella moderna di uguaglianza di numeri reali: il rapporto tra i valori m, n gioca il ruolo di razionale che approssima, per ecesso o per difetto, il rapporto $A : B$ (quando questo è irrazionale, altrimenti non è necessaria alcuna approssimazione). Il senso è il seguente: se per esempio, posto $m = 3$ e $n = 2$, otteniamo che $3A > 2B$ implica $3C > 2D$, vuol dire che la grandezza A è maggiore di $\frac{2}{3}B$ (e dunque C è maggiore di $\frac{2}{3}D$) e allora allo stesso modo il rapporto $A : B$ è maggiore di 2/3 (analogo per $C : D$). Ovvero il numero razionale 2/3 offre un'approssimazione per difetto sia di $A : B$ che di $C : D$.



Quanto detto non è dissimile dalla moderna definizione di numero reale, dove è richiesto che due numeri reali siano uguali se individuano le stesse sezioni nell'insieme dei numeri razionali. (Ovviamente il caso di grandezze commensurabili è anche più semplice, poiché è l'unico in cui si verifica l'uguaglianza nella concordanza di segni e non da luogo ad un processo infinito di approssimazioni).

Il postulato di Archimede, unitamente alla definizione quinta, portano con sé l'inevitabile introduzione dei numeri reali, ed anzi, le odierne definizioni di numero reale (di Dedekind o di Cantor) possono essere viste come delle riformulazioni moderne di un'idea di principio che era già radicata negli *Elementi*.

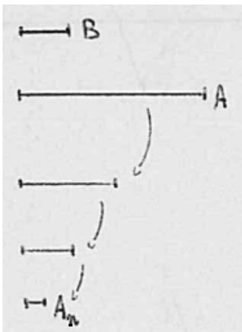
Il postulato di Archimede, perciò, contiene in sé una tensione verso la *continuità*, un'implicito concetto di *completezza*. Come fa notare lo stesso Frajese ([4, p. 298]), questa è l'enunciazione del concetto di continuità così come poteva darlo Euclide.

Il postulato di Archimede, o per meglio dire la definizione quarta, ha forti ripercussioni anche nelle parti successive. Volendo evitare qualsiasi velleità di esaustività, limitiamoci a quella che è forse la più diretta - tanto che può essere vista come una mera riformulazione del postulato stesso - delle applicazioni:

Proposizione (X.1). *[Assumendo come] date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore delle grandezza minore [inizialmente] assunta.*

Senza entrare nei tecnicismi della dimostrazione, essa procede come segue: A e B sono le grandezze date, con A maggiore fra le due.

Si costruisce un multiplo C di B che sia maggiore di A (cosa possibile proprio perché grandezze che soddisfano il postulato di Archimede). Supponiamo che il multiplo sia $C = nB$, allora procediamo come da enunciato e sottraiamo ad A la sua metà, ed al residuo la sua metà, e così via. È sufficiente procedere per n volte, ottenendo una grandezza A_n. Quest'ultima è necessariamente minore di B: se così non fosse il suo multiplo n-esimo sarebbe maggiore del multiplo n-esimo di B, ovvero A sarebbe maggiore di C. In contraddizione con le ipotesi.



Che la Proposizione (X.1) sia conseguenza diretta della definizione quarta appare evidente dalla dimostrazione. Il legame è a tal punto profondo che la proposizione può essere interpretata come una formulazione equivalente a quella del postulato. Se quest'ultimo garantisce che non esistano grandezze "infinite", la Proposizione garantisce che non esistano grandezze "infinitesime". In termini moderni l'eunUnciato può essere riformulato come segue:

$$\text{per ogni } \varepsilon \text{ positivo esiste un naturale } n \text{ tale che } \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Poiché ε, o la grandezza B che dir si voglia, può essere presa *"piccola a piacere"* allora non può esistere un minimo, e tra le grandezze euclidee ne esisterà sempre una più piccola di una qualsiasi grandezza data.

1.4.2 Il metodo di esaustione

Il metodo di esaustione, come la già detta teoria delle proporzioni, deve i propri natali a Eudosso di Cnido. In maniera sempre somigliante alla teoria delle proporzioni, anche in questo contesto entra fortemente in gioco l'infinito (potenziale). Dove nelle proporzioni si attuava un processo di approssimazione dei rapporti incommensurabili attraverso una successione di infiniti razionali, qui si tratta di dimostrare l'uguaglianza di superfici (o volumi) di figure che non siano entrambe poligonali. In particolare:

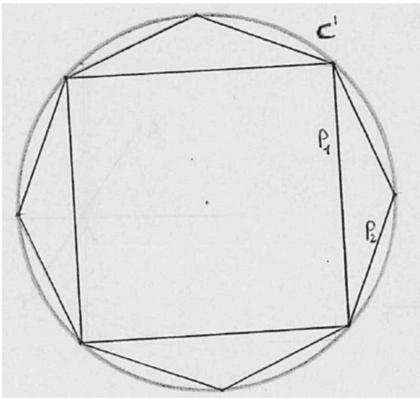
Proposizione (XII.2)**.** *I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.*

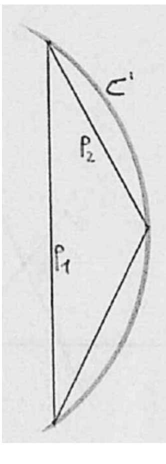
Qui si è appena enunciato un rapporto tra le aree di due cerchi e quelle dei quadrati costruiti sui rispettivi diametri.

La dimostrazione consiste nel provare che $Q : Q' = C : C'$, dove C e C' sono le estensioni dei due cerchi considerati, mentre Q e Q' le estensioni dei quadrati costruiti sui rispettivi diametri.

Supponendo che esista la quarta proporzionale S tra Q, Q' e C, ovvero una grandezza tale che $Q : Q' = C : S$, è da dimostrare che $S = C'$. (L'esistenza di una quarta proporzionale non è in vero garantita da alcun postulato o proposizione, ma Euclide, dopo l'introduzione della definizione quarta del Libro V, fa, come in parte accennato, tacitamente ammissione della continuità dell'insieme delle grandezze).

Supponendo per assurdo $S < C'$, si costruisce una successione P_n di poligoni con 2^{n+1} lati, inscritti a C'. Così P_1 sarà un quadrato, P_2 un ottagono costruito a partire da P_1, ecc... Non è difficile mostrare che il quadrato P_1 sia maggiore della metà del cerchio C', e che ogni qualvolta si raddoppiano i lati, si sottrae dal cerchio una quantità maggiore della metà dei segmenti circolari che si erano ottenuti con l'iscrizione del poligono precedente.





Ovvero alla grandezza C' stiamo sottraendo una quantità maggiore della sua metà, e al residuo un'altra quantità maggiore della sua metà; il tutto iscrivendo poligoni che ad ogni iterazione approssimano sempre meglio il cerchio, ovvero *esauriscono* la sua area.

Procedendo per queste sottrazioni, la grandezza C' dovrà ad un certa iterazione essere minore di $C' - S$ ("positiva" per ipotesi): si tratta di una diretta applicazione della Proposizione (X.1) o, equivalentemente, del postulato di Archimede. Esisterà, ovvero, un certo naturale n tale che $C' - P_n < C' - S$. Da cui la disuguaglianza $S < P_n$.

Questo è assurdo: Euclide dimostra infatti che le grandezze P_n sono tutte minori non solo di C' (d'altra parte si tratta di figure inscritte), ma anche di S (a tal proposito si può vedere la dimostrazione della (XII.2) data in [4, p. 931])

Quindi si dimostra, in maniera similare, come $S > C'$ sia altrettanto assurdo.

Non rimane che una sola possibilità: $S = C'$.

Il metodo di esaustione, per quanto debba i suoi natali a Eudosso, diverrà celebre anche grazie ai lavori di Archimede, e abbiamo mostrato poggiare anch'esso sulla quarta definizione del Libro V. Essa diventa quindi lo strumento fondamentale nella geometria euclidea: apre le porte alla teoria delle proporzioni, al metodo di esaustione, all'infinito e anche, seppur in maniera tacita, alla continuità e ai numeri reali.

Capitolo 2

I *Grundlagen der Geometrie*

In questo secondo capitolo studieremo la celebre opera di Hilbert, *Fondamenti della geometria*. Anche in questo caso daremo un'esposizione che presenti globalmente l'opera, andando poi ad approfondire quegli specifici aspetti che ci permettano un confronto con quella euclidea. Ci interesseranno, perciò, non soltanto i risultati trovati da Hilbert o i teoremi dimostrati, ma anche - e soprattutto - la soluzione che egli adotta per porre una correzione a tutte quelle mancanze che nel capitolo precedente abbiamo visto inficiare gli *Elementi*.

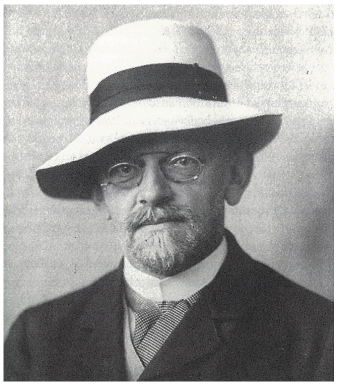
Sempre in omogeneità con il Capitolo 1, daremo significativa importanza anche al *metodo* seguito da Hilbert, e approfondiremo quella già citata visione formalista della matematica che egli stesso ha contribuito ad introdurre all'inizio del ventesimo secolo.

La trattazione di Hilbert coinvolge anche la geometria solida; su di essa, tuttavia, non proferiremo parola, limitandoci alla geometria piana, con i corrispondenti assiomi e teoremi. Una trattazione della geometria solida andrebbe infatti oltre gli scopi di questa tesi.

La presentazione che daremo della geometria di Hilbert segue sia l'originale *Fondamenti della geometria* [7], sia *Geometry: Euclid and Beyond* di R. Hartshorne [5]. Useremo indistintamente le due fonti, con le rispettive notazioni e le rispettive presentazioni della materia trattata. Qualora ci dovessimo distaccare da esse non mancheremo di farlo presente.

2.1 La geometria di Hilbert e il formalismo

Se di Euclide poco sappiamo di certo, questo non si può dire di David Hilbert. Nato a Königsberg, Prussia, nel 1862, da una famiglia della media borghesia prussiana. Sempre a Königsberg studiò e, nel 1887, ottenne la libera docenza.



Ebbe modo in quegli anni di fare la conoscenza di alcuni dei più grandi matematici del continente, tra cui Felix Klein, Henri Poincaré e Leopold Kronecker. Nel 1895, su chiamata di Klein, iniziò ad insegnare come professore ordinario a Göttingen, dove trascorse il resto della sua vita. Risalgono al 1899 e al 1900, rispettivamente, la pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* e la presentazione dei celebri ventitre problemi al Secondo Congresso Internazionale di Matematica di Parigi. Morì a Göttingen nel 1943. Per una biografia più completa si veda [7, pp. XV-XVIII].

La pubblicazione dei *Fondamenti della geometria* segue una tendenza che l'intera matematica, dal diciannovesimo secolo, aveva iniziato a seguire: quella del rigore. Nel corso dei duemila anni successivi ad Euclide la matematica aveva compiuto innumerevoli passi in avanti e grandi scoperte, e sempre più sentito era il dilemma di una sua rigorosa sistemazione. Cauchy e Weierstrass avevano fondato su basi rigorose l'analisi matematica, con Cantor si era arrivati alla prima teoria formale degli insiemi, sempre grazie a Cantor e a Dedekind anche il concetto di numero reale aveva avuto una sua sistemazione e infine Peano, con i suoi assiomi, aveva fondato l'aritmetica dei numeri naturali. La geometria, dal canto suo, ancora non aveva trovato una propria rigorosa sitemazione assiomatica e quella proposta negli *Elementi* di Euclide abbiamo già dato prova di come presentasse forti lacune, già ampiamente note anche ai matematici dell'epoca. La stessa geometria aveva visto, nel diciannovesimo secolo, il proprio secolo d'oro: gli studi sulle superfici da parte di Gauss e successivamente di Riemann, la nascita della geometria non-euclidea di Bolyai-Lobačevskij e la pubblicazione del Programma di Erlangen da parte di Klein sono tutti esempi di una disciplina geometrica che stava sviluppandosi come mai prima d'allora. Doveva dunque apparire limitante che una così florida branca della matematica ancora mancasse di solide basi. Fu in questo contesto che si inserì Hilbert, quando presentò il suo tentativo di superamento degli *Elementi* e la conseguente nuova fondazione della geometria.

Come avremo modo di studiare dettagliatamente nella successiva sezione, i *Fondamenti* rappresentano un'esposizione assiomatica della geometria sintetica. Hilbert parte senza dare alcuna definizione di punto, retta o piano; richiede semplicemente l'esistenza di tre insiemi, i cui elementi saranno detti rispettivamente punti, rette e piani, e assume l'esistenza di alcune relazioni tra detti elementi. Tali relazioni saranno regolate dagli assiomi che enuncerà subito dopo. Hilbert si era ben reso conto dei problemi insiti nelle definizioni date da Euclide, come anche dell'impossibilità di definire tutti gli enti matematici all'interno di una struttura logica-deduttiva. Perciò lascia indefiniti i concetti di punto, retta e piano, limitandosi alla mera assunzione dell'esistenza di tre insiemi e di alcune relazioni tra essi. Quali siano questi insiemi è del tutto irrilevante, ciò che ha valore è che possano essere definite su di loro le relazioni richieste e che queste soddisfino gli assiomi enunciati. Che gli insiemi corrispondano ad una realtà empirica che a sua volta possa essere associata a ciò che intuitivamente intendiamo per punti, rette o piani non è assolutamente una richiesta. Dirà lo stesso Hilbert che se considerassimo tavoli, sedie e boccali di birra il discorso non cambierebbe. Insomma, siamo liberi di attribuire a questi enti un significato arbitrario, purché sia tale da soddisfare gli assiomi.

Vi è dunque un passaggio dall'ontologia (la definizione dell'oggetto in sé, presente in Euclide) ad una prospettiva *relazionale*: uno studio delle strutture indipendente dalla natura degli enti trattati. L'intera geometria di Hilbert viene costruita tacendo cosa gli oggetti *siano* ma presentandoli solo in virtù delle relazioni che li legano. Le stesse relazioni, d'altro canto, non vengono definite se non attraverso gli assiomi che le regolano. Anche in questo caso non è presente un'ontologia della relazione.

Il passo di astrazione ivi contenuto è forte. Se la geometria di Euclide, nonostante la sua pur notevole astrazione, richiedeva ancora di sapere cosa *fossero* punti e rette e rimandava ad un'intuizione empirica, la geometria di Hilbert recide ogni presunto legame con la realtà, trasformandosi in quel perfetto sistema formale di cui si era parlato nella Sezione 1.2. Rimane indubbio che una realtà empirica continui ad esistere all'infuori del sistema formale, e continua ad essere desiderabile che quest'ultimo possa, attraverso un processo di assegnazione di significati, essere confrontato con il mondo fisico; come continua ad essere vero che gli assiomi riflettono intuizioni empiriche (avremo successivamente modo di dare un senso a questa frase), ma ciò appare più come una considerazione fatta a posteriori piuttosto che come una richiesta a priori; si intende qui dire che benché sia possibile interpretare le relazioni astratte attraverso delle corrispettive empiriche, ciò non è necessario ai fini della teoria.

Tra le conseguenze di questo approccio vi è ovviamente la perdita di quella necessaria proprietà che era richiesta ai postulati euclidei, ovvero l'autoevidenza: se la teoria geometrica viene a slegarsi dal mondo reale non è più possibile pretendere che quest'ultimo ne funga da garante, né è indispensabile. La teoria deve essere giudicata su aspetti logico-formali come coerenza, indipendenza e categoricità (a tal proposito si veda la Sezione 2.4). La possibilità di dedurre ogni teorema o proposizione dagli assiomi dati in partenza, questo è l'obbiettivo - già presente in Euclide - che ritorna nella "scuola assiomatica" di pensiero matematico; scuola che ha avuto in Hilbert il suo massimo esponente. E se per Euclide il risultato era fallito, ora è portato a termine.

Un tale approccio è detto *formalista*: la matematica è intesa come una disciplina che tratta di simboli (non da intendersi come idealizzazioni di oggetti empirici) privati di ogni significato, e di formule che possono essere dedotte da altre attraverso le regole dettate dagli assiomi. In questa visione la matematica diviene un puro sistema formale, un "gioco" privo di significato in cui si gioca con simboli privi di significato, rispettando delle regole formali decise in partenza. Quella della scuola formalista è una delle più estreme prospettive riguardanti un'assiomatizzazione della matematica, e proprio per tale ragione non fu esente da critiche da parte di matematici del ventesimo secolo (si veda l'Appendice A).

Un altro aspetto non di secondaria importanza nella geometria di Hilbert è la richiesta del minor numero possibile di assiomi. Hilbert si pone il vincolo di introdurre quell'insieme di assiomi strettamente necessario per ricavare i teoremi della geometria euclidea, e si dà grande cruccio che il sistema individuato vanti l'indipendenza degli assiomi che lo costituiscono, in modo così da essere certo che nessuna affermazione postulata in principio sia deducibile dalle restanti ed evitando in tal modo che il sistema assiomatico sia sovrabbondante. L'idea di un'assiomatica dove gli assiomi siano in minor numero possibile non è affatto strana: essi rimangono pur sempre proposizioni accettate per vere a priori e senza possibile dimostrazione. Minore è il loro numero, più elegante è il sistema formale che si viene a creare.

Data una presentazione globale dei *Fondamenti della geometria*, veniamo a trattare più nello specifico il loro contenuto.

2.2 I cinque gruppi di assiomi

Consideriamo due insiemi; il primo indicato con $\mathcal{P}$, il secondo con $\mathcal{R}$. Diremo *insieme dei punti* l'insieme $\mathcal{P}$ e chiameremo *punti* i suoi elementi, indicandoli con A, B, C, ... Analogamente diremo *insieme delle rette* l'insieme $\mathcal{R}$ e chiameremo *rette* i suoi elementi, indicandoli con a, b, c, ... Sia punti che rette sono detti *elementi della geometria piana* o, più sinteticamente, del *piano*.

Sussistono, tra punti e rette, alcune relazioni reciproche, espresse attraverso costrutti linguistici come *"giacere"*, *"appartenere"*, *"stare fra"*, *"congruente"*: la descrizione «esatta e completa, ai fini matematici» di tali relazioni è presentata dagli *assiomi della geometria*.

Noi adotteremo, come spesso si trova in altri scritti, una presentazione un poco diversa: dato l'insieme dei punti $\mathcal{P}$, si richiede che $\mathcal{R} \subseteq \wp(\mathcal{P})$; in tal modo diviene immediato il concetto di "giacere su":

Definizione 2.1. Diremo che un punto A *appartiene* ad una retta r, o che *giace su una* retta r; o che r passa per A, se $A \in r$.

Analogamente diremo che un punto A è *esterno* ad una retta r, se $A \notin r$.

Definizione 2.2. Diremo che due rette r ed s si *intersecano* nel punto A, o che *hanno in comune* il punto A, se $A \in r \cap s$.

Definizione 2.3. Dati $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ e $r \in \mathcal{R}$, diremo che la retta r *giace interamente* (o *si trova*) nella regione $\mathcal{A}$, se $r \subseteq \mathcal{A}$.

Il corpo di assiomi viene diviso da Hilbert in cinque gruppi. Da un punto di vista logico questa suddivisione non ha significato alcuno, ma lo acquisisce se li si osserva in ottica geometrica. Possiamo, infatti, in tal modo capire immediatamente quali fatti possono essere dimostrati, e quali invece scartati, assumendo validi solo alcuni di tali assiomi. In più questa suddivisione serve a riconfermare quella visione secondo la quale gli assiomi sono espressioni di corrispondenti intuizioni spaziali. Lo stesso Hilbert, nell'introduzione di apertura ai *Fondamenti*, parlerà di «analisi logica della nostra intuizione dello spazio». Per quanto possa ricordare Euclide, le due posizioni sono formalmente molto diverse.

I cinque gruppi sono indicati come segue:

I 1-3. Assiomi di *incidenza*,

P. Assioma delle *parallele*,

O 1-4. Assiomi di *ordinamento*,

C 1-6. Assiomi di *congruenza*,

A-D. Assiomi di *continuità*.

2.2.1 Assiomi di incidenza

Gli assiomi di incidenza - detti anche assiomi *di collegamento* - hanno lo scopo di regolare e ordinare i concetti di "punti appartenenti a rette" e di "rette incidenti".

Gli assiomi sono i seguenti:

(**I 1**) Per due punti A, B, passa una ed un'unica retta r.

(**I 2**) Ogni retta contiene almeno due punti.

(**I 3**) Esistono almeno tre punti che non giacciono tutti sulla stessa retta.

Osservazione 7. Osserviamo come l'assioma (**I 1**) coincida in sostanza con il I postulato di Euclide.

Notazione: D'ora in avanti indicheremo con AB l'unica retta passante per i due punti distinti A e B. Essa sarà anche detta *retta congiungente* A *e* B.

Definizione 2.4. Dati n punti A_1,...,A_n sono detti *allineati* se esiste una retta che li contiene tutti.

Definizione 2.5. Una geometria piana che soddisfa gli assiomi (**I 1-3**) è detta geometria di incidenza.

Una geometria di incidenza è di fatto la più semplice geometria con cui si possa lavorare. In essa si trova quel corpo di assiomi appena sufficiente per poter operare con costruzioni d'intersezione. Da questo primo gruppo di assiomi sono comunque ricavabili alcuni primi e semplici risultati. In particolare Hilbert ennuncia la seguente:

Proposizione 2.1. *Due rette distinte del piano hanno al più un punto in comune.*

Dimostrazione. Siano r ed l due rette distinte.

Supponiamo per assurdo esistano due punti A e B, con $A \neq B$, per i quali passino ambe le rette. L'assioma (**I 1**) garantisce l'unicità della retta passante per una coppia di punti distinti, da cui la necessità che $r = l$. □

Questa proposizione contiene un risultato più interessante di quanto la sua semplicità non possa far credere. Abbiamo già detto che Euclide, nel suo I postulato, ammette l'esistenza - ma non l'unicità - di una retta passante per una data coppia di punti. Abbiamo anche visto che nella Proposizione (I.4) questo portava ad una dimostrazione scorretta, perché implicitamente si ammetteva non potessero esistere due rette per due punti B e C. La riscrittura degli assiomi da parte di Hilbert, con l'*esplicita* richiesta dell'unicità della retta, porta come primissima conseguenza (deducibile all'interno della sola geometria di incidenza) la correzione dell'imprecisione compiuta da Euclide.

In realtà si vedrà nella Sezione 2.2.4 come la Proposizione (I.4) venga inglobata in maniera del tutto originale all'interno dell'assiomatica dei *Fondamenti* rispetto a quella degli *Elementi*.

Modelli

Crucciamoci ora di trovare un *modello* alla geometria di incidenza.

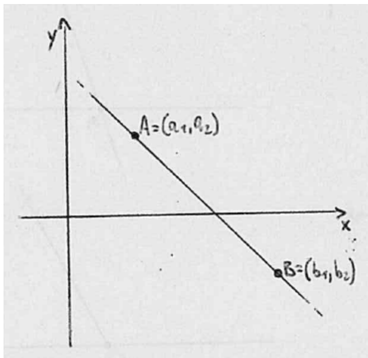
Un modello di una certa geometria altro non è che una interpretazione degli enti sussistenti nella teoria, e delle relazioni tra essi, ma in un un diverso contesto, in modo però tale che gli assiomi abbiano validità. Si tratta quindi di assegnare un significato alle nozioni indefinite di punto e retta e verificare che gli assiomi continuino a valere.

Non è difficile credere che la scelta di modelli sia infinitamente ampia e di esempi se ne possono fornire a piacimento. Alcuni dei più significativi, ed al contempo più semplici, sono quelli che seguono:

Esempio 2.1 (*Piano cartesiano*). Consideriamo il piano cartesiano sopra l'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$.
In questo modello l'insieme dei punti coincide con $\mathbb{Q}^2$; mentre una retta è data da:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \;\middle|\; ux + vy + w = 0\right\},$$

con $u, v, w \in \mathbb{Q}$, $(u, v) \neq (0, 0)$.



Osserviamo come vengano rispettati i tre assiomi.
(**I 1**): siano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{Q}^2$ distinti. Chiamaremo *ascisse* le componenti a_1 e b_1, mentre *ordinate* a_2 e b_2.

Se $a_1 = b_1$, consideriamo la retta

$$x - a_1 = 0.$$

Se $a_1 \neq b_1$, consideriamo la retta

$$y + \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}x + a_1\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} - a_2 = 0.$$

In entrambi i casi le rette soddisfano la richiesta di passare per A e B.

Attraverso un semplice sistema lineare si può dimostrare che non esistono altre rette, all'infuori di queste, che passano per i due punti.

(**I 2**): consideriamo la retta $ux + vy + w = 0$.

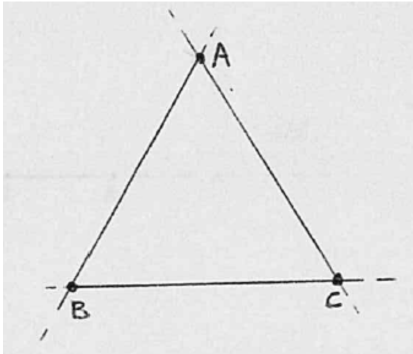
Se $v = 0$ allora $(-\frac{w}{u}, 0)$ e $(-\frac{w}{u}, 1)$ giacciono sulla retta.

Se $v \neq 0$ allora $(0, -\frac{w}{v})$ e $(1, -\frac{u+w}{v})$ appartengono alla retta.

(**I 3**): prendiamo i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Data una retta $ux + vy + w = 0$ e imponendo il passaggio per tutti e tre i punti, otteniamo $u = v = w = 0$.

Assurdo.

Esempio 2.2. In questo esempio vedremo un caso dove il piano presenta un numero finito di punti.
Sia dunque $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ un insieme di tre elementi; consideriamo come rette $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. Possiamo darne una rappresentazione dove le rette sono visualizzate come gli usuali segmenti con estremi i due punti della retta; ciononondimeno non si debba credere le rette contengano punti intermedi tra i suoi estremi, quella scelta è solo una rappresentazione di comodo.
Verificare che vengano soddisfatti i tre assiomi d'incidenza è banale.



Accenno all'indipendenza

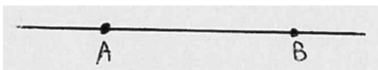
Arrivati a questo primo risultato, può essere interessante interrogarsi sull'indipendenza degli assiomi appena proposti. In questo modo possiamo dimostrare che non esistono assiomi superflui, e abbiamo già detto come questa fosse una delle condizioni che Hilbert richiedeva al proprio sistema.

Ricordiamo che un sistema di assiomi A_1,A_2,...,A_n è costituito da assiomi indipendenti se per nessun $i \in \{1, ..., n\}$ A_i può essere dimostrato a partire da A_1,...,A_{i-1},A_{i+1},...,A_n. Procedere in questo modo può però risultare difficoltoso, se non inutile; può essere più conveniente agire invece così: selezionato A_i, costruire un modello nel quale valgano gli assiomi A_1,...,A_{i-1},A_{i+1},...,A_n ma non A_i; in tal modo è dimostrata l'indipendenza di A_i dai restanti assiomi. Bisogna poi procedere per ogni singolo assioma del sistema.

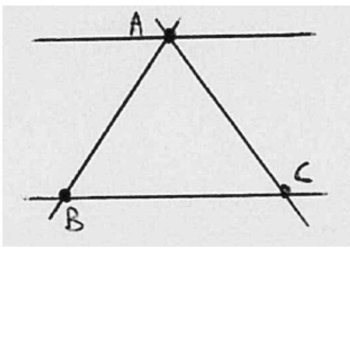
Avendo ora per le mani un sistema costituito da soli tre assiomi, questo procedimento non risulterà troppo lungo:

Esempio 2.3.

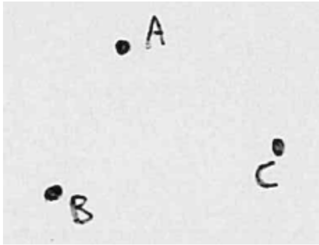
- (**I 1**), (**I 2**), ~~(**I 3**)~~:
Consideriamo il piano costituito da $\mathcal{P} = \{A, B\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}\}$.
È evidente la validità dei primi due assiomi; tuttavia non esistono tre punti non allineati.



- (**I 1**), ~~(**I 2**)~~, (**I 3**):
Siano $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e
$\mathcal{R} = \{\{A\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$.
(**I 1**) è ovviamente valido. I tre punti A, B e C non giacciono su una stessa retta. Ma {A} contiene solo un punto.



• ~~(I 1)~~, (**I 2**), (**I 3**):
Siano $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \emptyset$.
(**I 1**) è ovviamente non valido. I tre punti A, B e C non giacciono su una stessa retta. (**I 2**) è verificato trattandosi di un'affermazione sul vuoto.



Da queste costruzioni risulta dimostrata la seguente:

Proposizione 2.2. *Gli assiomi di incidenza sono indipendenti.*

2.2.2 Assioma delle parallele

Introduciamo ora il secondo gruppo di assiomi, costituito in vero da una sola proposizione. Non è raro trovare questo assioma inserito tra quelli di incidenza; tuttavia, sia per rispetto della suddivisione voluta da Hilbert, sia per una questione di convenienza, gli abbiamo fatto fare categoria a sé.

Questa proposizione riguarda le rette parallele, intrattabili con i soli assiomi della geometria di incidenza, ed ha lo stesso ruolo che aveva il V postulato nella geometria degli *Elementi* di Euclide.

Definizione 2.6 (Rette parallele)**.** Date due rette in una geometria piana, queste sono dette *parallele* se non hanno punti in comune.

L'assioma è quello che segue:

> (**P**) (*Assioma delle parallele*) Dati una retta r ed un punto A che non le appartiene, esiste ed è unica la retta parallela ad r e passante per A.

Emerge immediatamente come questo assioma sia diverso rispetto a quello presentato da Euclide. La proposizione usata da Hilbert fa riferimento soltanto a rette e punti e non richiama il concetto di angolo, al contrario invece del V postulato e delle sue rette secate. Il che non deve sorprendere: fino a questo momento il concetto di angolo non è stato ancora definito, rendendo quindi il postulato euclideo non utilizzabile.

L'assioma delle parallele appena citato deve la sua formulazione al matematico scozzese John Playfair (1748-1819), e per questo ci riferiremo ad esso anche con il nome di *assioma di Playfair.* Questo assioma è ormai divenuto il più noto e spesso preferito a quello formulato da Euclide; ciò non comporta problemi ad un livello di logica infatti, come dimostreremo nella Sezione 2.3.2, l'assioma di Playfair e il V postulato sono equivalenti.

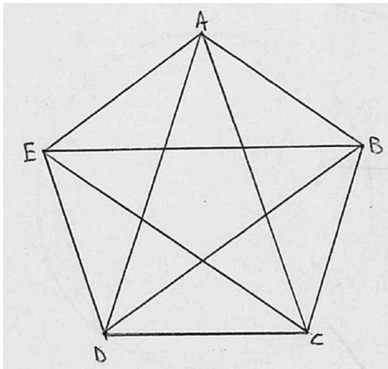
In realtà la formulazione voluta da Hilbert nei *Fondamenti* differisce in parte da quella qui proposta. Si è comunque scelto di distaccarsi un poco dall'originale per motivi di semplicità; non mancheremo, sempre nella Sezione 2.3.2, di enunciare la formulazione originaria e di spiegare le motivazioni che portarono Hilbert a prediligerla.

Modelli

Passiamo per ora a studiare modelli di geometria dove valga, o meno, (**P**).

Per un modello di geometria di incidenza con assioma delle parallele è sufficiente prendere in considerazione il già citato piano cartesiano razionale (Esempio 2.1). L'esistenza e l'unicità della retta parallela sono fatti ovvi. Più interessante è fornire un modello di geometria di incidenza dove l'assioma delle parallele non abbia validità, in particolare si può studiare il seguente:

Esempio 2.4. Sia $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ l'insieme dei punti; mentre $\mathcal{R}$ sia costituito da tutte e sole le coppie (non ordinate) di punti.
Questo è un modello di geometria di incidenza (la verifica di (**I 1**) (**I 2**) (**I 3**) è banale), ma non soddisfa l'assioma (**P**). Consideriamo infatti la retta $\{D, C\}$ e il punto A; esistono due rette passanti per il punto e parallele alla retta data: $\{A, E\}$, $\{A, B\}$.



In particolare il modello appena proposto ci permette di dimostrare la seguente:

Proposizione 2.3. *L'assioma delle parallele (**P**) è indipendente dagli assiomi di incidenza (**I 1**), (**I 2**) e (**I 3**).*

2.2.3 Assiomi di ordinamento

Il terzo gruppo di assiomi, detti *assiomi di ordinamento* o, nella letteratura inglese, di *betweenness*, assolve il ruolo di formalizzare rigorosamente quel concetto di "stare fra" che Euclide usava in senso intuitivo. Da qui seguirà anche una formalizzazione di altri concetti, quali "stare da una parte (rispetto a una retta)", "essere interno o esterno (rispetto a un poligono)" e renderà possibile l'ordinamento di punti su rette.

Considereremo validi gli assiomi di incidenza prima presentati.

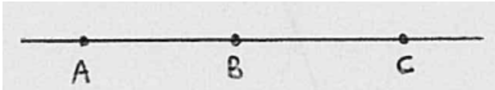
Si postula l'esistenza di una relazione tra terne di punti, che indicheremo con $A * B * C$, e leggeremo *"B sta fra A e C"* (oppure *"B giace fra A e C"*), che soddisfi i seguenti assiomi:

(**O 1**) Se $A * B * C$, allora A, B e C sono tre punti distinti su una retta e pure vale che $C * B * A$.

(**O 2**) Per ogni coppia di punti A e B esiste un punto C tale che $A * B * C$.

(**O 3**) Dati tre punti distinti su una retta ce n'è al più uno che giace fra gli altri due.

(**O 4**) (*Assioma di Pasch*) Dati tre punti A, B e C non allineati e una retta r che non contenga nessuno dei detti punti; se r passa per un punto che sta tra A e B, allora contiene anche un punto che sta tra A e C ma nessuno che giace tra B e C, *oppure* contiene un punto che sta tra B e C ma nessuno che giace tra A e C.



Osservazione 8. L'assioma (**O 4**) è detto di Pasch in nome del matematico tedesco Moritz Pasch (1843-1930), che ne dette la formulazione.

Anche in questo caso, di fatto, la formulazione qui proposta differisce da quella adottata da Hilbert. Nei *Fondamenti* è detto che:

> (**O 4***) Dati tre punti A, B e C non allineati e una retta r che non contenga nessuno dei detti punti; se r passa per un punto tra A e B, allora contiene anche un punto tra A e C oppure contiene un punto tra B e C.

La nostra versione è infatti sovrabbondante e Hilbert lascia come dimostrazione che la retta r non possa contenere simultaneamente punti tra A e C e tra B e C.[1] Si è optato per questa seconda formulazione, seguendo [5], per una trattazione più snella della materia.

Definizione 2.7 (Segmento)**.** Dati due punti distinti A e B nel piano, chiamiamo *segmento di estremi* A e B, e indichiamo $\overline{AB}$, l'insieme:

$$\{C \in \mathcal{P} \mid A * C * B\} \cup \{A\} \cup \{B\}.$$

I punti del segmento $\overline{AB}$ diversi da A e da B sono anche detti *punti interni* al segmento.

Risulta evidente, per la definizione e per l'assioma (**I 1**), che il segmento $\overline{AB}$ sia una porzione della retta AB. In particolare i punti di tale retta che non giacciono sul segmento $\overline{AB}$ sono detti *esterni* al segmento.

Definizione 2.8 (Triangolo)**.** Dati nel piano tre punti A, B e C, distinti e non allineati, definiamo *triangolo di vertici* i punti dati come

$$\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

Esso verrà indicato $\overline{ABC}$ o, più semplicemente, ABC.

I segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (privati degli estremi) sono anche detti *lati* del triangolo.

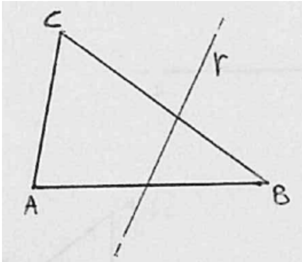
Si può subito notare che la definizione ora data di triangolo ha una certa differenza rispetto a quella solitamente presentata nelle scuole. Nel nostro caso il triangolo coincide con il suo bordo - quindi con l'unione dei suoi lati. Al contrario nei testi scolastici il triangolo è quella porzione di piano che dai lati è delimitata. D'altra parte, il concetto di esterno o interno ad un triangolo verrà definito solo successivamente (Definizione 2.15).

Osservazione 9. Per l'assioma (**O 1**) $\overline{AB} = \overline{BA}$.
Si può dimostrare che gli estremi di un segmento sono univocamente determinati. Dunque è possibile anche dimostrare l'univoca determinazione dei vertici di un triangolo.

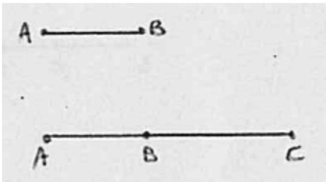
[1] [7, p. 6]

Osservazione 10. Con la presente definizione di triangolo, l'assioma (**O 4**) può essere riformulato in maniera più intuitiva come segue:

Se una retta r, non contenente nessun vertice di un triangolo, ne seca uno dei lati, allora deve secare anche uno ed uno solo degli altri due.



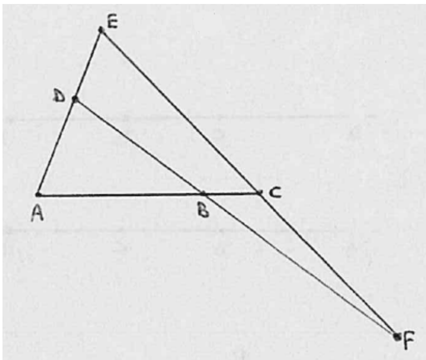
Osservazione 11. L'assioma (**O 2**) permette, dato il segmento $\overline{AB}$, di "prolungarlo oltre uno degli estremi" fino ad ottenere il segmento $\overline{AC}$. In questo senso possiamo dire che tale assioma precisa il II postulato adoperato da Euclide.



Teorema 2.1. *Per ogni coppia di punti distinti A e C esiste sempre, sulla retta congiungente, almeno un punto B che giace fra i due.*

Dimostrazione. Per l'assioma (**I 3**) esiste un punto D nel piano che non giace sulla retta AC. Per l'assioma (**O 2**) possiamo prolungare $\overline{AD}$ fino ad un punto E. Congiunto E con C, prolunghiamo fino ad F. Congiungiamo D con F.

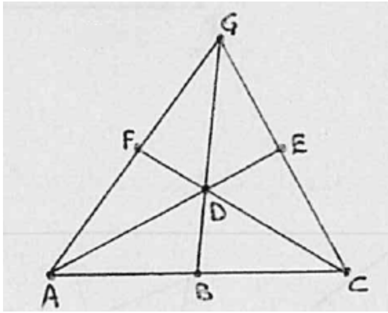
La retta così trovata non contiene vertici del triangolo ACE (se ne contenesse anche solo uno, ricorrendo a (I 1), si dimostrerebbe che tutti i punti della figura sono allineati), e seca il segmento $\overline{AE}$ in D; dunque o contiene anche un punto tra A e C, e la tesi risulta dimostrata, oppure contiene un punto tra E e C. Quest'ultima possibilità è da escludersi, altrimenti si arriverebbe nuovamente all'assurdo che tutti i punti in figura sono allineati.



□

Proposizione 2.4. *Di tre punti distinti e allineati A, B e C, ce n'è almeno uno che giace tra gli altri due.*

Dimostrazione. Supponiamo che A non giaccia fra B e C, né C tra A e B. Vogliamo dimostrare che necessariamente $A * B * C$.



Sia D esterno alla retta AC. Congiungiamolo con B e individuiamo su BD il punto G tale che $B * D * G$. Congiungiamo G sia con A che con C.
Applicando (**O 4**) al triangolo BCG e alla retta AD, e utilizzando ragionamenti simili a quelli della dimostrazione del Teorema 2.1, concludiamo che esiste E tra C e G, punto di intersezione di AD e CG. Analogamente possiamo affermare l'esistenza di un punto F tra A e G, intersezione di AG e CD.

Applichiamo, ora, l'assioma (**O 4**) al triangolo AEG e alla retta CF. Ne consegue che CF interseca AE in un punto tra A e E. Poiché l'intersezione delle due rette è il punto D, e tale intersezione deve essere unica per la Proposizione 2.1, allora $A * D * E$. Analogamente, focalizzandoci sul triangolo ACE e sulla retta GB, concludiamo che B sta fra A e C. □

Osservazione 12. La Proposizione 2.4, congiuntamente all'assioma (**O 3**), garantisce che dati tre punti su una retta *esiste*, *unico*, tra i tre quello che giace fra gli altri due.

Si è detto che questo terzo gruppo di assiomi renda possibile l'ordinamento di punti su rette. Intendiamo dire che la relazione di cui sopra permette l'introduzione di un modo naturale di ordinare i punti; ordinamento che non sarebbe altrimenti possibile (non lo era per Euclide, ad esempio) se non per via del tutto intuitiva e non formale. Vediamo adesso in che senso, data una retta arbitraria, possiamo ordinarne i punti come naturale applicazione degli assiomi di incidenza e ordinamento.

Fintanto che si tratta di terne di punti allineati si procede in questo modo: sappiamo per l'Osservazione 12 che esiste unico, tra i tre, il punto che giace fra i restanti; lo chiamiamo dunque B; mentre gli altri due saranno chiamati A e C arbitrariamente. In questo modo, seguendo l'ordine alfabetico, individuiamo il seguente ordine di punti: $A < B < C$, nel senso che A e B vengono prima di C, e A viene prima di B. Questo è l'unico ordine possibile sulla terna a meno del suo inverso.

In presenza di più di tre punti dobbiamo ricorrere alle seguenti proposizioni:

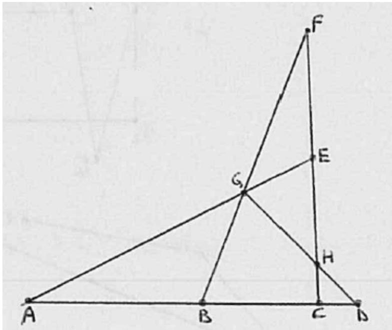
Proposizione 2.5. *Dati quattro punti distinti su una retta, è sempre possibile indicarli con A, B, C e D, in modo tale che B stia fra A e C ed anche fra A e D, e così C stia fra B e D ed anche fra A e D.*

Dimostrazione. Siano r una retta e A, B, C, D quattro suoi punti distinti. Dimostriamo le due seguenti affermazioni:

1) se B sta fra A e C, e C fra B e D, allora sia B che C stanno fra A e D.

Consideriamo E esterno alla retta r, congiungiamolo con C e troviamo su CE il punto F tale che $C*E*F$. Colleghiamo F con B, e A con E. Applichiamo (**O 4**) al triangolo BCF e alla retta AE: individuiamo un punto G tra B ed F. Anche in questo caso, infatti, la retta AE, oltre a non contenere i vertici del triangolo, non può intersercare il segmento $\overline{BC}$: se lo facesse AD e AE avrebbero due punti in comune, ovvero A e il punto su $\overline{BC}$, che non potrebbero coincidere per ipotesi. Dunque le rette AB e AE coinciderebbero ed E giacerebbe su r. Il procedimento può essere ripetuto, ma considerando il triangolo ACE e la retta FB, individuando così un punto tra A ed E, che per l'unicità dell'intersezione fra due rette deve essere G. In parole povere G è intersezione tra i segmenti $\overline{BF}$ e $\overline{AE}$.

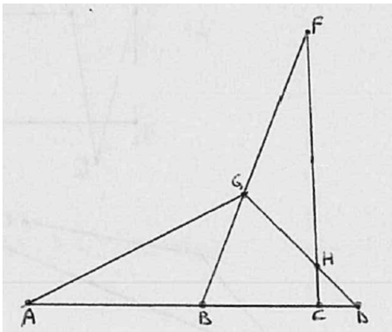
Congiungiamo ora G con D. Applicando nuovamente (**O 4**), ma al triangolo BDG e alla retta CF, troviamo il punto H sul segmento $\overline{DG}$. Consideriamo il triangolo ADG e la retta EH, la quale interseca il segmento $\overline{GD}$ (in H), ma non può intersecare $\overline{AG}$ altrimenti EH e AG avrebbero due intersezioni (E ed il punto appena trovato, che non può coincidere con E perché quest'ultimo non giace tra A e G per l'Osservazione 12). Allora interseca il segmento $\overline{AD}$ (necessariamente in C) e dunque $A * C * D$.



La costruzione può essere ripetuta simmetricamente per B.

2) Se B giace fra A e C, e C giace fra A e D, allora C sta anche fra BD mentre B sta fra A e D. Sia G esterno a r. Colleghiamolo a B e prolunghiamo fino a F in modo che $B * G * F$. Colleghiamo F con C, e A con G.

La retta CF non può intersecare il segmento $\overline{BG}$, altrimenti o $B = C$ o $G \in r$, come non può intersecare il segmento $\overline{AB}$, altrimenti $A*C*B$, in contraddizione con l'ipotesi per l'Osservazione 12. Ne consegue, per (**O 4**), che CF non possa intersecare neppure il segmento $\overline{AG}$. Se colleghiamo G con D osserviamo che, poichè C sta fra A e D, la retta CF deve intersecare il segmento $\overline{DG}$, in un punto che chiameremo H. Considerati il triangolo BDG e la retta FH, questa interseca il segmento $\overline{DG}$ in H e non può intersecare il segmento $\overline{GB}$; dunque, per (**O 4**), deve intersecare $\overline{BD}$, e necessariamente in C.



Perciò C sta fra B e D. La restante parte dell'affermazione deriva dal caso (1).

Consideriamo adesso quattro punti allineati. Individuiamo tra essi una terna a piacere. Per l'Osservazione 12 esiste unico tra i tre quello che giace fra gli altri due. Sia Q tale punto, mentre gli altri due siano chiamati P ed R. L'ultimo dei quattro punti sia invece S. Sempre per l'Osservazione 12 abbiamo cinque possibilità:

R giace fra P e S,

P giace fra R e S,

S giace fra P e R, e contemporaneamente Q giace fra P e S,

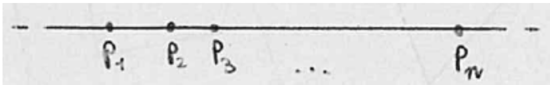
S giace fra P e Q,

P giace fra Q e S.

Le prime quattro possibilità si ricollegano al caso (2), l'ultima al caso (1). Da cui la tesi della proposizione. □

Proposizione 2.6. *Dato un numero finito di punti distinti su una retta, è sempre possibile indicarli con* P_1, P_2,...,P_n, *in modo tale che* P_2 *giaccia fra* P_1, *da una parte, e* P_3,...,P_n *dall'altra, e così* P_3 *giaccia fra* P_1, P_2 *da una parte, e* P_4,...,P_n *dall'altra; e così via.*

Questo modo di indicare i punti è unico a meno del suo inverso: P_n,...,P_2, P_1.



Siamo in questo modo in grado di ordinare un qualsiasi numero finito di punti su una retta, come mera applicazione delle Proposizioni 2.5, 2.6. Il principio può però essere esteso anche ad un numero non finito di punti. Per fare questo abbiamo però necessità di altre proposizioni sulla divisione del piano e della retta.

Cominciamo dal seguente:

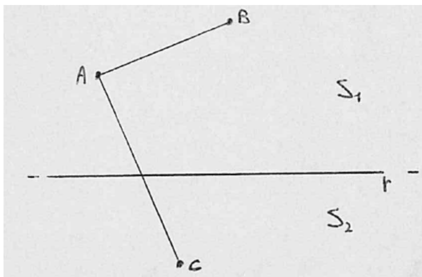
Teorema 2.2. *Tra due punti distinti di una retta esistono infiniti altri punti. In particolare una retta ha infiniti punti.*

Dimostrazione. Semplice applicazione del Teorema 2.1. □

Proposizione 2.7 (Separazione del piano)**.** *Data una retta* r, *questa divide i punti del piano che non le appartengono in due insiemi* S_1 *e* S_2 *tali che:* $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ *e*

a) due punti $A, B \notin r$ *appartengono entrambi a* S_1 *(o a* S_2*) se e solo se* $\overline{AB} \cap r = \emptyset$,

b) due punti $A, C \notin r$ *appartengono uno a* S_1 *e l'altro a* S_2 *se e solo se* $\overline{AC} \cap r \neq \emptyset$.



Dimostrazione. Definiamo l'insieme $Y = \{Q \in \mathcal{P} \mid Q \notin r\}$.

L'assioma (**I 3**) garantisce che esista almeno un punto che non giace su r; ed in particolare $Y \neq \emptyset$.

Definiamo su Y la seguente relazione: $A, B \in Y$,

$$A \sim B \iff A = B \text{ o } \overline{AB} \cap r = \emptyset$$

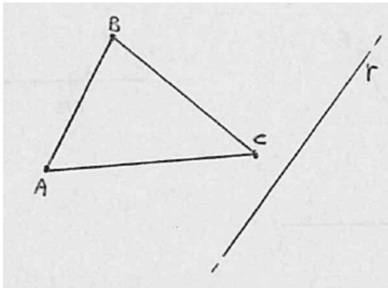
Proviamo ora che si tratta di una relazione d'equivalenza.

Riflessività: per definizione.

Simmetria: diretta conseguenza del fatto che $\overline{AB} = \overline{BA}$.

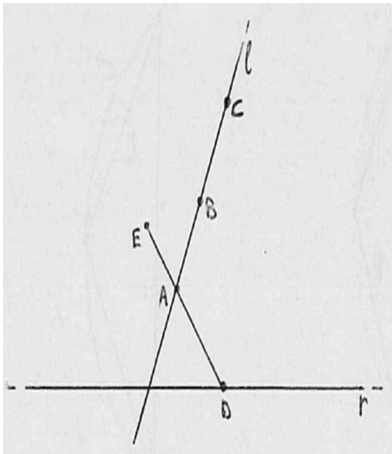
Transitività: siano $A, B, C \in Y$. Supponiamo $A \sim B$, $B \sim C$ e verifichiamo che $A \sim C$. Evitiamo i casi banali $A = B$ o $B = C$, per cui la tesi è ovvia. Si ha allora che $\overline{AB} \cap r = \emptyset$ e $\overline{BC} \cap r = \emptyset$. Dividiamo il problema in due casi a seconda della posizione reciproca dei tre punti.

1) Punti non allineati: in tal caso ricorriamo all'assioma di Pasch. La retta r non contiene nessuno dei tre punti e non seca due dei tre lati del triangolo; necessariamente allora non può secare neppure il segmento $\overline{AC}$, altrimenti saremmo in aperta contraddizione con l'assioma.



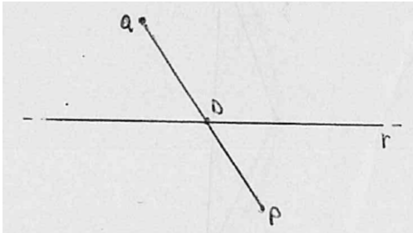
2)Punti allineati: sia l la retta che contiene A, B e C.

Poiché nessuno di questi tre punti giace su r allora $l \neq r$ e le due rette hanno al più un punto in comune. D'altra parte, per (**I 2**), r deve avere almeno due punti e quindi deve esistere su r un punto, chiamato D, all'infuori di quello d'intersezione con l. Applicando ora l'assioma (**O 2**), prolunghiamo il segmento $\overline{AD}$ fino ad un punto E in modo tale che $D * A * E$. Osserviamo immediatamente che la retta r non può intersecare $\overline{AE}$: la retta AE è distinta da r perché contiene A, e dunque la interseca in al più un punto, ovvero D (in particolare $E \notin r$). Quest'ultimo punto non può stare fra A ed E, perché vale già che $D * A * E$ e l'assioma (**O 3**); perciò $\overline{AE} \cap r = \emptyset$. Ne consegue che $A \sim E$.



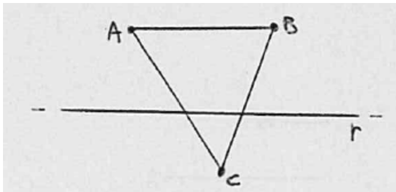
I punti B, A ed E non sono allineati: se lo fossero il punto D apparterrebbe alla retta l, in contraddizione con la sua definizione. Allora A, B, E sono non allineati e vale $B \sim A$, $A \sim E$; allora, ricollegandoci al caso 1) otteniamo $B \sim E$. Focalizzandoci ora sui tre punti non allineati C, B, E, dato che $C \sim B$ e $B \sim E$, otteniamo $C \sim E$. Concludiamo iterando un'ultima volta questo metodo sui tre punti non allineati A, E, C.

Dimostrato che $\sim$ è una relazione d'equivalenza, consideriamo lo spazio quoziente $Y/\sim$. Abbiamo già osservato che Y è non vuoto; sia dunque Q un suo punto qualsiasi. Verifichiamo che esiste un altro punto non in relazione con Q: per l'assioma (**I 2**) la retta r deve possedere almeno un punto - chiamiamolo D - e per l'assioma (**O 2**) esiste P tale che $Q * D * P$. Si osserva che $\overline{QP} \cap r = \{D\}$ e allora $Q \not\sim P$. Possiamo concludere che $|Y/\sim| \geq 2$.

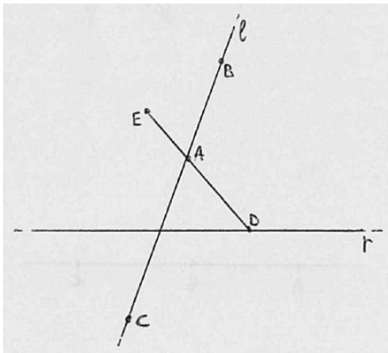


Per poter concludere la dimostrazione è sufficiente verificare che la cardinalità dello spazio quoziente è al più 2. Il che equivale a dimostrare che, presi $A, B, C \in Y$ distinti (altrimenti è banale), se $A \not\sim C$ e $B \not\sim C$ allora $A \sim B$. Procediamo anche questa volta distinguendo due casi:

1) Punti non allineati: in questo caso è sufficiente applicare l'assioma di Pasch. La retta r interseca il triangolo ABC nei segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, non può dunque passare per un punto fra A e B.



2)Punti allineati: procedendo come sopra possiamo individuare un punto E non allineato con A, B e C e tale che $A \sim E$. Osserviamo immediatamente che per la proprietà transitiva $E \not\sim C$. Applichiamo ora il caso precedente ai tre punti non allineati B, E, C, da cui concludiamo che $B \sim E$. Sempre per transitività otteniamo allora $A \sim B$.



□

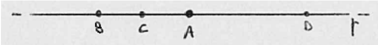
Definizione 2.9 (Semipiano)**.** Ciascuna delle due regioni S_1 e S_2 in cui una retta divide il piano è detta *semipiano.*

Due punti appartenenti allo stesso semipiano verranno detti *"stare dalla stessa parte del piano rispetto ad r"*; mentre due punti appartenenti a semipiani distinti verranno detti *"stare da parti opposte del piano rispetto ad r"*.

Osservazione 13. La Proposizione 2.7 e la conseguente Definizione 2.9 permettono una sistemazione rigorosa di quell'affermazione usata da Euclide nella Proposizione (I.7), quel "stare dalla stessa parte" rispetto ad una retta che non aveva negli *Elementi* nessuna definizione all'infuori di un implicito richiamo all'intuizione.

La Proposizione appena dimostrata ha come conseguenza la propria equivalente lineare.

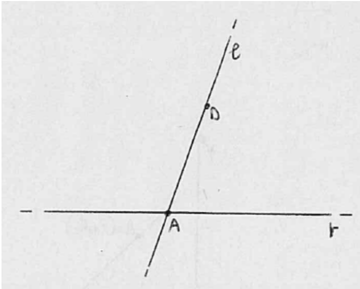
Proposizione 2.8 (Separazione della retta)**.** *Data una retta r ed un suo punto A, tale punto divide i punti della retta diversi da A in due insiemi s_1 e s_2 tali che: $s_1 \neq \emptyset \neq s_2$, $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ e* *a) due punti $B, C \neq A$ appartengono entrambi a s_1 (o a s_2) se e solo se $A \notin \overline{BC}$,*



b) due punti $B, D \neq A$ appartengono uno a s_1 e l'altro a s_2 se e solo se $A \in \overline{BD}$.

Dimostrazione. Siano r una retta e $A \in r$.

Consideriamo un punto D non su r. Sia l la retta che congiunge A e D. Per la Proposizione 2.7 la retta l divide il piano in due regioni S_1 e S_2.
Siano dunque $s_1 := S_1 \cap r$, $s_2 := S_2 \cap r$.



Dimostriamo che s_1 e s_2 sono non vuoti: per l'assioma (**I 2**) esiste su r un punto $B \neq A$.

Per quanto detto nella Proposizione 2.7, o $B \in S_1$, o $B \in S_2$; supponiamo $B \in S_1$. Ne consegue che $B \in s_1$.

Per l'assioma (**O 2**) esiste su r un punto C tale che $B * A * C$. Poiché $\overline{BC} \cap l = \{A\}$, allora $C \in S_2$ e così anche a s_2.

La restante parte della dimostrazione è una diretta conseguenza della Proposizione 2.7. □

Definizione 2.10 (Semiretta)**.** Ciascuna delle due regioni della retta individuate da un suo punto A, unita al punto stesso, è detta *semiretta*.

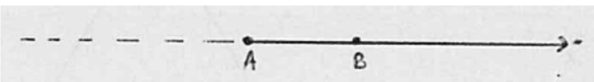
Il punto A è anche detto *vertice* della semiretta.

Una semiretta privata del vertice è detta *semiretta aperta*.

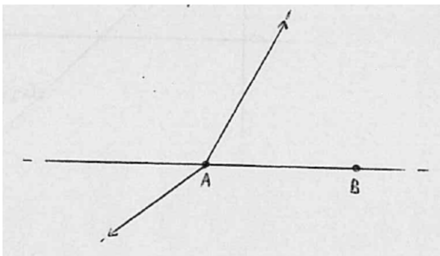
Due punti che giacciono sulla stessa semiretta individuata da A sono detti *"stare dalla stessa parte rispetto ad A"*; altrimenti diremo che *"stanno da parti opposte rispetto ad A"*.

Useremo per le semirette, quando ciò non crei ambiguità, le stesse notazioni già adoperate per le rette: a, b, c, ecc...

Definizione 2.11. Dati due distinti punti A e B nel piano, chiameremo *semiretta per A e B*, indicandola $\overrightarrow{AB}$, la semiretta individuata da A sulla retta AB e contenente il punto B.



Osservazione 14. Sia AB una retta; essa divide il piano in due semipiani. Una semiretta aperta avente vertice in A (e non appartenenete alla retta AB) giace interamente in uno dei due semipiani.



Osservazione 15. Data una qualsiasi semiretta, essa identifica univocamente una retta; tale retta divide poi il piano in due regioni. In questo senso, con un leggero abuso di linguaggio, diremo che una semiretta divide il piano in due semipiani.

Si vuole ora mostrare come i risultati appena ottenuti inducano in maniera del tutto naturale un ordine su una retta. Fissare un ordine formalizza l'idea intuitiva di un verso di percorrenza sulla retta stessa. Per fare ciò dobbiamo ricorrere a due punti sulla retta.

Procediamo come segue: siano r una qualsiasi retta del piano, e A, B due suoi punti distinti (esistono per l'assioma (**I 2**)). Siano s e t le due semirette aperte definite da A su r, e sia t quella che contiene B (ovvero $t = \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$). Indichiamo un ordine su r, usando il simbolo $<$; in questo senso $C < D$ significa che "*C viene prima di D*".

Definiamo un ordine mediante i seguenti assunti:

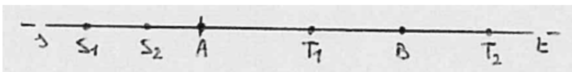
$$S < T \quad \forall S \in s,\ \forall T \in t;$$

$$S < A \quad \forall S \in s;$$

$$A < T \quad \forall T \in t;$$

$$\forall S_1, S_2 \in s, \quad S_1 < S_2 \ \ se \ \ S_1 * S_2 * A;$$

$$\forall T_1, T_2 \in t, \quad T_1 < T_2 \ \ se \ \ A * T_1 * T_2.$$



Tale ordine è anche detto verso di percorrenza *da A a B*. Il suo inverso è invece detto verso di percorrenza *da B ad A*.

Per concludere possiamo definire un simbolo ulteriore ($\leq$) nel seguente modo: presi C e D sulla retta r,

$$C \leq D \iff C < D \text{ o } C = D.$$

Proposizione 2.9. *La relazione $\leq$ definita su un'arbitraria retta r del piano è una relazione d'ordine totale.*

Dimostrazione. Siano r una retta del piano, e A e B due suoi punti distinti. Siano s e t le semirette individuate da A, e sia t quella contenente B.

Vogliamo innanzitutto dimostrare che $\leq$ è una relazione d'ordine.
Riflessività: ovvia per la definizione di $\leq$.
Antisimmetria: siano $C, D \in r$; supponiamo

$$C \leq D \ \text{ e } \ D \leq C. \tag{2.1}$$

$C \leq D$ equivale a $C < D$ o $C = D$. In particolare se $C < D$ allora $C \neq D$; ciò significa che le condizioni in 2.1 possono verificarsi simultaneamente solo se o $C = D$ oppure ($C < D$ e $D < C$).
Dobbiamo quindi verificare che $C < D$ e $D < C$ non siano compatibili: se uno dei due punti coincide con A, oppure i due punti giacciono da parti opposte rispetto ad A, allora la condizione non può verificarsi a priori. Necessariamente, quindi, giacciono nella stessa semiretta; supponiamo sia s. $C < D$ implica $C * D * A$, come $D < C$ implica $D * C * A$ in contraddizione con l'assioma (**O 3**). Per cui $C = D$.
Analogo se i punti giacessero su t.
Transitività: siano $C, D, E \in r$; supponiamo $C \leq D$ e $D \leq E$. Vogliamo dimostrare che $C \leq E$.

Escludiamo subito i casi banali nei quali almeno uno dei punti coincide con A, o nei quali alcuni dei tre punti coincidono tra loro: per questi la verifica è banale. Rimangono dunque due possibilità: o tutti e tre i punti giacciono dalla stessa parte rispetto ad A, oppure uno giace dall'altra parte rispetto agli altri due.

Partiamo da quest'ultimo caso: osserviamo che non può contemporaneamente avvenire $C \in t$ e $D \in s$; come neppure $D \in t$ e $E \in s$ (la verifica richiede la semplice applicazione delle definizioni); rimangono le seguenti possibilità:
$C, D \in s$ e $E \in t$, per la quale è verificata la tesi;
$C \in s$ e $D, E \in t$, per la quale è verificata la tesi.

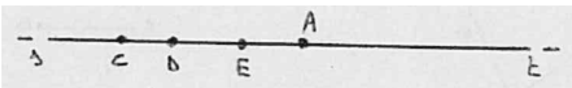
Rimane il caso dei tre punti sulla stessa semiretta; supponiamo sia s (per t è comunque analogo). Consideriamo la quaterna di punti C, D, E, A; la Proposizione 2.5 garantisce, in sostanza, che il senso di percorrenza indotto su r, una volta ristretto alla quaterna, è transitivo. In questo senso: rinominando i punti P_1, P_2, P_3 e P_4, si può supporre che

$P_1 * P_2 * P_3$; (a)

$P_1 * P_2 * P_4$; (b)

$P_1 * P_3 * P_4$; (c)

$P_2 * P_3 * P_4$. (d)



Con questa convenzione nelle notazioni, necessariamente $A = P_1$ o $A = P_4$ (qualsiasi altra possibilità porterebbe uno dei restanti punti a giacere da una parte diversa della retta rispetto agli altri). Supponiamo $A = P_4$. Ci rimane da dimostrare che $C = P_1$, $D = P_2$ e $E = P_3$. Ricordiamo che valgono le seguenti condizioni:

$C * D * A$; (1)

$D * E * A$. (2)

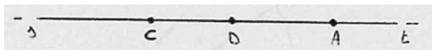
Esistono sei modi in cui è possibile rinominare la terna C, D, E.
Se $D = P_1$, $C = P_2$, $E = P_3$ le condizioni (b) e (1) sono in contraddizione (per via dell'assioma (**O 3**)).
Se $D = P_1$, $E = P_2$, $C = P_3$ sono in contraddizione le condizioni (c) e (1).
Se $E = P_1$, $C = P_2$, $D = P_3$ sono in contraddizione le condizioni (c) e (2).
Se $E = P_1$, $D = P_2$, $C = P_3$ sono in contraddizione le condizioni (b) e (2).
Se $C = P_1$, $E = P_2$, $D = P_3$ sono in contraddizione le condizioni (d) e (2).
Rimane solo la possibilità che $C = P_1$, $D = P_2$, $E = P_3$. In particolare $C \leq E$.
Nel caso in cui $A = P_1$ il ragionamento può essere iterato invertendo le notazioni.

Da cui $\leq$ è una relazione d'ordine.

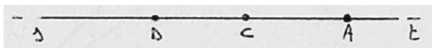
Verifichiamo ora che l'ordine è totale.

Siano $C, D \in r$ distinti. Se i due punti giacciono da parti diverse rispetto ad A, oppure se uno dei due coincide con A, la verifica è banale.
Rimane la possibilità che giacciano sulla stessa semiretta (supponiamo s). Consideriamo la terna C, D, A; per l'Osservazione 12 esiste unico il punto che giace fra gli altri due; inoltre, essendo $C, D \in s$, le possibilità si riducono a due:

$C * D * A$, ovvero $C \leq D$; oppure



$D * C * A$, ovvero $D \leq C$.



La tesi è dimostrata. □

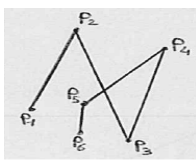
Siamo dunque riusciti nel compito di dare un ordine ai punti di una retta o, se non altro, a dare un senso a quell'idea intuitiva di ordine su una retta che fu propria anche di Euclide.

Continuando in questa direzione si può passare dalla definizione di segmento a quella di poligono in maniera immediata:

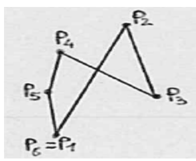
Definizione 2.12 (Spezzata)**.** Dati n punti distinti indicizzati nel piano P_1,...,P_n. Chiamiamo *spezzata*, o *poligonale*, che congiunge P_1 a P_n l'insieme:

$$\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup ... \cup \overline{P_{n-1}P_n},$$

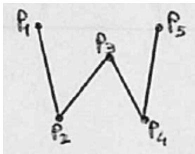
nell'ipotesi che due segmenti successivi giacciano su rette distinte. Essa verrà indicata $\overline{P_1P_2...P_n}$.



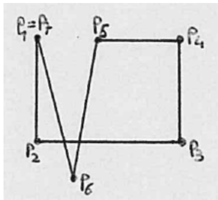
Parleremo di *spezzata chiusa* quando $P_1 = P_n$.



Parleremo di *spezzata semplice* se i punti P_1,...,P_n sono distinti (tranne al più P_1 e P_n che possono coincidere), se nessuno di tali punti è interno ad uno dei segmenti e se due segmenti hanno intersezione degli interni vuota.

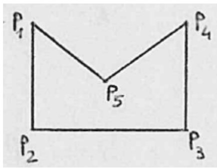


Definizione 2.13 (Poligono)**.** Si definisce *poligono* una qualsiasi spezzata chiusa nel piano.
In particolare i punti P_1,...,P_n sono detti vertici del poligono, mentre i segmenti $\overline{P_1P_2}$,...,$\overline{P_{n-1}P_n}$, privati degli estremi, sono detti *lati* del poligono.
Questo verrà indicato semplicemente come poligono $\overline{P_1...P_{n-1}}$, oppure come poligono $P_1...P_{n-1}$.



Un poligono con tre vertici è un triangolo (Definizione 2.8); uno con quattro è detto *quadrangolo*; in generale un poligono con n vertici è detto $n - angolo$.

Definizione 2.14 (Poligono semplice)**.** Un poligono è detto *semplice* se è costituito da una spezzata semplice.

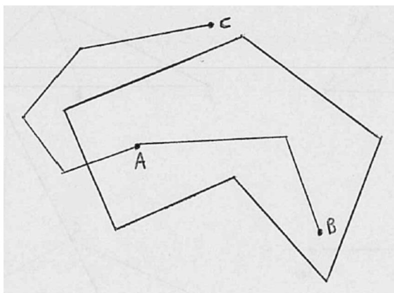


Come un punto divideva una retta in due parti, e come una retta divideva il piano in due regioni, similmente anche un poligono semplice può dividere il piano in due aree. Perveniamo infatti alla seguente:

Proposizione 2.10. *Dato un poligono semplice, questo divide i punti del piano che non gli appartengono in due insiemi I ed E tali che: $I \neq \emptyset \neq E$, $I \cap E = \emptyset$ e*

a) due punti A, B non sul poligono appartengono entrambi ad I (o ad E) se e solo se esiste una spezzata che collega A e B e non interseca il poligono,

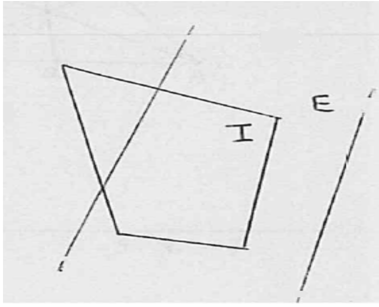
b) due punti A, C non sul poligono appartengono uno ad I e l'altro ad E se e solo se qualsiasi spezzata che congiunge A con C interseca il poligono.



Inoltre, per una delle due regioni ci sono sempre rette che vi giacciono interamente dentro, mentre per l'altra non esistono rette che vi giacciano dentro.

Definizione 2.15 (Interno ed esterno del poligono)**.** Siano date le due regioni in cui il piano è diviso da un poligono semplice.

Chiameremo *interna* la regione per la quale non esistono rette che vi giacciano interamente dentro. Chiameremo altresì *esterna* l'altra.



In particolare, preso un punto interno, tutte le rette per il punto intersecano il poligono.

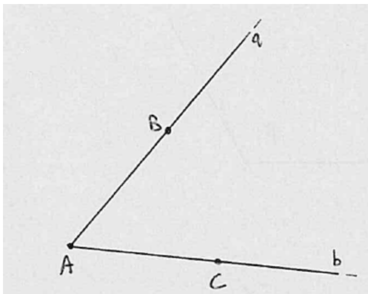
Gli assiomi di ordine ci permettono di fare un altro passo in avanti e di definire in maniera rigorosa gli angoli.

Definizione 2.16 (Angolo)**.** Definiamo *angolo* l'insieme di due semirette aventi vertice in comune e non giacenti sulla stessa retta. Ovvero

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC},$$

dove A, B e C sono tre punti non allineati.

Esso verrà anche indicato con $\widehat{BAC}$, oppure con le lettere grece α, β, γ, ... Qualora le due semirette, aventi comune vertice nel punto A, siano indicate con le notazioni a e b, allora scriveremo l'angolo anche nel modo seguente: $\widehat{aAb}$.

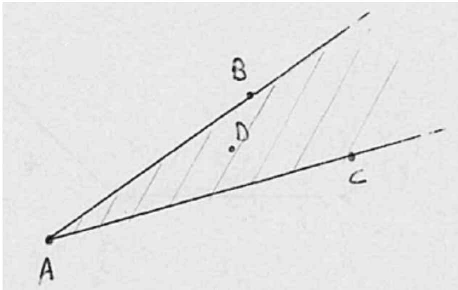


Osservazione 16. Come già per Euclide, questa definizione non contempla l'angolo nullo e l'angolo piatto.

Osservazione 17. La definizione è ben posta, nel senso che esiste sicuramente almeno un angolo nel piano. Data infatti la validità dell'assioma (**I 3**), allora esistono tre punti non allineati A, B e C, essi certamente individuano un angolo $\widehat{BAC}$.

Anche in questo caso, come per i triangoli e i poligoni, noi identifichiamo l'angolo con le due semirette avente origine comune e non, a differenza dei manuali scolastici, con la porzione di piano delimitata da dette semirette. La successiva definizione darà tuttavia un senso ai concetti di interno ed esterno ad un angolo.

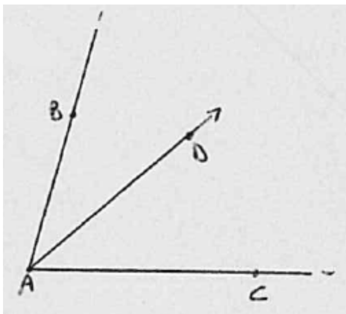
Definizione 2.17 (Interno di un angolo). Dato un angolo $\widehat{BAC}$, definiamo il suo *interno* come l'insieme di tutti i punti D che giacciono simultaneamente dalla stessa parte di B rispetto alla retta AC, e dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB.



Osservazione 18. La Definizione 2.17 esclude gli angoli concavi. Questo, unitamente all'Osservazione 16, suggerisce di considerare solo angoli strettamente inclusi tra l'angolo nullo e l'angolo piatto.

A questo punto possiamo giungere senza difficoltà ad un altra definizione che avrebbe fatto non poco comodo ad Euclide. Possiamo infatti formalizzare il concetto di semiretta interna ad un angolo:

Definizione 2.18. Dati un angolo $\widehat{BAC}$ ed una semiretta $\overrightarrow{AD}$, diremo che questa è *interna* all'angolo se tutti i suoi punti, eccetto A, sono punti interni.



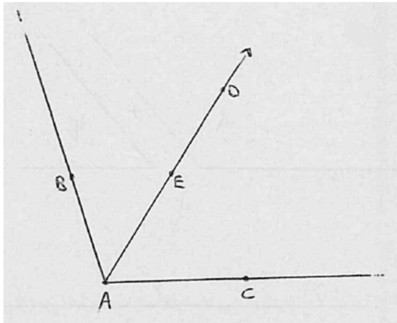
Proposizione 2.11. *Dati un angolo $\widehat{BAC}$ ed una semiretta $\overrightarrow{AD}$, questa è interna all'angolo se e solo se almeno un suo punto distinto dal vertice è interno.*

Dimostrazione. Una delle due implicazioni è ovvia.

È sufficiente dimostrare che se almeno un suo punto è interno, allora lo sono anche tutti i restanti.

Supponiamo dunque D interno a $\widehat{BAC}$. La retta AD è distinta dalla retta AB, perché contiene il punto D. Esse possono dunque avere al più un punto d'intersezione; cioè A.

Prendiamo un qualsiasi punto E sulla semiretta $\overrightarrow{AD}$, distinto sia da A che da D. La terna A, D, E, presenta un punto che giace tra gli altri due; questo non può essere A, altrimenti D ed E giacerebbero su semirette diverse. Ovvero: o $A * E * D$ oppure $A * D * E$. In ambo i casi il segmento $\overline{DE}$ non interseca la retta AB (l'intersezione tra AD e AC è già definita nel solo punto A); perciò D ed E giacciono dalla stessa parte del piano rispetto alla retta AB.



Discorso che può essere ripetuto anche per la retta AC.

Ne deduciamo che se D è interno, come da ipotesi, deve esserlo anche l'arbitrario punto E sulla semiretta $\overline{AD}$. □

Corollario 2.1. *Dati un angolo $\widehat{BAC}$ ed una semiretta $\overrightarrow{AD}$; questa ha tutti punti interni all'angolo oppure non ne ha nessuno.*

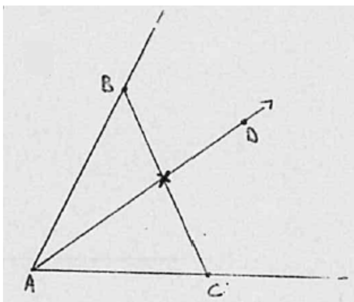
Proposizione 2.12. *Dato un angolo $\widehat{BAC}$; esiste una semiretta per A a esso interna.*

Dimostrazione. Consideriamo il segmento $\overline{BC}$ e consideriamo un suo punto D distinto dagli estremi (esiste per il Teorema 2.1). Per definizione, D è interno all'angolo. Consideriamo allora la semiretta $\overrightarrow{AD}$, la quale ha un punto interno all'angolo. Per la Proposizione 2.11 tale semiretta è interna. □

Con questa definizione il concetto di retta che "giace dentro" un angolo non è più lasciato all'intuizione o ad una rappresentazione grafica, ma formalizzata a partire unicamente dagli assiomi. Da qui si possono anche dedurre le seguenti proposizioni:

Proposizione 2.13. *Un punto D è interno ad un triangolo ABC se e solo se è interno a tutti e tre gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$.*

Proposizione 2.14. *Dato un angolo $\widehat{BAC}$ e un suo punto interno D, allora la semiretta $\overrightarrow{AD}$ deve intersecare il segmento $\overline{BC}$.*



Modelli

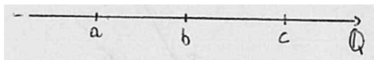
Torniamo adesso a interrogarci sui modelli. Ci riproponiamo l'obbiettivo di costruire un modello per il quale valgano gli assiomi d'ordine. Si è visto che gran parte dei risultati ottenuti in questa sezione fanno richiamo anche agli assiomi di incidenza, partiamo dunque a cercare un modello tra quelli già presentati per la geometria di incidenza.

Esempio 2.5. Mostriamo che $\mathbb{Q}^2$ è un modello per gli assiomi di ordinamento.

Dobbiamo innanzitutto definire una relazione sui punti di una retta. Partiamo dal caso unidimensionale.

$\mathbb{Q}$: presa una terna a, b, c di numeri razionali, definiamo la seguente relazione:

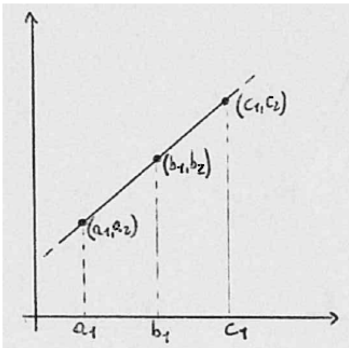
$$a * b * c \iff a < b < c \quad \text{oppure} \quad c < b < a.$$



Dopodiché spostiamoci al caso bidimensionale.

$\mathbb{Q}^2$: presa una terna $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{Q}^2$, stabiliamo la seguente relazione:

$$A * B * C \iff A, B, C \text{ sono allineati e } \big(a_1 * b_1 * c_1 \text{ oppure } a_2 * b_2 * c_2\big).$$



Notazione: benché operazioni come "somma di punti", oppure "differenza di punti", o anche "prodotto di un numero per un punto", non siano definite all'interno della geometria assiomatica - né sono da definire - può essere utile, se non altro financo si ricorre al modello della geometria analitica, introdurre le seguenti notazioni, ricorrendo alle usuali proprietà di $\mathbb{Q}$: dati $A = (a_1, a_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $t \in \mathbb{Q}$, definiamo

$$A \pm C := (a_1 \pm c_1, a_2 \pm c_2),$$

$$tA := (t \cdot a_1, t \cdot a_2).$$

Di conseguenza potranno essere di valido aiuto quelle applicazioni $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ (oppure $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$) - dette *lineari* - che preservano le operazioni appena definite:

$$f(A + C) = f(A) + f(C),$$

$$f(tA) = tf(A);$$

qualsiasi siano i punti A e C, e qualsiasi sia il razionale t.

Prima di passare agli assiomi vediamo come si può esprimere un segmento di estremi $A = (a_1, a_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ distinti. Vogliamo in particolare mostrare come l'usuale segmento nel piano razionale, ovvero l'immagine della funzione

$$t \mapsto t(C - A) + A = tC + A(1 - t),\ t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q},$$

sia il segmento anche con la definizione appena data di "stare fra".

Per semplicità supponiamo $a_1 < c_1$, (in caso contrario si invertano tutte le disuguaglianze o, se $a_1 = c_1$, si considerino le ordinate al posto delle ascisse). Sia B tra A e C. Ciò è verificato se e solo se i tre punti sono allineati e ($a_1 * b_1 * c_1$ oppure $a_2 * b_2 * c_2$). Avendo supposto $a_1 < c_1$ possiamo trascurare la condizione $a_2 * b_2 * c_2$ (ha senso tenerla in considerazione soltanto nel caso in cui $a_1 = b_1 = c_1$). È facile vedere che tre punti sono allineati se e solo se $B - A$ è proporzionale a $C - A$; ovvero $B - A = t(C - A)$ per un certo $t \in \mathbb{Q}$. Mentre $a_1 * b_1 * c_1$ (che si traduce in $a_1 < b_1 < c_1$) è verificata se e solo se, avendo $B = (b_1, b_2) = t(C - A) + A = (tc_1 + a_1(1 - t), tc_2 + a_2(1 - t))$,

$$a_1 < b_1 \iff a_1 < tc_1 + a_1(1 - t) \iff 0 < t(c_1 - a_1) \iff 0 < t$$

e

$$b_1 < c_1 \iff tc_1 + a_1(1 - t) < c_1 \iff (1 - t)(a_1 - c_1) < 0 \iff t < 1.$$

Ovvero $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Abbiamo dimostrato quanto volevamo.

Mostriamo come vengano soddisfatti gli assiomi:

(**O 1**): si osserva che la definizione obbliga i punti ad essere distinti ed allineati; per di più, grazie alla relazione definita su $\mathbb{Q}$, l'ordine di scrittura è ininfluente.

(**O 2**): siano $A = (a, ma + q)$ e $B = (b, mb + q)$ due punti sulla retta $y = mx + q$ (supponiamo $a < b$); per le proprietà di $\mathbb{Q}$ come insieme illimitato esiste $c > \max\{a, b\}$. Sia dunque $C = (c, mc + q)$. Vale che $A * B * C$. (Qualora $a > b$ si prenda $c < \min\{a, b\}$).
Il caso di rette del tipo $x = k$ può essere trattato analogamente ma considerando le ordinate dei punti.

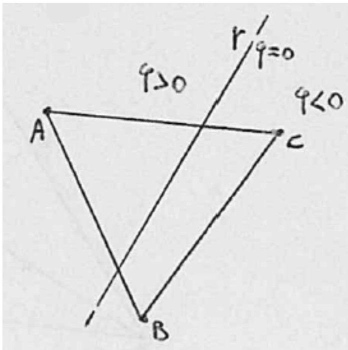
(**O 3**): dati $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ dobbiamo dimostrare che uno dei tre giace fra gli altri due. La questione si risolve riconducendoci al caso unidimensionale: poiché l'ordine su $\mathbb{Q}$ è totale, la tesi è verificata.

(**O 4**): siano A, B e C tre punti non allineati e $r : ux + vy + w = 0$ una retta che non li contiene. Consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{Q}^2 &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) &\mapsto ux + vy + w. \end{aligned}$$

Chiameremo $f(x, y) = ux + vy$ applicazione lineare associata. I punti della retta r corrispondono agli zeri della funzione φ.

Supponiamo che r intersechi il segmento $\overline{AB}$ in un suo punto interno. Ora, poiché A e B non appartengono alla retta, allora $\varphi(A), \varphi(B) \neq 0$. Osserviamo inoltre che debbono essere discordi: assumiamo per assurdo siano concordi, poniamo entrambi positivi; il termine w può essere considerato positivo (se così non fosse basta considerare la funzione $-\varphi$, i cui zeri rimangono su r). Il segmento $\overline{AB}$ è immagine della funzione $t \mapsto t(B-A)+A = tB + A(1-t)$, $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Otteniamo che, grazie alle proprietà di linearità, $\varphi(tB+A(1-t)) = f(tB+A(1-t)) + w = tf(B) + (1-t)f(A) + w = t\varphi(B) + (1-t)\varphi(A)$, che è positivo per ogni $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, in particolare non potrebbe annullarsi per nessun punto interno. Abbiamo concluso che i valori $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ debbono essere discordi: supponiamo $\varphi(A) > 0$, mentre $\varphi(B) < 0$.



Spostiamo ora la nostra attenzione sul punto C. Non appartenendo alla retta r, allora $\varphi(C) \neq 0$; in particolare se $\varphi(C) < 0$ allora r seca il segmento $\overline{AC}$ e non il segmento $\overline{BC}$; e viceversa. Infatti: se $\varphi(C) < 0$, r non può intersecare il segmento $\overline{BC}$ per le medesime ragioni del paragrafo sopra; rimane solo da mostrare che $r \cap \overline{AC} \neq \emptyset$. Ovvero che esiste $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ tale che $\varphi(tC + A(1-t)) = 0$:

$$\varphi(tC + A(1-t)) = t\varphi(C) + (1-t)\varphi(A) = 0,$$

$$t = \frac{\varphi(A)}{\varphi(A) - \varphi(C)}.$$

Ovviamente il parametro t è un razionale, ed è compreso nell'intervallo $[0,1]$. La tesi è dimostrata.

Abbiamo perciò provato che il piano razionale $\mathbb{Q}^2$ è un modello per gli assiomi di incidenza e di ordinamento (e delle parallele).

2.2.4 Assiomi di congruenza

Viene ora il momento del quarto gruppo di assiomi, detti di *congruenza*.

Finora è stato possibile considerare relazioni reciproche tra punti e rette, e dunque stabilire se un punto giaceva su una retta, o se due rette erano incidenti; altresì abbiamo potuto costruire relazioni reciproche anche tra gli stessi punti, ed arrivare alla definizione di segmento e di angolo, come anche di semiretta interna ad un angolo o di interno ed esterno ad un poligono. Non siamo, però, ancora in grado di operare confronti tra i segmenti o tra gli angoli. Oltre allo stabilire se due segmenti si incontrano o meno non possiamo fare molto. Per questo siamo costretti ad arricchire la nostra lista di assiomi.

Si postula l'esistenza di due relazioni, una tra segmenti, l'altra tra angoli, dette di *congruenza*, e indicate con il simbolo $\equiv$, che soddisfino i seguenti assiomi:

(**C 1**) Dati un segmento $\overline{AB}$ ed una semiretta r avente origine in un punto C; allora esiste ed è unico il punto D su r tale che $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

(**C 2**) Ogni segmento è congruente a se stesso. Se due segmenti sono congruenti ad un terzo, allora sono congruenti fra loro.

(**C 3**) Dati tre punti allineati A, B e C tali che $A * B * C$, ed altri tre punti allineati D, E ed F tali che $D * E * F$; se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ allora $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$.

(**C 4**) Dati un angolo $\widehat{ABC}$ e una semiretta $\overrightarrow{DE}$; fissata una delle due parti del piano rispetto a $\overrightarrow{DE}$; allora esiste ed è unica la semiretta $\overrightarrow{DF}$ giacente dalla stessa parte del piano e tale che $\widehat{ABC} \equiv \widehat{EDF}$.

(**C 5**) Ogni angolo è congruente a se stesso. Se due angoli sono congruenti ad un terzo, allora sono congruenti fra loro.

(**C 6**) Dati due triangoli ABC e $A'B'C'$. Supponiamo che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$; allora $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$.

Per una mera esigenza espositiva divideremo questo gruppo di assiomi in due parti: la prima comprende gli assiomi (**C 1-3**), che chiameremo di *congruenza per i segmenti*; la seconda comprende gli assiomi (**C 4-6**), che sono invece detti di *congruenza per gli angoli*.

Congruenza di segmenti

Come già fatto in precedenza, partiamo con alcune osservazioni sugli assiomi appena enunciati.

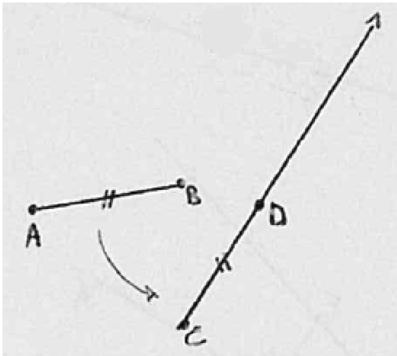
Osservazione 19. Gli assiomi (**C 1**) e (**C 2**) sono qui enunciati in maniera diversa rispetto a quanto fatto da Hilbert.

In particolare, nell'assioma (**C 1**) Hilbert non chiede l'unicità del punto D ed esige la sola esistenza; infatti dimostra che l'unicità può essere ricavata dagli altri assiomi.[2]

Similmente, nell'assioma (**C 2**), Hilbert non richiede la riflessività della congruenza, ma dimostra che anche in questo caso una dimostrazione può essere ricavata dagli assiomi.

Abbiamo scelto quest'impostazione per una più fluida esposizione.

[2] [7, p. 15]



L'assioma (**C 1**), in sostanza, consente quello che è detto essere il *trasporto dei segmenti.* Ovvero consente di "spostare" un segmento su una qualsiasi semiretta data (nel senso di trovare, sulla semiretta, un segmento congruente). In questo senso non è molto dissimile dalla Proposizone (I.2) contenuta negli *Elementi*, se non che Euclide dimostra la possibilità del trasporto attraverso un processo di costruzione, ove Hilbert, invece, adotta un approccio di postulazione esistenziale.
Altro elemento di distinzione - possiamo osservare - è il fatto che Hilbert chieda di trasportare il segmento su una *semiretta*, mentre Euclide parla di "applicare" il segmento ad un *punto*; e ciò impedisce un controllo sulla direzione che il segmento si troverà ad avere.

L'assioma (**C 2**), dal canto suo, può risultare familiare all'orecchio del lettore di Euclide. Esso, infatti, corrisponde, sebbene ristretto ai segmenti, alla nozione comune (1) ("cose uguali ad una stessa cosa sono uguali anche tra loro").

Queste brevi osservazioni ci permettono di intendere - ancora più a fondo - come il lavoro di Hilbert si ponga in un certo senso in continuità con quello di Euclide, mentre in un altro senso in un rapporto di formalizzazione astratta e rigorosa di tutte quelle nozioni e quei costrutti applicati negli *Elementi.*

D'altra parte, sempre l'assioma (**C 2**), ci permette di giungere alla seguente e interessante:

Proposizione 2.15. *La relazione di congruenza fra segmenti è una relazione d'equivalenza.*

Dimostrazione. Sono da dimostrare le tre usuali proprietà.

Riflessività: diretta conseguenza di (**C 2**).

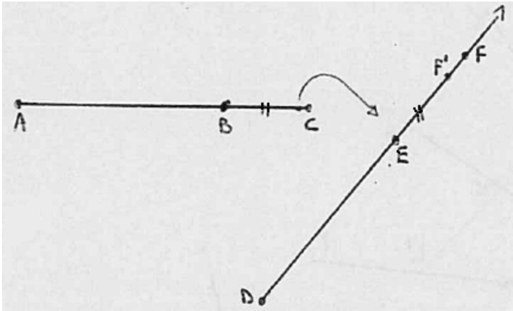
Simmetria: supponiamo $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Vale inoltre che $\overline{CD} \equiv \overline{CD}$. Applichiamo allora (**C 2**) ("cose uguali ad una stessa cosa sono uguali anche tra loro"): se $\overline{CD} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ allora $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.

Transitività: supponiamo che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$. Per la simmetria appena dimostrata vale anche $\overline{A''B''} \equiv \overline{A'B'}$. Allora basta applicare l'assioma (**C 2**). □

La prossima proposizione, invece, è in un certo senso l'inversa dell'assioma (**C 3**). Essa d'altra parte suona molto simile alla nozione comune (3): "se cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali".

Proposizione 2.16. *Si considerino tre punti A, B e C, tali che $A * B * C$, e siano dati altri tre punti distinti e allineati D, E ed F, tali che E ed F stiano dalla stessa parte rispetto a D. Se $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, allora vale che $D * E * F$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la semiretta (sulla retta DE) di vertice E e non contenente D. Su di essa è unico il punto F' tale che $\overline{BC} \equiv \overline{EF'}$. Ovviamente vale che $D * E * F'$; inoltre $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF'}$, dunque (assioma (**C 3**)) $\overline{AC} \equiv \overline{DF'}$. Applicando ora (**C 2**), evinciamo che $\overline{DF} \equiv \overline{DF'}$.

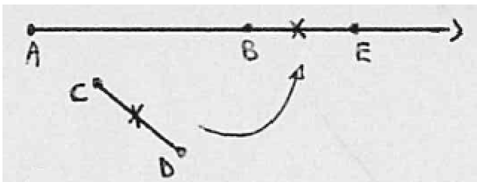


Osserviamo che sia F che F' giacciono sulla stessa retta (l'uno per ipotesi, l'altro per costruzione) ed entrambi giacciono dalla stessa parte rispetto a B, in particolare quella opposta a D. Dunque giacciono anche dalla stessa parte rispetto a D. Per l'unicità di F' otteniamo allora che $F = F'$. In particolare $D * E * F$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$. □

Gli assiomi di congruenza permettono anche molto di più che la possibilità di traslare segmenti o di costruire una relazione d'equivalenza. Tra le possibili conseguenze di questi primi tre assiomi sono presenti anche *l'addizionabilità* e *l'ordinamento* dei segmenti. Partiamo dalla prima.

Definizione 2.19 (Somma di segmenti)**.** Dati due segmenti arbitrari nel piano, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, consideriamo la semiretta su AB di vertice B e *non* contenente A. Su di essa individuiamo l'unico punto E tale che $\overline{CD} \equiv \overline{BE}$. Definiamo la *somma di* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ nel seguente modo:

$$\overline{AB} + \overline{CD} := \overline{AE}.$$

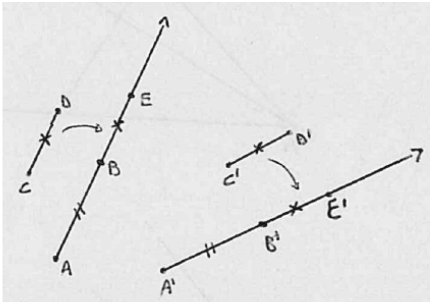


Si osservi che la definizione, così espressa, dipende dall'ordine scelto per gli estremi del segmento $\overline{AB}$. Possiamo però enunciare la seguente proposizione che ci permette di slegare la definizione di somma dall'ordine degli estremi:

Proposizione 2.17. *La somma è compatibile con la relazione d'equivalenza. Ovvero, date le seguenti coppie di segmenti:* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *e* $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$*; allora* $\overline{AB} + \overline{CD} \equiv \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$.

Dimostrazione. Siano E ed E' i due punti da definizione tali che $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD}$ e $\overline{A'E'} = \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$. Per il punto E, trovandosi dall'altra parte di A rispetto a B, vale che $A * B * E$. Analogamente $A' * B' * E'$.

Elenchiamo tutte le relazioni note:



$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad (1)$$

$$\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}; \quad (2)$$

per ipotesi.

$$\overline{CD} \equiv \overline{BE}, \quad (3)$$

$$\overline{C'D'} \equiv \overline{B'E'}; \quad (4)$$

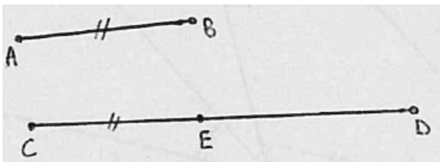
per costruzione.

Dato che la congruenza è una relazione d'equivalenza, unendo (2) e (3), e dopodiché ricorrendo a (4), otteniamo $\overline{BE} \equiv \overline{B'E'}$.

Ora, applicando l'assioma (**C 3**), concludiamo che $\overline{AE} \equiv \overline{A'E'}$. □

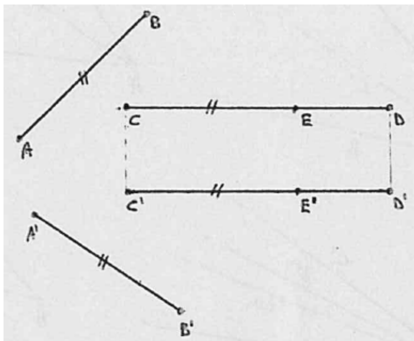
Vogliamo ora introdurre una relazione d'ordine sui segmenti. Sappiamo infatti che la relazione di congruenza ci permette di identificare i segmenti all'interno di una singola classe d'equivalenza. Ora, possiamo immaginare queste classi come le varie estensioni dei segmenti e dunque, se due segmenti sono congruenti, possiamo anche dire che hanno la stessa estensione (sono "uguali" nel senso adottato da Euclide). Tuttavia, se due segmenti appartengono a classi diverse, e dunque sono "diseguali", è possibile stabilire se uno dei due è "maggiore" dell'altro? Le seguenti definizioni e proposizioni rispondono a questo quesito.

Definizione 2.20. Dati due arbitrari segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Diremo che $\overline{AB}$ è *minore* di $\overline{CD}$, e scriveremo $\overline{AB} < \overline{CD}$, se esiste il punto E tra C e D, tale che $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$.



Proposizione 2.18. *La relazione $<$, definita nella Definizione 2.20, è compatibile con la relazione di congruenza. Ovvero, date le seguenti coppie di segmenti: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$; allora $\overline{AB} < \overline{CD} \iff \overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.*

Dimostrazione. Dati $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, supponiamo $\overline{AB} < \overline{CD}$.



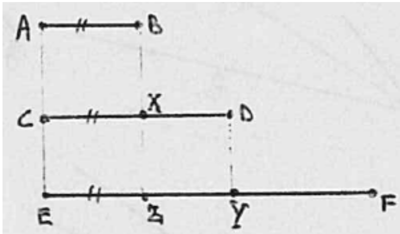
Allora esiste, tra C e D, il punto E tale che $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$. Sia E' l'unico punto sul semiretta $\overrightarrow{C'D'}$ tale che $\overline{CE} \equiv \overline{C'E'}$. Ora è sufficiente applicare la Proposizione 2.16 per stabilire che $C' * E' * D'$. Applicando poi la proprietà transitiva riconosciamo che $\overline{A'B'} \equiv \overline{C'E'}$; da cui $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.
Per l'altra implicazione si può procedere nello stesso modo ma invertendo i ruoli dei segmenti. □

Questa proposizione ci permette di affermare che la relazione $<$ non dipende dalla scelta del rappresentante di una specifica classe di equivalenza. Ma possiamo dire di più:

Proposizione 2.19. *La relazione $<$ è transitiva.*

Dimostrazione. Siano $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ed $\overline{EF}$ tre segmenti tali che $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$.

Per ipotesi esiste il punto X tra C e D tale che $\overline{AB} \equiv \overline{CX}$. Sempre per ipotesi esiste il punto Y tra E ed F tale che $\overline{CD} \equiv \overline{EY}$. Trasportiamo il segmento $\overline{CX}$ sulla semiretta $\overrightarrow{EF}$, trovando l'unico punto Z tale che $\overline{CX} \equiv \overline{EZ}$.



Osserviamo che $\overline{CD} \equiv \overline{EY}$, $\overline{CX} \equiv \overline{EZ}$ e che Z ed Y stanno dalla stessa parte rispetto a E sulla semiretta.

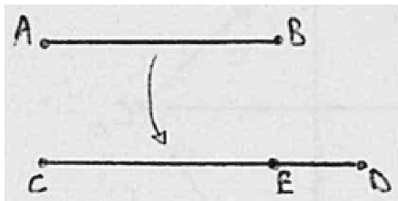
Applichiamo allora la Proposizione 2.16, e otteniamo che $E * Z * Y$. Usando l'ordine sulla retta (Proposizione 2.9) possiamo concludere che $E * Z * F$. Per la transitività della congruenza $\overline{AB} \equiv \overline{EZ}$, e quindi la tesi. □

Proposizione 2.20 (Legge di tricotomia)**.** *Dati due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; è valida una ed una sola delle seguenti condizioni:*

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} \equiv \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

Dimostrazione. Consideriamo i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Sulla semiretta $\overrightarrow{CD}$ individuiamo l'unico punto E tale che $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$. Supponiamo che $E = D$, allora $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Altrimenti sono presenti tre punti distinti sulla stessa retta, e dunque solo uno può giacere tra i restanti. Uno che d'altra parte non può essere C, perché D ed E giacciono dalla stessa parte.



Allora:
o $C * E * D$, e dunque $\overline{AB} < \overline{CD}$;
oppure $C * D * E$, e allora $\overline{AB} > \overline{CD}$.

□

Definizione 2.21. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutti i segmenti del piano. Sia $\left[\overline{AB}\right]_{\equiv}$ la classe d'equivalenza del segmento $\overline{AB}$ rispetto alla congruenza.

D'ora in avanti, se non ci sarà pericolò di ambiguità, la indicheremo semplicemente $\overline{AB}$.

Definizione 2.22. Sullo spazio quoziente $\mathcal{S}/\equiv$ definiamo la seguente relazione:

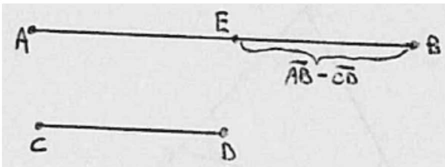
$$\overline{AB} \leq \overline{CD} \iff \overline{AB} < \overline{CD} \text{ o } \overline{AB} = \overline{CD}.$$

Le Proposizioni 2.18, 2.19, 2.20 sono la dimostrazione del seguente:

Teorema 2.3. *La relazione $\leq$ è ben definita. Inoltre, l'insieme $\mathcal{S}/\equiv$ con la relazione $\leq$ è totalmente ordinato.*

Con questi fatti possiamo allora definire anche un'operazione di sottrazione fra segmenti:

Definizione 2.23 (Differenza di segmenti)**.** Siano $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ due segmenti, tali che $\overline{AB} > \overline{CD}$. Cosideriamo il trasporto del segmento $\overline{CD}$ sulla semiretta di vertice A e contenente B, individuando l'unico punto E tale che $\overline{AE} \equiv \overline{CD}$. Per ipotesi $A * E * B$. Definiamo *differenza* di $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e indichiamo $\overline{AB} - \overline{CD}$, il segmento $\overline{EB}$.



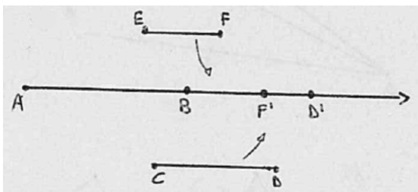
Osservazione 20. La definizione precedente risulta ben posta per merito della Proposizione 2.16. Ovvero l'operazione di sottrazione è compatibile con la congruenza di segmenti.

Osservazione 21. Risulta evidente che $\overline{AB} - \overline{CD}$ sia minore di $\overline{AB}$.

Come ultima proposizione vogliamo dimostrare che l'operazione di somma e la relazione d'ordine sui segmenti sono compatibili fra loro:

Proposizione 2.21. *Siano $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ed $\overline{EF}$ tre segmenti distinti presi tali che $\overline{CD} > \overline{EF}$. Allora $\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{AB} + \overline{EF}$.*

Dimostrazione.
Trasportiamo il segmento $\overline{CD}$ sulla semiretta di AB avente origine in B e non contenente A, trovando il punto D' tale che $\overline{CD} \equiv \overline{BD'}$. Facciamo lo stesso con $\overline{EF}$, trovando il punto F' tale che $\overline{EF} \equiv \overline{BF'}$.
Per la Proposizione 2.18, vale che $\overline{BF'} < \overline{BD'}$; ovvero che $B * F' * D'$. Per costruzione, inoltre, $A*B*F'$ e $A*B*D'$; necessariamente, allora, $A * F' * D'$. Cioè $\overline{AF'} < \overline{AD'}$. Ciò è proprio la tesi che volevamo dimostrare.



□

Siamo ora in grado di effettuare un nuovo tipo di confronto fra i segmenti: concetti come segmenti con la "stessa estensione", o segmento "maggiore" di un altro segmento - come anche la possibilità di operare somme tra segmenti - sono stati rigorosamente formalizzati a partire dagli assiomi (**C 1-3**).

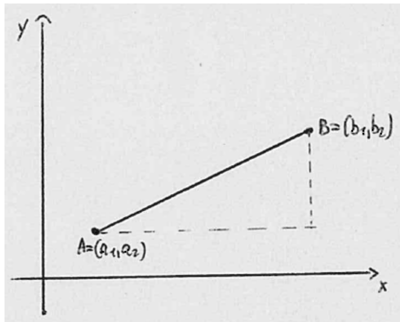
Modelli

Come ormai da regola, occupiamoci di trovare un modello per questo nuovo gruppo di assiomi.

Esempio 2.6. Partiamo dal solito piano cartesiano $\mathbb{Q}^2$. Definiamo cosa intendiamo per congruenza di segmenti.

Dato un segmento di estremi $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ in $\mathbb{Q}^2$, ricorriamo alla *distanza euclidea*, ovvero definiamo distanza di A da B il *numero reale*

$$d(A, B) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$



Fatto ciò diremo che due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono congruenti se e solo se gli estremi hanno la stessa distanza reciproca. In simboli:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff d(A, B) = d(C, D).$$

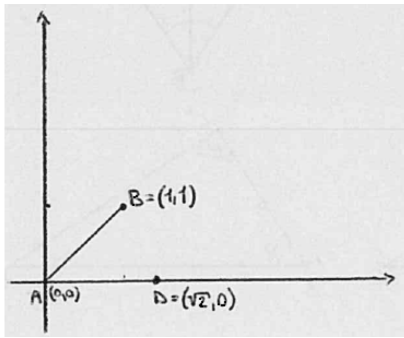
Potremmo sperare che, per una volta ancora, $\mathbb{Q}^2$ sia un modello per gli assiomi di congruenza. Sfortunatamente, in questo caso si presenta un ostacolo che ci constringe a rinunciare al piano cartesiano razionale come modello. Infatti:

*In $\mathbb{Q}^2$ con la metrica euclidea non vale l'assioma (**C 1**).*

Osserviamo intanto che, conformemente a quanto visto nell'Esempio 2.5 per i segmenti, anche per quanto riguarda le semirette (costruite sulla base della definizione di ordine data nell'esempio stesso) esse coincidono con le ordinarie semirette del piano cartesiano. In particolare una semiretta di vertice il punto C e contenente il punto D, è l'immagine della funzione

$$t \mapsto t(D - C) + C, \quad t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

Chiediamoci allora di trasportare il segmento di estremi $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$ sulla semiretta di vertice lo stesso punto A e contenente $C = (1, 0)$ (in parole povere, il semiasse positivo delle x). Un generico punto su tale asse ha coordinate $(t, 0)$, con $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Se l'assioma (**C 1**) valesse, allora esisterebbe unico $D = (\bar{t}, 0)$, $\bar{t} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, tale che $d(D, A) = d(A, B)$. Il che è possibile se e solo se $\bar{t} = \sqrt{2}$.
Ciò ci mostra l'evidente impossibilità di soddisfare la richiesta.



Siamo giocoforza costretti a cambiare modello. Il prossimo passaggio sarà dunque quello di ricorrere al piano cartesiano sui numeri reali: in tal caso, per fortuna, gli assiomi hanno validità.

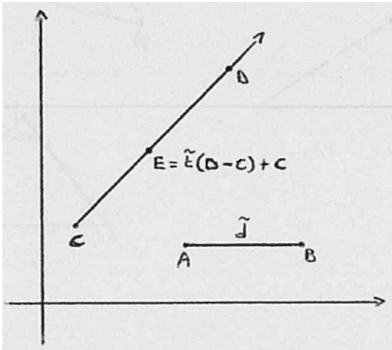
Mostriamo che $\mathbb{R}^2$ è un modello per gli assiomi di congruenza.

Su questo nuovo piano cartesiano traduciamo tutte le definizioni già date per il piano razionale. È evidente che come gli assiomi di incidenza e di ordine valevano su $\mathbb{Q}^2$, continuano a valere anche in $\mathbb{R}^2$. Passiamo a quelli di congruenza:

(**C 1**): preso un arbitrario segmento $\overline{AB}$, sia $\tilde{d} = d(A, B)$.

Consideriamo ora la semiretta $\overrightarrow{CD}$. Cerchiamo su quest'ultima il punto E tale che $d(E,C) = \tilde{d}$. $E = \tilde{t}(D - C) + C$, con $\tilde{t}$ positivo; perciò $d(E,C) = \tilde{t} \cdot d(D,C)$. In particolare è necessario e sufficiente prendere

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{d}}{d(D,C)}.$$



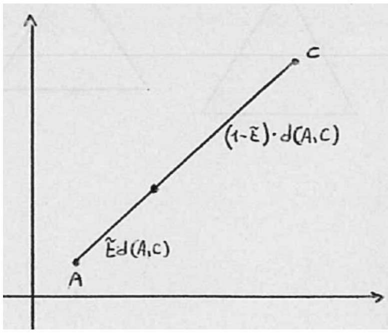
Per la definizione di distanza euclidea il valore $\tilde{t}$ è effettivamente un numero reale positivo.

(**C 2**): diretta conseguenza della definizione.

(**C 3**): siano A, B e C tre punti tali che $A * B * C$. Analogamente D, E ed F tali che $D * E * F$. Supponiamo che $d(A,B) = d(D,E)$ e $d(B,C) = d(E,F)$. Dimostriamo che $d(A,C) = d(D,F)$.
Se dimostriamo che valgono le uguaglianze $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$ e $d(D,F) = d(D,E) + d(E,F)$, la tesi risulterà provata. Dimostriamo quindi che in generale, se $A * B * C$, allora $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$.

Consideriamo il segmento $\overline{AC} : \ t(C - A) + C, \ t \in [0,1]$.
Dato che B giace tra A e C allora $B = \tilde{t}(C-A)+A$; e quindi $d(A,B) = \tilde{t}d(C,A)$. Ora,

$$\begin{aligned} C - B &= \\ &C - B + A - A = \\ &C - A - (B - A) = \\ &C - A - \tilde{t}(C - A) = \\ &\quad (1 - \tilde{t})(C - A); \end{aligned}$$



da cui $d(B,C) = (1 - \tilde{t})d(A,C)$.

Concludiamo che:

$$d(A,B) + d(B,C) = \tilde{t}d(A,C) + (1 - \tilde{t})d(A,C) = d(A,C).$$

N.B. In particolare osserviamo che dati due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, la definizione di distanza ci permette di concludere che $\overline{AB} > \overline{CD}$ se e solo se $d(A,B) > d(C,D)$.

È dunque dimostrato che il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea è un modello per gli assiomi di congruenza di segmenti.

Congruenza di angoli

Ricorrendo ora agli assiomi (**C 4-6**) vogliamo fare qualcosa di significativamente equivalente con gli angoli. Prima, però, alcune considerazioni.

Osservazione 22. Per correttezza metodologica riportiamo alcune differenze tra la formulazione degli assiomi da noi scelta e quella invece presentata da Hilbert.

In primo luogo l'intero assioma (**C 5**) potrebbe essere omesso, eccezion fatta per la richiesta che ogni angolo sia congruente a se medesimo (richiesta da

Hilbert posta in chiusura dell'assioma (**C 4**)); infatti Hilbert stesso dimostra che la richiesta che "angoli congrui ad uno stesso angolo sono congrui fra loro" è dimostrabile a partire dagli assiomi restanti.[3]

Inoltre anche l'assioma (**C 6**) è in effetti formulato diversamente: sotto le medesime ipotesi, si richiede che siano congruenti solamente gli angoli rimanenti nel triangolo; la congruenza degli altri termini è invece dimostrabile.[4]

Rimanendo sempre sull'assioma (**C 6**), osserviamo che esso corrisponde al primo criterio di congruenza dei triangoli, ovvero ciò che Euclide enunicava nella Proposizione (I.4). Si è già detto (Osservazione 4) come la dimostrazione della Proposizione (I.4) fosse problematica proprio perché faceva implicita assunzione della possibilità di trasportare rigidamente i triangoli nel piano. Consapevole della falla logica presente e rinunciando a dimostrare il criterio di congruenza, Hilbert giunge alla soluzione facendone esplicita postulazione.

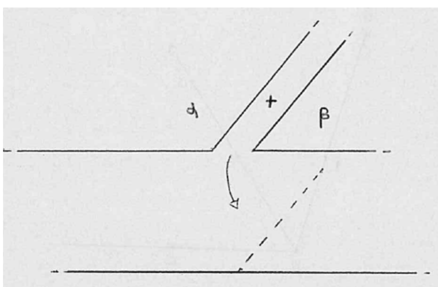
Cominciamo ora a studiare le principali conseguenze di questi assiomi di congruenza.

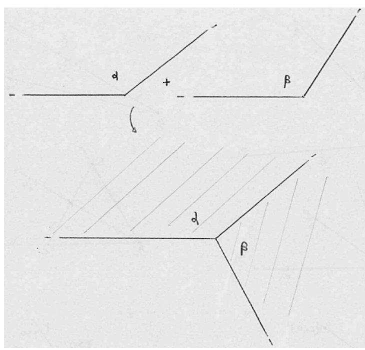
Partiamo dal mostrare quali delle proposizioni enuniciate per la congruenza dei segmenti continuano a mantenere la propria validità. Anche in questi casi, come già in precedenza, si possono trovare delle assonanze con le nozioni comuni di euclide.

Intanto, in maniera del tutto analoga a quanto fatto per i segmenti, si può dimostrare la seguente:

Proposizione 2.22. *La relazione di congruenza fra angoli è una relazione d'equivalenza.*

Nel caso dei segmenti non abbiamo avuto difficoltà a definirne la somma, una volta capaci del loro trasporto. Per quanto l'assioma (**C 4**) ci consenta a sua volta di trasportare gli angoli, poterne definire la somma non è altrettanto semplice. Parlando in termini intuitivi: se immaginiamo di trasportare un angolo e renderlo adiacente ad un altro, ciò che otteniamo potrebbe non essere più un angolo; le sue semirette, infatti, potrebbero giacere allineate, e quindi saremmo in presenza di un angolo piatto, che come già detto non è contemplato nella teoria dei *Fondamenti*. D'altra parte esiste anche la possibilità che la "somma" sfori l'angolo piatto; in tal caso si avrebbe la spiacevole situazione nella quale i due angoli addendi non siano interni all'angolo somma.



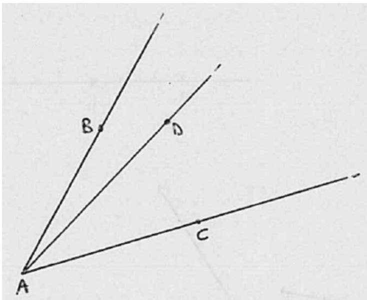


[3][7, pp. 21-22]
[4][7, pp. 16-17]

Insomma, è lecito parlare di somma di angoli solo in una serie limitata di casistiche. Ricorreremo dunque alla seguente definizione:

Definizione 2.24 (Somma e differenza di angoli)**.** Dati l'angolo $\widehat{BAC}$ e la semiretta $\overrightarrow{AD}$ interna all'angolo stesso. Diremo che l'angolo $\widehat{BAC}$ è *somma degli angoli* $\widehat{BAD}$ *e* $\widehat{DAC}$; in simboli:

$$\widehat{BAC} := \widehat{BAD} + \widehat{DAC}.$$



Similmente diremo che $\widehat{DAC}$ è *differenza di* $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{BAD}$.

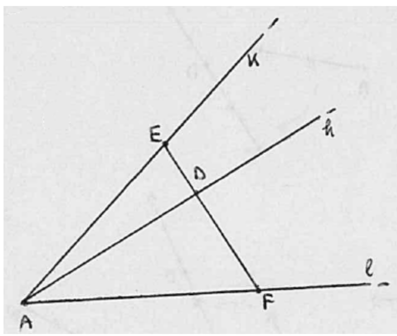
Ci chiediamo, ora, come si rapporta questa definizione di somma con la relazione di congruenza. Prima però il seguente:

Lemma 2.1. *Date h, k ed l, tre semirette distinte aventi origine comune nel punto A. Supponiamo che h e k stiano dalla stessa parte rispetto ad l. Allora o la semiretta k giace interna all'angolo $\widehat{hAl}$, oppure la semiretta h giace interna all'angolo $\widehat{kAl}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la semiretta k non sia interna a $\widehat{hAl}$. Dovendo stare dalla stessa parte di h rispetto ad l, allora necessariemente non starà dalla stessa parte di l rispetto ad h (si sta applicando la definizione di interno di un angolo).

Dobbiamo verificare che un singolo punto di h, distinto da A, sia interno a $\widehat{kAl}$.

Siano E ed F, rispettivamente su k ed l, distinti da A. Per quanto detto stanno da parti opposte rispetto a h e dunque il segmento $\overline{EF}$ interseca h, in un punto D. Osserviamo che il segmento $\overline{DF}$ non può intersecare la semiretta k (né la sua retta estensione). Infatti vale che $E * D * F$, e inoltre k e DF sono distinte; allora l'unico punto d'intersezione è E, che non giace tra D ed F. Perciò D ed F giacciono dalla stessa parte rispetto a k, e per ipotesi D ed E giacciono dalla stessa parte rispetto ad l.



Allora D è interno all'angolo $\widehat{hAl}$, e così tutta la semiretta h. □

Proposizione 2.23. *Date h, k ed l, tre semirette distinte aventi origine comune nel punto A. Date h', k' ed l', tre semirette distinte aventi origine comune nel punto A'. Posto che h, k e h', k' possono trovarsi entrambe dalla stessa parte, rispettivamente, di l e di l' oppure da parti opposte (nel senso che se h e k stanno dalla stessa parte rispetto ad l, allora anche h' e k' stanno dalla stessa parte rispetto ad l'). Se valgono le seguenti congruenze:*

$$\widehat{hAl} \equiv \widehat{h'A'l'} \quad e \quad \widehat{kAl} \equiv \widehat{k'A'l'},$$

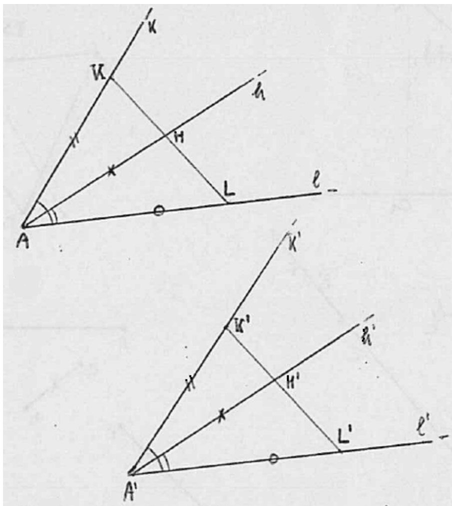
allora vale anche che

$$\widehat{hAk} \equiv \widehat{h'A'k'}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi nel caso h e k stiano dalla stessa parte rispetto ad l (e dunque h' e k' stanno dalla stessa parte rispetto a l').

Per il Lemma 2.1 o la semiretta k giace interna all'angolo $\widehat{hAl}$, oppure la semiretta h giace interna all'angolo $\widehat{kAl}$. Supponiamo che sia h a essere interna all'angolo $\widehat{kAl}$.

Scegliamo sulle semirette k, k', l ed l' i punti K, K', L ed L' (lecito perché ogni semiretta ha almeno un punto per la Proposizione 2.8) e tali che $\overline{AK} \equiv \overline{A'K'}$ e $\overline{AL} \equiv \overline{A'L'}$ (applicando l'assioma (**C 1**)). Per la Proposizione 2.14 h interseca il segmento $\overline{KL}$ in un punto, che chiameremo H. Trasportiamo AH su h', individuando H' tale che $\overline{A'H'} \equiv \overline{AH}$.



Focalizzandoci sui triangoli ALH e $A'L'H'$ e, rispettivamente, ALK e $A'L'K'$, per l'assioma (**C 6**), possiamo stabilire le seguenti congruenze:

$$\widehat{ALH} \equiv \widehat{A'L'H'}, \quad \widehat{ALK} \equiv \widehat{A'L'K'} \quad (*)$$

e $\overline{LH} \equiv \overline{L'H'}$, $\overline{LK} \equiv \overline{L'K'}$, $\widehat{AKL} \equiv \widehat{A'K'L'}$.

Osserviamo ora che, per l'assioma (**C 4**), possiamo trasportare l'angolo $\widehat{ALK}$ sulla semiretta $\overrightarrow{L'A'}$, e dalla stessa parte di K', in maniera unica; e perciò, ricorrendo alla seconda congruenza in $(*)$, riconosciamo che $\widehat{A'L'K'}$ è tale unico angolo. Anche l'angolo $\widehat{ALH}$, che d'altra parte corrisponde con $\widehat{ALK}$, può essere trasportato in maniera unica su $\overrightarrow{L'A'}$ e dalla stessa parte di K'. Inoltre H' e K' stanno dalla stessa parte rispetto ad l' (giacciono su semirette che stanno dalla stessa parte). Allora, trasportato $\widehat{ALH}$ come detto, l'unica semiretta deve contenere H' (per la prima congruenza in $(*)$) e anche K' per quanto detto sopra. Allora K', H' e L' sono allineati. Possiamo allora usare la Proposizione 2.16 e riconoscere che $\overline{HK} \equiv \overline{H'K'}$.

L'assioma (**C 6**), applicato ai triangoli AHK e $A'H'K'$ ci permette di concludere la tesi. □

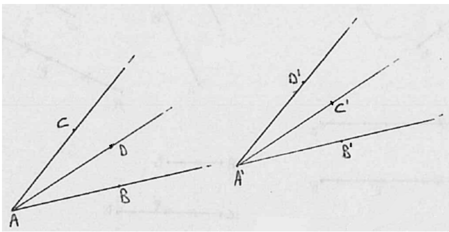
L'enunciato di questa Proposizione, in sostanza, ci garantisce che quando è possibile effettuare una somma o una differenza tra angoli, tali operazioni rispettano la relazione di congruenza; in maniera similare a quanto la Proposizione 2.17 faceva per i segmenti. In particolare il caso delle semirette h e k dalla stessa parte rispetto ad l riguarda la differenza di angoli, mentre il caso di semirette da parti opposte riguarda la somma.

La seguente proposizione, invece, ci garantisce che dati due angoli congruenti, diviso l'uno, posso dividere anche l'altro in angoli rispettivamente congruenti a quelli individuati nel primo:

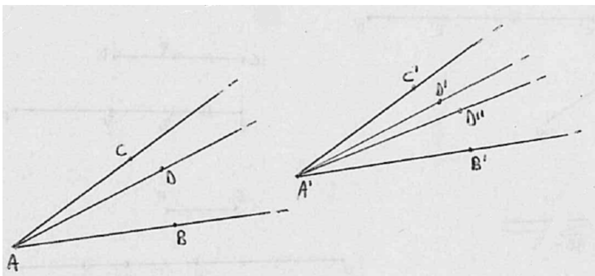
Proposizione 2.24. *Siano dati gli angoli congruenti* $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{B'A'C'}$. *Sia* $\overrightarrow{AD}$ *una semiretta di vertice in* A *e interna a* $\widehat{BAC}$*; allora esiste ed è unica la semiretta* $\overrightarrow{A'D'}$ *di vertice* A' *e interna a* $\widehat{B'A'C'}$, *tale che* $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$ *e* $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'A'C'}$.

Passiamo ora a fondare un confronto tra angoli che introduca una relazione quale "essere maggiore di". Cerchiamo, ovvero, di ordinare gli angoli quando questi non sono congruenti fra loro. Per fare ciò è importante la seguente:

Proposizione 2.25. *Siano dati due angoli* $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{B'A'C'}$. *Se il trasporto di* $\widehat{BAC}$ *sulla semiretta* $\overrightarrow{A'B'}$ *dalla parte di* $\overrightarrow{A'C'}$ *dà una semiretta interna, allora il trasporto di* $\widehat{B'A'C'}$ *sulla semiretta* $\overrightarrow{AB}$ *dalla parte di* $\overrightarrow{AC}$ *dà una semiretta esterna; e viceversa.*



Dimostrazione. Supponiamo che il trasporto di $\widehat{BAC}$ sulla semiretta...(secondo l'enunciato), porti ad un semiretta - chiamata $\overrightarrow{A'D'}$ - *interna.* Supponiamo poi, per assurdo, che il trasporto di $\widehat{B'A'C'}$ secondo l'enunciato, porti anch'esso ad una semiretta interna, poniamola $\overrightarrow{AD}$.



Vale dunque che $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'D'}$. Per la Proposizione 2.24 esiste ed è unica la semiretta $\overrightarrow{A'D''}$ *interna* a $\widehat{B'A'D'}$ e tale che $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D''}$.

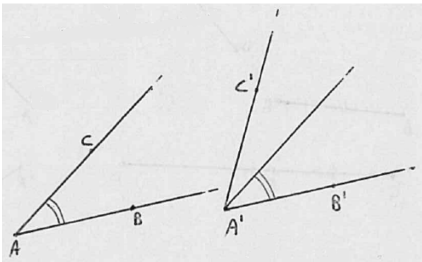
Osserviamo che per ipotesi $\overrightarrow{A'D'}$ è interna a $\widehat{B'A'C'}$, e dunque $\overrightarrow{A'C'}$ è esterna all'angolo $\widehat{B'A'D'}$ (Lemma 2.1); mentre la semiretta $\overrightarrow{A'D''}$ è interna, e perciò distinta da $\overrightarrow{A'C'}$. Inoltre le tre semirette $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'D''}$ stanno dalla stessa parte del piano rispetto ad $\overrightarrow{A'B'}$ $\big(\overrightarrow{A'D'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ stanno dalla stessa parte per costruzione del trasporto, mentre $\overrightarrow{A'D'}$ e $\overrightarrow{A'D''}$ perché quest'ultima è interna all'angolo $\widehat{B'A'D'}\big)$.

Per concludere la dimostrazione è sufficiente notare che l'angolo $\widehat{BAD}$ è congruente sia all'angolo $\widehat{B'A'D''}$, sia all'angolo $\widehat{B'A'C'}$. Ciò in evidente contraddizione con l'unicità della semiretta per A' garantita dall'assioma (**C 4**).

Il viceversa ha una dimostrazione del tutto analoga. □

La proposizione appena dimostrata ha lo scopo di assicurare che la seguente definizione sia ben posta, come anche di provare le tre proposizioni successive.

Definizione 2.25. Siano dati due angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B'A'C'}$. Se il trasporto di $\widehat{BAC}$ sulla semiretta $\overrightarrow{A'B'}$ dalla parte di $\overrightarrow{A'C'}$ dà una semiretta interna, allora diremo che l'angolo $\widehat{BAC}$ è *minore di* $\widehat{B'A'C'}$, e scriveremo $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$.



Viceversa diremo che l'angolo $\widehat{BAC}$ è *maggiore* dell'angolo $\widehat{B'A'C'}$, e scriveremo $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$.

Proposizione 2.26. *Supponiamo che* $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ *e* $\widehat{DEF} \equiv \widehat{D'E'F'}$*; allora* $\widehat{BAC} < \widehat{DEF}$ *se e solo se* $\widehat{B'A'C'} < \widehat{D'E'F'}$.

Proposizione 2.27. *La relazione* $<$ *è transitiva.*

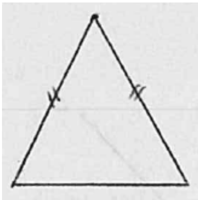
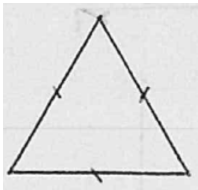
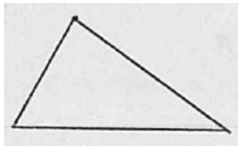
Proposizione 2.28 (Legge di tricotomia)**.** *Dati due angoli* $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{DEF}$*; è valida una ed una sola delle seguenti condizioni:*

$$\widehat{BAC} < \widehat{DEF}, \quad \widehat{BAC} \equiv \widehat{DEF}, \quad \widehat{BAC} > \widehat{DEF}.$$

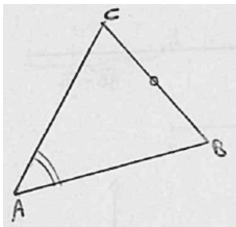
Possiamo quindi trarre conclusioni simili a quelle viste per i segmenti e le loro congruenze.

Adesso, invece, occupiamoci di mostrare come sia possibile, a partire da questa assiomatica della congruenza, ricavare alcuni dei risultati più noti della geometria degli *Elementi* di Euclide.

Definizione 2.26. Dato un triangolo ABC, esso è detto *isoscele* se ha esattamente due lati congruenti fra loro; è detto *equilatero* se tutti i suoi lati sono congruenti; e detto *scaleno* altrimenti.

Definizione 2.27. Dato un triangolo qualsiasi, chiameremo *angolo opposto* ad un lato, l'angolo interno al triangolo che ha per vertice il vertice del triangolo non giacente sul detto lato.



Proposizione 2.29 (Proposizione I.5)**.** *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati congruenti sono congruenti.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo isoscele, e dunque $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. È da verificare che $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$.

Osserviamo che nessuno degli assiomi di congruenza fa riferimento ad un verso dei segmenti, né degli angoli. Applichiamo allora l'assioma (**C 6**) ai triangoli ABC e ACB (in vero lo stesso triangolo): per ipotesi $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, come anche $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$, e per la riflessività $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB}$.

Da ciò otteniamo la congruenza di tutti gli altri elementi del triangolo, tra cui gli angoli opposti ai lati congruenti. □

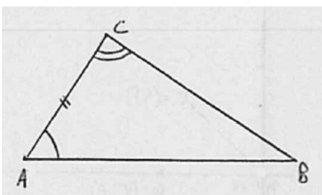
Definizione 2.28 (Triangoli congruenti)**.** Due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono detti congruenti se valgono tutte le seguenti congruenze:

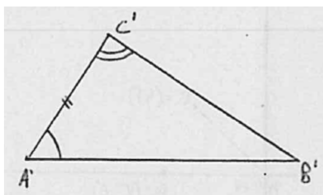
$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}, \quad \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}.$$

Proposizione 2.30 (Proposizione I.26)**.** *Un triangolo ABC è congruente ad un altro triangolo $A'B'C'$ se valgono le seguenti congruenze:*

$$\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}.$$



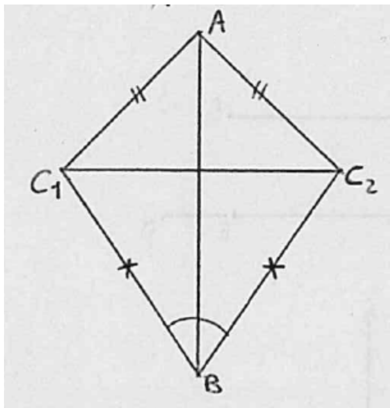


Osservazione 23. La proposizione appena enunciata corrisponde al noto *secondo criterio di congruenza* dei triangoli (II C.d.C.).

Lemma 2.2. *Dati la retta AB e i due punti C_1 e C_2, presi da parti opposte rispetto alla retta, supponiamo che $\overline{AC_1} \equiv \overline{AC_2}$ e che $\overline{BC_1} \equiv \overline{BC_2}$; allora vale che $\widehat{ABC_1} \equiv \widehat{ABC_2}$.*

Dimostrazione. Partiamo considerando il caso in cui A, C_1 e C_2 non siano allineati, come neanche B, C_1 e C_2.

In tal caso, allora, il raggio $\overrightarrow{C_1C_2}$ può essere interno, oppure esterno, all'angolo $\widehat{AC_1B}$. Supponiamo sia interno: allora $\overrightarrow{C_1A}$ e $\overrightarrow{C_1C_2}$ giacciono dalla stessa parte rispetto a C_1B. Inoltre $\overrightarrow{C_1C_2}$ seca $\overline{AB}$ in un suo punto interno (detto D), e dato che D è interno anche all'angolo $\widehat{AC_2B}$, ciò implica che $\overrightarrow{C_2C_1}$ è interna anch'essa all'angolo $\widehat{AC_2B}$ (D infatti appartiene a $\overrightarrow{C_2C_1}$ perché unico punto di intersezione tra le rette distinte AB e C_1C_2, ed essendo C_1 e C_2 da parti opposte, allora $D \in \overline{C_1C_2}$ e quindi in ambo le semirette).



Così le semirette $\overrightarrow{C_2C_1}$ e $\overrightarrow{C_2A}$ stanno dalla stessa parte rispetto a C_2B. Possiamo applicare dunque la Proposizione 2.23: i triangoli AC_1C_2 e BC_1C_2 sono isosceli per ipotesi, e dunque $\widehat{AC_1C_2} \equiv \widehat{AC_2C_1}$ e $\widehat{BC_1C_2} \equiv \widehat{BC_2C_1}$; sommandoli otteniamo la congruenza $\widehat{AC_1B} \equiv \widehat{AC_2B}$.

Nel caso $\overrightarrow{C_1C_2}$ non sia interna si perviene allo stesso risultato ricorrendo però alla differenza.

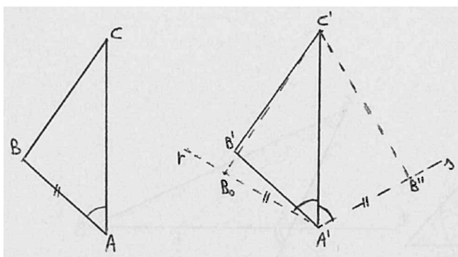
Nel caso A, C_1 e C_2 siano allineati, come anche nel caso siano allineati B, C_1 e C_2, il discorso è ancora più semplice poiché siamo in presenza di due sole semirette.

In ogni caso, dunque, possiamo applicare l'assioma (**C 6**) ai triangoli AC_1B e AC_2B, e pervenire alla tesi. □

Proposizione 2.31 (Proposizione I.8). *Se in due triangoli ABC e $A'B'C'$ i lati corrispondenti sono congruenti, i due triangoli sono congruenti.*

Dimostrazione. Trasportiamo l'angolo $\widehat{BAC}$ sulla semiretta $\overrightarrow{A'C'}$, prima dalla stessa parte di B', poi dall'altra.

Individuiamo così rispettivamente le due semirette r ed s, aventi entrambe origine nel punto A'. Sia su l'una, che sull'altra, trasportiamo il segmento $\overline{AB}$, individuando su r l'unico punto B_0 tale che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B_0}$; e su s il punto B'' tale che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}$.



Applichiamo l'assioma (**C 6**) ai triangoli ABC e $A'B_0C'$, come anche ai triangoli ABC e $A'B''C'$; concludendo che $\overline{BC} \equiv \overline{B_0C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B''C'}$.

Applicando ripetutamente la transitività della congruenza possiamo arrivare alle seguenti affermazioni:

$$\overline{A'B''} \equiv \overline{A'B_0}, \quad \overline{B''C'} \equiv \overline{B_0C'},$$

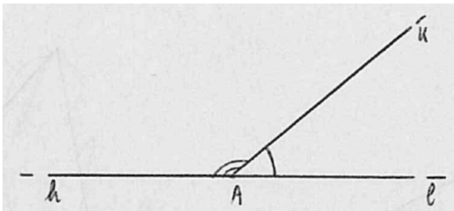
$$\overline{A'B''} \equiv \overline{AB}, \quad \overline{B''C'} \equiv \overline{B'C'}.$$

Le ipotesi del Lemma 2.2 sono soddisfatte sia per la quaterna di punti A', B_0, C' e B'', sia per la quaterna A', B', C' e B''. Da ciò consegue che l'angolo $\widehat{B_0A'C'}$ è congruente all'angolo $\widehat{B''A'C'}$, e che l'angolo $\widehat{B'A'C'}$ è congruente all'angolo $\widehat{B''A'C'}$. Perciò, applicando la proprietà transitiva, otteniamo che $\widehat{B_0A'C'} \equiv \widehat{B'A'C'}$ e che, di nuovo per la transitività, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$.

È ora sufficiente applicare l'assioma (**C 6**) ai triangoli ABC e $A'B'C'$ per ottenere la restante parte della tesi. □

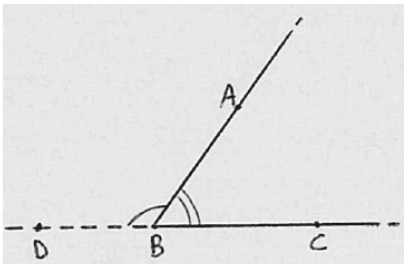
Osservazione 24. Questa proposizione è anche nota come *terzo criterio di congruenza* dei triangoli (III C.d.C.).

Definizione 2.29 (Angoli adiacenti)**.** Due angoli sono detti *adiacenti*, o *supplementari*, se hanno il vertice ed una semiretta in comune, e le due semirette non in comune formano una retta.



Osservazione 25.

Osserviamo che, dato un angolo $\widehat{ABC}$, un suo supplementare si può ottenere scegliendo una delle due semirette (poniamo $\overrightarrow{BC}$) e trovando sulla corrispondente retta BC un punto D che giaccia dall'altra parte di C rispetto ad B. L'angolo $\widehat{ABD}$ è l'angolo cercato.

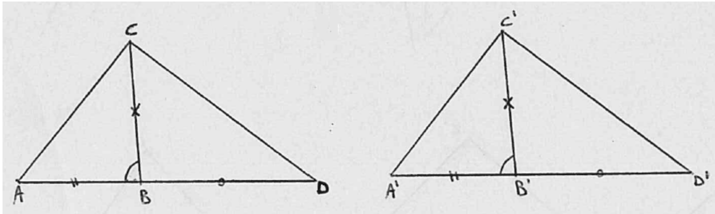


Proposizione 2.32. *Dati due angoli adiacenti $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CBD}$, e altri due angoli a loro volta adiacenti $\widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{C'B'D'}$. Supponiamo che valga la congruenza $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, allora vale anche la congruenza $\widehat{CBD} \equiv \widehat{C'B'D'}$. Brevemente: angoli adiacenti ad angoli congruenti, sono congruenti.*

Dimostrazione. Per l'assioma (**C 1**) non è restrittivo ipotizzare $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$, $\overline{C'B'} \equiv \overline{CB}$ e $\overline{D'B'} \equiv \overline{DB}$.

Considerando i triangoli ABC e $A'B'C'$: poste le congruenze appena dette e quelle presenti in ipotesi, e applicando l'assioma (**C 6**), concludiamo che sono congruenti, ed in particolare che $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$.

Osserviamo ora che per definizione di angolo adiacente, tra i punti A, B e D vale la seguente relazione: $A * B * D$; (analogamente per A', B' e D').



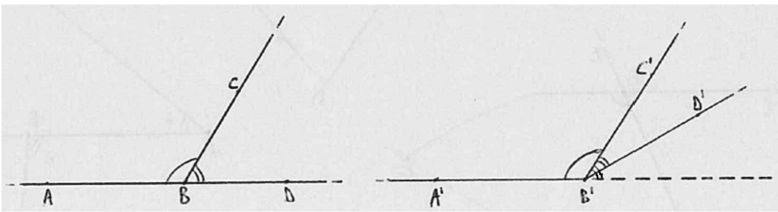
Allora, applicando l'assioma (**C 3**), si evince che $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$. Possiamo allora applicare (**C 6**) ai triangoli CAD e $C'A'D'$ ricavando le seguenti congruenze: $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ e $\widehat{ADC} \equiv \widehat{A'D'C'}$.

Per concludere la tesi è ora sufficiente applicare l'assioma (**C 6**) ai triangoli BCD e $B'C'D'$. □

Attraverso questa proposizione possiamo arrivare a interessanti conclusioni circa le congruenze degli angoli.

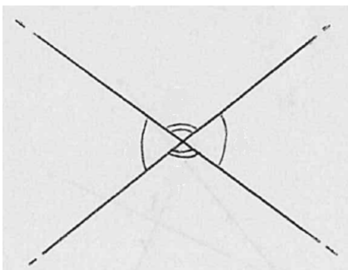
Corollario 2.2. *Siano $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CBD}$ due angoli adiacenti. Siano poi $\widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{C'B'D'}$ due angoli (che condividono una semiretta) tali che i punti A' e D' giacciamo da parti opposte rispetto a $B'C'$. Supponiamo che $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{CBD} \equiv \widehat{C'B'D'}$; allora anche gli angoli $\widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{C'B'D'}$ sono adiacenti.*

Dimostrazione.



Prolunghiamo a retta la semiretta $\overrightarrow{B'A'}$: individuiamo in tal modo, dall'altra parte del piano rispetto a $B'C'$ (quella ove giace il punto D'), una seconda semiretta che definisce, insieme a $\overrightarrow{B'C'}$, un angolo adiacente a $\widehat{A'B'C'}$. Tale angolo, per la Proposizione precedente, è congruente a $\widehat{CBD}$; ma per l'unicità del trasporto esso deve concidere con $\widehat{C'B'D'}$. Da cui la tesi. □

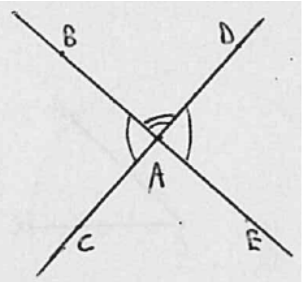
Definizione 2.30 (Angoli opposti al vertice)**.** Due angoli sono detti *opposti al vertice* se hanno il vertice in comune e se le semirette dell'uno formano rispettivamente con le semirette dell'altro delle rette.



Proposizione 2.33 (Proposizione I.15)**.** *Due angoli opposti al vertice sono congruenti.*

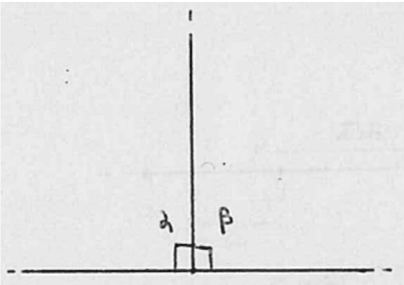
Dimostrazione.

Considerando $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DAE}$ opposti al vertice; entrambi sono adiacenti all'angolo $\widehat{BAE}$. Da qui semplice applicazione della Proposizione 2.32.



□

Definizione 2.31 (Angolo retto)**.** Un angolo è detto *retto* se è congruente ad un suo angolo adiacente.



Osservazione 26. Si noti che la Proposizione 2.32 garantisce che la Definizione 2.31 sia ben posta, ovvero che non dipenda dalla scelta di quale angolo adiacente venga usato per verificare la congruenza.

Definizione 2.32 (Rette perpendicolari)**.** Due rette sono dette *perpendicolari* (o *ortogonali*) se sono incidenti e formano un angolo retto.

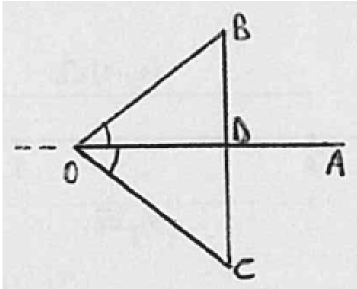
Proposizione 2.34. *Esiste un angolo retto.*

Dimostrazione. Sia data una semiretta $\overrightarrow{OA}$ qualsiasi, e vi si trasporti sopra, sia da una parte che dall'altra, un angolo arbitrario. Sulle due semirette trovate si prendano i punti B e C, tali che $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ (solita applicazione dell'assioma (**C 1**)). Dato che B e C giacciono da parti opposte rispetto a OA, allora tale retta interseca il segmento $\overline{BC}$ in un punto D.

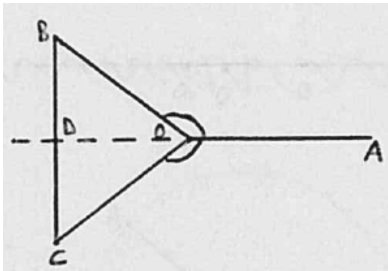
Se D e O coincidono allora la terna B, O, C è una terna di punti allineati con O che giace fra gli altri due. Ovvero gli angoli $\widehat{BOA}$ e $\widehat{COA}$ sono adiacenti, e congruenti perché trasporto di uno stesso angolo, e perciò retti.

Diversamente, se D e O sono distinti si presentano due possibilità:

(1) D giace sulla semiretta $\overrightarrow{OA}$. In questo caso, per costruzione $\widehat{BOD} \equiv \widehat{COD}$; come anche $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ e $\overline{OD} \equiv \overline{OD}$. Applicando (**C 6**) ai triangoli BOD e COD, otteniamo la congruenza $\widehat{BDO} \equiv \widehat{CDO}$; i quali sono anche adiacenti, e perciò retti.



(2) D giace sull'altra semiretta di OA. In tal caso si ricorre alla Proposizione 2.32: gli angoli $\widehat{BOA}$ e $\widehat{COA}$ sono congruenti per costruzione, ed adiacenti rispettivamente agli angoli $\widehat{BOD}$ e $\widehat{COD}$, che dunque sono congruenti a loro volta. Concludiamo che gli angoli (adiacenti) $\widehat{BDO}$ e $\widehat{CDO}$ sono congruenti - e quindi retti - dalla congruenza dei triangoli BOD e COD.



□

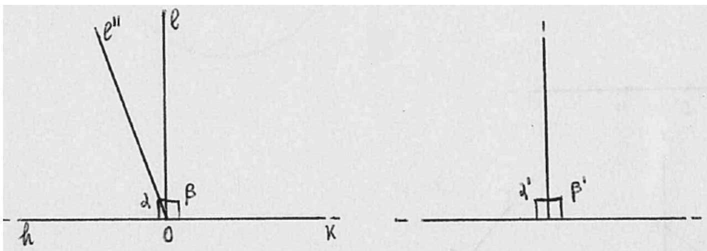
Il prossimo risultato verrà anticipato da una citazione presa direttamente da Hilbert ([7, p. 24]): «Sulla base del confronto degli angoli riesce la dimostrazione del seguente semplice teorema, che Euclide - *a mio giudizio a torto* - ha posto fra gli assiomi.»

Teorema 2.4 (Postulato IV)**.** *Tutti gli angoli retti sono fra loro congruenti.*

Dimostrazione. Siano α e α' due angoli retti e β, β' i rispettivi angoli adiacenti. Indichiamoli anche con $\widehat{hOl}$ (per α) e $\widehat{kOl}$ (per β).

Si vuole dimostrare che $\alpha \equiv \alpha'$.

Supponiamo per assurdo che ciò sia falso; volendo allora trasportare l'angolo α' sulla semiretta h e dalla stessa parte della semiretta l, si ottiene la semiretta l'', necessariemente distinta da l. Ovvero, o l'' giace interna ad α, oppure interna a β. Supponiamo la prima: allora, necessariamente (Lemma 2.1) l giace interna a $\widehat{kOl''}$.



Applicando la definizione di confronto fra angoli (2.25), come le ipotesi, otteniamo:

$$\widehat{hOl''} < \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \beta < \widehat{kOl''}.$$

E per la transitività del confronto stesso: $\widehat{hOl''} < \widehat{kOl''}$.

Applicando ora, invece, la Proposizione 2.32 e le ipotesi, possiamo ricavare i seguenti fatti:

$$\widehat{hOl''} \equiv \alpha', \quad \alpha' \equiv \beta', \quad \beta' \equiv \widehat{kOl''}.$$

Da cui segue: $\widehat{hOl''} \equiv \widehat{kOl''}$. In evidente contraddizione con la legge di tricotomia.

Qualora la semiretta l'' fosse stata interna all'angolo β si procedeva in maniera analoga. □

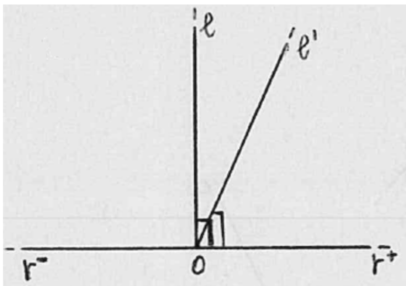
Osservazione 27. Si era già fatto notare (Osservazione 4), che il IV postulato diveniva superfluo nell'ipotesi di poter muovere rigidamente le figure. In effetti, questo teorema ne dà la prova.

Corollario 2.3 (Proposizione I.11). *Data una retta r ed un suo punto O, esiste ed è unica la retta ortogonale ad r passante per O.*

Dimostrazione. Esistenza: poiché esiste un angolo retto α, trasportiamolo su una qualsiasi delle semirette di r individuate da O, e da una parte qualisiasi del piano, ottenendo una semiretta l. Prolunghiamo l a retta e troviamo la perpendicolare cercata.

Unicità: supponiamo esistano due rette distinte l ed l', entrambe perpendicolari ad r e passanti per O. Invece di considerare l ed l' nella loro interezza consideriamo per ciascuna solo una semiretta tra le due individuate da O, in modo tale che le due semirette di l ed l' giacciano dalla stessa parte del piano rispetto ad r. Analogamente invece di considerare r nella sua interezza consideriamo solo una delle sue due semirette fra quelle individuate da O, scelta arbitrariamente (una la indichiamo r^+, l'altra r^-).

L'angolo $\widehat{lOr^+}$ è retto per ipotesi. Trasportiamolo dunque sulla semiretta r^- e dalla stessa parte rispetto alle semirette l ed l', individuando l'unica semiretta l''. Poiché l'angolo $\widehat{lOr^+}$ è retto, e dunque congruente al suo adiacente $\widehat{lOr^-}$, allora $l'' = l$. Tuttavia, anche $\widehat{l'Or^+}$ è retto, e dunque anche il suo adiacente $\widehat{l'Or^-}$; considerando allora che tutti gli angoli retti sono congruenti per il Teorema 2.4, otteniamo che $l'' = l'$. Assurdo.

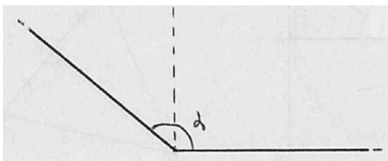


□

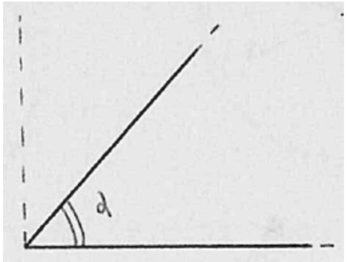
Veniamo ora alle note definizioni di angolo aculo ed ottuso:

Definizione 2.33.

Un angolo maggiore di un suo adiacente (e quindi maggiore di un angolo retto) è detto *angolo ottuso*.

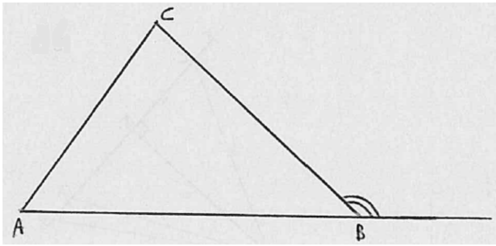


Un angolo che è invece minore di un suo adiacente (e quindi anche minore di un angolo retto) è detto *angolo acuto*.



Definizione 2.34 (Triangolo rettangolo)**.** Un triangolo è detto *rettangolo* se almeno uno dei suoi angoli interni è retto.

Definizione 2.35 (Angolo esterno)**.** Dato un qualsiasi triangolo ABC, un angolo adiacente ad uno degli angoli del triangolo è detto *angolo esterno* al triangolo.



Proposizione 2.35 (Proposizione I.16)**.** *Un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno dei due angoli del triangolo che non sono ad esso adiacenti.*

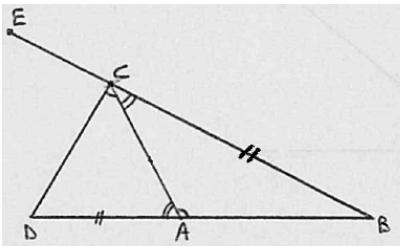
Dimostrazione. Consideriamo il triangolo ABC; e sia $\widehat{CAD}$ l'angolo esterno ottenuto individuando il punto D sulla retta AB dall'altra parte di B rispetto ad A. Per l'assioma (**C 1**) possiamo supporre $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$.

Osserviamo poi che il punto D non può giacere sulla retta BC, altrimenti tale retta verrebbe a coincidere con la retta AB, e i punti A, B e C sarebbero allineati.

La legge di tricotomia garantisce che sia possibile uno solo di questi fatti:

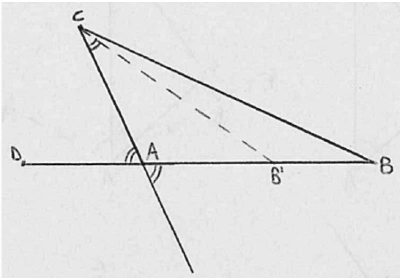
$$\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}, \quad \widehat{CAD} < \widehat{ACB}, \quad \widehat{CAD} > \widehat{ACB}.$$

Partiamo confutando la prima affermazione.
Se per assurdo fosse $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}$, in virtù delle congruenze fra i lati e dell'assioma (**C 6**), varrebbe anche la congruenza $\widehat{ACD} \equiv \widehat{CAB}$. Dato che gli angoli $\widehat{CAD}$ e $\widehat{CAB}$ sono adiacenti, considerate le congruenze appena citate e la Proposizione 2.32, potremmo concludere che l'angolo $\widehat{ACD}$ sarebbe congruente ad un angolo adiacente all'angolo $\widehat{ACB}$ (in figura: $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ACE}$).



In particolare, applicando l'assioma (**C 4**) all'angolo $\widehat{ACD}$ e alla semiretta $\overrightarrow{CA}$, deduciamo che D dovrebbe essere allineato con C e B. Assurdo.

Confutiamo l'affermazione $\widehat{CAD} < \widehat{ACB}$.



Se ciò fosse vero, infatti, il trasporto dell'angolo $\widehat{CAD}$ sulla semiretta $\overrightarrow{CA}$ dalla parte di B fornirebbe una semiretta interna all'angolo $\widehat{ACB}$; la quale, dunque, dovrebbe intersecare il segmento $\overline{AB}$, in un punto B'. Si potrebbe ora considerare il triangolo $AB'C$, di cui l'angolo $\widehat{CAD}$ continua ad essere angolo esterno, e arriveremmo all'assurdo $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB'}$, già trattato nel caso precedente.

Necessariamente, allora, vale che $\widehat{CAD} > \widehat{ACB}$.

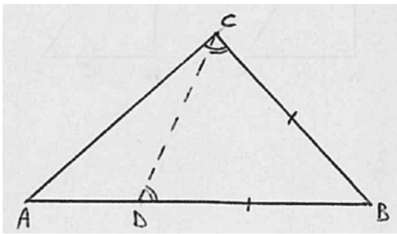
Rimane da dimostrare che $\widehat{CAD} > \widehat{ABC}$. Per fare ciò è sufficiente ricorrere all'angolo opposto al vertice a $\widehat{CAD}$, il quale, ripetetendo la medesima dimostrazione, si può dimostrare essere maggiore di $\widehat{ABC}$. □

Proposizione 2.36 (Proposizione I.18)**.** *In ogni triangolo il lato maggiore sta opposto all'angolo maggiore.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Ipotizziamo $\overline{AB}$ sia il maggiore fra i lati; dobbiamo dimostrare che $\widehat{ACB}$ è il maggiore fra gli angoli.

Dimostriamo che $\widehat{ACB} > \widehat{CAB}$ (per il restante angolo è analogo).

Trasportiamo il segmento $\overline{CB}$ sulla semiretta $\overrightarrow{BA}$.



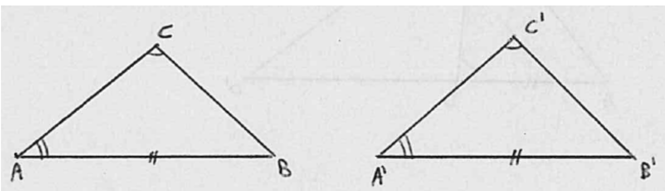
Per ipotesi il punto D trovato dovrà giacere fra A e B (e quindi la semiretta $\overrightarrow{CD}$ essere interna all'angolo $\widehat{ACB}$). Il triangolo DBC è isoscele, e perciò i suoi angoli alla base $\widehat{DCB}$ e $\widehat{CDB}$ debbono essere congruenti. Ora, $\widehat{CDB}$ è angolo esterno al triangolo ADC, e dunque maggiore dell'angolo $\widehat{CAB}$; d'altra parte, essendo $\overrightarrow{CD}$ interna ad $\widehat{ACB}$, vale che $\widehat{BCD} < \widehat{ACB}$.
La tesi si conclude con la transitività del confronto. □

Proposizione 2.37 (Proposizione I.6)**.** *Un triangolo con due angoli uguali è isoscele.*

Dimostrazione. Diretta conseguenza della Proposizione 2.36. □

Proposizione 2.38. *Due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono tra loro congruenti se sono soddisfatte le seguenti congruenze:*

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}.$$

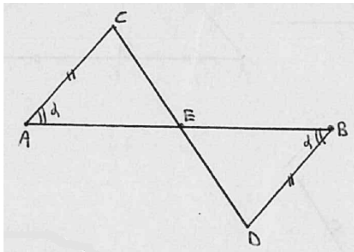


Osservazione 28. La precedente proposizione, unitamente alla 2.30, dà l'enunciato completo della Proposizione (I.26) degli *Elementi*.

Proposizione 2.39 (Proposizione I.10)**.** *Ogni segmento può venire dimezzato.*

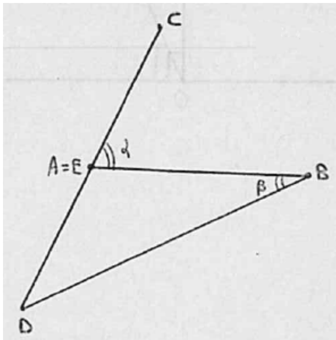
Dimostrazione. Sia $\overline{AB}$ il segmento che si desidera dimezzare.

Sia ora α un angolo a piacere, trasportiamolo prima sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$, da una delle due parti (ottenendo la semiretta r); poi sulla semiretta $\overrightarrow{BA}$, dalla parte opposta (trovando la semiretta s). Prendiamo i punti C e D rispettivamente su r e su s. Possiamo supporre che $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

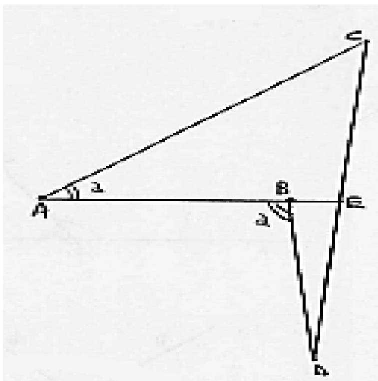


Dato che per costruzione C e D stanno da parti opposte rispetto alla retta AB, allora tale retta deve intersecare il segmento $\overline{CD}$, trovando il punto E.

E non può coincidere con A: altrimenti l'angolo $\widehat{BEC}$ (che verrebbe in questo scenario a coincidere con α) sarebbe esterno al triangolo BED, e dunque maggiore dell'angolo $\widehat{EBD}$ (ovvero α). Assurdo. Analogamente si dimostra che E non può coincidere con B.



Essendo A, B ed E tre punti allineati e distinti, uno deve giacere fra gli altri due. Supponiamo sia $A*B*E$. In tal caso l'angolo $\widehat{ABD}$ (ovvero α) è esterno al triangolo BDE, e perciò maggiore dell'angolo $\widehat{BED}$, il quale a sua volta è esterno al triangolo AEC, e perciò maggiore dell'angolo $\widehat{CAE}$ (ovvero α). Assurdo. In via del tutto analoga si dimostra che non può essere $E * A * B$.



Necessariamente, allora, E giace fra A e B. Ne consegue che gli angoli $\widehat{AEC}$ e $\widehat{BED}$ sono opposti al vertice, e perciò congruenti. Si può allora applicare la Proposizione 2.38 ai triangoli AEC e BED, e ricavare la congruenza $\overline{AE} \equiv \overline{EB}$.

La tesi è provata. □

Osservazione 29. Risultano di una certa evidenza le due seguenti affermazioni:

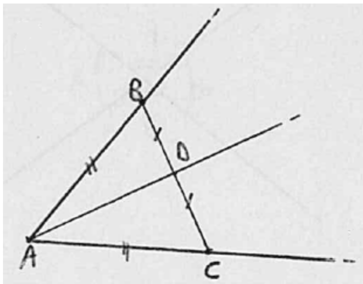
il segmento dimezzato è minore del segmento intero;

il segmento dimezzato, sommato a se stesso, dà come risultato un segmento congruente al segmento intero.

Analogamente:

Proposizione 2.40 (Proposizione I.9). *Ogni angolo può venire dimezzato.*

Dimostrazione. Sia $\widehat{BAC}$ un angolo qualsiasi.



Per l'assioma (**C 1**) possiamo supporre $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Congiungiamo ora B con C, ottenendo il triangolo ABC. Tale triangolo è isoscele. Applicando la Proposizione 2.39 dimezziamo il segmento $\overline{BC}$, determinando il punto D su di esso (osserviamo poi che D, e dunque anche $\overline{AD}$, è interno a $\widehat{BAC}$).

I triangoli ABD e ACD sono congruenti perché hanno tutti e tre i lati ordinatamente congruenti; conseguiamo dunque che $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$. L'angolo è stato dimezzato. □

Modelli

Sulla scia di quanto fatto fino ad ora, mostriamo che esiste un modello anche per gli assiomi di congruenza fra angoli.

Esempio 2.7. Necessitando degli assiomi di congruenza fra segmenti, recuperiamo il vecchio modello e vediamo che ha ancora validità: dobbiamo cioè provare che il piano cartesiano sopra il campo dei numeri reali è modello per gli assiomi di congruenza.

Dobbiamo intanto definire cosa si intende per congruenza fra angoli.

Siano dati tre punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$; definiamo prodotto scalare della terna ordinata (A, B, C), e lo indichiamo con il simbolo $< B - A, C - A >$, il numero reale:

$$(b_1 - a_1) \cdot (c_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \cdot (c_2 - a_2).$$

Si faccia caso al fatto che con questa definizione è possibile riscrivere anche la formula di distanza fra punti. In particolare: $d(A, B) = \sqrt{< B - A, B - A >}$. Inoltre esiste una forma di simmetria, dato che le due terne (A, B, C) e (A, C, B) hanno lo stesso prodotto scalare, qualsiasi siano i punti A, B e C scelti. In simboli: $< B - A, C - A >=< C - A, B - A >$.

Consideriamo ora le due semirette $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, aventi ambo origine nel punto A. Definiamo *coseno dell'angolo* $\widehat{BAC}$ il numero reale

$$\cos\big(\widehat{BAC}\big) := \frac{< B - A, C - A >}{d(A, B)d(A, C)}.$$

Alcune osservazioni:

(a) il coseno di un angolo risulta ben definito perché la distanza tra due punti è non nulla se tali punti sono distini; inoltre la scrittura presentata non dipende dalla scelta dei punti B e C sulle due semirette: infatti, posto $D = t_0(B-A)+A$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, un punto su $\overrightarrow{AB}$, ed $E = t_1(C - A) + A$, $t_1 \in \mathbb{R}^+$, sulla semiretta $\overrightarrow{AC}$, allora:

$$\cos\big(\widehat{DAE}\big) = \frac{< D - A, E - A >}{d(A, D)d(A, E)} = \frac{t_0 t_1 < B - A, C - A >}{|t_0||t_1|d(A, B)d(A, C)} = \cos\big(\widehat{BAC}\big);$$

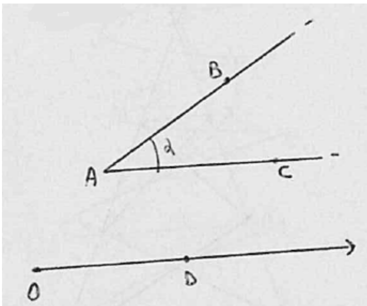
(b) la simmetria delle funzioni in gioco nella definizione garantisce che il coseno non dipende in alcun modo dal verso dell'angolo.
Cioé $\cos\big(\widehat{BAC}\big) = \cos\big(\widehat{CAB}\big)$;

(c) è possibile dimostrare che risulta $\cos\big(\widehat{BAC}\big) \in]-1,1[$, qualsiasi sia l'angolo (si tratta, a ben vedere, della *disuguaglianza di Schwarz*. In particolare non può valere né -1 né 1, perché le due semirette non possono giacere sulla stessa retta).

Possiamo dunque definire che, dati due angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DEF}$, essi sono congruenti se e solo se hanno lo stesso valore del coseno. In simboli:

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{DEF} \iff \cos\big(\widehat{BAC}\big) = \cos\big(\widehat{DEF}\big).$$

Dimostriamo ora la validità dei tre assiomi di congruenza degli angoli:
(**C 4**): siano $\widehat{BAC}$ un angolo e $\overrightarrow{OD}$ una semiretta, presi a piacere. Vogliamo trasportare in maniera unica l'angolo sulla semiretta, da una parte del piano.



Valendo l'assioma (**C 1**), possiamo supporre $\overline{OD} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{AB}$. Per semplicità usiamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} &k := < B - A, C - A >, \\ &d := d(A,B) = d(A,C) = d(O,D), \\ &D - O = (a,b). \end{aligned}$$

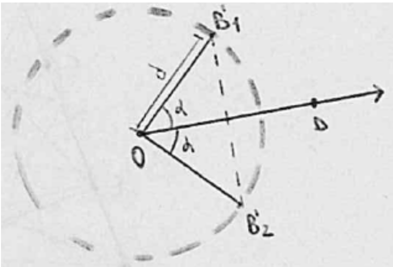
In particolare, osserviamo che $k = \cos\big(\widehat{BAC}\big) \cdot d \cdot d$ e quindi, per l'osservazione precedente (c), si ha $|k| < d^2$.

Stiamo cercando il punto B' tale che $\cos\big(\widehat{B'OD}\big) = \cos\big(\widehat{BAC}\big)$, in tal modo la semiretta $\overrightarrow{OB'}$ sarà la semiretta cercata. Possiamo supporre, in virtù dell'assioma (**C 1**) e dell'indipendenza del coseno dal punto scelto sulla semiretta, che $d(O,B') = d(A,B) = d$. Il problema si traduce quindi, posto $B' - O = (x,y)$, nel trovare una soluzione al seguente sistema:

$$\begin{cases} < B' - O, D - O >= k \\ d(O,B') = d \end{cases};$$

ovvero:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases}.$$



Svolgendo i calcoli si perviene alla seguente coppia di risultati:

$$B_1' = \left(\frac{ak + |b|\sqrt{d^4 - k^2}}{d^2}, \frac{kd^2 - a^2k - a|b|\sqrt{d^4 - k^2}}{bd^2} \right),$$
$$B_2' = \left(\frac{ak - |b|\sqrt{d^4 - k^2}}{d^2}, \frac{kd^2 - a^2k + a|b|\sqrt{d^4 - k^2}}{bd^2} \right);$$

nel caso $b \neq 0$.

Si osservi che, per le considerazioni fatte sopra, il radicando è sempre strettamente positivo.

Queste sono le due *uniche* soluzioni possibili. Per concludere la dimostrazione dobbiamo verificare che stiano da parti opposte rispetto alla retta OD. Si consideri allora il segmento $\overline{B_1'B_2'} = t(B_2' - B_1') + B_1'$, $t \in [0, 1]$. Ponendo $t = 1/2$ otteniamo il "punto medio" $\bar{B} = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, per il quale si può verificare che:

$$\bar{B} = \frac{k}{d^2}(a, b) \in OD.$$

Nel caso $b = 0$ si perviene alle due soluzioni:

$$B_1' = \left(\frac{k}{a}, \sqrt{d^2 - \frac{k^2}{a^2}} \right),$$
$$B_2' = \left(\frac{k}{a}, -\sqrt{d^2 - \frac{k^2}{a^2}} \right).$$

Per le quali valgono gli stessi fatti.

Ciò conclude la dimostrazione.

(**C 5**): diretta conseguenza delle proprietà di uguaglianza tra numeri reali.

(**C 6**): l'assioma (**C 6**), si è detto, garantisce la possibilità di applicare i moti rigidi ai triangoli. Intuitivamente, dunque, è necessario dimostrare che nel piano $\mathbb{R}^2$ esistano dei moti rigidi conformi con le definizioni di congruenza date.

Definiremo *endomorfismo unitario* ogni applicazione f lineare e biettiva, da $\mathbb{R}^2$ in sé, tale che preservi il prodotto scalare, qualsiasi siano i punti del piano; ovvero tale che $< f(B) - f(A), f(C) - f(A) >=< B - A, C - A >$ per ogni terna ordinata (A, B, C).

Per prima cosa, arrivati a questo punto, proveremo che le applicazioni lineari preservano le strutture della geometria che abbiamo definito sul piano cartesiano. Ovvero, dimostreremo la seguente lista di fatti:
sia $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare* e *biettiva*, allora

(*1*) per ogni retta r nel piano, $g(r)$ è ancora una retta;

(*2*) se $A * B * C$ allora $g(A) * g(B) * g(C)$;

sia f un *endomorfismo unitario*, allora:

(*3*) $\overline{AB} \equiv \overline{f(A)f(B)}$;

(*4*) $\widehat{BAC} \equiv \widehat{f(B)f(A)f(C)}$.

Dunque, cominciamo. Sia g un'applicazione lineare biettiva:
(*1*): una retta nel piano si è visto essere coincidente con l'immagine della funzione $t \mapsto t(B - A) + A$, $t \in \mathbb{R}$; dove A e B sono due qualsiasi punti distinti sulla retta. Allora, per ogni t reale,

$$g\big(t(B - A) + A\big) = t\big(g(B) - g(A)\big) + g(A);$$

dove si è sfruttata la linearità dell'applicazione. Poiché g è biettiva, allora $g(A) \neq g(B)$ e quindi $g(r)$ è la retta definita da $g(A)$ e $g(B)$.
(*2*): per ipotesi i tre punti A, B e C sono distinti, allineati, ed esiste un certo $t_0 \in [0, 1]$ tale che $B = t_0(C - A) + A$.
Per la biettività di g le immagini continuano ad essere distinte; per quanto provato in (*1*) le immagini continuano ad essere allineate; proviamo l'ultima parte:

$$g(B) = g\big(t_0(C - A) + A\big) = t_0(g(C) - g(A)) + g(A),$$

con $t_0 \in [0, 1]$. Ovvero $g(B)$ giace fra $g(A)$ e $g(C)$.

Sia adesso f un endomorfismo unitario:
(*3*): osserviamo che, per i precedenti punti dimostrati, vale la seguente uguaglianza: $f\big(\overline{AB}\big) = \overline{f(A)f(B)}$, qualsiasi sia l'applicazione lineare e biettiva f. In più ricordiamo che la definizione data di congruenza fra segmenti (Esempio 2.6), poggia sulla definizione di distanza, la quale, in apertura del presente Esempio, abbiamo mostrato essere esprimibile in funzione del prodotto scalare.
Poiché $< f(B) - f(A), f(C) - f(A) >=< B - A, C - A >$ per ogni (A, B, C), allora:

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) = & \\ & \sqrt{< f(B) - f(A), f(B) - f(A) >} = \\ & \sqrt{< B - A, B - A >} = \\ & d(A, B). \end{aligned}$$

La prova del punto (*3*) diventa quindi una semplice constatazione di fatto.
(*4*): poiché f è biettiva, due rette distinte vengono mandate in due rette distinte; inoltre, ripercorrendo la dimostrazione del punto (*1*), possimo evincere che l'immagine di una semiretta sia una semiretta. Unendo questi due fatti concludiamo che semirette distinte non possano essere mandate su due semirette

che giacciano su una stessa retta; ovvero $\widehat{f(B)f(A)f(C)}$ è ancora un angolo. Per dimostrare il punto (*4*), come per quella del punto precedente, è sufficiente notare che la definizione di coseno si rifà a operatori invarianti per endomorfismi unitari.

Adesso consideriamo le traslazioni, quindi quelle trasformazioni della forma:

$$\begin{aligned} t_v \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y + b), \end{aligned}$$

con $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ parametro arbitrario.

Non più complessa rispetto a prima è la dimostrazione che le quattro proposizioni (*1-4*) elencate sopra valgano anche per le traslazioni del piano.

Definiamo infine *isometria* una qualsiasi composizione tra un endomorfismo unitario e una traslazione. Un'isometria è quindi una trasformazione nella forma: $\varphi = t_v \circ f$, con f endomorfismo unitario e t_v traslazione.

In questo momento, perciò, possiamo concludere che:

Ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ manda rette in rette (e semirette in semirette), conserva la relazione di "stare fra", e conserva la congruenza tra segmenti e angoli.

In particolare, conservando la congruenza di segmenti e angoli, le isometrie conservano le congruenze di tutti i termini di un triangolo. Diventa allora evidente come l'immagine di un triangolo rispetto ad un'isometria sia congruente al triangolo stesso.

Vorremmo ora dimostrare che all'interno dell'insieme di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$ ce ne sono che soddisfano le seguenti richieste:

a) per ogni coppia di punti A e B, esiste un'isometria φ tale che $\varphi(A) = B$;

b) per ogni angolo $\widehat{AOB}$ esiste un'isometria che lascia invariato il punto O, e porta la semiretta $\overrightarrow{OA}$ sulla semiretta $\overrightarrow{OB}$;

c) per ogni retta r esiste un'isometria che lascia fissi i punti della retta e che inverte le due parti di piano definite da r.

a) Siano A e B nel piano, consideriamo la traslazione di parametro $B - A$; essa soddisfa tutte le richieste;

b) dato l'angolo $\alpha = \widehat{AOB}$, posto $O = (o_1, o_2)$ e ricordato che

$$\cos(\alpha) = \frac{< A - O, B - O >}{d(O, A) d(O, B)},$$

ricorriamo alla seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \cos(\alpha)(x - o_1) - \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}(y - o_2) + o_1 \\ y' = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}(x - o_1) + \cos(\alpha)(y - o_2) + o_2 \end{cases},$$

oppure alla sua inversa; una delle due soddisfa le richieste;

c) sia $r : y = mx + q$ una retta nel piano; usiamo la seguente applicazione:

$$\begin{cases} x' = \frac{-2mq + x - m^2x + 2my}{m^2+1} \\ y' = \frac{2q + 2mx - y + m^2y}{m^2+1} \end{cases} .$$

Si può verificare che lascia invariati i punti della retta r. Per dimostrare l'inversione dei due semipiani dobbiamo verificare che per ogni $P \notin r$, $f(P)$ e P giacciano da parti opposte rispetto ad r: si prende allora il "punto medio" tra P ed $f(P)$ $\big($che si ottiene inserendo $t = 1/2$ nella scrittura del segmento $\overline{f(P)P}\big)$ e si prova che tale punto medio giace sulla retta. Perciò $\overline{f(P)P} \cap r \neq \emptyset$.

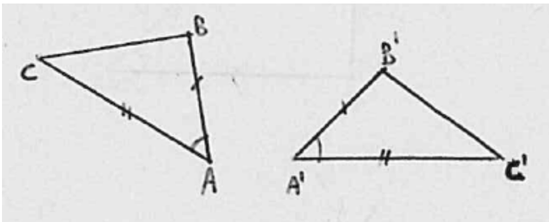
Il caso di rette nella forma $x = k$ procede analogo, ricorrendo a

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases} .$$

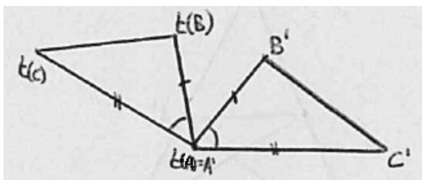
Tutte le applicazioni adoperate - si può provare - sono effettivamente isometrie (si tratta di quelle trasformazioni che nel linguaggio usuale chiamiamo, rispettivamente, traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali).

Siamo quindi in presenza di un gruppo di trasformazioni sufficientemente ricco per dimostrare la validità dell'assioma (**C 6**).

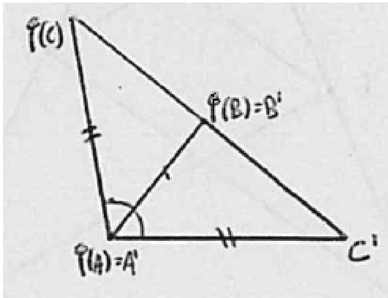
Infatti, consideriamo ora due triangoli ABC e $A'B'C'$ tali che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Vogliamo provare la congruenza tra i due triangoli.



Dati i due punti A e A', applichiamo la traslazione che porta il primo nel secondo, e indichiamola con t. Osserviamo che $\overline{t(A)t(B)} \equiv \overline{AB}$, come anche per tutti gli altri termini del triangolo. Abusando forse un poco delle notazioni, possiamo affermare che il triangolo $t(A)t(B)t(C)$ è congruente al triangolo ABC.

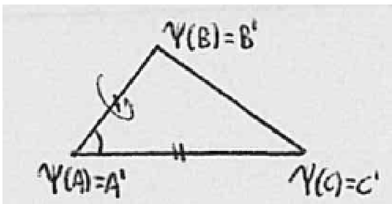


Ora si possono presentare due situazioni: o $t(B)$ viene a giacere sulla semiretta $\overrightarrow{A'B'}$, oppure no. Nella prima di queste situazioni non facciamo nulla; nella seconda, invece, consideriamo l'angolo $\widehat{t(B)t(A)B'}$ e applichiamo quella trasformazione che porta la semiretta $\overrightarrow{t(A)t(B)}$ sulla semiretta $\overrightarrow{t(A)B'} = \overrightarrow{A'B'}$. Sia φ la composizione di tale trasformazione con la traslazione t. Vale ovviamente che i triangoli $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$ e ABC sono congruenti, e che $\varphi(A) = t(A) = A'$.



Quello che dobbiamo osservare ora è che necessariamente $\varphi(B)$ coincide con B': per costruzione $\varphi(B)$ giace sulla semiretta $\overrightarrow{A'B'}$; d'altra parte vale che $\overline{\varphi(A)\varphi(B)} \equiv \overline{AB}$, e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. L'assioma (**C 1**) garantisce l'unicità del trasporto di segmenti, e allora $\varphi(B) = B'$. Abbiamo come diretta conseguenza che l'*intero* segmento $\overline{AB}$ è stato trasportato, per mezzo dell'applicazione φ, *sopra* il segmento $\overline{A'B'}$.

Nella presente situazione i casi sono due: o i punti $\varphi(C)$ e C' giacciono dalla stessa parte rispetto alla retta $A'B'$, oppure no.
Nella prima situazione siamo soddisfatti, nella seconda dobbiamo invece applicare una trasformazione che lasci invariati i punti della retta $A'B'$ e scambi le due parti di piano. Sia ψ la composizione di tale trasformazione con l'applicazione φ. Si può immediatamente concludere che i triangoli $\psi(A)\psi(B)\psi(C)$ e ABC sono congruenti, e che $\overline{\psi(A)\psi(B)} = \overline{A'B'}$.



Poiché il punto $\psi(C)$ giace ora dalla stessa parte di C', e dato che gli angoli $\widehat{\psi(B)\psi(A)\psi(C)}$ e $\widehat{B'A'C'}$ sono congruenti, per l'unicità del trasporto degli angoli (assioma (**C 4**)), allora $\psi(C)$ deve giacere sulla semiretta $\overrightarrow{A'C'}$.

Da qui si dimostra (seguendo lo stesso percorso di sopra e utilizzando la congruenza $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$) che allora $\psi(C)$ e C' debbono coincidere. Si deriva immediatamente che perciò deve esserci anche la sovrapposizione dei segmenti $\overline{\psi(A)\psi(C)}$ e $\overline{A'C'}$, come anche quella dei segmenti $\overline{\psi(B)\psi(C)}$ e $\overline{B'C'}$.

Abbiamo quindi concluso che $\psi(A)\psi(B)\psi(C)$ si sovrappone al triangolo $A'B'C'$. Ovvero che il triangolo ABC venga mandato attraverso ψ sul triangolo $A'B'C'$. Essendoci una coincidenza di tutte le componenti del triangolo (segmenti ed angoli), allora $\psi(A)\psi(B)\psi(C)$ è congruente ad $A'B'C'$. D'altra parte $\psi(A)\psi(B)\psi(C)$ abbiamo detto essere congruente anche ad ABC perché applicazione di isometrie. La conclusione si deduce perciò dalla transitività della congruenza (assioma (**C 5**)).

Possiamo infine concludere che il piano cartesiano reale $\mathbb{R}^2$ è un modello per gli assiomi di congruenza (**C 1-6**), oltre che per quelli d'incidenza e di ordine.

Osservazione 30. Abbiamo già osservato come Euclide facesse ricorso al movimento rigido, senza però averne mai dato una definizione e senza mai averne dimostrato la possibilità. Gli assiomi di Hilbert, d'altro canto, hanno permesso di parlare in maniera rigorosa di congruenza, senza però fare mai ricorso al movimento, sia esso di segmenti o di angoli. In questo modo si può parlare di segmenti, rispettivamente angoli, rispettivamente triangoli, rispettivamente figure ecc... congruenti, senza la necessità che si operi una sovrapposizione. L'esempio dato testé ci ha però mostrato l'utilità dei movimenti (in quel caso delle isometrie), nell'atto della verifica del modello. Per quanto, insomma, il concetto di movimento sia ora superfluo, non di meno non è privato di una sua forma di interesse.

È curioso, a tal proposito, che esista una formulazione degli assiomi di congruenza che contempli, invece, proprio la possibilità di muovere le figure: fu infatti il matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932), ne *I principii di Geometria logicamente esposti*, a dare come primitivo non il concetto di conguenza, bensì quello di *movimento*, enunciando poi cinque assiomi che descrivono le regole che lo governano. Due figure saranno poi dette congruenti quando esiste un movimento che mandi l'una nell'altra.

I movimenti, che per assioma dovranno costituire un gruppo, possono essere estremamente vari e definire così congruenze molto particolari. Nell'Esempio 2.7 si può notare che stiamo usando per movimenti le isometrie del piano cartesiano reale, poiché esse sono conformi alla metrica euclidea prima definita; ma in atto di definire una diversa metrica è possibile applicare anche gruppi di movimenti diversi dalle isometrie, purché soddisfino i cinque assiomi detti.

È poi possibile dimostrare che l'assiomatica proposta da Peano è equivalente a quella di Hilbert ([2, p. 22]).

Inoltre, è anche interessante notare come questa sistemazione della geometria mostri forti similitudini con il Programma di Erlangen. Tale programma venne illustrato dal matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) nel 1872, meno di un ventennio prima della pubblicazione del lavoro di Peano. Nel programma di Erlangen, Klein proponeva la rivoluzionaria idea di basare lo studio della geometria sui gruppi. In particolare, ad essere al centro della ricerca in geometria non saranno più i noti enti geometrici, bensì quelle proprietà che si dimostrano invarianti rispetto ad un dato gruppo di trasformazioni. In questo senso possono esistere più geometrie: una che studia le proprietà invarianti per isometrie (che è poi l'usuale geometria euclidea), una che studia le invarianze per affinità, un'altra per le proiettività e via dicendo.

2.2.5 Assiomi di continuità

Veniamo adesso all'ultimo gruppo di assiomi, detti di *continuità*. Tale gruppo assolve al compito di sistematizzare il postulato di Archimede per come veniva usato negli *Elementi*, ovvero la celebre definizione quarta del Libro V (Sezione 1.4.1); come anche sistematizzare rigorosamente la continuità dello spazio, che Euclide non aveva mai esplicitamente ammesso, ma che in più occasioni tacitamente utilizzava (al più affidandosi alla stessa definizione quarta).

Il quinto gruppo conta due sole proposizioni. Prima di enunciarle, però, diamo la seguente definizione:

Definizione 2.36. Siano $\overline{AB}$ ed n, rispettivamente un segmento ed un numero naturale non nullo. Definiamo $n \cdot \overline{AB}$ per induzione:

$$\begin{cases} 1 \cdot \overline{AB} := \overline{AB}, \\ (n+1) \cdot \overline{AB} := n \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Dove ovviamente con il simbolo + ci riferiamo all'operazione di somma tra segmenti definita precedentemente.

In questo modo l'enunciato dell'assioma archimedeo diviene più semplice.

I due assiomi sono dunque i seguenti:

> (**A**) (*Assioma di Archimede*) Dati due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ qualunque, esiste un naturale n tale che $n\overline{AB} > \overline{CD}$.
>
> (**D**) (*Assioma di continuità*) Sia data una qualsiasi retta r nel piano e sia fissato un suo verso di percorrenza. Sia (s, t) una partizione di r tale che $S \leq T$ per ogni $S \in s$ e per ogni $T \in t$; allora esiste ed è unico il punto P sulla retta, tale da essere maggiore o uguale di tutti i punti di s e minore o uguale di tutti i punti di t.

Partiamo subito col dire che l'enunciato dell'assioma di continuità presente nei *Fondamenti* suona profondamente diverso:

> (**D***) Il sistema dei punti su di una retta con le sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangano inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi (**I 1-3**), (**O 1-4**), (**C 1-6**) e anche (**A**).

Hilbert chiede, in parole povere, che non esista alcun ampliamento alla sua geometria; ovvero che qualsiasi introduzione di nuovi punti su una retta sia impossibile a meno di non alterare le proprietà che i precedenti assiomi hanno stabilito essere valide. Questo assioma, che chiude l'ultimo gruppo e dunque l'assiomatica in toto, ha una natura diversa dai precedenti: non introduce nuove relazioni, né specifiche proprietà per gli enti geometrici; si limita ad impossibilitare il piano ad acquisire nuovi punti o rette all'infuori di quelli che già possiede.

Le due formulazioni sono equivalenti: nel senso che, supposti verificati gli assiomi (**I 1-3**), (**O 1-4**), (**C 1-6**) e (**A**), allora l'assioma (**D**) implica l'assioma (**D***) e viceversa. Per un approfondimento si consulti [2, p. 32].

La formulazione da noi scelta, conosciuta anche come *assioma di Dedekind* - in virtù del matematico tedesco Richard Dedekind (1831-1916) - sottolinea la corrispondenza che si viene a creare, per mezzo di quest'ultimo gruppo di assiomi, tra la retta come ente geometrico e l'insieme dei numeri reali con la struttura di campo ordinato. Abbiamo dimostrato, infatti, che il piano cartesiano reale è un modello per i primo quattro gruppi di assiomi, ma come vedremo nella Sezione 2.4 questo non è necessario; ovvero, se si rinuncia agli assiomi di continuità, si può rinunciare alla corrispondenza tra il piano ed $\mathbb{R}^2$, e dunque tra una retta ed $\mathbb{R}$. Ma proprio introducento il quinto gruppo di assiomi, ed in particolare l'assioma di Dedekind, la scelta di $\mathbb{R}$ come supporto per il piano cartesiano diviene una necessità.

L'assioma (**D**) non verrà trattato da Hilbert in maniera assai approfondita, anzi, quasi tutte le considerazioni e i teoremi successivi verranno ricavati non prosupponendolo. In effetti questo assioma è molto forte e limita decisamente la scelta di modelli per una geometria che lo presupponga. Viene quindi per lo più citato e basta.

L'assioma (**A**), come già visto nel Capitolo 1, deve invece il suo nome al matematico e ingegnere Archimede di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.), per il grande utilizzo che egli ne fece nei suoi lavori, nonostante una sua prima formulazione risalga probabilmente a quello stesso Eudosso di Cnido padre della teoria delle proporzioni.

La sostanza dell'assioma (**A**) sta nell'affermare la non esistenza di segmenti "infiniti" e segmenti "infinitesimi", cioè che ogni segmento può essere maggiorato e minorato da multipli (o sottomultipli) di qualsiasi altro segmento.

Nella Sezione 1.4 avevamo mostrato come l'assioma di Archimede, lì espresso come definizione quarta, avesse una forte carica di continuità e fosse usato da Euclide per introdurre in maniera rigorosa i rapporti tra grandezze incommensurabili, e dunque i numeri reali. Da solo tuttavia non basta per costringere il piano della geometria di Hilbert a coincidere con $\mathbb{R}^2$ (per questo serve anche (**D**)), ma crea comunque un solido legame tra i numeri (e il piano) reale, e la geometria assiomatica di Hilbert (Sezione 2.4).

Modelli

Come da tradizione cerchiamo un modello che soddisfi quest'ultimo gruppo di assiomi.

Esempio 2.8. Come accennato nelle righe precedenti questo modello potrebbe essere proprio il piano cartesiano sopra i numeri reali $\mathbb{R}^2$, e in effetti questo è quello che vogliamo dimostrare. Sia l'assioma di Archimede, che l'assioma di continuità, sono *assiomi lineari*, nel senso che esprimono proprietà delle rette o di porzioni di rette (i segmenti). L'idea è quindi quella di ricondurre tali proprietà alle equivalenti del campo reale, creando una corrispondenza tra il detto campo e le rette del piano.

Ricordiamo che il campo reale $\mathbb{R}$ soddisfa le due seguenti proprietà:

> (**A'**) (*Proprietà di Archimede*) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.
>
> (**D'**) (*Assioma di Dedekind*) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$ e $\mathbb{R} = A \cup B$. Supponiamo poi che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$; allora esiste ed è unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

(**A**): cominciamo dall'assioma di Archimede.

Poiché in $\mathbb{R}$ vale la proprietà di Archimede (**A'**), possiamo affermare che per ogni coppia di numeri reali positivi x, y, esiste un numero naturale n tale che $nx > y$. Siano ora $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ due segmenti nel piano cartesiano. Dobbiamo dimostrare che per un certo n naturale, $n\overline{AB} > \overline{CD}$.

Ora, indichiamo con $l(\overline{AB})$ la "lunghezza" del segmento $\overline{AB}$; ovvero

$$l(\overline{AB}) := d(A, B).$$

La tesi è perciò equivalente al provare che $l\big(n\overline{AB}\big) > l\big(\overline{CD}\big)$.

Dimostriamo come ausilio che $l\big(n\overline{AB}\big) = n \cdot l\big(\overline{AB}\big)$. In effetti abbiamo già dato prova di questo: nell'Esempio 2.6 abbiamo dimostrato la più generale tesi che se $A * B * C$, allora $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$. Il resto segue dalla definizione di somma di segmenti.

Essendo $l\big(\overline{AB}\big)$ e $l\big(\overline{CD}\big)$ due numeri reali positivi, esisterà un naturale n_0 tale che $n_0 \cdot l\big(\overline{AB}\big) > l\big(\overline{CD}\big)$.

Perciò: $l\big(n_0\overline{AB}\big) = n_0 \cdot l\big(\overline{AB}\big) > l\big(\overline{CD}\big)$; e la tesi è provata.

(**D**): siano r una retta arbitraria, e A e B due suoi punti distinti. Consideriamo su r l'ordine indotto da tali punti (per esempio quello da A verso B), e indichiamolo con il simbolo $<_*$, onde non confonderlo con l'ordinamento sui reali.

Abbiamo già visto che la retta r è immagine della funzione

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto t(B - A) + A. \end{aligned}$$

Tale funzione è una biezione tra $\mathbb{R}$ ed r. Ora vogliamo vedere che conserva l'ordine, ovvero che se $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ sono tali che $t_0 < t_1$, allora $\gamma(t_0) <_* \gamma(t_1)$. Vogliamo dunque provare che γ è un isomorfismo d'ordine tra i due insiemi totalmente ordinati $(\mathbb{R}, <)$ e $(r, <_*)$.

(*1*) Partiamo dal caso $0 < t_0 < t_1$. In tal caso entrambi i punti $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ giacciono sulla stessa semiretta (quella contenente B). Dobbiamo provare che il punto $\gamma(t_0)$ giace sul segmento $\overline{A\gamma(t_1)}$, ovvero che esiste un $q \in [0, 1]$ tale che $\gamma(t_0) = q \cdot (\gamma(t_1) - A) + A$. Riscrivendo:

$$\begin{aligned} q \cdot (\gamma(t_1) - A) + A &= q \cdot (t_1(B - A) + A - A) + A \\ &= qt_1(B - A) + A. \end{aligned}$$

Si può osservare che ponendo $q = t_0/t_1$ (che effettivamente è nell'intervallo [0,1] per le ipotesi) la tesi è provata.

(*2*) Nel caso $t_0 < t_1 < 0$ la dimostrazione è analoga.

(*3*) Nel caso $t_0 < 0 < t_1$ la tesi si dimostra osservando che $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ giacciono su semirette differenti: la semiretta contenenete B è definita da tutti e soli i parametri t positivi, necessariamente l'altra semiretta è identificata dai paramentri negativi. Per la definizione dell'ordine $<_*$ i punti sulla semiretta contenete B sono maggiori di tutti i punti sull'altra semiretta.

(*4*) Il caso in cui uno tra t_0 e t_1 è nullo risulta banale.

Allora la tesi che γ sia un isomorfismo d'ordine è provata.

Dimostriamo adesso la validità dell'assioma: sia (s, t) una partizione di r come nell'enunciato di (**D**); siano adesso $\tilde{s} := \gamma^{-1}(s)$ e $\tilde{t} := \gamma^{-1}(t)$. Essendo γ una biezione allora $(\tilde{s}, \tilde{t})$ è una partizione di $\mathbb{R}$. In particolare $\tilde{S} \leq \tilde{T}$, per ogni $\tilde{S} \in \tilde{s}$ e per ogni $\tilde{T} \in \tilde{t}$ e ciò per via del fatto che γ è un isomorfismo. Poiché in $\mathbb{R}$ vale l'assioma di Dedekind (**D'**), allora esiste unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{S} \leq c \leq \tilde{T}$ per ogni $\tilde{S} \in \tilde{s}$ per ogni $\tilde{T} \in \tilde{t}$. Sia $C := \gamma(c)$, allora esso è maggiore o uguale di tutti i punti di s e minore o uguale di tutti i punti di t, sempre perché γ è un isomorfismo d'ordine.

Abbiamo dunque, in conclusione, provato che il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ è un modello anche per gli assiomi di continuità (**A**) e (**D**).

Prima di proseguire oltre, chiudiamo questa sezione con una considerazione sulla dipendenza tra gli assiomi di continuità. Che l'assioma (**D**) sia molto forte è già stato accennato, una delle ragioni - ma non l'unica - è che di fatto da esso può essere dedotto anche l'assioma (**A**), rendendo l'enunciazione di quest'ultimo superflua. Volendo esprimere la questione in termini rigorosi:

Teorema 2.5. *Consideriamo una qualsiasi geometria piana che soddisfi gli assiomi (**I 1-3**), (**O 1-4**), (**C 1-6**) e (**D**). Allora soddisfa anche l'assioma di Archimede (**A**).*

Dimostrazione. Supponiamo validi gli assiomi di incidenza, di ordine, di congruenza e di continuità, ma - per assurdo - non quello di Archimede.

Poiché non vale l'assioma (**A**), esistono dunque due segmenti del piano, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tali che *non* esiste alcun naturale n per i quali $n\overline{CD} > \overline{AB}$. Consideriamo allora sulla retta $r = AB$ l'ordine indotto dai due punti A e B; in particolare indichiamo con r^+ la semiretta aperta individuata da A e contenente B, e con r^- la semiretta aperta che non lo contiene: vale dunque che $r = r^- \cup r^+ \cup \{A\}$.

Consideriamo il seguente sottoinsieme di r:

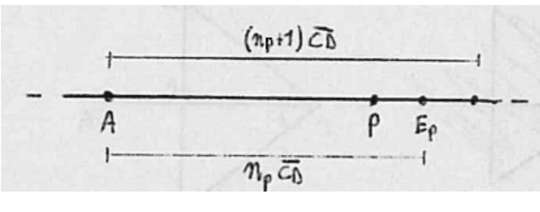
$$t := \big\{T \in r^+ \;\big|\; \nexists\, n \in \mathbb{N},\ n\overline{CD} > \overline{AT}\big\}.$$

L'insieme t è per ipotesi non vuoto, infatti $B \in t$. Sia ora $s := r \setminus t$; anche tale insieme è non vuoto, perché contiene tutti i punti di r^-, come anche il punto A. D'altra parte, per loro stessa definizione, t ed s sono disgiunti e danno come unione l'intera retta r. Perciò (s, t) è una partizione di r.

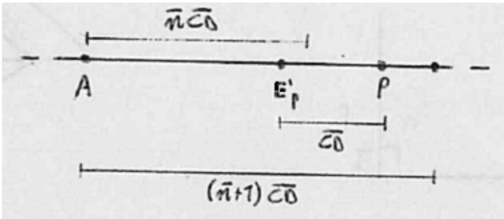
Mostriamo che, usando l'ordine stabilito sulla retta, $S < T$ per ogni $S \in s$ e per ogni $T \in t$. Siano dunque S e T (possiamo supporre $S \in r^+$, altrimenti la tesi è ovvia) e sia n_S il naturale tale che $n_S\overline{CD} > \overline{AS}$ (che esiste per definizione). In particolare trasportando $n_S\overline{CD}$ su r^+ individuiamo un punto E tale che $A * S * E$; che si traduce in $S < E$. Dobbiamo ora provare che $A * S * T$: se così non fosse, ovvero se necessariemente $A * T * S$, allora avremmo, per la transitività dell'ordine, che $T < E$, cioè che $A * T * E$, e questo significherebbe che $n_S\overline{CD} > \overline{AT}$. Contro la definizione di T.

Siamo perciò nelle ipotesi dell'assioma di continuità. Deve allora esistere un unico punto $P \in r$ tale che $S \leq P \leq T$, per ogni $S \in s$ e per ogni $T \in t$. Essendo (s, t) una partizione di r, allora o $P \in s$ oppure $P \in t$.

Supponiamo che P appartenga a s: evidentemente non può appertenere a r^-, altrimenti $P < A \in s$; come non può neppure essere $P = A$, infatti s ha almeno un punto in r^+ (quello che si ottiene trasportando $\overline{CD}$ su r^+); per forza di cose $P \in s \cap r^+$. Poichè $P \in s$, dovrà esistere un naturale n_P tale che $n_P\overline{CD} > \overline{AP}$; trasportando $n_P\overline{CD}$ su r^+ individuiamo un punto (unico) E_P per il quale $P < E_P$. Ma $E_P \in s$: basta infatti osservare che $(n_P + 1)\overline{CD} > \overline{AE_P}$. Il che è assurdo.



Allora $P \in t$. Ma in questo caso: trasportiamo $\overline{CD}$ sulla semiretta di r individuata da P e contenente A, determinando un punto E'_P. Quest'ultimo deve appartenere a r^+: per ipotesi $\overline{PE'_P} \equiv \overline{CD} < \overline{AP}$, e dunque E'_P appartiene al segmento $\overline{AP}$ e perciò a r^+. Il punto E'_P è in ogni caso minore di P. Tuttavia $E'_P \in t$, infatti, se così non fosse, esisterebbe un naturale $\bar{n}$ tale che $\bar{n}\overline{CD} > \overline{AE'_P}$, e di conseguenza $(\bar{n}+1)\overline{CD} > \overline{AP}$, in contrasto con le ipotesi. Arriviamo dunque alla situazione $E'_P \in t$ ed $E'_P < P$. Assurdo.



In qualsiasi caso giungiamo a un assurdo. Possiamo quindi dedurre la validità dell'assioma di Archimede (**A**). □

2.3 Il piano di Hilbert

Abbiamo presentato tutti e cinque i gruppi di assiomi della geometria piana.

Dopo aver sottolineato l'approccio fortemente più astratto che viene adottato da Hilbert rispetto ad Euclide, rimane da vedere come sia possibile ricostruire la geometria degli *Elementi* a partire dagli stessi assiomi dei cinque gruppi. Rimane ovvero da provare che il lavoro di Hilbert sia andato a buon fine e che effettivamente egli sia riuscito a rifondare su basi rigorose l'intera geometria di Euclide. Per quanto il lavoro di Hilbert permetta di spaziare tra più di uno dei libri degli *Elementi*, noi ci focalizzeremo in particolar modo sul Libro I, che è anche quello maggiormente analizzato nel Capitolo 1.

Partiamo dando una definizione che ci permetta di raccogliere tutto quanto detto finora sulla geometria formulata nei *Fondamenti*:

Definizione 2.37 (Piano di Hilbert)**.** Definiamo *piano di Hilbert* una geometria piana - ovvero un insieme $\mathcal{P}$ i cui elementi sono detti punti, unitamente a un insieme $\mathcal{R} \subseteq \wp(\mathcal{P})$ i cui elementi sono detti rette - sopra la quale sono definite certe relazioni di incidenza, ordinamento e congruenza, che soddisfino gli assiomi (**I 1-3**), (**O 1-4**) e (**C 1-6**).

Osserviamo fin da subito come solo tre gruppi di assiomi vengano coinvolti in questa definizione. Non sono infatti menzionati né l'assioma delle parallele, né gli assiomi di continuità. Può sembrare contraddittorio l'aver introdotto due gruppi di assiomi senza poi coinvolgerli, ma in vero la definizione di piano di Hilbert è una definizione puramente di comodo, ed il ridurre al minimo gli assiomi che lo compongono serve a dimostrare quali siano le richieste minime perché sia poi possibile dedurre le proposizioni di Euclide.

In effetti con i soli gruppi di assiomi di incidenza, ordine e congruenza, è possibile dimostrare una larga parte del Libro I degli *Elementi*. Già nella Sezione 2.2.4 abbiamo dato un lungo elenco di dimostrazioni di svariate proposizioni euclidee (o di loro equivalenti), seguendo unicamente il metodo assiomatico di

Hilbert. Raccogliendo tutti questi fatti possiamo ora citare un risultato più generale. Passiamo dunque al seguente:

Teorema 2.6. *In un piano di Hilbert sono dimostrabili tutte le Proposizioni dalla (I.2) alla (I.28), eccezion fatta per la (I.22).*

Dimostrazione. Oltre alle Proposizioni già dimostrate, sarebbero da verificare le rimanenti. Si rimanda a [5, p. 102]. Osserviamo solamente che tutte le dimostrazioni date nella Sezione 2.2.4 sono da ritenersi valide perché effettivamente non poggiano sull'assioma delle parallele, e neppure sugli allora non ancora enunciati assiomi di continuità. □

Osservazione 31. Si noti come la Proposizione (I.17) enunci che la somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti. Ora, tale enunciato non può essere mantenuto in questa forma, perché la somma di due angoli retti non è per noi un angolo. In generale, quindi, se diremo che la somma di due angoli α e β è minore di due angoli retti, intenderemo che α è minore dell'angolo adiacente a β.

Similmente, quando diremo che due angoli α e β hanno somma pari a due angoli retti, intenderemo dire che α è congruente ad un angolo adiacente a β.

Osservazione 32. Osserviamo poi che in un piano di Hilbert non è ancora possibile ricostruire l'intero Libro I.

Che le proposizioni dalla (I.29) in poi ci siano precluse è in effetti una diretta conseguenza della nostra decisione di non inserire l'assioma (**P**): tutta la geometria di Euclide che segue la ventottesima porposizione del libro primo fa ricorso al V postulato e non è altrimenti dimostrabile senza l'introduzione sua o di una proposizione sua equivalente (per approfondimenti si veda la Sezione 2.3.2).

Anche le Porposizioni (I.1) e (I.22) rimangono escluse. Nel caso della prima il problema è il seguente: non è ancora sistemata la questione dell'intersezione tra circonferenze. In effetti, di tutte le polemiche rivolte alle dimostrazioni del Libro I che abbiamo sollevato, una sola è ancora rimasta irrisolta: che due circonferenze, pure disposte come richiesto dalla Proposizione (I.1), abbiamo certamente punto di intersezione. Tale dilemma è rimasto insoluto perché, molto semplicemente, la citata affermazione non è dimostrabile a partire dai soli tre gruppi di assiomi considerati. Anche la Proposizione (I.22) risente dello stesso problema (per una sua dimostrazione - la quale richiede l'ipotesi dell'intersezione tra circonferenze - si veda [4, p. 110]).

Fatte queste osservazioni, vediamo come sia possibile porre rimedio all'ultima critica agli *Elementi* rimasta ancora senza soluzione. Cerchiamo dunque di stabilire in che modo sia possibile garantire l'intersezione di due circonferenze sotto determinate ipotesi.

Dopodiché passaremo a chiudere le questioni circa il V postulato e il parallelismo fra rette.

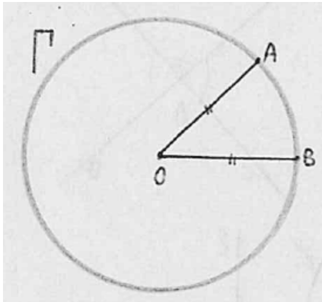
2.3.1 L'assioma delle circonferenze

Come detto, gli assiomi del piano di Hilbert non sono sufficienti a garantire l'intersezione tra due circonferenze, neppure quando queste - per la nostra intuizione di continuità - dovrebbero intersecarsi. Dovremo dunque introdurre un nuovo assioma che assolva a questo compito.

Prima, però, definiamo cosa intendiamo per circonferenza:

Definizione 2.38 (Circonferenza)**.**

Dati due punti distinti O e A, definiamo la circonferenza Γ di *centro* il punto O e *raggio* $\overline{OA}$, come l'insieme di tutti i punti B tali che $\overline{OB} \equiv \overline{OA}$.

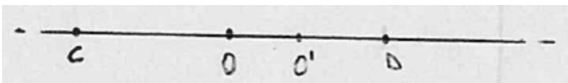


Osserviamo che l'insieme Γ è certamente non vuoto, perché contiene il punto A. Inoltre, ricorrendo all'assioma (**C 1**), possiamo concludere che su ogni semiretta passante per O ci sia esattamente un punto che appartiene alla circonferenza (e su ogni retta per O ci siano esattamente due punti di Γ). Queste osservazioni, di carattere perlopiù insiemistico, ci permettono quindi di osservare che in un piano di Hilbert abbia validità anche il III postulato di Euclide.

Dimostriamo ora che, data una circonferenza arbitraria, il suo centro sia univocamente determinato:

Proposizione 2.41. *Siano Γ la circonferenza di centro il punto O e raggio $\overline{OA}$, e Γ' la circonferenza di centro O' e raggio $\overline{O'A'}$. Supponiamo che $\Gamma = \Gamma'$, allora $O = O'$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che O e O' siano distinti. Consideriamo dunque la retta OO': questa è costituita da due semirette definite da O, su ognuna delle quali giace un solo punto della circonferenza Γ; siano C e D tali punti. Per costruzione $C * O * D$ e $\overline{OC} \equiv \overline{OA} \equiv \overline{OD}$.



Dato che $\Gamma = \Gamma'$, allora C e D dovranno appartenere anche a Γ', e dunque $\overline{O'C} \equiv \overline{O'D}$ e inoltre $C * O' * D$. Quest'ultima affermazione è dovuta al fatto che, se così non fosse, allora C e D giacerebbero sulla stessa semiretta per O' (dato che i tre sono allineati) ma su ogni semiretta giace un solo punto della circonferenza.

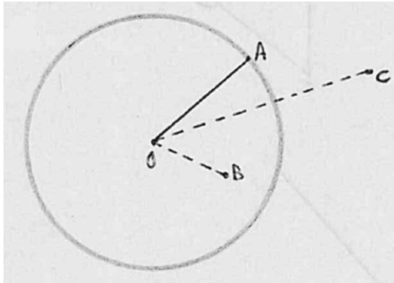
Applicando la Proposizione 2.5 sull'ordinamento di quattro punti, osserviamo che o $C * O * O'$ e $O * O' * D$, oppure $C * O' * O$ e $O' * O * D$. Dato che i due casi portano a dimostrazioni sostanzialmente equivalenti, assumiamo vero il primo. Allora, come conseguenza delle definizioni di trasporto di segmenti e di ordininamento di segmenti, concludiamo che $\overline{OC} < \overline{O'C} \equiv \overline{O'D} < \overline{OD}$. In contraddizione con le ipotesi.

Ne consegue perciò che $O = O'$. $\square$

Possiamo a questo punto definire l'interno e l'esterno di una data circonferenza:

Definizione 2.39 (Interno ed esterno di una circonferenza)**.**

Sia Γ la circonferenza di centro O e raggio $\overline{OA}$. Diremo che un punto del piano B è *interno* alla circonferenza se $B = O$ oppure $\overline{OB} < \overline{OA}$. Diremo invece che un punto C è *esterno* alla circonferenza se $\overline{OC} > \overline{OA}$.



Osserviamo che sia l'insieme dei punti interni, sia quello dei punti esterni, è non vuoto: sicuramente il centro O è interno; mentre, considerati O e A, per l'assioma (**O 2**) esiste il punto B tale che $O * A * B$, che dunque è esterno.

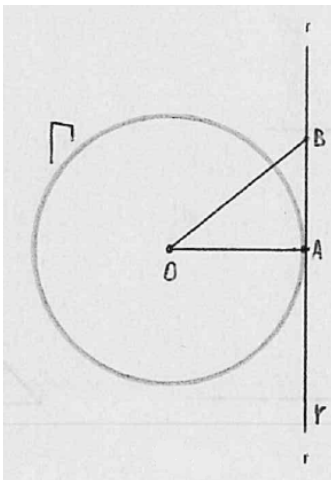
Inoltre, preso un qualsiasi punto B distinto da O, solo una delle seguenti relazioni può verificarsi: $\overline{OB} < \overline{OA}$, $\overline{OB} \equiv \overline{OA}$, $\overline{OB} > \overline{OA}$. Questo, unitamente a quanto detto nel paragrafo sopra, garantisce che una circonferenza Γ divida i punti del piano che non le appartengono in due regioni non vuote e disgiunte: rispettivamente l'*interno* e l'*esterno* della circonferenza.

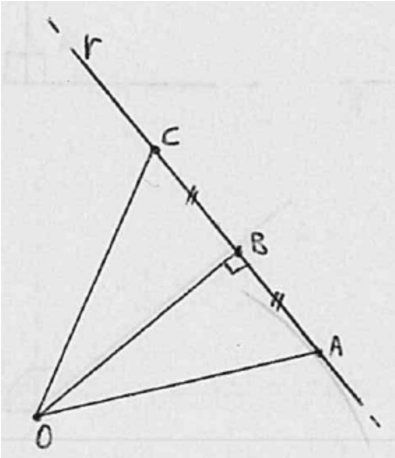
Proseguiamo con un'altra definizione che sarà poi utile in seguito:

Definizione 2.40 (Rette e circonferenze tangenti)**.** Una retta r ed una circonferenza Γ, come anche due circonferenze Γ e Γ', sono dette tangenti se hanno uno ed un solo punto in comune.

Proposizione 2.42. *Sia Γ una circonferenza di centro O e raggio $\overline{OA}$. La retta perpendicolare alla retta OA e passante per A è tangente a Γ e giace esterna alla circonferenza (eccezion fatta per il punto A). Viceversa, data una retta tangente a Γ in A, allora questa dovrà essere perpendicolare alla retta OA.*

Dimostrazione.
Sia r la retta perpendicolare ad OA, passante per il punto A (esiste per il Corollario 2.3). Mostriamo essere tangente: sia infatti B un qualsiasi suo punto distinto da A su r. Il triangolo ABO ha per ipotesi l'angolo $\widehat{BAO}$ retto, e dunque uguale ai suoi adiacenti, ovvero gli angoli esterni al triangolo; i quali, per la Proposizione 2.35 sono maggiori dell'angolo $\widehat{ABO}$. Consegue, per la Proposizione 2.36, che il lato $\overline{OB}$ è maggiore del lato $\overline{OA}$. Questo conclude che non possano esserci altri punti d'intersezione tra r e Γ, e che tutti i punti della retta distinti da A sono esterni.





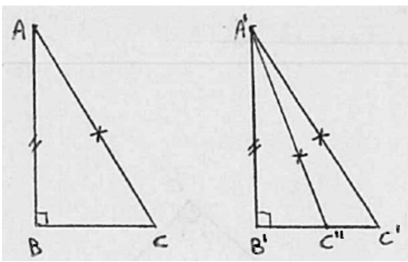
Viceversa, consideriamo la retta r tangente a Γ nel punto A. Mostriamo essere ortogonale ad OA: in primo luogo r non può coincidere con OA, altrimenti avrebbe un secondo punto di intersezione con Γ opposto ad A rispetto ad O. Tracciamo dunque la retta perpendicolare ad r passante per O (esiste per la Proposizione (I.12)), e nominiamo B il suo punto d'intersezione con la retta r. Se B coincide con A la tesi è provata; altrimenti trasportiamo il segmento $\overline{AB}$ sulla semiretta di r individuata da B e non contenente A, trovando il punto C. Osserviamo che i triangoli OBA e OBC sono congruenti per l'assioma (**C 6**), e in particolare $\overline{OC} \equiv \overline{OA}$. Allora C appartiene alla circonferenza; ma ciò è contro le ipotesi di tangenza. Necessariamente, dunque, $B = A$; e la tesi è provata.

□

Osservazione 33. La proposizione precedente ha come conseguenza che, data una circonferenza Γ ed un suo punto A, esiste ed è unica la retta tangente a Γ e passante per A: basta considerare l'unica retta perpendicolare ad OA passante per il punto A.

Lemma 2.3 (Criterio di congruenza per triangoli rettangoli)**.** *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli, retti rispettivamente negli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$. Supponiamo che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e che $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$; allora i due triangoli sono congruenti.*

Dimostrazione.
Per ipotesi gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$ sono congruenti. Trasportiamo dunque il primo sulla semiretta $\overrightarrow{B'C'}$ e dalla stessa parte di A'; la semiretta individuata sarà necessariamente $\overrightarrow{B'A'}$. Consideriamo poi su quest'ultima semiretta l'unico punto A'' tale che $\overline{A''B'} \equiv \overline{AB}$; il quale per ipotesi, coinciderà con A'. Trasportiamo poi il segmento $\overline{BC}$ sulla semiretta $\overrightarrow{B'C'}$, individuando il punto C''. Congiungo quest'ultimo punto con A'. Il triangolo $A'B'C''$ è congruente al triangolo ABC per il (I C.d.C.). Ora, se proviamo che $C'' = C'$, abbiamo concluso la dimostrazione.



Supponiamo che $C'' \neq C'$, dato che entrambi giacciono dalla stessa parte di $B'C'$ rispetto a B', si presentano due possibilità: o C'' giace tra B' e C', oppure C' giace tra B' e C''. Consideriamo il primo caso; il secondo ha una dimostrazione analoga.

Consideriamo ora il triangolo $A'C''C'$: esso è isoscele perché entrambi i lati $\overline{A'C'}$ e $\overline{A'C''}$ sono congruenti ad $\overline{AC}$; e dunque vale anche la congruenza $\widehat{A'C''C'} \equiv \widehat{A'C'C''}$. Inoltre, dato che $B' * C'' * C'$, allora il suo angolo interno $\widehat{A'C''C'}$ corrisponde all'angolo esterno al triangolo $A'B'C''$. Deduciamo che $\widehat{A'C''C'} > \widehat{A'B'C''}$. Quest'ultimo angolo è retto per ipotesi, e dunque congruente al proprio adiacente, il quale è esterno al triangolo $A'B'C'$, e allora maggiore di $\widehat{A'C'B'}$ (ovvero di $\widehat{A'C'C''}$). Il che ci porta all'assurda conclusione $\widehat{A'C'C''} \equiv \widehat{A'C''C'} > \widehat{A'B'C'} > \widehat{A'C'C''}$.

Da ciò la tesi. □

La Proposizione 2.42 presenta come corollario la seguente proposizione:

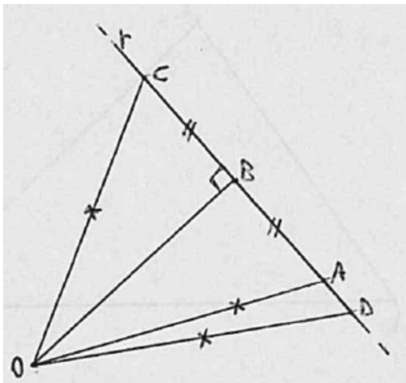
Corollario 2.4. *Sia r una retta che contiene un punto di una circonferenza Γ ma che non le è tangente; allora contiene* esattamente *un altro punto di Γ.*

Dimostrazione. Per definizione una retta è tangente ad una circonferenza se contiene un solo punto della circonferenza stessa. Una retta non tangente allora o non contiene punti della circonferenza, o ne contiene più d'uno. Le ipotesi ci portano a concludere che la retta r deve contenere più di un punto di Γ.

Ci riesta da dimostrare che può contenerne solamente un altro.

Sia A il punto che, per ipotesi, retta e circonferenza hanno in comune. Un secondo punto di intersezione, che è certo esista, si può determinare riproducendo la costruzione vista nella dimostrazione della Proposizione 2.42: sia esso C, mentre sia B il punto d'intersezione tra r e la sua perpendicolare condotta da O.

Per costruzione, inoltre, $C * B * A$.
Dato che r non è tangente a Γ in A, allora $B \neq A$.
Se, oltre ad A e C, esistesse un altro punto D che retta e circonferenza hanno in comune, potremmo considerare i triangoli ODB e OAB. Entrambi sarebbero retti e avrebbero due lati rispettivamente congruenti ($\overline{OB}$ è in comune, mentre $\overline{OD}$ e $\overline{OA}$ sono raggi della circonferza).



Applicando allora il Lemma 2.3 concluderemmo che i due triangoli sono congruenti, in particolare $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Questo implicherebbe che o $D = A$, oppure $D = C$, a seconda di quale delle due semirette di r individuate da B si trova D.

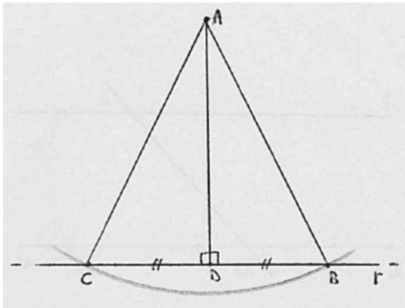
In particolare, r e Γ hanno solo due punti in comune. □

Attraverso questo corollario perveniamo ad una interessante dimostrazione della Proposizione (I.12). Questa proposizione è già stata dimostrata essere valida in un piano di Hilbert, ma possiamo ora pervenire ad una costruzione che adotta lo stesso metodo che fu di Euclide:

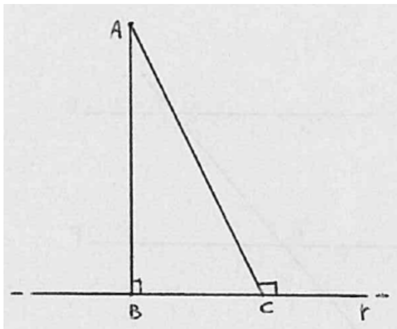
Proposizione 2.43 (Proposizione (I.12))**.** *Siano dati una retta r ed un punto A che non le appartiene, allora esiste ed è unica la retta perpendicolare a r e passante per A.*

Dimostrazione. Esistenza: Consideriamo un qualsiasi punto B sulla retta r e congiungiamolo con A. Se la retta AB trovata è perpendicolare ad r allora abbiamo concluso; altrimenti si consideri la circonferenza di centro A e raggio $\overline{AB}$.

Questa circonferenza interseca r (in B), ma non possono essere tangenti perché si è detto r non ortogonale ad AB. Possiamo allora applicare il Corollario 2.4 e pervenire alla conclusione che esista un altro punto, chiamato C, di intersezione. Dimezziamo dunque il segmento $\overline{BC}$, trovando un punto medio D. In particolare vale che $B{*}D{*}C$. I due triangoli ABD e ACD hanno tutti i lati ordinatamente congruenti, e sono dunque congruenti. Concludiamo allora che i due angoli $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ADC}$ (tra loro adiacenti) sono congruenti, e dunque retti. La retta AD è allora perpendicolare ad r.



Unicità: Supponiamo esistano due rette distinte, passanti per il punto A, e ortogonali ad r. Siano B e C i rispettivi punti di intersezione con r. Il triangolo ABC è dunque retto nel suo angolo $\widehat{ABC}$. D'altra parte anche l'angolo $\widehat{ACB}$ è retto. Arriviamo quindi alla situazione in cui il triangolo ABC ha due angoli retti, in contraddizione con la Proposizione (I.17), dato che evidentemente in ABC esistono due angoli la cui somma non è minore di due retti.



□

Diamo ora un'altra definizione, utile per le successive considerazioni:

Definizione 2.41 (Rette esterne e secanti)**.** Siano date una retta r ed una circonferenza Γ:

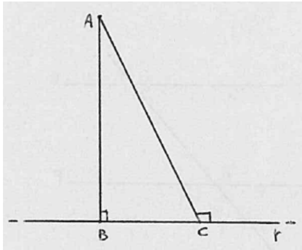
la retta è detta *esterna* alla circonferenza se contiene solo punti ad essa esterni;

è invece detta *secante* se ha più di un punto in comune con Γ (e quindi necessariamente due).

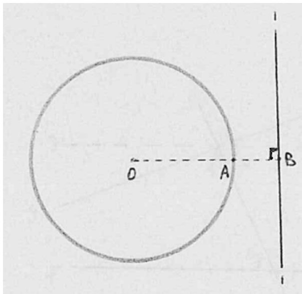
Proposizione 2.44. *Data una circonferenza Γ, di centro O e raggio $\overline{OA}$, esistono rette a essa secanti e anche rette a essa esterne.*

Dimostrazione. Procediamo costruttivamente per ognuno dei singoli casi.

Secanti: consideriamo la retta OA, essa necessariamente deve intersecare Γ in due punti, e dunque è secante.



Esterne: dati i punti O ed A, ricorrendo all'assioma (**O 2**), determiniamo un punto B tale che $O * A * B$, e che ovviamente sarà esterno. Consideriamo la retta r, perpendicolare ad OA e passante per B. Ricorrendo alla stessa costruzione della dimostrazione della Proposizione 2.42 evinciamo che tutti i punti di r sono esterni.



□

I fatti dimostrati fino ad ora ci permettono di fare considerazioni sulle possibili posizioni reciproche tra rette e circonferenze:

una retta r ed una circonferenza Γ possono assumere tre posizioni reciproche, ovvero essere esterne, se tutti i punti di r sono esterni a Γ; tangenti, se hanno un solo punto d'intersezione; oppure secanti, se posseggono più di un punto d'intersezione, e dunque hanno due punti in comune. Ovviamente queste tre posizioni sono incompatibili l'una con l'altra.

Tuttavia, tali posizioni reciproche non esauriscono tutte quelle possibili: potrebbe, infatti, la retta avere dei punti interni alla circonferenza ed altri esterni, ma non attraversare la circonferenza stessa. Gli assiomi del piano di Hilbert non garantiscono che se una retta passa dall'avere punti interni all'avere punti esterni, allora necessariemente sechi la circonferenza - per quanto questo fatto risponda bene alla nostra intuizione.

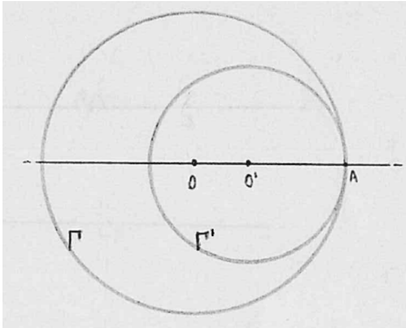
Il discorso è simile a quello della Proposizione (I.1) degli *Elementi*: due circonferenze non hanno necessariamente intersezione, neanche se sono in una posizione che "secondo la nostra intuizione" dovrebbe portarle ad intersecarsi.

Proseguiamo studiando le posizioni reciproche tra circonferenze:

Proposizione 2.45. *Siano dati tre punti O, O' e A, distinti ed allineati; allora la circonferenza Γ, di centro O e raggio $\overline{OA}$, e la circonferenza Γ', di centro O' e raggio $\overline{O'A}$, sono tangenti in A. Viceversa, date due circonferenze tangenti in un punto A, esse hanno i propri centri allineati con A.*

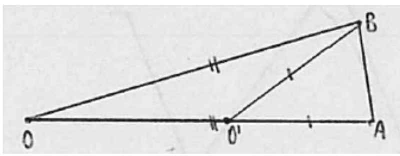
Dimostrazione.

Sicuramente il punto A è comune alle due circonferenze. Dobbiamo provare che non esistono altri punti in comune. Supponiamo esista un punto B, distinto da A, appartenente ad entrambe le circonferenze. Possiamo subito escludere che giaccia sulla retta OO', altrimenti potremmo replicare la dimostrazione della Proposizione 2.41, e concludere che $O = O'$. Dunque B non è allineato con la terna O, O', A.

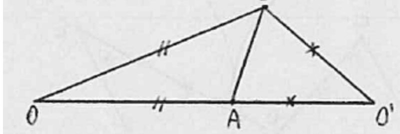


In base alla posizione reciproca assunta da questa terna si possono presentare diversi casi:

(a) supponiamo $O * O' * A$, ovvero O e O' giacciono dalla stessa parte rispetto a AB. In tal caso i triangoli OBA e $O'BA$ sono isosceli (perché sia A che B appartengono ad ambo le circonferenze), e perciò $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$ e $\widehat{O'AB} \equiv \widehat{O'BA}$. D'altra parte gli angoli $\widehat{OAB}$ e $\widehat{O'AB}$ coincidono, e dunque tutti e quattro gli angoli citati sono tra loro congruenti. Questo impone, per l'assioma (**C 4**), che O, O' e B siano allineati. Assurdo.
(Quanto detto finora vale anche nel caso in cui $O' * O * A$).

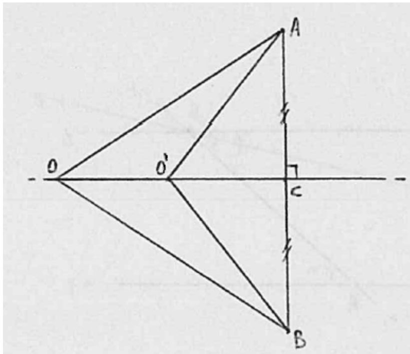


(b) supponiamo $O * A * O'$. Svolgendo ragionamenti analoghi a quelli del caso precedente possiamo ancora concludere che $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$ e che $\widehat{O'AB} \equiv \widehat{O'BA}$. D'altra parte gli angoli $\widehat{OAB}$ e $\widehat{O'AB}$ sono adiacenti; il che impone di essere adiacenti anche agli angoli $\widehat{OBA}$ e $\widehat{O'BA}$ (Corollario 2.2); e dunque O, O' e B dovrebbero nuovamente essere allineati. Assurdo.



Concludiamo che le circonferenze debbono essere tangenti.

Viceversa, supponiamo Γ e Γ' tangenti in un punto A, e supponiamo che O, O' ed A non siano allineati. Tracciamo allora la perpendicolare ad OO' passante per A, la quale intersecherà la retta OO' in un punto C, necessariamente distinto da A. Trasportiamo il segmento $\overline{AC}$ sulla semiretta di AC avente vertice in C e non contenente A, trovando così un punto B. I triangoli OAC e OCB sono congruenti, e così anche i triangoli $O'AC$ e $O'CB$. Dunque $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ e $\overline{O'A} \equiv \overline{O'B}$. Perciò B appartiene sia a Γ che a Γ'. Contro l'ipotesi di tangenza.



Allora O, O' ed A debbono essere allineati. □

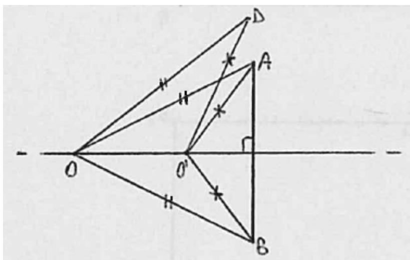
Diretta conseguenza della precedente proposizione è il seguente:

Corollario 2.5. *Siano date due circonferenze distinte che si intersecano in un punto A ma non sono tangenti; allora hanno esattamente un altro punto d'intersezione.*

Dimostrazione. Per definizione, se due circonferenze non sono tangenti, o non hanno punti in comune, o ne hanno più d'uno. Date le ipotesi, necessariamente debbono avere altri punti d'intersezione all'infuori di A.

Dobbiamo dimostrare che in realtà ve n'è solo un altro.

Dato che non sono tangenti, allora i tre punti O, O' ed A non sono allineati. Possiamo dunque ripetere la costruzione presente nella parte finale della dimostrazione precedente, individuando un punto B comune sia a Γ che a Γ'. In particolare A e B giacciono da parti opposte rispetto OO'. Se ne esistesse un terzo D, allora $\overline{OD} \equiv \overline{OA}$ e $\overline{O'D} \equiv \overline{O'A}$. E perciò il triangolo ODO' sarebbe congruente al triangolo OAO', come anche al triangolo OBO'. D non può appartenere alla retta OO' (altrimenti le due circonferenze sarebbero tangenti) dunque o giace dalla stessa parte di A, oppure dalla stessa parte di B.



In entrambi i casi le congruenze fra triangoli, come l'unicità del trasporto di angoli e segmenti, obbligano D a coincidere o con A, oppure con B.

La tesi è provata. □

Possiamo adesso fornire le seguenti definizioni:

Definizione 2.42. Date due circonferenze distinte Γ e Γ':

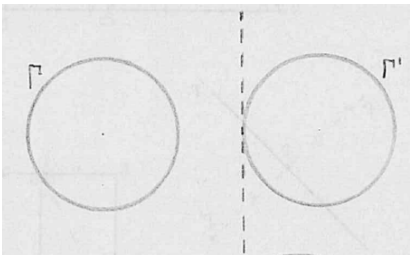
esse sono dette *esterne* se tutti i punti di Γ sono esterni a Γ', e viceversa;

sono dette *interne* se tutti i punti di Γ sono interni a Γ', e tutti i punti di Γ' sono esterni a Γ;

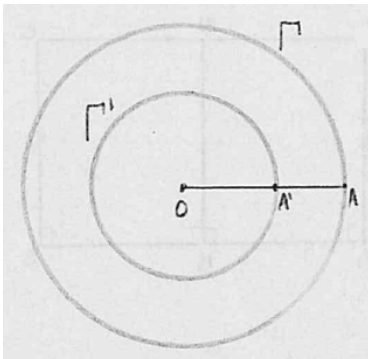
sono dette *secanti* se hanno più di un punto in comune (dunque necessariamente due).

Proposizione 2.46. *Data una circonferenza* Γ*, esistono circonferenze a essa esterne, interne o secanti.*

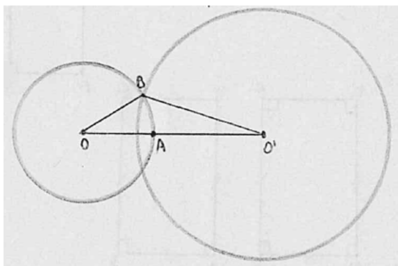
Dimostrazione.
Esterne: sia r una retta esterna a Γ (esiste per la Proposizione 2.44). Sia Γ' una circonferenza tangente a r in un suo punto qualsiasi e avente tutti i punti (tranne quello di tangenza) dall'altra parte del piano rispetto a Γ. Questa costruzione è del tutto legittima per le proposizioni dimostrate sopra; e in particolare Γ e Γ' sono esterne.



Interne: se Γ ha centro O e raggio $\overline{OA}$, sia A' un punto che giace tra O ed A (esiste per le dirette conseguenze degli assiomi d'ordine). Sia Γ' la circonferenza di centro O e raggio $\overline{OA'}$: essa è interna a Γ.



Secanti: supponiamo sempre che Γ abbia centro O e raggio $\overline{OA}$. Consideriamo un punto O' tale che $O * A * O'$ (assioma (**O 2**)). Consideriamo poi, su una qualsiasi semiretta per O che non giaccia su OA, l'unico punto B che appartiene a Γ. Sia Γ' la circonferenza di centro O' e raggio $\overline{O'B}$. Come conseguenza diretta delle ultime proposizioni essa è secante a Γ.



□

Quanto detto fino ad ora ci permette di dare una lista delle possibili posizioni reciproche tra due circonferenze distinte: esse possono essere esterne, tangenti, secanti oppure interne. Tuttavia, come fu anche per rette e circonferenze, questa lista non esaurisce tutte le possibili posizioni che le circonferenze riescono ad assumere: rimane sempre aperta la questione che una delle due circonferenze abbia sia punti interni che punti esterni all'altra, ma non ci sia nessuna intersezione fra le due.

Questo problema viene risolto formulando il seguente assioma:

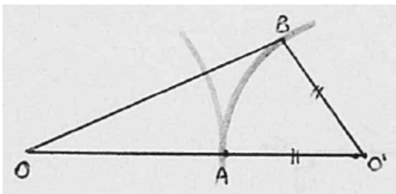
> (**E**) Date due circonferenze Γ e Γ', supponiamo che che Γ' abbia almeno un punto interno a Γ, ed almeno un punto esterno a Γ; allora le due circonferenze si intersecano.

Proposizione 2.47. *Date due circonferenze Γ e Γ' come nelle ipotesi dell'assioma (**E**), allora necessariemente sono secanti (e dunque hanno esattamente due punti d'intersezione).*

Dimostrazione. Le condizioni sui punti interni vincolano le circonferenze ad essere distinte. L'assioma (**E**) ci garantisce abbiano intersezione, e allora o sono tangenti, o sono secanti. Mostriamo che non possono essere tangenti provando che se lo fossero, allora una circonferenza avrebbe o solo punti esterni o solo punti interni all'altra (eccezion fatta per il punto di tangenza).

Essendo Γ e Γ' tangenti in un punto A, e considerando i rispettivi centri O e O', i punti O, O' e A debbono essere allineati. Ne consegue che uno dei tre giace fra gli altri due. I casi sono allora: o $O * A * O'$, oppure $O * O' * A$ (il caso $O' * O * A$ è sostanzialmente equivalente al secondo).

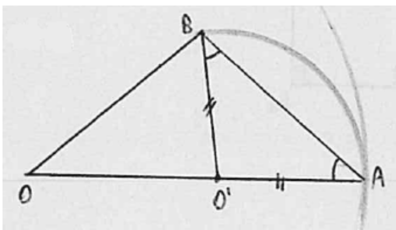
(a) supponiamo $O * A * O'$. Sia B un qualsiasi punto della circonferenza Γ' che non giaccia sulla retta OA. Consideriamo i triangoli OBO', OAB e $O'AB$. La posizione reciproca fra i punti O, O' e A garantisce che l'angolo $\widehat{BAO}$ (interno al triangolo OAB) sia esterno al triangolo $O'AB$. Quest'ultimo triangolo, d'altra parte, è isoscele poiché $\overline{OB} \equiv \overline{OA}$, e perciò vale la congruenza $\widehat{O'BA} \equiv \widehat{O'AB}$. Unendo ciò al teorema dell'angolo esterno, concludiamo che $\widehat{BAO} > \widehat{O'BA} \equiv \widehat{O'AB}$. Inoltre l'angolo $\widehat{O'AB}$ è esterno al triangolo OAB e dunque maggiore dell'angolo $\widehat{OBA}$.



Deduciamo, allora, che nel triangolo OAB vale la seguente disuguaglianza di angoli: $\widehat{BAO} > \widehat{OBA}$, che si ripercuote sui rispettivi lati opposti; ovvero $\overline{OB} > \overline{OA}$. Dunque B è esterno.

Qualora B giacesse su OA, allora o coinciderebbe con A (il che lo porrebbe fuori dai nostri interessi), oppure giacerebbe dalla parte opposta di A rispetto a O' (rendendo la dimostrazione ovvia).

(b) supponiamo $O * O' * A$.
Anche in questo caso sia B un qualsiasi punto della circonferenza Γ' che non giaccia sulla retta OA (in caso contrario la dimostrazione diviene banale). Consideriamo i triangoli OBA, $O'BA$ e $OO'B$. Per ipotesi la semiretta $\overrightarrow{BO'}$ è interna all'angolo $\widehat{OBA}$, e allora $\widehat{ABO'} < \widehat{OBA}$. Come prima il triangolo $O'BA$ è isoscele, e dunque $\widehat{ABO'} \equiv \widehat{O'AB}$; in particolare $\widehat{O'AB} < \widehat{OBA}$.



Ricorrendo al teorema del lato opposto all'angolo, applicato al triangolo OBA, concludiamo che $\overline{OB} < \overline{OA}$. Dunque B è interno.

Quanto detto fin'ora ci mostra che due circonferenze tangenti non possono trovarsi ciascuna con un punto interno all'altra. Concludiamo che Γ e Γ' debbono essere secanti. □

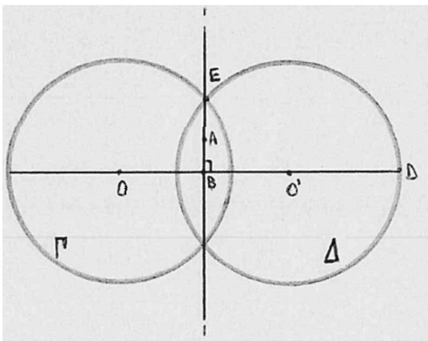
Ricorrendo all'assioma (**E**) siamo finalmente in grado di ricondurre due circonferenze distinte alle sole posizioni reciproche prima enunciate: se dunque Γ e Γ' sono le due circonferenze, esse sono necessariamente o esterne, o tangenti, o secanti oppure interne, e non esistono altre possibilità.

Questo si riperquote anche su rette e circonferenze, grazie alla seguente:

Proposizione 2.48. *In un piano di Hilbert ove valga anche l'assioma (**E**), se una retta r contiene un punto A interno ad una circonfereza Γ, allora r interseca Γ.*

Dimostrazione. L'idea è di costruire una seconda circonferenza Δ che soddisfi le condizioni del postulato (**E**), in modo che intersechi Γ. Dopodiché si dimostra che l'intersezione giace su r.

Costruiamo dunque la retta passante per O (centro di Γ) e perpendicolare a r (qualora O appartenesse ad r la dimostrazione diverrebbe ovvia). Sia B l'intersezione tra r e detta perpendicolare. Sulla retta OB, e dall'altra parte di O rispetto a B, individuiamo il punto O' tale che $\overline{O'B} \equiv \overline{OB}$. Indichiamo con R la classe di equivalenza dei segmenti congruenti con il raggio di Γ. Sia dunque Δ la circonferenza di centro O' e raggio R. La retta OO' interseca Δ in due punti che giacciono da parti opposte rispetto a O'. Sia C quello che giace dalla stessa parte di O, mentre D l'altro.



Per ipotesi A è interno a Γ, e dunque $\overline{OA} < R$. Inoltre il triangolo OBA è rettangolo per ipotesi; applicando allora intelligentemente il teorema dell'angolo esterno, possiamo concludere che $\widehat{OBA} > \widehat{OAB}$, e dunque $\overline{OB} < \overline{OA}$. Allora $\overline{OB} < R$ e anche B è interno a Γ. Per costruzione abbiamo come conseguenza che $\overline{O'B} < R \equiv \overline{O'C}$: da questo deduciamo che necessariamente $C * B * O'$. Allora C ed O' giacciono da parti opposte di r, mentre C ed O giacciono dalla stessa parte.

Mostriamo che C è interno a Γ. Si possono presentare solo due casi:

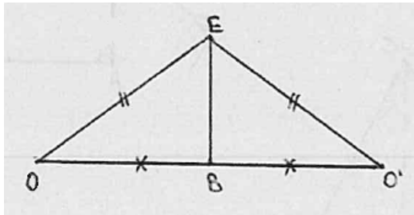
(*1*): se $O * C * B$, allora $\overline{OC} < \overline{OB} < R$, e dunque C è interno.

(*2*): se $C * O * B$, allora necessariamente $C * O * O'$ e perciò $\overline{OC} < \overline{O'C} \equiv R$. Dunque C è interno.

D'altra parte vale che $O * O' * D$, da cui: $\overline{OD} > \overline{O'D} \equiv R$, e allora D è esterno.

Applicando l'assioma (**E**) concludiamo che Γ e Δ si intersecano in un punto E. Ci rimane da dimostrare che esso giace sulla retta r.

Consideriamo i due triangoli OEB e $O'EB$. Ricordando che $\overline{OB} \equiv \overline{O'B}$ per costruzione, e che $\overline{OE} \equiv R \equiv \overline{O'E}$, e osservando che il lato $\overline{EB}$ è comune, possiamo dedurre che tali triangoli siano congruenti. In particolare $\widehat{OBE} \equiv \widehat{O'BE}$; ma tali angoli sono anche adiacenti, e allora, per definizione, sono retti. Essendo unica la perpendicolare a OB passante per B, necessariamente E deve giacere su r.



□

Osservazione 34. Se una retta r contiene un punto A, interno ad una circonferenza Γ, allora, ricorrendo alla Proposizione 2.42 e al Corollario 2.4, possiamo dedurre che le intersezioni sono esattamente due, e allora la retta è secante la circonferenza.

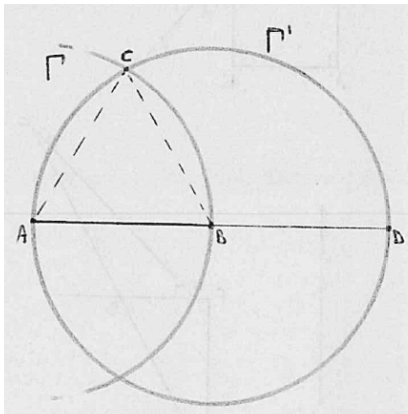
Siamo dunque in grado, anche per rette e circonferenze, di stabilire quali sono le uniche possibili posizioni reciproche: data una retta r ed una circonferenza Γ, allora la retta o è esterna, o tangente oppure secante, e non esistono altre possibilità.

Siamo, inoltre, finalmente in grado di dare una dimostrazione alla seguente proposizione:

Proposizione 2.49 (Proposizione I.1)**.** *In un piano di Hilbert ove valga (**E**), è possibile costruire su un segmento dato $\overline{AB}$ un triangolo equilatero.*

Dimostrazione. Considerato il segmento $\overline{AB}$, sia Γ la circonferenza di centro A e raggio $\overline{AB}$; mentre sia Γ' la circonferenza di centro B e raggio $\overline{AB}$.

Il punto A appartiene alla circonferenza Γ' ed è interno a Γ (ne è il centro). Consideriamo sulla retta AB il punto, giacente dalla parte opposta rispetto di A rispetto a B e appartenente a Γ'; sia esso D. Poiché $A * B * D$, allora $\overline{AB} < \overline{AD}$, e dunque D è esterno a Γ. Per l'assioma (**E**) possiamo affermare che le due circonferenze si intersecano: sia C uno dei punti di intersezione. (Ovviamente C non può essere allineato con A e B, altrimenti le circonferenze sarebbero tangenti). Poiché $C \in \Gamma$ allora $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$; mentre visto che $C \in \Gamma'$ allora $\overline{BC} \equiv \overline{AB}$.



Il triangolo ABC è dunque equilatero. □

Siamo dunque riusciti a dare una rigorosa dimostrazione anche della prima proposizione degli *Elementi*, unica questione ancora rimasta irrisolta dal Capitolo 1.

Possiamo allora enunciare il seguente:

Teorema 2.7. *In un piano di Hilbert ove valga l'assioma (**E**) sono dimostrabili tutte le Proposizioni dalla (I.1) alla (I.28).*

Dimostrazione. Manca all'appello la sola Proposizione (I.22). Essa è tuttavia una diretta conseguenza di tutte le proposizioni dimostrate sopra. □

È importante notare come l'assioma (**E**) non faccia parte dei cinque gruppi di assiomi enunciati a inizio capitolo. In effetti Hilbert non ne fa utilizzo e tale assioma viene inserito solo nelle trattazioni posteriori ai *Fondamenti.* Il fatto che Hilbert non consideri l'assioma (**E**) è dovuto al fatto che esso è in effetti superfluo all'interno della sua assiomatica: è infatti dimostrabile (Sezione 2.4.2) che dall'assioma della continuità (**D**), che abbiamo già fatto notare essere molto forte, sia possibilie dedurre anche (**E**). Insomma, un piano di Hilbert che soddisfi anche l'ultimo gruppo di assiomi ha la garanzia di godere di tutte le proprietà sulle circonferenze appena enunciate. Ciononostante è interessante adottare una prospettiva che si interroghi su quali assiomi siano strettamente necessari per formulare la teoria geometrica di Euclide, ed essendo l'assioma (**D**) tanto forte, può essere utile dare una assiomatica che sia più debole, se questa permette di conseguire gli stessi risultati: un po' come quando si è notato che da (**D**) si deduce anche l'assioma di Archimede (**A**), ma quest'ultimo viene comunque formulato per gli interessi che si possono avere nel supporlo valido anche senza la presenza dell'assioma di continuità. Così si può fare anche per (**E**) e (**D**).

2.3.2 La geometria delle parallele

In questo momento siamo dunque riusciti ad arrivare ad una geometria che includa tutte le prime ventotto proposizioni del primo libro degli *Elementi.* Tuttavia, nel Capitolo 1 avevamo sollevato anche alcune questioni circa il celebre V postulato e l'utilizzo che ne fece Euclide. D'altra parte, nella Sezione 2.2.2, abbiamo visto che anche Hilbert accoglie nel suo sistema di assiomi un postulato sul parallelismo delle rette. Non abbiamo però ancora approfondito come questi ne faccia utilizzo, né se sia ora possibile ricavare pure quelle proposizioni euclidee che coinvolgono la nozione di parallelismo. Tutte le proposizioni che seguono la (I.28) sono infatti, ora come ora, a noi inaccessibili: vedremo come tutte - o quasi - le proposizioni successive abbiano la loro dimostrazione nelle conseguenze della Proposizione (I.29).

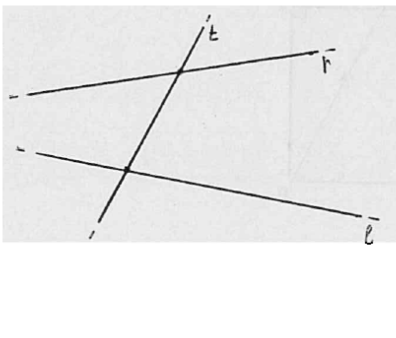
Dedichiamoci allora al superamento di questo ostacolo; ovvero, dedichiamoci all'approfondimento del V postulato euclideo e l'assioma di Playfair.

Partiamo con la seguente definizione:

Definizione 2.43 (Rette trasversali)**.** Siano date due rette distinte. Una terza retta è detta *trasversale* se interseca entrambe le rette date in due punti distinti.

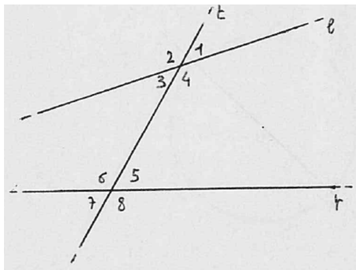
Osservazione 35.

Date due rette distinte qualsiasi, è sempre possibilie trovare una retta trasversale. Basta infatti considerare un punto sulla prima retta ed un punto sulla seconda e dunque, per mezzo dell'assioma (**I 2**), congiungerli.



Data la grande importanza che acquisiscono alla luce del V postulato, diamo la definizione di angoli alterni, corrispondenti e coniugati:

Definizione 2.44 (Angoli alterni, corrispondenti e coniugati)**.** Siano date le due rette distinte r ed l, e la trasversale t. Consideriamo le notazioni presenti in figura. Gli angoli che si formano da queste intersezioni possono essere presi in considerazione a coppie, le quali prenderanno i nomi di [coppie di] angoli



$$\textit{alterni}\begin{cases}\textit{interni}: & (4,6) \text{ e } (3,5),\\ \textit{esterni}: & (1,7) \text{ e } (2,8);\end{cases}$$

$$\textit{corrispondenti}: \ (1,5),\ (2,6),\ (4,8) \text{ e } (3,7);$$

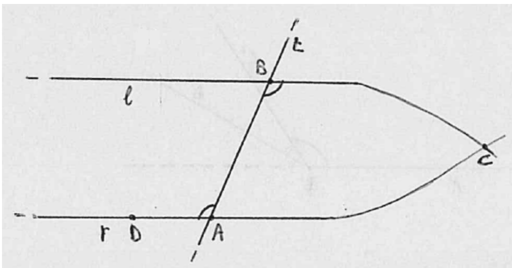
$$\textit{coniugati}\begin{cases}\textit{interni}: & (4,5) \text{ e } (3,6),\\ \textit{esterni}: & (1,8) \text{ e } (2,7).\end{cases}$$

Osservazione 36. Quando Euclide, nell'enunciato del V postulato o nella Proposizione (I.29), parla di «angoli interni e dalla stessa parte», si sta riferendo ad angoli coniugati interni. Mentre quando, sempre nella Proposizione (I.29), parla di «angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto», si sta riferendo ad angoli corrispondenti.

Con queste comode definizioni possiamo ad esempio mostrare quale è la dimostrazione ad una delle proposizioni del Libro I:

Proposizione 2.50 (Proposizione I.27)**.** *Siano date due rette distinte r ed l, tagliate da una trasversale t. Se vengono a formarsi angoli alterni congruenti, allora r ed l sono parallele.*

Dimostrazione. Siano A il punto d'intersezione tra r e t, mentre sia B il punto d'intersezione tra l e t. Supponiamo per assurdo che r ed l non siano parallele, e sia dunque C il loro punto d'intersezione. Chiamiamo poi D un punto su r che giaccia dalla parte opposta di C rispetto ad A.



Ovviamente C non può giacere su t, altrimenti r e t avrebbero due punti d'intersezione e coinciderebbero, e così pure l e t: si arriverebbe allora all'assurda coincidenza di r ed l. Possiamo allora considerare il triangolo ABC. Il suo angolo $\widehat{ABC}$ è, per ipotesi, congruente all'angolo $\widehat{BAD}$. Tuttavia quest'ultimo è un angolo esterno al triangolo ABC, e dunque dovrebbe, per la Proposizione 2.35, essere maggiore dell'angolo $\widehat{ABC}$. Da qui l'assurdo. □

Una diretta conseguenza della precedente proposizione è il seguente:

Corollario 2.6. *Rette perpendicolari ad una stessa retta sono fra loro parallele.*

Osserviamo che non c'è per il momento alcuna dipendenza dall'assioma (**P**).

L'equivalenza dei due enunciati

Partiamo recuperando un'osservazione già fatta in precedenza: la formulazione adottata da Euclide e quella invece adottata da Hilbert per l'assioma delle parallele sono sostanzialmente differenti. Ricordiamo infatti che l'enunciato che appare nel Libro I degli *Elementi* è il seguente:

V. [Risulti postulato] che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Mentre quello adottato da Hilbert nei *Fondamenti*, cioè l'assioma di Playfair, è quello che segue:

(**P**) Dati una retta r ed un punto A che non le appartiene, esiste ed è unica la retta parallela ad r e passante per A.

Ora, che questi due postulati siano tra loro equivalenti non è così ovvio. Generalmente la formulazione adottata da Euclide è caduta in disuso e si preferisce adottare quella di Playfair, ma per poter fare questo è necessario essere certi della loro equivalenza. Nello specifico, spieghiamo adesso cosa intendiamo per equivalenza. Cominciamo dalla seguente definizione:

Definizione 2.45 (Geometria assoluta)**.** Definiamo *geometria assoluta* l'insieme di tutte le definizioni, le nozioni comuni e i postulati - ad eccezione del V - che appaiono negli *Elementi*, unitamente a tutte le proposizioni che da essi possono essere dimostrate.

Se ci limitiamo al Libro I, stiamo in sostanza limitando la nostra analisi, oltre che alle definizioni, alle nozioni comuni e a quattro postulati, soltanto alle prime ventotto proposizioni.

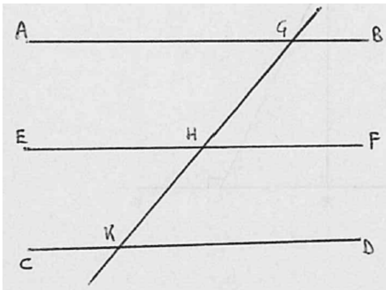
Data questa definizione, spieghiamo che cosa intendiamo per equivalenza dei postulati. Stiamo a intendere che le due formulazioni possono essere dimostrate l'una dall'altra all'interno della geometria assoluta; ovvero, considerata la geometria assoluta e aggiunto il V postulato allora è possibile dimostrare, alla stregua di una qualsiasi altra proposizione, l'enunciato di Playfair; viceversa, considerata la geometria assoluta ed aggiunto l'assioma di Playfair è possibile dimostrare la validità del V postulato.

Quello che adesso faremo sarà proprio dimostrare l'equivalenza dei due enunciati. Come primo passo dimostriamo alcune proposizioni già presenti negli *Elementi*, facendo però ricorso solo ai cinque postulati euclidei (seguiremo le stesse dimostrazioni usate da Euclide).

Proposizione (I.30)**.** *Rette parallele ad una stessa retta sono parallele anche fra loro.*

Dimostrazione. Siano AB e CD due rette, ciascuna parallela alla retta EF. Vogliamo dimostrare che AB e CD sono parallele fra loro.

Consideriamo la retta GK trasversale alle tre rette date. Usiamo le notazioni in figura.



Le rette AB ed EF sono parallele e dunque, applicando la Proposizione (I.29), gli angoli $\widehat{AGK}$ e $\widehat{GHF}$ sono uguali. Analogamente gli angoli $\widehat{GHF}$ e $\widehat{GKD}$ sono uguali perché le rette CD ed EF sono parallele. Concludiamo allora che sono uguali anche gli angoli $\widehat{AGK}$ e $\widehat{GHF}$. Possiamo allora applicare la Proposizione (I.27) e concludere il parallelismo di AB e CD. □

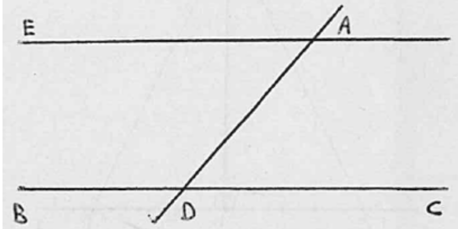
Conseguenza diretta della Proposizione (I.30) è il seguente corollario:

Corollario 2.7. *Data una retta r ed un punto A che non le appartiene,* è unica *la retta passante per A e parallela ad r.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo esistano due rette distinte, l ed m, entrambe passanti per A e parallele ad r. Per la Proposizione precedente l ed m dovrebbero essere parallele fra loro, ma questo è assurdo perché si intersecano nel punto A. □

Proposizione (I.31)**.** *Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data.*

Dimostrazione. Siano A e BC rispettivamente il punto e la retta dati. Consideriamo sulla retta BC un punto arbitrario D e tracciamo la congiungente AD.



Applichiamo adesso la Proposizione (I.23), costruendo così sulla retta AD, con vertice in A e dalla parte opposta di C, un angolo $\widehat{DAE}$ che sia uguale all'angolo $\widehat{ADC}$. Si prolunghi poi a retta EA. Osserviamo allora che la retta AD, cadendo sulle rette BC e AE, forma per costruzione due angoli alterni interni uguali ($\widehat{EAD}$ e $\widehat{ADC}$). Applicando la Proposizione (I.27) concludiamo dunque che AE è parallela a BC. □

Osservazione 37. La precedente Proposizione può anche essere riformulata, più modernamente, così:

data una retta r ed un punto A che non le appartiene, *esiste* una retta passante per A e parallela ad r.

Inoltre, facciamo notare una cosa: la Proposizione (I.31), benché segua la (I.29), non le dipende, come non dipende dal V postulato. Le uniche proposizioni che si sono adoperate nella sua dimostrazione sono state la (I.23) e la (I.27), entrambe indipendenti dall'ultimo postulato euclideo. Il motivo per il quale la (I.31) sia allora così posticipata non è noto. Forse una motivazione è che, posponendola alla Proposizione (I.30), risulti immediatamente ovvia non solo l'esistenza della parallela, ma anche la sua unicità.

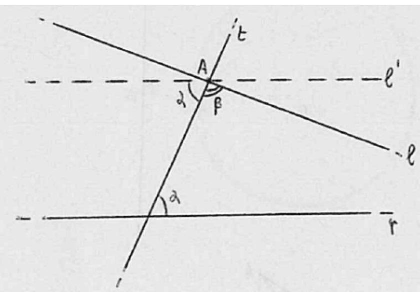
Possiamo allora unire gli enunciati della Proposizione (I.31) e del Corollario 2.7, ed affermare che, presa una retta arbitraria del piano ed un punto fuori di essa, esiste ed è unica la retta passante per il punto e parallela alla retta data. In poche parole abbiamo provato che nella geometria assoluta, con l'aggiunta del V postulato di Euclide (utile in realtà solo per l'unicità), è possibile dimostrare come proposizione anche il postulato di Playfair.

Perciò:

geometria assoluta + V postulato $\Longrightarrow$ postulato di Playfair.

Vogliamo adesso dimostrare l'implicazione inversa, ovvero dimostrare che all'interno della geometria assoluta, con l'aggiunta dell'assioma di Playfair sia possibile provare il V postulato.

Procediamo nel seguente modo: siano r ed l due rette tali che, se tagliate da una trasversale t, formino angoli coniugati interni («interni e dalla stessa parte») la cui somma sia minore di due retti. Chiamiamo α e β questi angoli. Sia A il punto di intersezione tra l ed t. Adesso applichiamo la Proposizione (I.23) e trasportiamo α sulla retta t, con vertice nel punto A, e dalla parte opposta rispetto ad α. In questo modo abbiamo individuato una retta l' passante per A, che forma con t un angolo γ. Osserviamo che, data l'uguaglianza tra α e γ, e dato che la somma tra α e β è minore di due retti, allora anche la somma di β e γ è minore di due retti.



Possiamo adesso applicare la Proposizione (I.13) ed avere garanzia che le rette l ed l' sono distinte. D'altra parte, r ed l' formano con t angoli alterni interni uguali, e dunque sono parallele. Applicando Playfair, ovvero l'unicità della parallela per A, concludiamo che la retta l non sia parallela ad r.

Con questa dimostrazione abbiamo allora concluso che:

$$\text{geometria assoluta} + \text{postulato di Playfair} \Longrightarrow \text{V postulato};$$

e possiamo allora enunciare finalmente la seguente proposizione:

Proposizione 2.51. *All'interno del sistema assiomatico costituito dai primi quattro postulati euclidei, il V postulato e l'assioma di Playfair sono equivalenti.*

L'assioma (P) all'interno dei *Grundlagen*

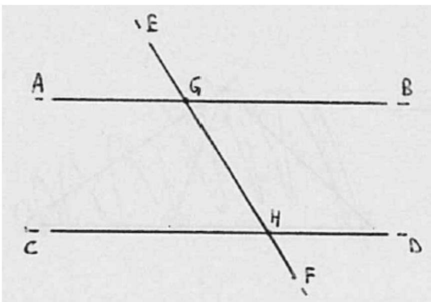
Dimostrato che abbiamo l'equivalenza tra i due enunciati del postulato delle parallele, vogliamo adesso vedere in che modo sia possibile, all'interno dell'assiomatica dei *Fondamenti*, utilizzare tale assioma al fine di portare a dimostrazione anche quelle proposizioni che ancora non avevano trovato il loro spazio all'interno del piano di Hilbert - neppure con l'aggiunta dell'assioma (**E**).

Chiariamo bene questo fatto: per quale ragione tutte le proposizioni dalla (I.29) in avanti non sono in alcun modo dimostrabili a partire dai soli assiomi del piano di Hilbert, neppure con l'introduzione di (**D**) (e dunque anche di (**A**) e di (**E**))? Ciò è dovuto al fatto che la Proposizione (I.29), per essere dimostrata, richiede necessariamente l'adozione del V postulato; e il motivo è presto detto: recuperiamo l'enunciato della proposizione stessa.

Proposizione (I.29)**.** *Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, e angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.*

Dimostrazione. Diamo anche qui la dimostrazione formulata da Euclide.

Usiamo, per semplicità, le notazioni presenti in figura. Siano dunque AB e CD parallele e sia EF una retta trasversale. Si vuole dimostrare che gli angoli $\widehat{AGH}$ e $\widehat{GHD}$ sono uguali, così come gli angoli $\widehat{EGB}$ e $\widehat{GHD}$; mentre gli angoli $\widehat{BGH}$ e $\widehat{GHD}$ hanno somma minore di due retti.



Se l'angolo $\widehat{AGH}$ non fosse uguale all'angolo $\widehat{GHD}$ allora dovrebbe essergli o maggiore o minore. Supponiamo sia maggiore e aggiungiamo dunque l'angolo $\widehat{BGH}$ ad entrambi i due angoli. La somma $\widehat{AGH} + \widehat{BGH}$ sarà allora maggiore della somma $\widehat{GHD} + \widehat{BGH}$ (nozione comune (4)). Dato che la prima di queste somme è uguale a due retti (Proposizione (I.13)), allora la seconda dovrà essere minore di due retti. Applicando allora il V postulato dovremmo concludere che le rette AB e CD, prolungate illimitatamente, vengano ad intersecarsi, ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi del loro parallelismo. Possiamo allora affermare che gli angoli $\widehat{AGH}$ e $\widehat{GHD}$ sono uguali. (Prima delle tre tesi dimostrata).

Notiamo poi che l'angolo $\widehat{AGH}$ è uguale all'angolo $\widehat{EGB}$, perché opposti al vertice. In particolare sono allora uguali anche gli angoli $\widehat{GHD}$ e $\widehat{EGB}$. (Seconda delle tre tesi dimostrata).

Infine, si aggiunga sia all'angolo $\widehat{GHD}$ che all'angolo $\widehat{EGB}$ l'angolo $\widehat{BGH}$. Dato che la somma $\widehat{BGH} + \widehat{EGB}$ è uguale a due retti, allora tale sarà anche la somma $\widehat{BGH} + \widehat{GHD}$ (nozione comune (1)). Questo conclude la dimostrazione. □

Confrontando l'enunciato e la sua dimostrazione con il V postulato, perveniamo molto facilmente ad una considerazione: la dimostrazione si riduce, in sostanza, ad affermare che, se le rette sono parallele, allora gli angoli alterni interni sono uguali; se così non fosse, da una delle due parti la somma degli angoli coniugati interni dovrebbe essere minore di due retti, e quindi, attraverso il V postulato, le due rette dovrebbero incontrarsi; in assurda contraddizione con l'ipotesi di parallelismo. Come viene fatto notare da Frajese, questa proposizione è in realtà la contronominale del V postulato stesso, e non a caso viene spesso detta *teorema inverso* delle parallele.[5] La sua, più che una vera dimostrazione, è una introduzione come postulato: volendo, infatti, si potrebbe tranquillamente eliminare la Proposizione (I.29) e lasciare soltanto il V postulato.

Questo spiega il perché non fosse in alcun modo possibile dimostrare la detta proposizione senza l'ausilio del postulato delle parallele, ed è proprio qui che Euclide, dunque, fu costretto a farne ricorso.

A tal proposito, si è detto che è opinione comune che lo stesso Euclide nutrisse dei dubbi sul V postulato: intanto abbiamo già fatto notare (Sezione 1.3.2) che l'auto-evidenza di quell'enunciato era messa molto in dubbio presso tutti i matematici greci, che vedendo le rette come segmenti (e dunque terminate) avevano difficoltà ad immaginare un loro prolungamento indefinito, in una sorta di passaggio da infinito potenziale a infinito in atto. Esistono però anche altre ragioni che portano a credere che il matematico di Alessandria avesse cercato, per quanto possibile, di non ricorrere al postulato delle parallele. Intanto la lunga attesa tra l'inizio del Libro I e l'effettivo utilizzo del postulato: ben ventinove proposizioni (su quarantotto totali) prima che se ne faccia ricorso, quando invece gli altri quattro postulati vengono utilizzati fin da principio. Ma non solo: altro elemento di sospetto è il fatto che diverse proposizioni della geometria assoluta avrebbero dimostrazione molto più semplice se si potesse fare ricorso al V postulato. Alcune di esse, addirittura, diventerebbero dei semplici corollari di altre proposizioni. Si prendano come esempio le seguenti:

Proposizione (I.16)**.** *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.*

Proposizione (I.17)**.** *In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.*

Proposizione (I.32)**.** *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.*

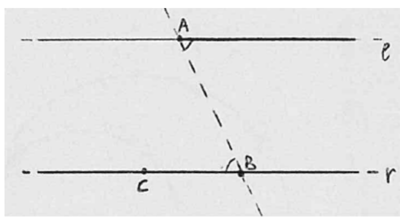
[5] [4, p. 122]

Le prime due ricadono nella geometria assoluta, mentre l'ultima fa ricorso al V postulato. Leggendo però gli enunciati si evince come le proposizioni (I.16) e (I.17) siano dei corollari della (I.32). E se la (I.16) viene, seppur indirettamente, utilizzata nella dimostrazione della (I.32), come pure di altre proposizioni intermedie, e dunque ha senso che la anticipi, così non è per la (I.17). Di più: la Proposizione (I.17) non ha proprio conseguenze all'interno del Libro I, la sua prima applicazione avviene addirittura nel Libro III. Viene dunque da chiedersi per quale ragione Euclide la introduca così presto, quando avrebbe potuto in tutta tranquillità anche solo posporla alla (I.32), presentandola come una diretta conseguenza di quest'ultima. La risposta è che la (I.17), come anche la (I.16), è per l'appunto indipendente dal V postulato. Euclide ha dunque voluto mostrare fin dove si poteva giungere senza applicare il postulato delle parallele: la separazione tra geometria assoluta e geometria euclidea (facente utilizzo del V postulato) è netta ed evidente. Una separazione che mostra quali siano tutte le possibilità di una geometria senza postulato delle parallele, e che permette di scorgere una certa esitazione di Euclide in un suo utilizzo.

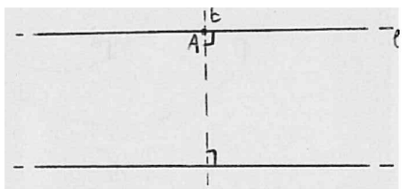
Torniamo adesso a vedere come si colloca la geometria euclidea delle parallele all'interno della formalizzazione di Hilbert.

L'Osservazione 37 mostrava che all'interno degli *Elementi* era possibile dimostrare l'esistenza di una parallela ad una retta data, e passante per un punto esterno, senza far ricorso al V postulato. Questo ci suggerisce che probabilmente anche all'interno della teoria dei *Fondamenti* sia possibile una cosa del genere.

Prendiamo dunque un'arbitraria retta r nel piano e un punto A che non le appartiene. Sia t una retta per A che intersechi r e sia B il punto d'intersezione. Consideriamo sulla retta r un punto C diverso da B. Trasportiamo ora l'angolo $\widehat{ABC}$ sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ e dalla parte opposta rispetto a C. Quella che troviamo è una semiretta con vertice nel punto A. Se tale semiretta viene estesa a retta evinciamo molto facilmente, con l'applicazione della Proposizione 2.50, di aver trovato una retta passante per il punto A e parallela alla retta r.



Un'altra costruzione possibile è la seguente: sia ancora r una retta arbitraria e A un punto fuori di essa. Costruiamo l'unica perpendicolare ad r passante per A (Proposizione 2.43), e la chiamiamo t. Costruiamo poi l'unica perpendicolare a t passante per A (Corollario 2.3), e la chiamiamo l. Il Corollario 2.6 ci garantisce che r ed l siamo parallele.



Abbiamo allora concluso che l'esistenza di una parallela passante per un punto esterno può essere ricavata sulla sola base degli assiomi di incidenza, ordine e congruenza. Possiamo allora enunciare la seguente:

Proposizione 2.52 (Proposizione (I.31))**.** *In ogni piano di Hilbert, presa una retta r ed un punto A ad essa esterno, esiste una retta passante per A e parallela ad r.*

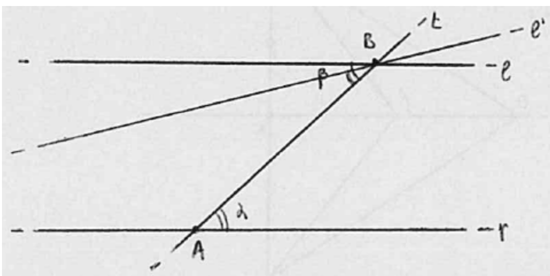
In effetti la formulazione da noi adottata per l'assioma (**P**) è decisamente sovrabbondante. A tal proposito avevamo già detto che Hilbert adotta una formulazione diversa: egli infatti richiede solamente che sia unica la retta passante per un punto esterno ad una retta data e parallela a tale retta. Si è noi richiesto sia l'esistenza che l'unicità per pure ragioni di comodo.

Dimostriamo adesso, con i soli strumenti di un piano di Hilbert e dell'assioma (**P**), che ha validità anche la Proposizione (I.29):

Proposizione 2.53 (Proposizione (I.29))**.** *[In un piano di Hilbert con l'aggiunta dell'assioma (**P**)] siano date due rette parallele r ed l, tagliate da una trasversale t. Allora vengono formati angoli alterni congruenti, angoli corrispondenti congruenti e angoli coniugati interni la cui somma è due retti.*

Dimostrazione. Come già visto nella dimostrazione data da Euclide, è sufficiente dimostrare che due angoli alterni interni siano fra loro congruenti.

Siano perciò r ed l le due rette parallele, mentre t sia la trasversale che le interseca, rispettivamente in A e in B. Supponiamo che gli angoli alterni interni, chiamati per l'occasione α e β (se formati rispettivamente con r o con l), siano disuguali.



Trasportiamo allora l'angolo α sulla semiretta $\overrightarrow{BA}$ e dalla stessa parte dell'interno dell'angolo β. Essendo α e β disuguali, la semiretta che andremo ad individare non potrà essere contenuta nella retta l. Estendendo tale semiretta a retta, e chiamandola l', otteniamo che r ed l' sono parallele per la Proposizione 2.50 (Proposizione (I.27)), avendo angoli alterni interni congruenti.

Abbiamo quindi ottenuto che per il punto A passano due rette parallele alla retta r, in assurda contraddizione con l'assioma (**P**). □

Siamo dunque riusciti a dimostrare attraverso l'assiomatica dei *Fondamenti* la Proposizione (I.29). Questa rappresenta la chiave di volta per tutte le proposizioni successive. La sua dimostrazione ci dà dunque la possibilità di provare quegli enunciati che ancora erano rimasti esclusi dalla nostra disamina.

La Proposizione (I.30), in realtà, neppure necessita della Proposizione (I.29) e abbiamo infatti visto essere legata all'unicità della parallela.

Proposizione 2.54. *Rette parallele ad una retta data sono parallele fra loro.*

Dimostrazione. Siano l ed m rette distinte, parallele alla retta r. Se per assurdo l ed m non fossero fra loro parallele, e avessero quindi un punto di intersezione A, allora esisterebbero due rette distinte, passanti per uno stesso punto e parallele ad r, in contraddizione con (**P**). □

Osservazione 38. La precedente Proposizione, insieme al Corollario 2.7, ci permettono di concludere che esiste un'equivalenza fra i seguenti due enunciati:

Data una retta r ed un punto A che non le appartiene, è unica la retta passante per A e parallela ad r.

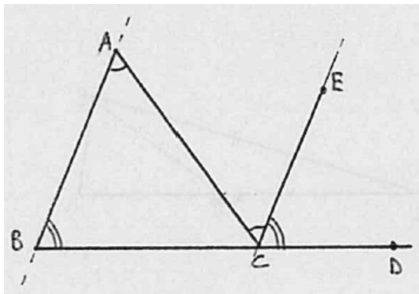
Rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro.

Giusto per curiosità diamo una dimostrazione anche di un'altra delle proposizioni successive alla (I.29), stessa dimostrazione presentata da Euclide, ma ricostruita rigorosamente:

Proposizione 2.55 (Proposizione (I.32))**.** *Un angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma dei due angoli del triangolo ad esso non adiacenti. Inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre pari a due angoli retti.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo qualsiasi.

Individuiamo, sulla retta BC, un punto D che giaccia dalla parte opposta di B rispetto a C. Consideriamo poi l'unica parallela alla retta AB passante per il punto C. Su tale parallela individuiamo un punto E che giaccia dalla stessa parte del punto A rispetto alla retta BC.



Dimostriamo che la semiretta $\overrightarrow{CE}$ giace interna all'angolo $\widehat{ACD}$: in primo luogo è ovvio non possa coincidere con nessuna delle due semirette che costituiscono l'angolo, altrimenti la retta AE intersecherebbe AB. Dobbiamo allora dimostrare che il punto E giaccia dalla stessa parte di A rispetto alla retta CD, e dalla stessa parte di D rispetto alla retta AC. La prima di queste due affermazioni è verificata per costruzione; rimane solo la seconda. Notiamo che i punti B e D giacciono da parti opposte rispetto alla retta AC, e questo perché il segmento $\overline{CD}$ interseca AC nel punto C. Se dunque, per assurdo, E non giacesse dalla stessa parte di D, allora dovrebbe giacere dalla stessa parte di B. Avremmo, dunque, che il punto E giacerebbe dalla stessa parte di A rispetto alla retta CD, e dalla stessa parte di B rispetto alla retta AC, e dunque sarebbe interno all'angolo $\widehat{ACB}$. Applicando ora la Proposizione 2.14 concluderemmo che la semiretta $\overrightarrow{CE}$ dovrebbe intersecare il segmento $\overline{AC}$, in contraddizione con l'ipotesi di parallelismo.

Dato che $\overrightarrow{CE}$ è interna a $\widehat{ACD}$, allora vale che:

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACE} + \widehat{ECD}.$$

Possiamo allora applicare la Proposizione (I.29) alle due rette parallele AB e CE, tagliate prima dalla trasversale AC, e poi dalla trasversale BC; e da ciò estrapolare le congruenze fra angoli alterni (rispetto ad AC) e corrispondenti (rispetto a BC). Ovvero:

$$\widehat{CAB} \equiv \widehat{ACE}, \qquad \widehat{ABC} \equiv \widehat{ECD}.$$

La prima parte della Proposizione è dunque dimostrata.

Per la seconda parte è sufficiente osservare che, per costruzione, l'angolo $\widehat{ACB}$ è adiacente all'angolo $\widehat{ACD}$ (a sua volta congruente alla somma degli altri due angoli del triangolo). Per definizione, dunque, la somma dei tre angoli del triangolo è pari a due angoli retti. □

Date tutte le precedenti dimostrazioni, siamo dunque giunti al seguente, fondamentale, teorema:

Teorema 2.8. *In un piano di Hilbert ove valgano anche gli assiomi (**E**) e (**P**), sono dimostrabili tutte le Proposizioni dalla (I.1) alla (I.34).*

Dimostrazione. Le proposizioni (I.29), (I.30), (I.31) e (I.32) sono già state dimostrate; le restanti non sono che una diretta conseguenza della (I.29). □

Siamo a questo punto in grado di concludere che la geometria dei *Fondamenti* non solo sia stata in grado di rifondare su basi rigorose la geometria assoluta euclidea, ma anche tutta quella parte di geometria del Libro I che concerne il parallelismo e il V postulato. Rimangono ancora escluse le proposizioni che vanno dalla (I.35) alla (I.48). Queste riguardano l'estensione delle figure e la nozione di equivalenza. Hilbert, nel Capitolo 4 dei *Fondamenti* provvederà a dare una sistemazione anche alla teoria delle aree, riuscendo quindi a chiudere completamente il Libro I; si tratta però di argomenti che vanno oltre gli scopi di questa tesi.

Possiamo quindi effettivamente concludere che il lavoro di rifondazione della geometria sia giunto ai suoi scopi.

Una geometria senza l'assioma delle parallele

Risulta ora di un certo interesse lo studio di quei teoremi che valgono indipendentemente dall'assioma delle parallele, cioé quei teoremi validi sia nella geometria euclidea che in quella non-euclidea. Molti di questi teoremi sono già stati enunciati nell'atto di presentare il piano di Hilbert (Sezione 2.3); ci riferiamo in questa sede, dunque, ad una serie di proposizioni che hanno come esempi più importanti i due celebri teoremi di Legendre. Per la loro dimostrazione sarà di grande importanza anche l'assioma di Archimede. A tal proposito: in tutta questa sezione si considererà una geometria piana che soddisfi agli assiomi di incidenza, ordine, congruenza *e di Archimede*; siamo ovvero in un piano di Hilbert con l'aggiunta dell'assioma (**A**). Ci si può riferire ad una tale geometria con il nome di *geometria assoluta archimedea*.

Partiamo con alcune proposizioni inerenti proprio l'assioma archimedeo:

Lemma 2.4. *Siano $\overline{AB}$ un segmento e n, m due naturali non nulli. Supponiamo che $n < m$, allora $n\overline{AB} < m\overline{AB}$.*

Proposizione 2.56. *Per ogni due segmenti $a := \overline{AB}$ ed $\varepsilon := \overline{CD}$, esiste un certo naturale non nullo n, tale che*

$$\frac{a}{2^n} < \varepsilon.$$

Dove $1/2^n$ indica la bisezione del segmento iterata n volte.

Dimostrazione. Presi in considerazione i due segmenti a ed ε, se $a \leq \varepsilon$ la tesi risulta provata per $n = 1$. Supponiamo allora $a > \varepsilon$. Come conseguenza dell'assioma (**A**) abbiamo che esiste un certo naturale non nullo m tale che $m\varepsilon > a$. Inoltre, le note proprietà dei numeri naturali garantiscono ora l'esistenza di un naturale n tale che $2^n > m$. In particolare, ricorrendo al precedente lemma, $2^n\varepsilon > a$.

Si afferma allora che, per il naturale n sopra definito, vale la disuguaglianza $a/2^n < \varepsilon$. Supponiamo infatti il contrario, ovvero che $a/2^n \geq \varepsilon$. Le usuali proprietà di calcolo di garantiscono allora che $a/2^n + a/2^n \geq \varepsilon + \varepsilon$; e così via per ogni iterazione di questa operazione. Ripetendo dunque 2^n volte la somma, concluderemmo che $a \geq 2^n\varepsilon$. Il che è contrario alle nostre ipotesi. $\square$

Attraverso questa proposizione possiamo facilmente giungere alla sua corrispondente angolare, il cui enunciato è il seguente:

Proposizione 2.57. *Per ogni due angoli α ed ε, esiste un certo naturale non nullo n tale che*

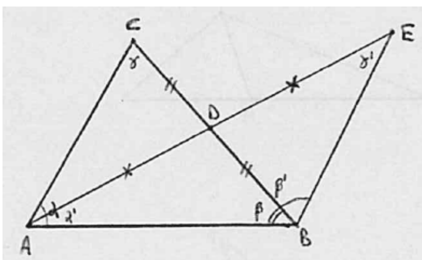
$$\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon.$$

Abbiamo ora a nostra disposizione strumenti sufficienti per pervenire alla dimostrazione del primo teorema di Legendre.

Teorema 2.9 (Primo teorema di Legendre)**.** *In un qualsiasi triangolo la somma dei suoi angoli interni è minore o uguale a due angoli retti.*

Dimostrazione. Sia dato un triangolo ABC. Siano α, β e γ i tre angoli del triangolo, con vertici rispettivamente nei punti A, B e C. Supponiamo che $\beta \leq \gamma$.

Dimezziamo il segmento $\overline{BC}$, individuando il suo punto medio D. Sulla retta AD, dalla parte opposta di A rispetto a D, individuiamo un punto E tale che $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$.



Osserviamo che, essendo $D \in \overline{BC}$, allora la semiretta $\overrightarrow{AD}$ deve essere interna all'angolo $\widehat{CAB}$, ed evinciamo dunque che $\widehat{CAB} = \widehat{CAD} + \widehat{DAB}$. Analogamente $\widehat{ABE} = \widehat{ABD} + \widehat{DBE}$.

Dalle congruenze che sono state costruite concludiamo che i triangoli ADC e BDE sono congruenti. Tenendo presente questo, come anche le somme sopra scritte, e rinominando α', β' e γ' gli angoli interni del triangolo ABE, con vertici rispettivamente in A, B ed E, perveniamo alle seguenti due relazioni:

$$\alpha' + \gamma' \equiv \alpha, \qquad \beta' \equiv \beta + \gamma.$$

Quindi il triangolo ABE ha la stessa somma degli angoli del triangolo ABC.

Sfruttiamo ora la disuguaglianza $\beta \leq \gamma$: poiché in un triangolo, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore, evinciamo che $\overline{AC} \leq \overline{AB}$. E data la congruenza dei triangoli ADC e BDE, allora $\overline{BE} \leq \overline{AB}$; da cui, focalizzandoci sul triangolo ABE,

$$\alpha' \leq \gamma',$$

e perciò

$$\alpha' \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Possiamo dunque, per ogni triangolo ABC e uno dei suoi angoli α, costruire un triangolo con la stessa somma degli angoli interni e in cui uno dei suoi angoli sia minore o uguale ad $\alpha/2$. Immaginando un'iterazione del processo, dato un naturale non nullo qualsiasi n, possiamo costruire un triangolo con somma degli angoli uguale a quella del triangolo ABC, e in cui un suo angolo sia minore o uguale ad $\alpha/2^n$.

Supponiamo ora falsa la tesi del teorema, ovvero che la somma dei tre angoli di un dato triangolo sia strettamente maggiore di due angoli retti. La Proposizione (I.17) garantisce che la somma di due angoli di un triangolo sia minore di due retti e dunque, ad esempio, $\alpha + \beta$ è minore di due retti. Ricordiamo che affermare che la somma di tre angoli è maggiore di due retti equivale ad affermare che il terzo di questi angoli sia maggiore dell'angolo adiacente alla somma degli altri due. Posto δ adiacente ad $\alpha+\beta$, stiamo allora affermando che $\gamma > \delta$. Posto dunque $\varepsilon := \gamma - \delta$, possiamo riformulare il tutto con la seguente uguaglianza:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho + \varepsilon;$$

dove ϱ sta ad indicare un angolo retto.

Applicando l'assioma di Archimede sappiamo esistere un naturale n tale che

$$\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon.$$

Costruiamo ora, nella maniera sopra descritta, un triangolo con angoli α^*, β^* e γ^*, tale che

$$\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 2\varrho + \varepsilon, \qquad \alpha^* \leq \frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon.$$

In questo triangolo si ha

$$\beta^* + \gamma^* > 2\varrho,$$

in contraddizione con la Proposizione (I.17). Risulta quindi provata la tesi del teorema. $\square$

Proseguiamo ora con una serie di proposizioni utili per giungere al secondo teorema di Legendre. Prima, però, un'utile definizione:

Definizione 2.46 (Quadrangoli congruenti)**.** Siano dati due quadrangoli semplici $ABCD$ e $A'B'C'D'$; diremo che sono *congruenti* se hanno ordinatamente cogruenti tutti i lati e gli angoli interni; ovvero se valgono le seguenti congruenze:

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \qquad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

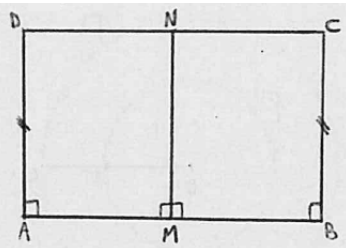
$$\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}, \qquad \overline{DA} \equiv \overline{D'A'}.$$

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}, \qquad \widehat{BCD} \equiv \widehat{B'C'D'},$$

$$\widehat{CDA} \equiv \widehat{C'D'A'}, \qquad \widehat{DAB} \equiv \widehat{D'A'B'}.$$

Proposizione 2.58. *Sia dato il quadrangolo semplice $ABCD$, con angoli retti in A e in B, e con i lati opposti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ congruenti. Allora gli angoli in C e in D sono tra loro congruenti. Inoltre la perpendicolare al segmento $\overline{AB}$, innalzata nel suo punto medio M, interseca il lato opposto $\overline{CD}$ in un punto N tale che i due quadrangoli $AMND$ e $BMNC$ sono congruenti.*

Dimostrazione. Sia r la perpendicolare ad AB passante per M.



Le tre rette AD, r e BC sono tutte, per ipotesi, perpendicolari alla retta AB, e dunque tra loro parallele. Non potendo tali rette avere intersezioni reciproche concludiamo che i punti A e D stanno dalla stessa parte del piano rispetto a r, come anche i punti B e C. Viceversa i punti A e B stanno da parti opposte, dato che per ipotesi $M \in \overline{AB}$. Allora anche C e D stanno da parti opposte e perciò il segmento $\overline{CD}$ deve intersecare la retta r. Sia N il punto d'intersezione.

Risulta ora immediato, per il primo criterio di congruenza, che i due triangoli MAD e MBC siano tra loro congruenti. In particolare sono congruenti anche gli angoli $\widehat{DMA}$ e $\widehat{CMB}$, come pure i segmenti $\overline{DM}$ e $\overline{MC}$.

Come conseguenza del primo teorema di Legendre, abbiamo che in un triangolo rettangolo ogni angolo non retto è necessariamente acuto. Nel nostro caso l'angolo $\widehat{DMA}$ è acuto, e allora la semiretta $\overrightarrow{MD}$ è necessariamente interna all'angolo (retto) $\widehat{NMA}$. Perciò vale che $\widehat{NMA} = \widehat{DMA} + \widehat{NMD}$. Analogamente $\widehat{NMB} = \widehat{CMB} + \widehat{NMC}$. Considerando le congruenze fra gli angoli in gioco, fra cui quelli retti, concludiamo che $\widehat{DMN} \equiv \widehat{NMC}$. Possiamo allora affermare che i triangoli MDN e MNC sono congruenti.

Applicando allora la Proposizione 2.23, concludiamo la seguente congruenza:

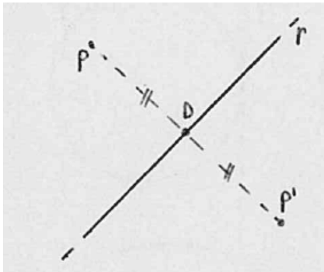
$$\widehat{BCN} \equiv \widehat{ADN}.$$

Che chiude la prima parte della dimostrazione.

I quadrangoli $AMND$ e $BMNC$ hanno allora ordinatamente congruenti tutti i lati e gli angoli e sono, perciò, congruenti fra loro. □

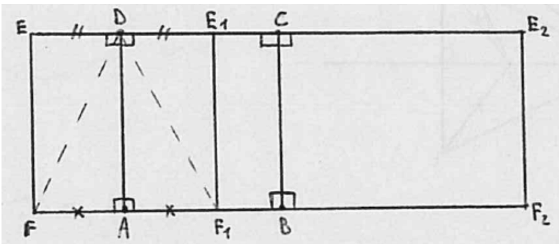
Proposizione 2.59. *Se il quadrangolo semplice $ABCD$ ha quattro angoli retti, allora ogni segmento $\overline{EF}$, condotto da un punto E della retta CD perpendicolarmente alla retta AB, è pure perpendicolare a CD.*

Dimostrazione.
Con simmetria rispetto ad una retta r intendiamo la seguente cosa: preso un qualsiasi punto P non su r, tracciamo la perpendicolare alla retta r per P e su tale perpendicolare (che avrà con r un'intersezione O), dalla parte opposta di P rispetto ad r, individuiamo un punto P' tale che $\overline{OP} \equiv \overline{OP'}$. Il punto P' è detto simmetrico di P rispetto ad r.



Sia dunque $\overline{EF}$ come nella tesi del teorema. I casi in cui coincida con $\overline{AD}$ oppure con $\overline{BC}$ sono ovvi. Costruiamo allora i simmetrici di $\overline{EF}$ rispetto ad AD e a BC, ottenendo rispettivamente $\overline{E_1F_1}$ ed $\overline{E_2F_2}$. Le posizioni reciproche dei tre punti (distinti) E, E_1 ed E_2 possono essere varie. Supponiamo ora che $E * E_1 * E_2$ (la dimostrazione non cambia negli altri due casi).

Il punto E giace sulla retta CD, perpendicolare ad AD e a BC per ipotesi. Allora anche i punti E_1 ed E_2 giacciono su CD. Analogamente i punti F, F_1 ed F_2 giacciono tutti sulla retta AB.



Soffermandoci sui triangoli FAD e F_1AD, e applicando il primo criterio di congruenza, evinciamo che sono congruenti; e in particolare sono congruenti anche i segmenti $\overline{DF}$ e $\overline{DF_1}$, oltre che gli angoli $\widehat{ADF}$ e $\widehat{ADF_1}$. Allora sono congruenti anche gli angoli $\widehat{FDE}$ ed $\widehat{F_1DE_1}$. Abbiamo quindi sufficienti strumenti per concludere la congruenza dei triangoli FDE ed F_1DE_1; da cui le seguenti congruenze:

$$\widehat{FED} \equiv \widehat{F_1E_1D}, \quad \overline{EF} \equiv \overline{E_1F_1}.$$

Analogamente possiamo dimostrare le congruenze:

$$\widehat{FED} \equiv \widehat{F_2E_2D}, \quad \overline{EF} \equiv \overline{E_2F_2}.$$

Inoltre gli angoli $\widehat{E_1F_1A}$ e $\widehat{E_2F_2B}$ sono congruenti all'angolo $\widehat{EFA}$ (sempre per le congruenze fra i triangoli), che per ipotesi è retto. Allora $\widehat{E_1F_1A}$ è retto, e perciò congruente al suo adiacente $\widehat{E_1F_1F_2}$, che sarà retto a sua volta.

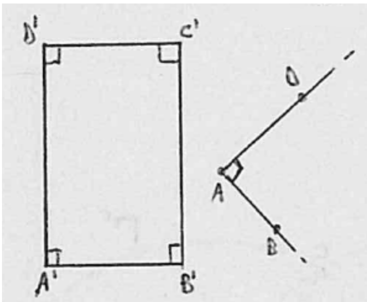
Concentrandoci sul quadrangolo $E_1F_1F_2E_2$, esso ha i lati opposti $\overline{E_1F_1}$ ed $\overline{E_2F_2}$ congruenti, e angoli alla base $\widehat{E_1F_1F_2}$ ed $\widehat{E_2F_2F_1}$ retti. Applicando allora la Proposizione 2.58, concludiamo che $\widehat{E_2E_1F_1} \equiv \widehat{E_1E_2F_2}$.

Ripercorrendo tutte le congruenze ottenute, abbiamo in particolare che

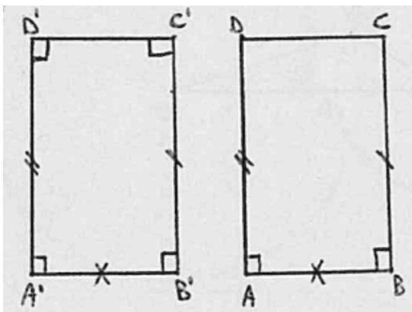
$$\widehat{EE_1F_1} \equiv \widehat{E_2E_1F_1};$$

ovvero l'angolo $\widehat{E_2E_1F_1}$ è congruente al suo adiacente, e allora è retto. Sempre per via di tutte le congruenze ottenute, anche l'angolo $\widehat{FED}$ è retto. La tesi è dunque provata. □

Lemma 2.5. *Siano dati un quadrangolo semplice con quattro angoli retti e un angolo retto qualsiasi; allora è possibile costruire un quadrangolo semplice congruente a quello dato, e avente uno degli angoli coincidente con l'angolo dato.*



Dimostrazione. Sulla base degli assiomi di congruenza e della Proposizione 2.58 diviene possibile la costruzione richiesta, nel seguente modo: sia $A'B'C'D'$ il quadrangolo dato, mentre sia $\widehat{DAB}$ un angolo retto. Possiamo supporre, per l'assioma (**C 1**), che $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. A questo punto innalziamo la perpendicolare ad AB passante per B e tra le due semirette aventi origine in B consideriamo quella che giace dalla stessa parte di D. Su di essa determiniamo un punto C tale che $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Congiungiamo infine C con D. Il quadrangolo $ABCD$ (che una semplice verifica può mostrare essere semplice) ha per costruzione l'angolo in A coincidente con l'angolo $\widehat{DAB}$.



Affermiamo ora che esso è anche congruente con il quadrangolo $A'B'C'D'$. Per costruzione gran parte delle congruenze sono già verificate. Rimangono da provare solo le seguenti:

$$\overline{CD} \equiv \overline{C'D'},$$
$$\widehat{BCD} \equiv \widehat{B'C'D'}, \qquad \widehat{CDA} \equiv \widehat{C'D'A'}.$$

Consideriamo allora i triangoli ABC e $A'B'C'$. Essi sono congruenti per l'assioma (**C 6**) (ovvero per il primo criterio di congruenza). Hanno dunque, nello specifico, congruenti i lati $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{C'A'B'}$.

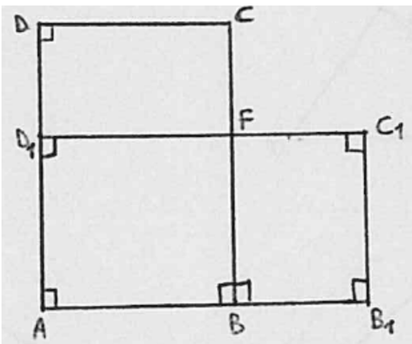
Vale poi che $\widehat{DAB} \equiv \widehat{D'A'B'}$, che $\widehat{DAB} = \widehat{CAB} + \widehat{CAD}$ e infine che $\widehat{D'A'B'} = \widehat{C'A'B'} + \widehat{C'A'D'}$. Emerge allora che $\widehat{CAD} \equiv \widehat{C'A'D'}$, e così possiamo dimostrare anche la congruenza dei triangoli ACD e $A'C'D'$, con conseguente congruenza dei segmenti $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, e degli angoli $\widehat{CDA}$ e $\widehat{C'D'A'}$.

La congruenza dell'ultima coppia di angoli procede nello stesso modo, considerando però i triangoli formati dall'altra diagonale. □

Proposizione 2.60. *Se esiste* un *quadrangolo semplice in cui tutti gli angoli sono retti, allora in* ogni *quadrangolo semplice con tre angoli retti è retto anche il quarto angolo.*

Dimostrazione. Sia $A'B'C'D'$ un quadrangolo semplice con quattro angoli retti e sia $ABCD$ un qualsiasi quadrangolo semplice con tre angoli retti, di vertici i punti A, B e D. Costruiamo, per mezzo del Lemma 2.5, quel quadrangolo $AB_1C_1D_1$ congruente ad $A'B'C'D'$ e il cui angolo retto in A coincida con quello del quadrangolo $ABCD$.

Osserviamo che se il punto B_1 viene a coincidere con il punto B, oppure se il punto D_1 coincide con il punto D, allora la tesi risulta la medesima della Proposizione 2.59. In caso contrario, supponiamo che B stia fra A e B_1, mentre D_1 stia fra A e D.



Facciamo dei ragionamenti similari a quelli già fatti all'inizio della dimostrazione della Proposizione 2.58: le rette AD_1, BC e B_1C_1 sono tra loro parallele (perché tutte perpendicolari alla retta AB), ne consegue che i punti A e D_1 giacciono dalla stessa parte rispetto alla retta BC, così come anche i punti B_1 e C_1; viceversa i punti A e B_1 giacciono da parti opposte (per ipotesi il segmento $\overline{AB_1}$ interseca BC in B). Concludiamo che C_1 e D_1 giacciano da parti opposte rispetto alla retta BC, e dunque esisterà un punto F intersezione di BC e $\overline{C_1D_1}$.

Dunque F appartiene alla retta BC e alla retta C_1D_1 (e in particolare proprio al segmento $\overline{C_1D_1}$).

Applichiamo ora la Proposizione 2.59 al quadrangolo $AB_1C_1D_1$ e alla retta BF, concludendo che quest'ultima retta è perpendicolare alla retta C_1D_1. Essendo, dunque, l'angolo in F retto, il quadrangolo $ABFD_1$ ha quattro angoli retti. Possiamo allora, nuovamente, applicare la Proposizione 2.59 al detto quadrangolo $ABFD_1$ e alla retta CD, concludendo questa volta che l'angolo in C è retto. Allora è dimostrato che il quadrangolo semplice $ABCD$ ha tutti e quattro gli angoli retti.

La tesi può essere ottenuta in modo del tutto analogo anche con gli altri possibili ordinamenti dei punti A, B e B_1, e dei punti A, D e D_1. □

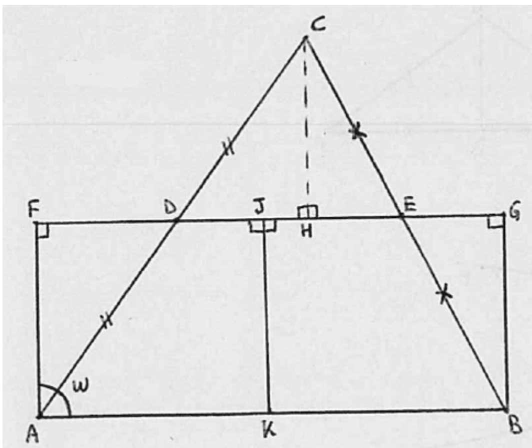
Siamo ora in grado di dare una dimostrazione del secondo teorema di Legendre:

Teorema 2.10 (Secondo teorema di Legendre)**.** *Se esiste* un *triangolo la cui somma degli angoli interni è pari a due angoli retti, allora in* ogni *triangolo la somma degli angoli è uguale a due angoli retti.*

Dimostrazione. Poiché ogni angolo può essere dimezzato, è lecito scrivere un angolo qualsiasi nella forma 2ω, dove ω rappresenta in questo caso la bisezione dell'angolo dato.

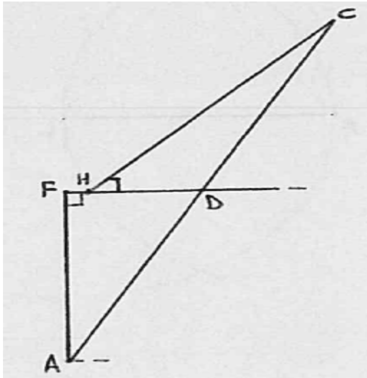
Dimostriamo che, dato un qualsiasi triangolo ABC con somma degli angoli interni pari a 2ω, è possibile associarli un quadrangolo semplice avente tre angoli retti e il cui quarto angolo sia congruente a ω.

Siano dunque D ed E i punti medi rispettivamente dei lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Adesso tracciamo le tre perpendicolari a DE passanti per A, B e C, individuando rispettivamente i punti F, G e H.



Supponiamo che l'angolo in A del triangolo non sia retto. Allora i punti F e H sono distinti, e in particolare sono distinti anche dal punto D. Mostriamo inoltre che i punti F e H stanno da parti opposte rispetto al punto D:

se così non fosse, l'angolo $\widehat{CDH}$, esterno al triangolo AFD, dovrebbe essere maggiore dei due angoli interni di detto triangolo e a lui non adiacenti; in particolare sarebbe maggiore di un angolo retto. Sempre l'angolo $\widehat{CDH}$ è anche interno al triangolo rettangolo CDH, il quale avrebbe così somma degli angoli interni strettamente maggiore di due angoli retti, in antitesi con il Primo teorema di Legendre.



Concludiamo che F e H giacciano da parti opposte rispetto a D, e che dunque gli angoli $\widehat{CDH}$ e $\widehat{ADF}$ sono opposti al vertice, e perciò congruenti. Da detta congruenza, attraverso la Proposizione 2.38 sulla congruenza dei triangoli, concludiamo che i triangoli ADF e CDH sono anch'essi congruenti. In particolare $\overline{AF} \equiv \overline{CH}$. (Se pure l'angolo in A fosse stato retto avremmo concluso, anche più semplicemente, lo stesso risultato).

Analogamente si dimostra la congruenza dei triangoli CHE e BGE; e dunque $\overline{CH} \equiv \overline{BG}$. In conclusione:

$$\overline{AF} \equiv \overline{BG}.$$

In base al fatto che uno degli angoli (del triangolo) in A o in B sia acuto, ottuso o retto, si possono presentare varie situazioni. Tutte, in ogni caso, riportano allo stesso risultato che verrà ora dimostrato quando sia l'angolo in A, sia l'angolo in B, sono acuti (come in figura). Le congruenze dei triangoli sopra espresse, infatti, suggeriscono che $\widehat{FAD} \equiv \widehat{DCH}$ e $\widehat{GBE} \equiv \widehat{ECH}$. D'altra parte, per ipotesi, $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} \equiv 2\omega$. Inoltre vaglono le seguenti considerazioni:

$$\widehat{ACB} = \widehat{DCH} + \widehat{ECH},$$

$$\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{FAD},$$

$$\widehat{ABG} = \widehat{ABC} + \widehat{GBE}.$$

Per cui:

$$\widehat{BAF} + \widehat{ABG} \equiv 2\omega.$$

Dal punto medio J del segmento $\overline{FG}$, si innalzi ora la perpendicolare alla retta FG. Tale perpendicolare interseca $\overline{AB}$ in un punto K, per la Proposizione 2.58. Osserviamo che per le stesse ragioni addotte al principio della dimostrazione della Proposizione 2.58, possiamo affermare che i punti A e B giacciano da parti opposte rispetto alla retta JK, e in particolare gli angoli $\widehat{AKJ}$ e $\widehat{BKJ}$ sono adiacenti. Applicando nuovamente la Proposizione 2.58 al quadrangolo $ABGF$ concludiamo che i quadrangoli $AKJF$ e $BKJG$ sono congruenti, e in particolare i due angoli $\widehat{AKJ}$ e $\widehat{BKJ}$ sono congruenti; e dunque $\widehat{AKJ}$ è retto.

Inoltre, per la medesima proposizione,

$$\widehat{BAF} \equiv \widehat{ABG};$$

e quindi

$$\widehat{BAF} \equiv \omega.$$

Si evince così che il quadrangolo semplice $AKJF$ è associato al dato triangolo ABC secondo le richieste.

Supponiamo ora, come da richiesta del teorema, che esista un triangolo T_1 con somma degli angoli interni pari a due retti; e sia T_2 un triangolo arbitrario. Costruiamo i quadrangoli semplici Q_1 e Q_2 associati, rispettivamente a T_1 e a T_2, nella maniera sopra descitta. Per costruzione Q_1 è un quadrangolo con quattro angoli retti, mentre Q_2 è un quadrangolo con tre angoli retti e avente il quarto angolo congruente a metà della somma degli angoli interni di T_2. Applicando la Proposizione 2.60, possiamo allora affermare che anche il quarto angolo di Q_2 sia retto, e perciò T_2 ha come somma degli angoli interni un angolo pari a due angoli retti.

La tesi risulta quindi dimostrata. □

Come è noto, all'interno della geometria euclidea, e dunque supponendo valido l'assioma (**P**), tutti i triangoli hanno somma degli angoli interni pari a due angoli retti: questo è quanto enunciato dalla Proposizione (I.32). Alla domanda se questa affermazione abbia una validità più generale, ovvero se sia dimostrabile anche in una geometria che non presupponga l'assioma delle parallele, danno parziale risposta i due teoremi di Legendre: non sapendo se la somma degli angoli interni è pari a due retti, possiamo comunque affermare che da due retti è maggiorata; e nello stesso modo, se anche esistesse *un solo* triangolo per cui valga la Proposizione (I.32), allora necessariamente questa dovrebbe essere valida per *tutti* i triangoli.

Per poter dare una risposta che sia più esaustiva dobbiamo interrogarci sul ruolo dell'assioma archimedeo (**A**). Abbiamo fatto già notare che questo si sia mostrato indispensabile nelle dimostrazioni date sopra, ma a seconda della sua assunzione o meno, i risultati possono essere anche assai interessanti. Si è infatti soliti ritenere che la Proposizione (I.32) sia equivalente all'assioma delle parallele, ma questo non è del tutto vero: come enuncia Hilbert ([7, p. 50]) se si escludono dal sistema di assiomi l'assioma di Archimede (**A**) e l'assioma delle parallele (**P**), e al posto di quest'ultimo si ipotizza piuttosto l'esistenza di infinite parallele ad una retta passanti per un punto, *non* si può concludere che la somma degli angoli interni ad un triangolo sia strettamente minore di due angoli retti. Esiste invece una geometria nella quale sono sì presenti infinite parallele, e dove tuttavia sono ancora valide le proposizioni della geometria euclidea.

Il discorso cambia se viene introdotto l'assioma archimedeo. In tal caso, infatti, l'assioma delle parallele può effettivamente essere sostituito dalla necessità che la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo sia pari a due angoli retti.

Siamo qui alle porte della geometria non-euclidea. Quanto fatto fino ad ora ci ha permesso di studiare la geometria euclidea, prima per come era stata formulata da Euclide stesso, e in seguito nella sua più rigorosa fondazione fatta da Hilbert. Abbiamo quindi visto come sia possibile ricostruire tutta la geometria delle prime trentaquattro proposizioni del Libro I degli *Elementi* sulle solide basi del sistema assiomatico fornito nei *Fondamenti*. Dopodiché abbiamo dedicato un poco di spazio alla geometria assoluta, studiando quali risultati - oltre a quelli già ottenuti da Euclide - sarebbe possibile ricavare dall'esclusione dell'assioma (**P**), e senza nessun altra postulazione messa al suo posto. Da qui i due teoremi di Legendre. Siamo così arrivati al confine con le geometrie non-euclidee: non solo eliminando l'assioma delle parallele, ma sostituendolo con l'ipotesi che esistano infinite parallele a una retta passanti per un punto, è possibile aprire un capitolo della storia della matematica che ha animato i geometri del diciannovesimo secolo, e che passa per gli studi di Gauss, di Bolyai e di Lobačevskij. Tale studio, però, va oltre gli scopi di questa tesi, e dunque non verrà approfondito oltre.

Concludiamo con una nota di pura curiosità: il nome di Adrien-Marie Legendre (1752-1833) viene spesso associato alla geometria, e non solo in virtù dei due teoremi sopra esposti. Nel suo celebre trattato *Éléments de géométrie*, Legendre si impone il compito di rielaborare la geometria di Euclide, andando a modificare quasi tutti i capitoli e migliorando - talvolta totalmente cambiando - tutte le trattazioni precedenti. Il successo dell'opera fu enorme, soprattutto in ambito accademico-scolastico, dove divenne il manuale di riferimento per lo studio degli elementi della geometria. Per quanto grande fu la notorietà, il lavoro di Legendre non era esente da difetti; in particolare presupponeva lo studio dell'aritmetica e dell'algebra, andando così a rompere la trattazione, puramente sintetica, data da Euclide. Inoltre, facendo ampio uso delle misure delle grandezze, Legendre avrebbe necessitato di una rigorosa teoria dei numeri reali; teoria che, al suo tempo, era ancora lontana dall'essere fondata. Da questo punto di vista il lavoro di Hilbert è molto distante: quest'ultimo, infatti, tratta di un'esposizione completamente sintetica della geometria, che non richiede nulla, per essere studiata, di conoscenze di algebra. Il ricorso alla geometria analitica, e in particolare ai numeri reali, avviene soltanto a posteriori, quando ormai i teoremi sono di già dimostrati, e si realizza solo nell'atto fornire un modello. Discorso ovviamente diverso vale per Legendre, che fa dei numeri reali - e dell'algebra - parte fondamentale per lo studio della geometria.

2.3.3 Alcune considerazioni conclusive

Siamo adesso veramente in grado di apprezzare il lavoro svolto da Hilbert.

Attraverso il suo approccio assiomatico, stavolta pienamente riuscito perché basato unicamente su astrazioni logiche e per nulla sulle evidenze empiriche, egli è stato in grado di dare una sistemazione rigorosa alla geometria degli *Elementi* (o se non altro al Libro I, principale oggetto delle nostre critiche).

Dove le definizioni di Euclide erano spesso vaghe o oscure, Hilbert sostituisce oggetti e relazioni indefiniti che hanno la sola restrizioni di essere assoggettati a taluni assiomi; dove Euclide utilizza intuitivamente concetti come "giacere dentro" o "stare fra", Hilbert introduce assiomi di ordine attraverso i quali è possibile trattare tali concetti intuitivi in maniera formale, come fossero vere e proprie relazioni; dove Euclide ammette tacitamente di poter effettuare moti rigidi nel piano, Hilbert introduce uno specifico assioma, esplicitando in tal modo il cosidetto primo criterio di congruenza fra triangoli; dove in Euclide il ricorso ad un'intuizione anche visiva portava ad ottenere risultati senza dimostrazioni sufficientemente rigorose (come ad esempio l'intersezione fra circonferenze della Proposizione (I.1)), in Hilbert la trattazione completamente astratta preclude qualsiasi utilizzo intuitivo di assiomi od oggetti precedentemente definiti, e l'intersezione di due circonferenze viene garantita non più in virtù di una evidenza visiva, ma bensì in virtù del postulato (**E**) (o del postulato (**D**), se si vuole un'assiomatica più rigida). Continuando ad escludere l'assioma delle parallele, ma includendo l'assioma di Archimede (**A**), sono poi ricavabili interessanti risultati di geometria assoluta, come i due teoremi di Legendre. Infine, con il pieno utilizzo dell'assioma (**P**), si ottiene l'accesso a tutti quei risultati strettamente apparteneneti alla geometria euclidea, e si conquistano così anche le proposizioni sul parallelismo fra rette.

In questo modo, con il Teorema 2.8, si mostra come da questa rigorosa assiomatizzazione sia a tutti gli effetti possibile ricavare ciascuna delle proposizioni euclidee contenute nel Libro I (ad esclusione di quelle successive alla (I.34), comunque formalizzabili anch'esse). Si può quindi adesso affermare che dopo duemila anni la geometria ha finalmente ottenuto la sua rigorosa fondazione: il percorso iniziato da Euclide (e dalla matematica greca) arriva a compimento nel lavoro di Hilbert.

2.4 Sulla coerenza degli assiomi

In questa sezione parleremo del se, e come, il sistema di assiomi proposto da Hilbert soddisfi ad alcune preziose richieste della logica matematica, quali la *coerenza*, l'*indipendenza* e la *categoricità*. Ci occuperemo ovvero di come i vari assiomi enunciati fino a questo momento si relazionino tra loro in termini di queste tre proprietà.

Con coerenza intendiamo l'impossibilità, all'interno di un dato sistema assiomatico, di derivare delle contraddizioni. Ovvero l'impossibilità che fra le proposizioni deducibili dagli assiomi ve ne sia una assurda, della forma *"A è non-A"*, oppure due contraddittorie, della forma *"A è B e A è non-B"* (dove A e B sono enti di cui risulta l'esistenza).

Con indipendenza, come già accennato nella Sezione 2.2.1, intendiamo che nessuno degli assiomi facente parte del nostro sistema possa essere dedotto, e dunque reso teorema, a partire dagli assiomi rimanenti.

Con categoricità, infine, intendiamo che tutti i possibili modelli del sistema di assiomi sono tra loro isomorfi, e dunque del tutto identificabili in senso astratto.

Cominciamo dalla coerenza.

2.4.1 La coerenza

La *coerenza* (o *consistenza*, o *non-contraddittorietà*) è la principale richiesta fatta ad un sistema d'assiomi. Risulta infatti evidente che un sistema assiomatico dal quale sia possibile derivare delle contraddizioni abbia scarsa utilità.

Ciò che adesso vogliamo andare a dimostrare è proprio che i cinque gruppi di assiomi costituiscono un sistema non-contraddittorio. Ora, la verifica della coerenza di un sistema di assiomi non è di facile realizzazione: che fra le infinite proposizioni che si possono dedurre dagli assiomi ve ne sia una contraddittoria è una possibilità che non può essere smentita controllando singolarmente ognuna di tali proposizioni. Si preferisce, dunque, procedere per una dimostrazione della *coerenza relativa*. Si preferisce, ovvero, fornire un'interpretazione - cioè dare un modello - del sistema di assiomi all'interno di un'altra teoria, della quale si sia provata la coerenza. In questo modo qualsiasi questione intorno alla coerenza del nostro sistema di assiomi viene rimandata alla coerenza della seconda teoria: qualsiasi contraddizione nel nostro sistema di assiomi porterebbe ad una contraddizione nella seconda teoria, e il che non è possibile. Avviene quindi un passaggio di testimone tra teorie, nella speranza di trovarne una sulla cui non-contradditorietà non sussistano dubbi.

Si tratta, perciò, di trovare un modello per la geometria di Hilbert. Considerati i cinque gruppi di assiomi: incidenza, parallele, ordine, congruenza e continuità (al quale possiamo pure aggiungere l'assioma delle circonferenze), è stato già provato esistere un modello per detti assiomi. L'Esempio 2.8, infatti, mostra che il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con le dette definizioni di incidenza, ordine, congruenza ecc... è un modello per *tutti* gli assiomi dei *Fondamenti*. Poiché questo sistema di enti fornisce un'interpretazione che soddisfa ai postulati, concludiamo che essi abbiano validità nella usuale geometria cartesiana. Ora, il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ ha il suo fondamento nell'aritmetica dei numeri reali; qualsiasi contraddizione nelle conseguenze degli assiomi deve perciò essere riconoscibile in tale aritmetica.

I numeri reali possono essere contruiti, per mezzo delle sezioni di Dedekind o con il metodo di Cantor, a partire dai numeri razionali, i quali, a loro volta, possono essere costruiti dai numeri interi, giungendo poi ai numeri naturali, i quali hanno avuto una sistemazione assiomatica da G. Peano. Fintantoché si ha fiducia nella consistenza dei numeri naturali, non ci sono ragioni per dubitare di quella della geometria. Rimane però aperta la questione: il problema non è stato risolto, quanto semmai spostato. Sarebbe necessario, per soddisfare il matematico più esigente, provare la coerenza dell'aritmetica. in effetti si traduce esattamente in questo il *Programma di Hilbert*; programma che, vedremo (Appendice A), era destinato al fallimento.

Possiamo però, per il momento, enunciare il seguente:

Teorema 2.11. *Gli assiomi dei cinque gruppi esposti nei* Fondamenti *costituiscono un sistema assiomatico non-contradditorio.*

Passiamo dunque all'indipendenza.

2.4.2 L'indipendenza

Studieremo, ora, se da un assioma, o da un gruppo di assiomi, sia possibile derivarne un altro; o se, viceversa, quest'altro assioma non sia *indipendente*, e dunque non sia conseguenza logica, degli assiomi considerati in partenza.

Ora, è già stato detto nella Sezione 2.2.1 come risulti complesso dimostrare che una proposizione non sia deducibile da altre, assunte inizialmente come assiomi. Ancora più complesso lo è adesso, che il sistema assiomatico è stato ampliato con un gran numero di enunciati.

Verificare l'indipendenza assoluta di un sistema di postulati è difficilissimo; tanto che viene spesso preferita la ricerca di un'*indipendenza ordinata*, cioè l'indipendenza di ogni assioma da quelli già precedentemente introdotti. In questo senso, nelle prossime pagine, dimostreremo che ogni gruppo di assiomi è indipendente dai gruppi che lo precedono, seguendo lo stesso ordine con cui li abbiamo introdotti. Procederemo, come già accennato in precedenza, con la costruzione di modelli che soddisfino ad alcuni dei postulati, ma non ad altri.

Risulta evidente che se un dato assioma è dimostrabile a partire da altri, la sua presenza nel sistema di assiomi è superflua, e si preferisce procedere per un alleggerimento quanto mai più efficiente delle nozioni primitive e delle postulazioni, eliminando tale assioma dal sistema stesso. Questa scelta ha per lo più un carattere di eleganza formale e di snellimento delle strutture date a priori; non è certamente un errore riprensibile inserire un assioma in più, financo questo sia compatibile con i restanti, ovvero non conduca a contraddizioni.

L'indipendenza degli assiomi di incidenza

Dimostrare che gli assiomi di incidenza siano fra loro indipendenti e relativamente semplice, tanto che lo abbiamo già fatto. L'Esempio 2.3 e la Proposizione 2.2 sono infatti la prova che ciascun assioma del primo gruppo è indipendente dai restanti.

L'indipendenza dell'assioma delle parallele

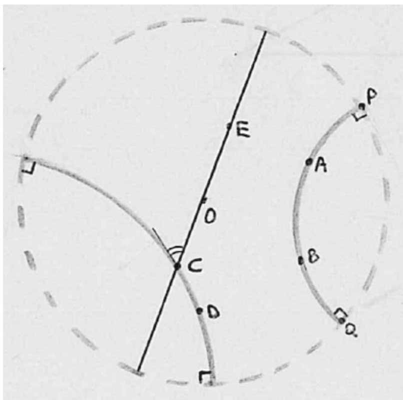
Si dovrebbe ora provare che l'assioma delle parallele (**P**) è indipendente dagli assiomi del primo gruppo. L'Esempio 2.4 e la Proposizione 2.3 danno una risposta affermativa circa tale questione.

Tuttavia, nel caso di questo assioma, risulta di grande interesse dare anche la dimostrazione della sua indipendenza da *tutti gli altri* assiomi, andando di fatto a costruire un modello di geometria non-euclidea.

Considereremo come insieme dei punti l'insieme:

$$\mathcal{P} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Le rette in tale modello saranno costituite dai punti di $\mathcal{P}$ che giacciono su rette (di $\mathbb{R}^2$) passanti per $(0, 0)$, oppure su circonferenze (di $\mathbb{R}^2$) che intersecano il bordo di $\mathcal{P}$ formando angoli retti.

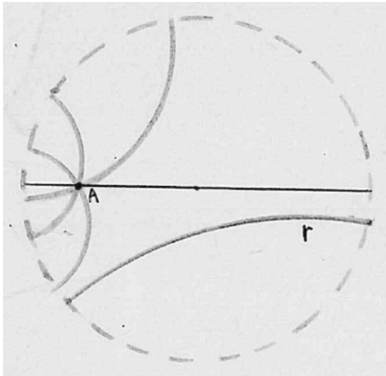


I significati di "stare fra" e di congruenza fra angoli sono ereditati senza modifiche dal modello canonico di geometria euclidea ($\mathbb{R}^2$). La congruenza fra segmenti è invece più articolata: presi due punti A e B, definiamo la *distanza di A da B* considerando altri due punti P e Q, intersezioni della retta che contiene A e B con il bordo di $\mathcal{P}$ (e presi in modo tale che P sia quello più vicino ad A), e ponendo:

$$b(A, B) := \frac{d(A, P)}{d(B, P)} \cdot \frac{d(B, Q)}{d(A, Q)};$$

dove $d(A, B)$ indica l'usuale distanza fra punti (di $\mathbb{R}^2$), definita nell'Esempio 2.6. Due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ saranno detti congruenti se $b(A, B) = b(C, D)$.

Risulta possibile dimostrare che l'insieme $\mathcal{P}$, con le definizioni appena introdotte sopra, sia a tutti gli effetti un modello per gli assiomi (**I 1-3**), (**O 1-4**), (**C 1-6**), (**A**) e (**D**); ma in esso non è assolutamente valido l'assioma (**P**), infatti sono possibili infinite parallele ad una retta data passanti per un punto a essa esterno.



Questo modello, detto anche *disco di Poincaré*, può essere addotto come modello di una geometria che sostituisca l'assioma (**P**) con un altro, ovvero il seguente:

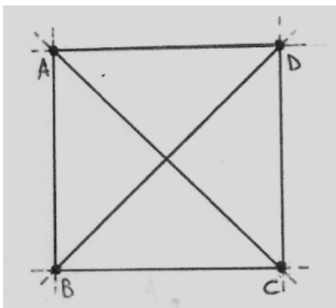
> (**H**) Dati una retta r e un punto A che non le appartiene, esiste più di una retta parallela a r e passante per A.

E si caratterizza quindi come modello di geometria non-euclidea.

L'indipendenza degli assiomi di ordine

Anche la dimostrazione che gli assiomi d'ordine siano indipendenti da quelli di incidenza risulta significativamente semplice. Consideriamo, per fare questo, il modello di geometria di incidenza fornito nell'Esempio 2.2. Tale modello soddisfa tutti gli assiomi del primo gruppo, ma non soddisfa gli assiomi del secondo: si osservi, ad esempio, che ogni retta in tale modello ha solo due punti, mentre in una geometria con assiomi d'ordine deve averne infiniti (Teorema 2.2).

Se si vuole dimostrare l'indipendenza degli assiomi d'ordine dal gruppo degli assiomi di incidenza e anche dall'assioma delle parallele, si consideri il seguente esempio:
consideriamo come insieme di punti l'insieme $\mathcal{P} := \{A, B, C, D\}$; mentre per rette prendiamo tutte e sole le coppie (non ordinate) di punti di $\mathcal{P}$. Verificare che tale modello soddisfi sia gli assiomi di incidenza, sia l'assioma delle parallele è immediato. Tuttavia, per le medesime ragioni addotte sopra per quanto concerne l'infinità di punti di una retta, questo non può essere un modello per gli assiomi di ordine.



L'indipendenza degli assiomi di congruenza

Venendo agli assiomi di congruenza, ci rendiamo conto che anche in questo caso abbiamo già fornito un modello per gli assiomi di incidenza e di ordine il quale, data una nozione di congruenza, non soddisfa tuttavia ognuno degli assiomi (**C 1-6**). Consideriamo infatti il piano cartesiano $\mathbb{Q}^2$ con le nozioni di punto, retta e "stare fra" definiti negli Esempi 2.1 e 2.5. Esso è stato provato, sempre nei detti esempi, essere un modello per gli assiomi (**I 1-3**) e (**O 1-4**). Definiamo una congruenza tra segmenti come nell'Esempio 2.6: è immediato verificare che soddisfa gli assiomi (**C 2-3**), ma abbiamo provato non soddisfare l'assioma (**C 1**).

Analogamente si può procedere anche per gli assiomi di congruenza degli angoli.

Hilbert, inoltre, propone anche una dimostrazione dell'indipendenza dell'assioma (**C 6**) da tutti gli altri assiomi (compresi anche quelli di continuità). Il procedimento è il seguente: si considera $\mathbb{R}^2$ con le usuali nozioni di punto, retta e ordine; nell'atto di definire la congruenza si mantiene inalterata l'interpretazione di congruenza fra angoli (in termini di trasformazioni deve esistere un movimento rigido, tra quelli proposti nell'Esempio 2.7, che mandi un angolo in un altro) mentre si altera la congruenza fra segmenti. Siano $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ due punti nel piano, definiamo la *distanza fra A e B* come:

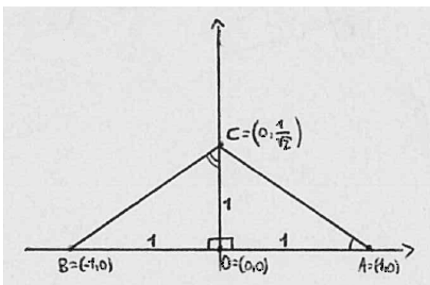
$$\rho(A, B) := \sqrt{(a_1 - b_1 + a_2 - b_2)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Diremo quindi che due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono congruenti se $\rho(A, B) = \rho(C, D)$.

Che questa definizione di distanza soddisfi a tutte le proprietà richieste (i.e. assiomi di congruenza fra segmenti) può essere dimostrato senza difficoltà. Altrettanto semplice è osservare che il piano $\mathbb{R}^2$ oltre a mantenere ovviamente validi gli assiomi di incidenza, ordine e parallele, soddisfa anche gli assiomi di continuità. Gli assiomi (**C 4**) e (**C 5**) concernono la sola congruenza fra angoli, che abbiamo detto non è stata alterata. Diverso è il caso dell'assioma (**C 6**), che unifica i concetti di congruenza di segmenti e angoli.

Consideriamo, infatti, adesso i seguenti quattro punti:

$$O = (0, 0), \qquad A = (1, 0),$$
$$B = (-1, 0), \qquad C = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



I segmenti $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ hanno tutti lunghezza 1. Dunque, i due triangoli (rettangoli) AOC e COB presentano le seguenti congruenze:

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{COB},$$
$$\overline{OA} \equiv \overline{OC}, \quad \overline{OC} \equiv \overline{OB}.$$

Tuttavia, in contraddizione all'assioma (**C 6**), gli angoli $\widehat{OAC}$ e $\widehat{OCB}$ non sono congruenti.

L'assioma di continuità (D) implica l'assioma (E)

Diamo una dimostrazione di quanto forte sia l'assioma (**D**), mostrando che se lo si assume per valido allora è possibile dimostrare anche la validità dell'assioma delle circonferenze (**E**).

D'ora in avanti, per la restante parte di questa sottosezione, salvo diversamente indicato, supporremo sempre di essere in un piano di Hilbert che soddisfi l'assioma di continuità (**D**). In particolare potremo fare affidamento a tutte le Proposizioni del Libro I degli *Elementi*, dalla seconda alla ventottesima (con eccezione della ventidue).

Partiamo proprio con alcune definizioni:

Definizione 2.47. (Insieme ordinato completo) Sia $(X, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, esso è detto *completo* (o *continuo*) se soddisfa l'assioma (**D'**). Ovvero se, presi $A, B \subseteq X$ tali che $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$, e tali poi che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$; allora esiste ed è unico $c \in X$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

L'elemento c è anche detto *elemento di semparazione* tra A e B.

Sono esempi di insiemi completi $\mathbb{R}$ con l'usuale ordinamento. Oppure i punti di una retta in un piano di Hilbert che soddisfi l'assioma (**D**), ordinati rispetto ad uno dei due versi di percorrenza.

In particolare abbiamo già visto (Esempio 2.8) che la continuità di una retta nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ può essere fatta discendere dalla continuità del campo reale, una volta che questi vengano legati da un isomorfismo d'ordine. Questa non è altro che una conseguenza di un risultato più generale, espresso dal seguente:

Teorema 2.12. *Siano $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ due insiemi totalmente ordinati. Supponiamo esista un isomorfismo d'ordine da X ad Y. Allora X è completo se e solo se è completo Y.*

D'ora in avanti, quindi, piuttosto che dimostrare la completezza di un insieme per via diretta, cercheremo di costruire degli isomorfismi tra quell'insieme ed un altro la cui completezza è già stata precedentemente provata.

Il nostro obbiettivo diventa ora quello di mostrare che dalla continuità delle rette in un piano è possibile dedurre la continuità anche di angoli e archi di circonferenza. Cominciamo con la seguente constatazione, in vero abbastanza evidente:

Proposizione 2.61. *In un piano di Hilbert con (**D**), ogni segmento, dotato dell'ordinamento indotto dalla retta su cui giace, è un insieme completo.*

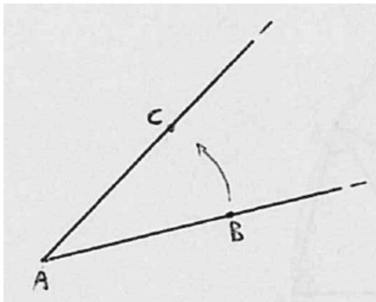
Dimostrazione. Sia $\overline{AB}$ il segmento considerato. Sulla retta AB consideriamo il verso da A a B. Sia ora (s, t) una partizione di $\overline{AB}$ presa come nelle ipotesi dell'assioma di continuità.

Mostriamo avere elemento di separazione: per la definizione di ordine su una retta, risulta che $A \leq C \leq B$, per ogni $C \in \overline{AB}$. Siano ora i due insiemi $\tilde{s} := \{C \in AB \mid C < A\}$ e $\tilde{t} := \{C \in AB \mid C > B\}$, che evidentemente non intersecano il segmento. Posti $s' := \tilde{s} \cup s$ e $t' := \tilde{t} \cup t$. Risulta che (s', t') è una partizione di AB, e dunque ha un elemento separatore D.

Non può essere che $D < A$, altrimenti esisterebbero elementi in s' (in particolare in s), maggiori di D; analogamente non può essere $D > B$. Allora $A \leq D \leq B$; e D appartiene ad $\overline{AB}$ e risulta separatore di s e t. □

Da ciò possiamo dedurre la continuità degli angoli. Prima però alcune definizioni:

Definizione 2.48 (Angolo orientato)**.** Un angolo orientato è una coppia (α, s); dove α è un angolo del piano, mentre s è una delle due semirette che lo costituiscono.
In particolare, se l'angolo orientato è $(\widehat{BAC}, \overrightarrow{AB})$, diremo che su di esso è stato fissato il verso di percorrenza da B a C (o da $\overrightarrow{AB}$ ad $\overrightarrow{AC}$).
Solitamente ci limiteremo ad usare l'usuale notazione già adottata per gli angoli non orientati, sottintendendo che il primo punto nella scrittura sia quello che antecede nel verso scelto.

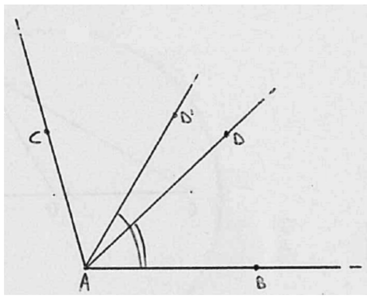


Questa definizione non cambia la sostanziale natura degli angoli. Tutti i teoremi visti fino ad ora non tenevano conto di alcun senso di percorrenza degli angoli e continuano a rimanere validi. In questo momento stiamo semplicemente stabilendo una semiretta privilegiata tra le due che formano l'angolo $\widehat{BAC}$, come quando stabilivamo un punto privilegiato tra i due che definivano una retta.

Definizione 2.49.

Dato un angolo orientato $\widehat{BAC}$, consideriamo l'insieme di tutte le semirette $\overrightarrow{AD}$ interne all'angolo. Su tale insieme possiamo definire la seguente relazione:

$$\overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AD'} \iff \widehat{BAD} < \widehat{BAD'}.$$



Porremo poi $\overrightarrow{AB} < \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AD}$, per ogni D interno; e in più $\overrightarrow{AB} < \overrightarrow{AC}$.

Proposizione 2.62. *Dando la seguente definizione:*

$$\overrightarrow{AD} \leq \overrightarrow{AD'} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'} \text{ oppure } \overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AD'}.$$

otteniamo un ordine totale sull'insieme delle semirette interne a $\widehat{BAC}$ e sulle due estreme.

Dimostrazione. Consideriamo solo le semirette interne, altrimenti la dimostrazione risulta banale.

Riflessività: ovvia per definizione.

Antisimmetria: supponiamo $\overrightarrow{AD} \leq \overrightarrow{AD'}$ e $\overrightarrow{AD'} \leq \overrightarrow{AD}$, ma $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AD'}$.

Ne consegue che $\widehat{BAD} < \widehat{BAD'}$ e che $\widehat{BAD'} < \widehat{BAD}$. Per l'ordinamento sugli angoli allora $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BAD'}$. Ma ambo questi angoli hanno una semiretta in comune (ovvero $\overrightarrow{AB}$), e quindi, per l'assioma (**C 4**), $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$. Assurdo.

Transitività: diretta conseguenza dell'ordinamento degli angoli.

Anche il fatto che l'ordine sia totale è una diretta conseguenza della rispettiva proprietà tra gli angoli. □

In parole povere, possiamo concepire l'angolo e il suo interno come un fascio di semirette aventi tutte vertice in comune; inoltre, su tale fascio può essere definito un ordine se è stato prima definito un orientamento dell'angolo. Quello che adesso dimostreremo è che l'angolo (inteso ora come insieme di semirette), con l'ordinamento appena definito, è un insieme completo.

Proposizione 2.63. *Sia $\widehat{BAC}$ un angolo orientato. Sia*

$$X := \left\{\overrightarrow{AD} \mid D \text{ interno a } \widehat{BAC}\right\} \cup \{\overrightarrow{AB}\} \cup \{\overrightarrow{AC}\},$$

e su X definiamo l'ordine della Proposizione 2.62. Allora X è un insieme completo.

Dimostrazione. Consideriamo il segmento $\overline{BC}$, sul qual prendiamo l'ordine da B a C. Questo segmento è stato dimostrato essere completo.

Sia $\overrightarrow{AD}$ una qualsiasi semiretta interna all'angolo $\widehat{BAC}$. Per la Proposizione 2.14 essa intersecherà $\overline{BC}$ in un punto (ovviamente unico). Consideriamo l'applicazione che ad ogni semiretta associa il suo punto d'intersezione con il segmento $\overline{BC}$.

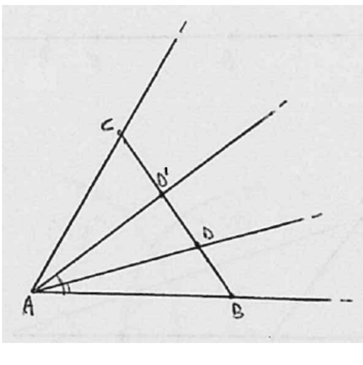
Mostriamo tale applicazione essere un isomorfismo d'ordine:

Iniettività: supponiamo per assurdo che due semirette distinte abbiano la stessa immagine, ovvero lo stesso punto d'intersezione con $\overline{BC}$; allora tali semirette avrebbero due punti in comune e, per l'assioma (**I 1**), coinciderebbero.

Surriettività: preso un qualsiasi punto D del segmento $\overline{BC}$, sempre per l'assioma (**I 1**), esiste la retta che lo congiunge ad A. Dobbiamo dimostrare che la semiretta $\overrightarrow{AD}$ sia interna, e per far ciò basta dimostrare che un suo qualsiasi punto distinto da A sia interno. In effetti D è per ipotesi interno.

Crescenza: supponiamo che prese due semirette in X, valga $\overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AD'}$ (supponiamo per semplicità che siano rispettivamente D e D' i punti di intersezione con $\overline{BC}$).

Per definizione ne deduciamo che $\widehat{BAD} < \widehat{BAD'}$. Questi due angoli sono già trasportati in modo da avere una semiretta in comune, e le altre due dalla stessa parte rispetto a quella comune (processo costruttivo per verificare che due angoli siano minori l'uno dell'altro: Definizione 2.25); allora la semiretta $\overrightarrow{AD}$ deve essere interna a $\widehat{BAD'}$, e quindi intersecherà il segmento $\overline{BD'}$ (obbligatoriamente in D). Allora $B * D * D'$ e quindi $D < D'$.



Applicando adesso il Teorema 2.12 ricaviamo la tesi.

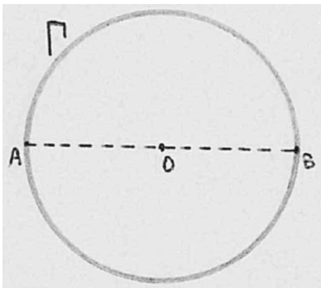
(Nel caso una delle due semirette fosse stata $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{AC}$ la dimostrazione sarebbe stata banale). □

Osservazione 39. La base della dimostrazione precedente è quella di legare il fascio di semirette interne all'angolo con i punti di una corda. Quest'idea viene da una particolare formulazione degli assiomi, dovuta a Giuseppe Veronese (1854-1917) nei suoi *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare.* In tale lavoro egli postula unicamente la congruenza di segmenti, mantenendo inalterati gli assiomi (**C 1-3**) e aggiungendone altri due; riconstruisce dunque la congruenza fra angoli come congruenza fra corde aventi estremi equidistanti dal vertice dell'angolo.

Tale formulazione degli assiomi di congruenza è equivalente a quella di Hilbert.[6]

Dopo aver mostrato la continuità degli angoli, vogliamo passare alla continuità degli archi di circonferenza. Anche in questo caso, però, partiamo con alcune definizioni:

Definizione 2.50 (Punti antipodali)**.** Sia Γ una circonferenza di centro O, e siano A e B due suoi punti distinti. Essi sono detti *antipodali* se $A * O * B$.



Definizione 2.51 (Semicirconferenza)**.** Data una circonferenza Γ di centro O, e due suoi punti antipodali A e B. Essi dividono Γ in due regioni: la retta AB (contenente O), divide il piano in due semipiani; l'intersezione di ciacuno di essi con Γ è la regione considerata. Esse sono dette *semicirconferenze.*

Esse verranno anche indicate con il simbolo $\widehat{AB}$.

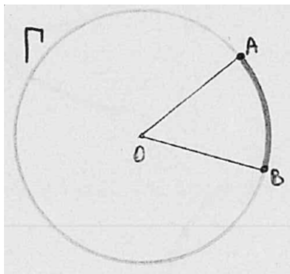
Osservazione 40. Osserviamo che ciascuna semicirconferenza contiene almeno un punto: considerato uno dei due semipiani, sia C giacente in esso. La semiretta $\overrightarrow{OC}$ deve intersecare Γ in un punto. Tale semiretta giace interamente nel semipiano e così, allora, anche il punto d'intersezione. In particolare l'intersezione tra il semipiano e Γ è non vuota.

Osservazione 41. In effetti la notazione usata lascia spiragli di ambiguità, usando lo stesso simbolo per ambo le semicirconferenze. Nei problemi successivi, tuttavia, cercheremo di rendere chiaro quale semirconferenza stiamo tenendo in considerazione.

[6] [2, p. 20]

Definizione 2.52 (Arco di circonferenza)**.**

Sia Γ una circonferenza con centro O, e siano A e B due suoi punti distinti e non antipodali. Definiamo *arco* di *estremi* A e B, e indichiamo con $\widehat{AB}$, l'insieme dei punti di Γ interni all'angolo $\widehat{AOB}$ con l'inclusione di A e B.



Osservazione 42. Come fu anche nel caso degli angoli, quando parliamo di archi di circonferenza ci riferiamo unicamente a quelli minori di una semicirconferenza. Dati quindi due punti su Γ, non c'è rischio di ambiguità su quale sia l'arco che essi definiscono.

Osservazione 43. Ogni arco di circonferenza contiene almeno un punto oltre ai suoi estremi. Considerata, infatti, una qualsiasi semiretta per O interna all'angolo $\widehat{AOB}$, essa deve intersecare Γ in esattamente un punto. Detto punto è anch'esso necessariamente interno all'angolo.

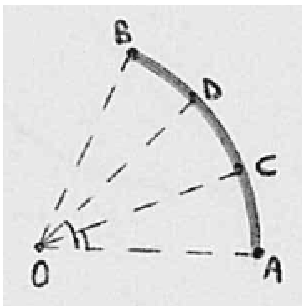
È giunto adesso il momento di definire un ordinamento sui punti di un arco di circonferenza. Come per le rette, i segmenti e gli angoli, esistono due possibili versi di percorrenza, a seconda di quale tra i due estremi, A e B, viene scelto come punto privilegiato. Parleremo quindi di *verso di percorrenza da A a B*, o viceversa. In linea generale, tuttavia, se adoperiamo la scrittura $\widehat{AB}$, stiamo sottointendendo l'ordine da A verso B.

Definizione 2.53. Consideriamo dunque un arco $\widehat{AB}$, su una circonferenza Γ di centro O.

Presi due punti C e D appartenenti a tale arco e distinti dagli estremi, diremo che:

$$C < D \iff \widehat{COA} < \widehat{DOA}.$$

Porremo inoltre $A < C$ e $B > C$, per ogni $C \in \widehat{AB} \setminus \{A, B\}$; e inoltre $A < B$.



Infine porremo:

$$C \leq D \iff C = D \text{ oppure } C < D,$$

per qualsiasi C e D in $\widehat{AB}$.

Osservazione 44. Osserviamo che l'ordinamento appena definito su $\widehat{AB}$ è equivalente al seguente: considerato $\widehat{AOB}$ come angolo orientato (e dunque dotandolo del corrispettivo ordinamento sulle semirette); presi C e D sull'arco $\widehat{AB}$. Poniamo allora:

$$C < D \iff \overrightarrow{OC} < \overrightarrow{OD}.$$

Definiamo poi come solito $C \leq D$.

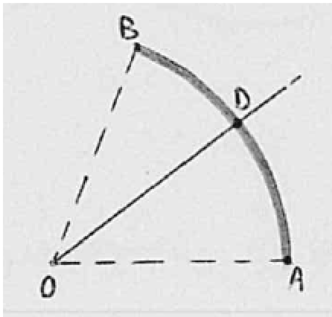
Proposizione 2.64. *La relazione della Definizione 2.53 sui punti di un arco è un ordine totale.*

Dimostrazione. Tutte le proprietà da dimostrare possono essere fatte discendere dalle corrispettive sull'ordinamento di un angolo orientato per merito dell'Osservazione 44. □

La seguente proposizione ci permetterà di parlare ci continuità degli archi:

Proposizione 2.65. *Sia $\widehat{AB}$ un arco su una circonferenza Γ di centro O, dotato dell'ordinamento della Definizione 2.53; allora $\widehat{AB}$ è un insieme completo.*

Dimostrazione. Consideriamo l'angolo orientato $\widehat{AOB}$ con il suo ordinamento. Abbiamo dimostrato tale insieme essere completo.



Sia $\overrightarrow{OD}$ una qualsiasi semiretta dell'angolo (inteso comprensivo anche del suo interno). Abbiamo già visto che deve intersecare l'arco $\widehat{AB}$ in esattamente un punto.
Consideriamo allora l'applicazione che ad ogni semiretta $\overrightarrow{OD}$ dell'angolo associa il suo punto di intersezione con $\widehat{AB}$ (per semplicità supporremo essere D tale punto di intersezione).

Sia $\overrightarrow{OD}$ una qualsiasi semiretta dell'angolo (inteso comprensivo anche del suo interno). Abbiamo già visto che deve intersecare l'arco $\widehat{AB}$ in esattamente un punto.

Consideriamo allora l'applicazione che ad ogni semiretta $\overrightarrow{OD}$ dell'angolo associa il suo punto di intersezione con $\widehat{AB}$ (per semplicità supporremo essere D tale punto di intersezione).

Mostriamo essere un isomorfismo d'ordine:

Iniettività: se per assurdo due semirette avessero stesso punto d'intersezione con l'arco, allora avrebbero due punti in comune e dovrebbero coincidere.

Surriettività: preso un qualsiasi punto D sull'arco, si consideri la semiretta $\overrightarrow{AD}$; essa è interna perché tale è D. La sua immagine è allora il punto stesso.

Crescenza: diretta conseguenza dell'Osservazione 44.

Deduciamo (Teorema 2.12) che $\widehat{AB}$ deve dunque essere completo. □

Si potrebbe ora parlare anche di completezza di semicirconferenze. Risulta infatti abbastanza evidente che se ogni arco di circonferenza è continuo, tale dovrà essere anche la semicirconferenza. Le cose procedono come segue:

dati due punti C e D su una semirconferenza $\widehat{AB}$ (con centro O), volendola ordinare con verso da A a B, porremo

$$C < D \iff \widehat{COA} < \widehat{DOA}.$$

Tale definizione appare del tutto analoga a quella vista per gli archi di circonferenza; e sempre in somiglianza con gli archi possiamo aggiungere alla semicirconferenza anche i punti A e B e porli rispettivamente come minimo e massimo.

La dimostrazione che tale relazione sia un ordine totale, e in particolar modo che la semicirconferenza risulti allora continua, non è però altrettanto diretta come lo è stata per gli archi. Infatti non siamo in grado di costruire una corrispondenza biunivoca tra la semicriconferenza e le semirette di un angolo orientato (A, B e O sono allineati!) ed è quindi necessario ricorrere a qualche artificio. Volendo evitare una trattazione che nella sostanza risulterebbe troppo ripetitiva, enunciamo soltanto la seguente:

Proposizione 2.66. *Data una semirconferenza $\widehat{AB}$, con l'ordinamento appena definito. Essa è un insieme completo.*

Prima di poter dimostrare il teorema centrale di questa sottosezione, ci rimangono ancora da enunciare i seguenti lemmi:

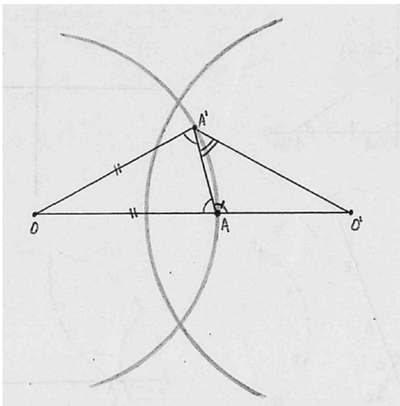
Lemma 2.6. *Siano Γ e Γ' due circonferenze di centri rispettivamente O e O'. Supponiamo che Γ abbia un punto interno a Γ' ed uno esterno. Considerata la retta OO', essa interseca Γ in due punti: sia A quello che giace dalla stessa parte di O' rispetto ad O, mentre B l'altro. Allora A è interno a Γ' e B è esterno.*

Dimostrazione. Siano A' e B' i punti di Γ supposti rispettivamente interno ed esterno a Γ'.

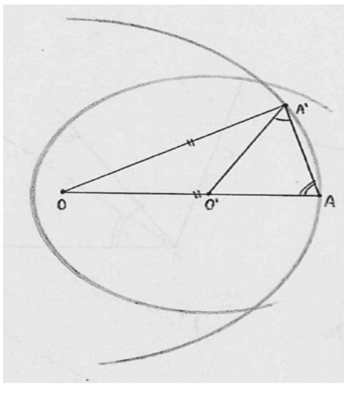
Dimostriamo che A è interno:

supponiamo che A' non sia allineato con A e B. Si possono presentare due casi:

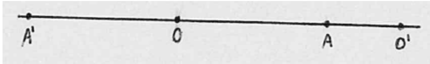
(*1*): $O*A*O'$. In tal caso l'angolo $\widehat{A'AO'}$ (interno al triangolo $A'AO'$) è esterno al triangolo $OA'A$, e dunque maggiore di $\widehat{OA'A}$. Quest'ultimo angolo è congruente a $\widehat{OAA'}$, perché il triangolo $OA'A$ è isoscele. Ma il citato angolo $\widehat{OAA'}$ è esterno al triangolo $A'AO'$, e dunque maggiore dell'angolo $\widehat{O'A'A}$.
In conclusione $\widehat{O'AA'} > \widehat{O'A'A}$. E dato che il lato maggiore è opposto all'angolo maggiore: consegue che $\overline{O'A'} > \overline{O'A}$. Allora A è interno.



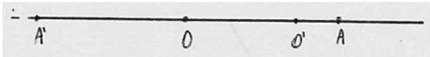
(*2*): $O * O' * A$. In particolare la semiretta $\overrightarrow{A'O'}$ è interna all'angolo $\widehat{OA'A}$. Quest'ultimo angolo è congruente a $\widehat{OAA'}$ (che coincide con $\widehat{O'AA'}$) perché il triangolo OAA' è isoscele. Concludiamo che $\widehat{O'A'A} < \widehat{O'AA'}$. E allora $\overline{O'A} < \overline{O'A'}$. Perciò A è interno.



Supponiamo A' sia allineato con A e B; allora o coincide con A, oppure con B. Nel primo caso la dimostrazione può dirsi conclusa. Nel secondo:
(a) se $O * A * O'$, essendo $A' = B$, vale $A' * O * O'$ e $A' * O * A$. Allora necessariamente $\overline{O'A} < \overline{O'A'}$ (si guardi la figura).

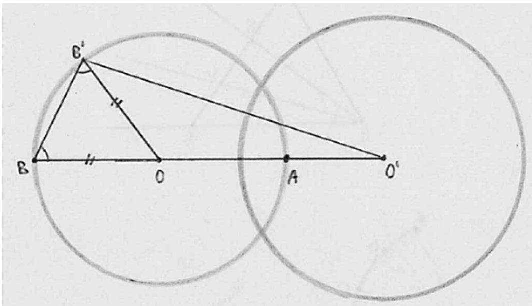


(b) se $O * O' * A$, allora otteniamo che $\overline{O'A} < \overline{OA} \equiv \overline{OA'}$.



Dimostriamo B esterno:

se B' è allineato con A e B allora o coincide con A (impossibile per quanto appena dimostrato), oppure coincide con B, e la tesi è provata. Se invece non è allineato:

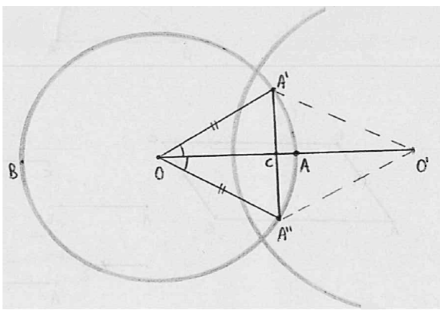


continua a valere $B * O * O'$. In particolare l'angolo $\widehat{OB'B}$ è incluso nell'angolo $\widehat{O'B'B}$, e quindi minore. Sempre $\widehat{OB'B}$ è congruente a $\widehat{B'BO}$ (che coincide con $\widehat{B'BO'}$). Dunque $\widehat{B'BO'} < \widehat{O'B'B}$ e allora $\overline{O'B'} < \overline{O'B}$. Perciò B è esterno. □

Lemma 2.7. *Siano Γ e Γ' due circonferenze di centri rispettivamente O e O'. Supponiamo che Γ abbia un punto interno a Γ', detto A'. Allora anche lo "speculare" di A' rispetto ad OO' in Γ, è interno a Γ'.*

Dimostrazione. Considerata la retta OO', essa interseca Γ in due punti: sia A quello che giace dalla stessa parte di O' rispetto ad O, mentre B l'altro.

Con "speculare" di A' rispetto ad OO' in Γ, intendiamo la seguente cosa: se $A' = A$ oppure $A' = B$, A' è speculare di sé stesso. Altrimenti consideriamo l'angolo $\widehat{A'OO'}$, trasportiamolo sulla semiretta $\overrightarrow{OO'}$, ma dall'altra parte rispetto ad A', e individuiamo così una certa semiretta che intersecherà Γ in un punto A''. Quest'ultimo è il punto cercato.



Ignorando i casi banali ($A' = A$ e $A' = B$), per i quali la dimostrazione è ovvia, dobbiamo provare che A'' è interno a Γ'.

Il segmento $\overline{A'A''}$ interseca la retta OO' in un punto C (dato che A e A' giaciono da parti opposte). Si deduce velocemente, per il I C.d.C., che i triangoli $OA'C$ e $OA''C$ sono congruenti. In particolare $\overline{A'C} \equiv \overline{A''C}$ e $\widehat{A'CO} \equiv \widehat{A''CO}$. Spostata l'attenzione sui triangoli $A'CO'$ e $A''CO'$ (appena provato essere retti), ricaviamo che anch'essi sono congruenti (sempre per il I C.d.C.). Allora ne consegue che $\overline{O'A''} \equiv \overline{O'A'}$; e la tesi è provata. □

Passiamo finalmente al teorema:

Teorema 2.13. *In un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma (**D**), è soddisfatto anche l'assioma (**E**).*

Dimostrazione. Consideriamo due circonferenze Γ e Γ' che soddisfino le ipotesi dell'assioma (**E**). Usiamo le solite notazioni viste nei Lemmi 2.6 e 2.7, così da sapere cosa intendiamo per O, O', A e B, ed anche per A' e B'. Sia poi R' la classe d'equivalenza del raggio di Γ'.

In questa dimostrazione supporemo una semicirconferenza come inclusiva dei suoi punti estremi.

Notiamo che il Lemma 2.7 instaura una simmetria tra le due semicirconferenze di Γ di estremi A e B. Ciò significa che possiamo sceglierne una arbitrariamente, e supporre che sia A' sia B' vi appartengano.

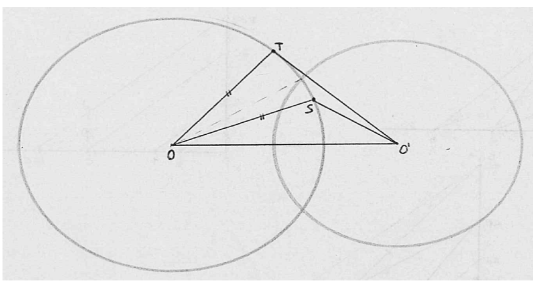
Sia allora $\widehat{AB}$ la semicirconferenza di Γ, sulla quale è stato definito l'usuale ordine. Consideriamo i due seguenti insiemi:

$$s := \{C \in \widehat{AB} \mid \overline{O'C} < R'\},$$
$$t := \{C \in \widehat{AB} \mid \overline{O'C} \geq R'\}.$$

Per ipotesi $A' \in s$ e $B' \in t$, quindi entrambi gli insiemi sono non vuoti. In questo modo il Lemma 2.6 garantisce che $A \in s$ e $B \in t$. La legge di tricotomia sull'ordine dei segmenti (Proposizione 2.20) garantisce sia che $\widehat{AB} = s \cup t$, sia che $s \cap t = \emptyset$. Dunque (s, t) è una partizione della semicirconferenza.

Dimostriamo che $S < T$, per ogni $S \in s$ e per ogni $T \in t$: i casi in cui almeno uno dei due punti coincide con A o con B risultano banali per la definizione di ordine dei punti di un arco. Possiamo allora supporre che né S, né T giacciano sulla retta OO'.

Consideriamo i due triangoli OSO' e OTO'. I lati $\overline{OS}$ e $\overline{OT}$ sono congruenti (sia S che T giacciono su Γ); mentre il lato $\overline{OO'}$ è in comune tra i due triangoli. Per ipotesi $\overline{O'S} < \overline{O'T}$. Applichiamo allora la Proposizione (I.25), deduciamo che $\widehat{SOO'} < \widehat{TOO'}$ (che è equivalente a $\widehat{SOA} < \widehat{TOA}$). Da cui la tesi.



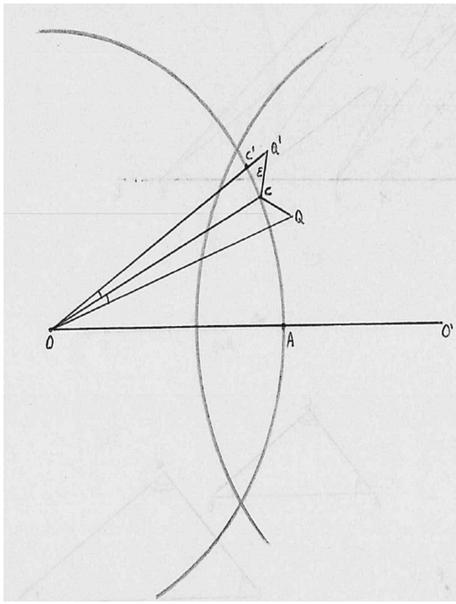
Poiché $\widehat{AB}$ è completo, allora esisterà un elemento separatore tra s e t, che chiameremo C.

Dobbiamo provare che C appartiene a Γ'. Supponiamo per assurdo che non le appartenga: allora o $\overline{O'C} < R'$, oppure $\overline{O'C} > R'$. Poniamo vera la prima (la dimostrazione è comunque la stessa). Vogliamo allora provare che esiste un punto $C' \in \widehat{AB}$ tale che $C < C'$ e $C' \in s$. Il che porterebbe ad un assurdo.

Sia

$$\varepsilon := \frac{R' - \overline{O'C}}{2};$$

dove $R' - \overline{O'C}$ indica la differenza fra segmenti; mentre $1/2$ indica come al solito la bisezione di un segmento definita nella Proposizione 2.39. In particolare $\varepsilon < R' - \overline{O'C}$; e quindi $\overline{O'C} + \varepsilon < R'$.



Tale segmento può essere trasportato su una qualsiasi semiretta per C tra quelle che non contengono O, ottenendo il punto Q (con $\overline{CQ} \equiv \varepsilon$). Possiamo poi supporre Q esterno a Γ. Operativamente si può infatti procedere così: si considera la retta tangente a Γ e passante per C; tale retta divide in due il piano. Consideriamo le semirette per C che giacciono nel semipiano che non contiene il punto O (escludendo ovviamente quella che giace sulla retta OC). Su una di tali semirette effettuiamo il trasporto di ε. Il punto Q così determinato giace dalla parte opposta rispetto ad O, allora il segmento $\overline{OQ}$ interseca la tangente in un punto D tale che $O * D * Q$. In particolare $\overline{OQ} > \overline{OD}$. Poiché D è sulla tangente, applicando la Proposizione 2.42, deduciamo che Q è esterno.

Consideriamo ora l'angolo $\widehat{COQ}$ e trasportiamolo sulla semiretta $\overrightarrow{OC}$:

dalla parte opposta ad A (o, equivalentemente, dalla stessa parte di B), se $C \neq A$; dalla parte della semirconferenza, se $C = A$.

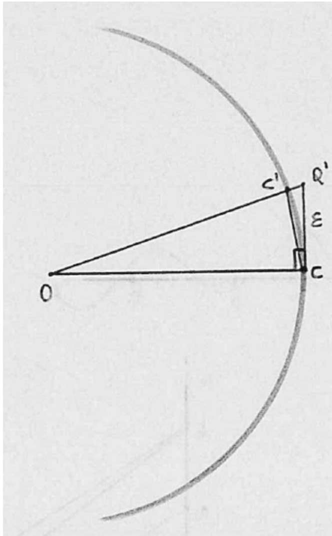
Otteniamo così la semiretta r, sulla quale individuiamo un punto Q' tale che $\overline{OQ'} \equiv \overline{OQ}$. In particolare, per costruzione, $\widehat{Q'OC} \equiv \widehat{COQ}$ e Q' esterno a Γ. Sia C' il punto d'intersezione tra r e Γ. C' è il punto desiderato.

Prima di mostrarlo osserviamo che:

presa una qualsiasi retta per O diversa da AB, allora vale che A e B giacciano da parti opposte rispetto a tale retta, mentre A e O' giacciono dalla stessa parte. $(*)$

Osserviamo allora che $\overline{CC'} < \varepsilon$: infatti i triangoli $Q'OC$ e COQ sono congruenti per costruzione; in particolare $\overline{CQ'} \equiv \overline{CQ} \equiv \varepsilon$.

Essendo Q' esterno a Γ, mentre C' vi giace sopra, allora necessariamente $O * C' * Q'$. Inoltre il triangolo $C'OC$ è isoscele, allora $\widehat{OC'C} \equiv \widehat{OCC'}$. Il primo di tali angoli è esterno al triangolo $CC'Q'$ e quindi maggiore di $\widehat{C'Q'C}$. Inoltre l'angolo $\widehat{Q'C'C}$ è esterno a OCC' e quindi maggiore di $\widehat{OCC'}$, e di conseguenza anche di $\widehat{OC'C}$. Concatenando le disuguaglianze: $\widehat{Q'C'C} > \widehat{C'Q'C}$; e allora $\overline{CC'} < \overline{CQ'}$ (solita Proposizione (I.19)).



Dobbiamo ora provare tre cose:

(a): $C' \in \widehat{AB}$ (esiste infatti la possibilità che cada nell'altra semicirconferenza);

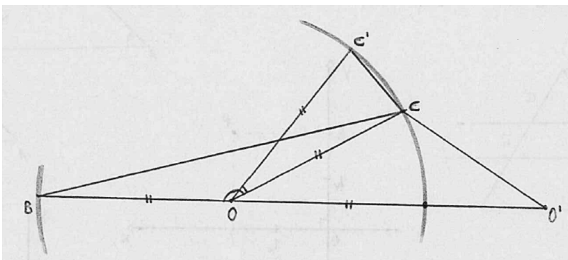
(b): $C < C'$;

(c): $C' \in s$.

La dimostrazione verrà fatta nel caso $C \neq A$, in tal modo $OC \neq AB$. Altrimenti la dimostrazione risulta o analoga, o ovvia.

Partiamo:

(a): ricordiamo che la semiretta r giace dalla stessa parte di B rispetto a OC. Dimostriamo che la semiretta r giace dentro l'angolo $\widehat{BOC}$. In tal modo i suoi punti (tra cui C') dovranno giacere dalla stessa parte di C rispetto ad OB, e quindi C' apparterrà alla semicirconferenza. Per fare ciò è sufficiente dimostrare che l'angolo $\widehat{COC'}$ è minore dell'angolo $\widehat{COB}$ (dopodiché e una semplice applicazione di definizioni). Osserviamo che i triangoli COC' e COB hanno i lati rispettivamente congruenti, ma la base $\overline{BC}$ è maggiore della base $\overline{CC'}$: se ciò non fosse vero, cioè valesse $\overline{BC} \leq \overline{CC'}$, allora ne conseguiremmo che $\overline{BC} < \varepsilon$. Considerando allora il triangolo BCO', e applichiando la Proposizione (I.20), dedurremmo che $\overline{O'B} < \overline{BC} + \overline{O'C}$; da cui $\overline{O'B} < \overline{O'C} + \varepsilon < R'$ (si è qui applicata la Proposizione 2.21). Cioè B interno. Assurdo per il Lemma 2.6.



Appurato che $\overline{BC} > \overline{CC'}$, applicando la Proposizione (I.25), concludiamo che $\widehat{COC'} < \widehat{COB}$.

In particolare $C' \neq B$ e $C' \neq A$.

(b): dobbiamo provare che $\widehat{AOC} < \widehat{AOC'}$. Per concludere dobbiamo mostrare che la semiretta $\overrightarrow{OC}$ è interna all'angolo $\widehat{AOC'}$. Questa è una conseguenza di quanto dimostrato nel punto (a) e della costruzione adoperata per ricavare la semiretta $\overrightarrow{OC'}$.

(c): supponiamo che O', C e C' *non* siano allineati. Consideriamo allora il triangolo $O'C'C$, vale che $\overline{O'C'} < \overline{O'C} + \overline{CC'} < \overline{O'C} + \varepsilon < R'$.

Se invece O', C e C' sono allineati. Non può essere $O' * C' * C$: infatti, per quanto visto nel punto precedente, C deve essere interno all'angolo $\widehat{AOC'}$, ovvero stare dalla stessa parte di A rispetto a $\overrightarrow{OC'}$, e dunque anche dalla stessa parte di O' (era stata fatta un'osservazione a tal proposito poco sopra: ($*$)). Può solo essere $O' * C * C'$; e in tal caso $\overline{O'C'} \equiv \overline{O'C} + \overline{CC'} < R'$.

Siamo in questo modo riusciti a provare la tesi del teorema. □

Osservazione 45. Esiste un modo, partendo dall'assioma (**E**), di formulare un nuovo postulato di continuità. Questo è ciò che fece G. Peano, che dette il seguente assioma:

> (**D****) Sia data una figura convessa e due punti, A e B, l'uno interno e l'altro esterno ad essa. Allora esiste un punto C sul segmento $\overline{AB}$ tale che tutti i punti tra A e C giacciono interni alla figura, mentre tutti i punti tra C e B giacciono esterni.

Da questo assioma è possibile dedurre anche il noto assioma di continuità (**D**); per cui le due formulazioni sono equivalenti.[7]

L'indipendenza degli assiomi di continuità

Veniamo ora a studiare come l'ultimo gruppo di assiomi si relazioni con gli altri in termini di indipendenza.

Partiremo dimostrando che entrambi gli assiomi di continuità sono indipendenti dai primi quattro gruppi. Dopodiché studieremo ciascuno dei due singolarmente. Vogliamo, ovvero, sia studiare geometrie dove valgano gli assiomi del piano di Hilbert ma nessuno di quelli di continuità, sia geometrie dove solo uno degli assiomi di continuità venga a valere. Abbiamo già dato prova (Teorema 2.5) che dall'assioma di continuità (**D**) si possa derivare anche l'assioma di Archimede (**A**); non abbiamo quindi speranza di poter costruire una geometria "continua" ma non-archimedea. Esiste però la possibilità di fare il viceversa.

Fino ad ora abbiamo sempre - salvo rare eccezioni - fornito un modello che fosse un piano cartesiano sopra un campo: il campo dei razionali $\mathbb{Q}$, prima, quello dei reali $\mathbb{R}$, poi; osservando come il primo potesse essere un valido modello per taluni assiomi, ma dovesse cedere il passo al secondo quando si introducevano le congruenze, di segmenti o angoli. Per cercare di mantenere una forma di consequenzialità con il passato, anche adesso daremo un modello che sia un piano cartesiano su di un campo. Cercheremo, però, di spostare la nostra attenzione verso altri campi all'infuori di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$; campi i quali possano avere proprietà tali da renderli modelli ideali per lo studio dell'indipendenza degli assiomi di continuità. Il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, unico modello, per il momento, a soddisfare

[7] [2, p. 33]

l'assioma di Archimede (**A**) o l'assioma di continuità (**D**), non può adempiere a questo compito, dato che porta a validità entrambi gli assiomi.

Prima di passare allo studio di specifici piani cartesiani, però, partiamo con alcune definizioni ausiliarie. In particolare, sarà di grande importanza nella trattazione successiva il concetto di *campo ordinato*.

Cominciamo dunque dal fondamentale concetto di campo:

Definizione 2.54. Definiamo campo la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, dove $\mathbb{K}$ è un insieme non vuoto; $+$ è un'operazione binaria su $\mathbb{K}$ tale che:

1. (*Proprietà commutativa*): $x + y = y + x$, per ogni $x, y \in \mathbb{K}$,

2. (*Proprietà associativa*): $(x + y) + z = x + (y + z)$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{K}$,

3. (*Esistenza dell'elemento neutro*): esiste $0 \in \mathbb{K}$ tale che $x + 0 = x$, per ogni $x \in \mathbb{K}$,

4. (*Esistenza dell'inverso*): per ogni $x \in \mathbb{K}$ esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0$;

mentre $\cdot$ è un'altra operazione binaria su $\mathbb{K}$ tale che:

5. (*Proprietà commutativa*): $x \cdot y = y \cdot x$, per ogni $x, y \in \mathbb{K}$,

6. (*Proprietà associativa*): $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{K}$,

7. (*Esistenza dell'elemento neutro*): esiste $1 \in \mathbb{K}$ tale che $x \cdot 1 = x$, per ogni $x \in \mathbb{K}$,

8. (*Esistenza dell'inverso*): per ogni $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, esiste x^{-1} tale che $x \cdot x^{-1} = 1$.

Vale infine la seguente:

9. (*Proprietà distributiva*): $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{K}$.

E passiamo adesso alla definizione di campo ordinato:

Definizione 2.55 (Campo ordinato)**.** Un *campo ordinato* è un campo $\mathbb{K}$, dotato di un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{K}$ - i cui elementi sono detti *positivi* - tale che:
(i) se $x, y \in P$, allora $x + y \in P$ e $xy \in P$;
(ii) per ogni $x \in \mathbb{K}$ vale una ed una sola delle seguenti alternative:

$$x \in P; \; x = 0; \; -x \in P.$$

Se $x \in P$, allora $-x$ è detto *negativo*.

Sono esempi - già ampiamente utilizzati nelle scorse pagine - di campi ordinati, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ con gli usuali ordinamenti.

Definizione 2.56. Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Definiamo su di esso la seguente relazione:

$$x < y \iff y - x \in P.$$

Da cui:

$$x \leq y \iff x = y \text{ o } x < y.$$

Si può dimostrare che questa è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{K}$ e che è compatibile con le operazioni del campo; ovvero:

Proposizione 2.67. *Siano $x, y, z \in \mathbb{K}$,*
(i) se $x < y$, allora $x + z < y + z$;
(ii) se $x < y$ e $z > 0$, allora $xz < yz$.

Inoltre:

Proposizione 2.68. *Per ogni $x \in \mathbb{K}$ si ha che x^2 è positivo o nullo.*

D'ora in poi useremo le seguenti notazioni:

Definizione 2.57. Indicheremo:

$$\mathbb{K}^+ := \{x \in \mathbb{K} \mid x > 0\};$$
$$\mathbb{K}_{\geq 0} := \mathbb{K}^+ \cup \{0\};$$
$$\mathbb{K}^- := \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_{\geq 0}.$$

Definizione 2.58. Definiamo la funzione *valore assoluto* nel seguente modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{K}_{\geq 0}, \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come è noto, in un campo ordinato qualsiasi non è necessariamente possibile estrarre la radice quadrata di ogni elemento. La Proposizione 2.68, ad esempio, mostra l'impossibilità di questa operazione per tutti gli elementi negativi del campo; ma, oltre a questo, a seconda anche del campo $\mathbb{K}$ considerato, può avvenire che pure un elemento positivo non sia un quadrato: ad esempio, nell'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$, dal numero 2 non è estrabilie la radice quadrata.

La seguente definizione serve a porre rimedio a tale problema:

Definizione 2.59 (Campo euclideo)**.** Dato un campo ordinato $\mathbb{K}$, esso è detto *euclideo*, se per ogni suo elemento non negativo $x \geq 0$, esiste una radice quadrata: $y \in \mathbb{K}$ tale che $y^2 = x$.

È un esempio di campo ordinato euclideo il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Al contrario, $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato non-euclideo.

In particolare, in un campo euclideo la possibilità di estrarre la radice di una somma di quadrati (entrambi non negativi), e quindi nella forma $x^2 + y^2$, è garantita per definizione.

Veniamo adesso alle due proprietà di archimedeicità e continuità.

Definizione 2.60. In un qualsiasi campo $\mathbb{K}$, dati $x \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, definiamo $n \cdot x$ induttivamente:

$$\begin{cases} 1 \cdot x := x, \\ (n+1) \cdot x := n \cdot x + x \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Dato un campo ordinato $\mathbb{K}$, definiamo le due seguenti proprietà:

(**A'**) (*Proprietà di Archimede*) Per ogni $x, y \in \mathbb{K}^+$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

(**D'**) (*Assioma di Dedekind*) Siano $A, B \subseteq \mathbb{K}$ tali che $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$ e $\mathbb{K} = A \cup B$. Supponiamo poi che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$; allora esiste ed è unico $c \in \mathbb{K}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

Definizione 2.61 (Campi archimedei)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Esso è detto *archimedeo* se soddisfa la proprietà (**A'**).

Viceversa sarà detto *non-archimedeo.*

Definizione 2.62 (Campi completi)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Esso è detto *completo* (o *continuo*) se soddisfa la proprietà (**D'**).

Osservazione 46. È noto che $\mathbb{R}$ sia l'*unico* (a meno di isomorfismi) campo ordinato completo.

Già l'Esempio 2.8 ci aveva suggerito l'esistenza di un legame tra gli assiomi di continuità (**A**) e (**D**) per il piano e i corrispettivi assiomi (**A'**) e (**D'**) per il campo. Affinché, dunque, la geometria non sia continua, è ragionevole richiedere che neppure il campo su cui è costruito il piano cartesiano lo sia. D'altra parte, però, abbiamo visto che nello studio degli assiomi di congruenza (Esempi 2.6 e 2.7) un campo qualsiasi non è sufficiente a garantire la validità di tali assiomi (in $\mathbb{Q}^2$, ad esempio, non è possibile effettuare il trasporto di ogni segmento).

Proseguiamo allora nel seguente modo:

Definizione 2.63 (Numeri reali algebrici)**.** Definiamo insieme dei numeri *reali algebrici*, e lo indichiamo con $\mathbb{A}$, l'insieme dei numeri reali $u \in \mathbb{R}$, per i quali esiste un polinomio non nullo a coefficienti razionali, $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, tale che $p(u) = 0$.

Proposizione 2.69. *L'insieme dei numeri reali algebrici è un sottocampo di $\mathbb{R}$. In particolare, dotandolo dello stesso ordinamento dei numeri reali, risulta essere un campo ordinato.*

Lemma 2.8. *Sia $u \in \mathbb{R}$, supponiamo esista un polinomio non nullo $p(x)$ a coefficienti reali algebrici tale che $p(u) = 0$. Allora anche u è un numero reale algebrico.*

Proposizione 2.70. *Sia $a \in \mathbb{A}$, tale che $a \geq 0$. Allora la sua radice quadrata è un numero reale algebrico.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un numero *reale* u tale che $u^2 = a$. Dobbiamo dimostrare che u sia algebrico. Per fare ciò è sufficiente considerare il polinomio $p(x) = x^2 - a$, a coefficienti algebrici. Per ipotesi $p(u) = 0$; sfruttando allora il Lemma 2.8 concludiamo la tesi. □

Corollario 2.8. *Il campo dei numeri reali algebrici $\mathbb{A}$ è un campo ordinato euclideo.*

Ciò che adesso vogliamo fare è provare che il piano cartesiano $\mathbb{A}^2$ sia un modello per il piano di Hilbert, ma l'assioma (**D**) non abbia in esso validità.

Come in precedenza considereremo un punto come una coppia ordinata di numeri reali algebrici: $(x, y) \in \mathbb{A}^2$; mentre una retta è un insieme del tipo:

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \;\Big|\; ux + vy + w = 0\Big\},$$

con $u, v, w \in \mathbb{A}$, $(u, v) \neq (0, 0)$.

Le relazioni di ordinamento e congruenza verranno definite esattamente come negli Esempi 2.5, 2.6 e 2.7.

Si osservino gli Esempi 2.1 e 2.5. In essi si sono usate le proprietà di $\mathbb{Q}$ come campo ordinato. Seguendo procedure del tutto analoghe a quelle di tali esempi è possibile dimostrare che gli assiomi di incidenza (**I 1-3**) e gli assiomi di ordinamento (**O 1-4**) valgono anche nel modello $\mathbb{A}^2$.

Più delicato è il caso degli assiomi di congruenza: né le proprietà di campo, né quelle di ordinamento, sono più sufficienti per garantire la validità di questo gruppo di assiomi. Ripercorriamo i passaggi seguiti negli Esempi 2.6 e 2.7. Gli assiomi (**C 2**) e (**C 5**) non rappresentano un problema, perché si fondano sulle usuali proprietà dell'uguaglianza. Anche l'assioma (**C 3**) risulta nient'affatto problematico, e si può per esso seguire la stessa dimostrazione data nel caso del piano $\mathbb{Q}^2$.

L'assioma (**C 1**) - ma in generale la possibilità di definire una distanza sul piano cartesiano - necessita, da parte sua, della possibilità di estrarre la radice quadrata di un qualsiasi elemento positivo del campo. Se infatti $A = (x, y)$ è un punto arbitrario nel piano, posto $O = (0, 0)$, il segmento $\overline{OA}$, per essere trasportato, richiede la possibilità di estrarre la radice di $x^2 + y^2$. Tale cosa non era ad esempio possibile in $\mathbb{Q}$, e infatti non potevamo effettuare il trasporto dei segmenti, senza il quale cade l'assioma (**C 1**). Ora, nel caso del campo $\mathbb{A}$, la Proposizione 2.70 ci garantisce proprio che la radice quadrata di un numero reale algebrico positivo è non solo un numero reale, ma bensì anch'essa un numero reale algebrico. In tal modo possiamo effettuare il trasporto dei segmenti.

Per gli assiomi (**C 4**) e (**C 6**) si può allora seguire la corrispettiva dimostrazione data nel caso del piano reale $\mathbb{R}^2$ (qualsiasi dimostrazione sugli endomorfismi unitari può così essere mantenuta inalterata). Si noti poi che il coseno di un angolo è ben definito perché è possibile estrarre la radice quadrata; in particolare il coseno sarà un numero reale algebrico. Per la stessa ragione anche il trasporto degli angoli diviene possibile. L'esistenza dei tre tipi di isometrie (traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali) utili per la dimostrazione di (**C 6**) viene infine anch'essa provata in maniera del tutto analoga.

Risulta poi altrettanto immediato, seguendo l'esempio svolto su $\mathbb{Q}$, dimostrare che sul piano dei numeri reali algebrici valga anche l'assioma delle parallele (**P**).

Possiamo così enunciare la seguente:

Proposizione 2.71. *Il piano cartesiano sopra il campo dei numeri reali algebrici $\mathbb{A}^2$ è un modello per il piano di Hilbert con l'assioma (**P**).*

Quello che adesso vogliamo mostrare è che invece non vale l'assioma di continuità (**D**). La dimostrazione è molto semplice: ricordiamo che l'applicazione

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] \cap \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ t &\mapsto t(B-A)-A, \end{aligned}$$

è un isomorfismo d'ordine tra il campo $\mathbb{A}$ e la retta per i punti distinti A e B. Per il Teorema 2.12 se la retta fosse completa si arriverebbe all'assurdo che completo dovrebbe essere anche $\mathbb{A}$.

In caso si volesse procedere costruttiamente e trovare una partizione di una retta per la quale non esiste elemento di separazione, si proceda così: si prenda la retta $r : y = 0$, formata da tutti i punti $(x, 0)$, con $x \in \mathbb{A}$. Su di essa consideriamo il verso da $(0, 0)$ a $(1, 0)$.

Si consideri ora la seguente successione crescente di numeri razionali, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tale che:

$$q_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Osserviamo che, posto $m > 0$,

$$q_{n+m} - q_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!},$$

che tende a 0 per n che tende all'infinito. Ovvero è una successione di Cauchy.

Consideriamo ora:

$$t := \big\{(x, 0) \in r \;\big|\; x \geq q_n \ \forall n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Dato che la successione è di Cauchy, allora è limitata, e perciò l'insieme t è non vuoto.

Poniamo ora $s := r \setminus t$. Anch'esso non vuoto perché, ad esempio, $(0, 0) \in s$, dato che la successione è costituita da numeri positivi.

In particolare (s, t) costituisce una partizione di r. Ora, se $S \in s$ e $T \in t$, è evidente che $S \leq T$; e dunque, per le ipotesi di continuità, esiste un elemento separatore $C \in r$.

Ricordiamo che $e = \lim_{n\to\infty} q_n \in \mathbb{R}$, con e numero di Nepero. Dato che la successione è crescente, allora $T = (x, 0)$ appartiene a t se e solo se $x \geq e$. È altrettanto noto che il numero di Nepero e sia trascendente, e dunque non appartenga ad $\mathbb{A}$. Quindi un punto $T = (x, 0)$ appartiene a t se e solo se $x > e$. Analogamente $S = (x, 0)$ appartiene a s se e solo se $x < e$. Dato che sia i punti di t, che quelli di s, si addensano intorno ad e, quest'ultimo può essere l'unico elemento di separazione possibile; ovvero $C = (e, 0)$. Il che è assurdo perché e non è un numero reale algebrico.

Osserviamo adesso che nel modello $\mathbb{A}^2$ vale l'assioma di Archimede (**A**). L'idea è sempre che le proprietà della retta possono essere dedotte da quelle del campo. Essendo $\mathbb{A}$ un campo archimedeo (ovvero rispetta la proprietà (**A'**)), allora tale deve essere anche la retta nel piano (la dimostrazione è comunque analoga a quella dell'Esempio 2.8).

Meno semplice, ma comunque possibile, è dimostrare che $\mathbb{A}^2$ sia un modello anche per l'assioma delle circonferenze (**E**). Procediamo come segue:

per definizione, una circonferenza di centro $O = (o_1, o_2)$ e raggio $\overline{OA}$ è l'insieme dei punti P tali che $\overline{OP} \equiv \overline{OA}$. Ora, posti $r = d(O, A)$ e $P = (x, y)$, dovrà valere:

$$\sqrt{(x - o_1)^2 + (y - o_2)^2} = r,$$

da cui

$$(x - o_1)^2 + (y - o_2)^2 = r^2.$$

Quindi nel modello $\mathbb{A}^2$ (come d'altronde anche in $\mathbb{R}^2$), le circonferenze definite dalla geometria di Hilbert corrispondono a quelle usuali della geometria cartesiana. In particolare osserviamo che ogni classe di equivalenza di segmenti può essere messa in corrispondenza biunivoca con un numero reale algebrico (rispettivamente reale) positivo. Quindi avrà senso chiedere di considerare circonferenze di raggio numerico.

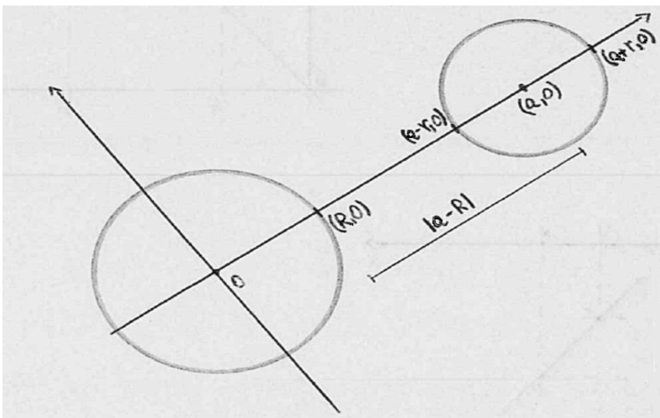
Consideriamo ora due circonferenze distinte: Γ ,di raggio R, e Δ, di raggio r. Possiamo supporre che $R \geq r$. Ricordiamo che in $\mathbb{A}^2$ abbiamo a disposizione traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali, e che nessuna di queste altera i segmenti o le loro lunghezze. In particolare ogni isometria manda una circonferenza in una circonferenza con lo stesso raggio.

Per semplificare allora i conti si può proseguire così: consideriamo la traslazione che manda $(0,0)$ nel centro della circonferenza Γ. Dopodiché, se il centro di Δ non giace sull'asse delle ascisse operiamo una rotazione (di centro il centro di Γ: ora $(0,0)$) che mandi il semiasse positivo delle ascisse $\left(\overrightarrow{(0,0)(1,0)}\right)$ sulla retta che congiunge i centri delle due circonferenze; se invece il centro di Δ giace sull'asse delle ascisse e dalla stessa parte di $(1,0)$, non facciamo nulla, se giace dall'altra parte eseguiamo una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

Operati tutti questi passaggi arriviamo ad un situazione dove la circonferenza Γ sarà centrata nell'origine del sistema di riferimento, mentre Δ avrà centro sul semiasse positivo delle ascisse. In formule:

$$\begin{aligned} \Gamma: &\quad x^2 + y^2 = R^2, \\ \Delta: &\quad (x - a)^2 + y^2 = r^2; \end{aligned}$$

con $a, R, r > 0$ e $R \geq r$.



Supponiamo ora che la circonferenza Γ abbia un punto interno e uno esterno alla circonferenza Δ. Abbiamo già dimostrato (Lemma 2.6) che i due punti di Γ che giacciono sulla retta congiungente i centri saranno uno interno (quello che giace dalla stessa parte del centro di Δ rispetto al centro di Γ), mentre l'altro esterno. Questi due punti sono $A = (R, 0)$ e $B = (-R, 0)$; dove il primo è quello interno. Convertendo tutto in formule:

$$\begin{aligned} d\big((a,0),(R,0)\big) < r &\iff |a-R| < r, \\ d\big((a,0),(-R,0)\big) > r &\iff |a+R| > r; \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza risulta sempre verificata.

Vogliamo dimostrare che le due circonferenze hanno intersezione, ovvero che esiste una soluzione al sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Si può dunque isolare la variabile y nella prima equazione:

$$\begin{cases} y^2 = R^2 - x^2 \\ (x-a)^2 + R^2 - x^2 = r^2 \end{cases}.$$

In questo modo ricaviamo il seguente valore della variabile x:

$$x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}.$$

E di seguito quello di y:

$$\begin{aligned} y^2 =& R^2 - \frac{(a^2+R^2-r^2)^2}{4a^2} \\ =& \frac{4a^2R^2 - (a^2+R^2-r^2)^2}{4a^2}. \end{aligned}$$

Dato che in $\mathbb{A}$ è possibile estrarre la radice di ogni numero positivo, quest'ultima equazione ha soluzione soltanto se il secondo termine è, per l'appunto, positivo:

$$\begin{aligned} &4a^2R^2 > (a^2+R^2-r^2)^2, \\ &2aR > a^2+R^2-r^2, \\ &(a-R)^2 < r^2, \\ &|a-R| < r. \end{aligned}$$

Esattamente la condizione posta in apertura della dimostrazione. Il sistema ha dunque soluzione, e così le circonferenze hanno un'intersezione.

Abbiamo dunque provato che $\mathbb{A}^2$ risulta essere un modello anche per l'assioma (**E**).

In conclusione possiamo dare il seguente enunciato:

*Il piano cartesiano sopra il campo dei numeri reali algebrici $\mathbb{A}$ è un modello per gli assiomi di incidenza (**I 1-3**), d'ordine (**O 1-4**), di congruenza (**C 1-6**), delle parallele (**P**) e delle circonferenze (**E**); ma non per l'assioma di continuità (**D**).*

Da ciò si deduce infine la seguente:

Proposizione 2.72. *L'assioma di continuità (**D**) è indipendente da tutti i restanti assiomi della geometria.*

Prima di procedere facciamo alcune interessanti osservazioni:

Osservazione 47. Gran parte dei risultati appena ottenuti per i numeri reali algebrici sono in realtà generalizzabili ad una più ampia casistica. Risulta infatti di una sufficiente evidenza che tutte le dimostrazioni date per il piano $\mathbb{A}^2$ - ma anche per $\mathbb{R}^2$ - sono generalizzabili ad un qualsiasi campo $\mathbb{K}$, ordinato ed euclideo. Ovvero, preso un piano cartesiano $\mathbb{K}^2$, esso può assurgere a modello di piano di Hilbert qualora $\mathbb{K}$ sia ordinato ed euclideo, previa, ovviamente, la definizione delle relazioni di "stare fra" e di congruenza, in maniera analoga a come per fu $\mathbb{A}^2$. Inoltre in $\mathbb{K}^2$ varrà sicuramente anche l'assioma (**P**). La validità degli assiomi (**A**) e (**D**), invece, dipenderà dalla validità o meno dei corrispettivi assiomi di campo (**A'**) e (**D'**).

La richiesta che il campo $\mathbb{K}$ sia euclideo è servita nel momento in cui abbiamo voluto introdurre la relazione di congruenza, tuttavia tale richiesta risulta pure sovrabbondante: si potrebbero ottenere gli stessi risultati enunciati fin'ora anche ponendo condizioni più flessibili. Osserviamo infatti come possa essere riscritta la distanza fra due punti. Poniamo per esempio $O = (0, 0)$ e $A = (x, y)$, e supponiamo $x \neq 0$:

$$d(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2\Big(1 + \Big(\frac{y}{x}\Big)^2\Big)} = |x|\sqrt{1 + \Big(\frac{y}{x}\Big)^2}.$$

Dunque, se fosse possibile estrarre la radice quadrata anche solo degli elementi del campo del tipo $1 + c^2$, allora il trasporto dei segmenti dell'assioma (**C 1**) non incontrerebbe ostacoli. Così neppure i restanti assiomi. È infatti possibile dimostrare (e si veda a tal proposito [5, pp. 140-158]), che il piano cartesiano su un campo ordinato per il quale esiste la radice quadrata di ogni elemento del tipo $1 + c^2$ è un modello di piano di Hilbert.

La richiesta che il campo sia euclideo, per quanto più restrittiva, permette di ottenere un maggior numero di risultati, soprattuto in merito all'intersezione di circonferenze: si può infatti notare che la dimostrazione che nel piano cartesiano $\mathbb{A}^2$ valga l'assioma (**E**), in effetti, ha validità in un qualsiasi campo ordinato euclideo. Ovvero, se $\mathbb{K}$ è un campo ordinato euclideo, allora il piano cartesiano $\mathbb{K}^2$ è un modello per un piano di Hilbert con l'assioma delle circonferenze (**E**).

Osservazione 48. *Osservazione sull'ordine*: finora abbiamo usato, per definire la relazione di "stare fra", l'ordinamento di un campo $\mathbb{K}$. Ora, di ordinamenti che rendano un campo $\mathbb{K}$ ordinato ne esistono, in genere, più d'uno. Quindi uno qualsiasi di essi permette di definire poi un ordinamento sulle rette del piano. Ci si potrebbe chiedere, però, se esistano nel piano cartesiano $\mathbb{K}^2$ altri ordinamenti possibili (i.e. altre definizioni della relazione "stare fra") all'infuori di quelli indotti dall'ordine del campo. In effetti questo non è possibile: basta osservare come nell'Esempio 2.5 si sia fatto ampio utilizzo delle proprietà enunciate nella Proposizione 2.67. Più in generale si può enunciare la seguente Proposizione (la cui dimostrazione di può trovare in [5, p. 137]):

Proposizione 2.73. *Se $\mathbb{K}$ è un campo, e sul piano cartesiano $\mathbb{K}^2$ è possibile definire una relazione di "stare fra" che soddisfi gli assiomi (**O 1-4**); allora $\mathbb{K}$ è un campo ordinato.*

Osservazione 49. *Osservazione sulla congruenza*: finora, nei piani cartesiani, si è sempre usata la distanza euclidea

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Tuttavia è noto che è possibile definire, in generale, anche altre distanze; noi stessi lo abbiamo fatto, in atto di dimostrare l'indipendenza dell'assioma (**C 6**). Il perché si sia ricorso nello specifico a quella euclidea è presto detto: si tratta del tentativo di mantenere valida la Proposizione (I.47) degli *Elementi*, ovvero il noto Teorema di Pitagora. Si osservi poi che tale proposizione fa ricorso al V postulato e quindi non ha validità nelle geometrie non euclidee.

La prossima parte di questa Sezione vuole vertere nello specifico sull'assioma di Archimede.

Tutti i modelli di piano di Hilbert proposti fino a questo momento non mancavano mai di soddifsare l'assioma (**A**); il che può portare a credere che esso sia in dipendenza dagli assiomi degli altri gruppi. In realtà non è così, ed è possibile costruire delle geometrie non-archimedee. Si può, ovvero, dare un modello di un piano di Hilbert che non soddisfi all'assioma di Archimede. Il Teorema 2.5 ci garantisce che in presenza dell'assioma di continuità (**D**) sia verificato anche l'assioma di Archimede, il che rende ovvio che il modello che presenteremo ora sarà un altro modello di geometria non continua.

Fino ad ora abbiamo dato esempi solamente di campi archimedei (siano essi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$ oppure $\mathbb{R}$). Nei prossimi paragrafi dovremo invece dare prova dell'esistenza di campi ordinati che non soddisfino la propietà (**A'**), nella speranza di costruire per mezzo loro una geometria non archimedea.

Partiamo con la seguente:

Definizione 2.64. Definiamo $\mathbb{R}(t) := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{R}[t],\ g \neq 0 \right\}$, il campo dei quozienti dei polinomi a coefficienti reali.

Ricordiamo che è più corretto parlare di classi di equivalenza, dove $f/g = h/l$ se e solo se $f \cdot l = h \cdot g$. In particolare, con la definizione di somma e prodotto come intuitiva somma e prodotto di membri delle classi, risulta effettivamente essere un campo.

Su $\mathbb{R}(t)$ è possibile definire un ordine: consideriamo un elemento f/g, concependolo come una funzione reale di varibile reale, definita a meno degli zeri di g (che sono in numero finito). Prenderemo come insieme P degli elementi positivi, l'insieme di tutte le funzioni che sono positive per valori di t sufficientemente grandi, ovvero:

$$\frac{f}{g} > 0 \iff \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \frac{f(t)}{g(t)} > 0 \quad \forall t > t_0.$$

In particolare, a determinare il segno di un quoziente sarà il prodotto dei segni tra i coefficienti direttori di f e di g, ovvero: se $f = a_n t^n + ... + a_0$ e $g = b_m t^m + ... + b_0$, con $a_n, b_m \neq 0$; allora $f/g > 0$ se e solo se $a_n/b_m > 0$. (Non è stato considerato il caso $f = 0$, che risulta banale).

Osserviamo che la relazione è ben definita, cioè non dipende dalla scelta del rappresentante della classe: siano f/g e h/l, tali che $f/g = h/l$, e supponiamo che $f/g > 0$. Siano c_s e d_r i coefficienti direttori rispettivamente di h e di l.

Poiché $fl = hg$, allora risulta che $n + r = s + m$ e $a_n d_r = c_s b_m$; in particolare anche c_s/d_r è positivo.

Mostriamo che somma e prodotto di elementi di P appartengono ancora a P: se f/g, h/l sono positivi, allora esistono $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, tali che

$$\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \quad \forall t > t_0,$$
$$\frac{h(t)}{l(t)} > 0 \quad \forall t > t_1.$$

Allora, per ogni $t > \max\{t_0, t_1\}$,

$$\frac{f(t)}{g(t)} + \frac{h(t)}{l(t)} > 0,$$
$$\frac{f(t)}{g(t)} \cdot \frac{h(t)}{l(t)} > 0.$$

Supponiamo infine che il polinomio f sia non nullo, ed in particolare ammetterà un numero finito di zeri. Allora la funzione f/g è definita - continua e non nulla - per ogni t maggiore di un certo t_0; e allora ivi sarà o positiva o negativa (e quindi avrà per opposto una funzione positiva). Se invece $f = 0$, allora $f/g = 0$. Questa breve osservazione ci permette di costatare che ogni elemento di $\mathbb{R}(t)$ o è positivo, o è nullo, o ha opposto positivo.

Abbiamo così dimostrato che $\mathbb{R}(t)$ è un campo ordinato.

Vogliamo ora provare che *non* è archimedeo. Consideriamo infatti $1, t \in \mathbb{R}(t)$, entrambi positivi; e sia poi $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che, posto $\phi(t) := t - n$, allora $\phi(t) > 0$ per ogni $t > n$. Ovvero, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 < t$. Da cui la contraddizione con il postulato di Archimede.

Concludiamo che $\mathbb{R}(t)$ è un campo ordinato non-archimedeo. Questo è già sufficiente per garantire che il piano cartesiano $\mathbb{R}(t)^2$ sia un modello per gli assiomi di incidenza e di ordine, e quindi che l'assioma di Archimede sia indipendente da essi. Tuttavia, se vogliamo introdurre anche gli assiomi di congruenza, dobbiamo servirci di un campo euclideo, cosa che $\mathbb{R}(t)$ non è: ovviamente $\sqrt{t}$ non è una funzione razionale.

Possiamo però estendere $\mathbb{R}(t)$ ad un campo più grande che ci permetta di estrarre le radici quadrate dei termini positivi.

Procediamo per gradi: consideriamo l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni a valori reali, *continue*, definite su un intervallo $]t_0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$ e tali da *non annullarsi mai* (in particolare saranno sempre o negative o positive). Ogni elemento di $\mathbb{R}(t)$, eccezion fatta per il quoziente identicamente nullo (che verrà inserito a parte), può essere visto come un elemento di $\mathcal{C}$, previa opportuna restrizione del dominio.

Inoltre due funzioni f e g, definite rispettivamente su $]t_0, +\infty[$ e $]t_1, +\infty[$, saranno considerate *equivalenti* se esiste un certo $t_2 > t_0, t_1$ tale che $f(t) = g(t)$ per ogni $t > t_2$. Osserviamo che se due funzioni razionali sono equivalenti nel senso usuale del campo dei quozienti, allora lo sono anche nel senso or ora definito.

Logicamente $\mathcal{C}$ non è un campo (sia 2 che $2 + \sin(t)$ gli appartengono, ma non la loro differenza). Possiamo però definire sull'insieme un ordinamento nel seguente modo: sia $P_\mathcal{C}$ l'insieme di tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}$ tali che esita un certo $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ con $f(t) > 0$ per ogni $t > \tilde{t}$. Che l'insieme $P_\mathcal{C}$ soddisfi le due proprietà della Definizione 2.55, come anche che rispetti l'equivalenza sopra definita, è dimostrabile come lo è stato per le funzioni razionali. Dunque esso sarà l'insieme delle funzioni positive.

Si osservi che se una certa funzione f appartiene a $\mathcal{C}$ ed $f > 0$, allora anche la funzione $\sqrt{f} \in \mathcal{C}$.

Adesso consideriamo l'insieme $\mathbb{E}$ di tutte le funzioni di $\mathcal{C}$ che possono essere ottenute a partire da quelle di $\mathbb{R}(t)$ attraverso un numero finito di utilizzi delle operazioni $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ e $f > 0 \mapsto \sqrt{f}$. Vogliamo provare che $\mathbb{E}$ è un campo.

Lemma 2.9. *Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un campo. Supponiamo che esista un certo $\omega \in \mathbb{K}$, $\omega > 0$, tale che $\sqrt{\omega} \notin \mathbb{K}$. Allora, posto*

$$\mathbb{K}' := \big\{a + b\sqrt{\omega} \bigm| a, b \in \mathbb{K}\big\},$$

anche $\mathbb{K}'$ è un campo incluso in $\mathbb{E}$.

Dimostrazione. Osserviamo che un insieme come $\mathbb{K}$ esiste: basta considerare $\mathbb{R}(t)$.

Altra piccola osservazione: $a + b\sqrt{\omega} = 0$ implica $a^2 = b^2\omega$, da cui (se $b \neq 0$) $\omega = a^2/b^2$. Il che è assurdo perché $\sqrt{\omega} \notin \mathbb{K}$. Allora $b = 0$, da cui $a = 0$. In breve: $a + b\sqrt{\omega} = 0$ se e solo se $(a, b) = (0, 0)$.

Dimostriamo che ogni elemento di $\mathbb{K}'$ appartiene a $\mathbb{E}$. (Possiamo anche escludere il caso banale $(a, b) = (0, 0)$). Intanto a, b, ω e $\sqrt{\omega}$ sono funzioni continue, perché elementi di $\mathcal{C}$; dunque anche $a+b\sqrt{\omega}$ è continua. Nel dominio di $a+b\sqrt{\omega}$ (intersezione fra i domini delle tre funzioni), nessuna delle tre si annulla; supponiamo allora per assurdo esista t_0 tale che $a(t_0) + b(t_0)\sqrt{\omega(t_0)} = 0$:

$$\begin{aligned}
a(t_0) &= -b(t_0)\sqrt{\omega(t_0)},\\
a(t_0)^2 &= b(t_0)^2\omega(t_0),\\
a(t_0)^2 &- b(t_0)^2\omega(t_0) = 0.
\end{aligned}$$

Ovvero t_0 è uno zero della funzione $a^2 - b^2\omega$, che appartiene a $\mathbb{K}$ (perché è un campo). Quindi ogni zero di $a + b\sqrt{\omega}$ è anche uno zero di $a^2 - b^2\omega$; visto che quest'ultima non si annulla da un certo punto in avanti (visto che appartiene a $\mathcal{C}$ e non può essere identicamente nulla per via della piccola osservazione sopra), così dovrà fare anche $a + b\sqrt{\omega}$. Dunque $\mathbb{K}' \subseteq \mathcal{C}$. Poiché a, b e w appartengono a $\mathbb{K}$, esse sono ottenute da $\mathbb{R}(t)$ attraverso un numero finito delle cinque operazioni, e così saranno anche tutti gli elementi di $\mathbb{K}'$. Quindi $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{E}$.

Dimostrare ora che $\mathbb{K}'$ sia un campo è immediato:

$$\begin{aligned}
(a + b\sqrt{\omega}) + (c + d\sqrt{\omega}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{\omega};\\
(a + b\sqrt{\omega}) - (c + d\sqrt{\omega}) &= (a - c) + (b - d)\sqrt{\omega};\\
(a + b\sqrt{\omega}) \cdot (c + d\sqrt{\omega}) &= (ac + bd\omega) + (ad + bc)\sqrt{\omega};\\
(a + b\sqrt{\omega}) \div (c + d\sqrt{\omega}) &= \frac{(a + b\sqrt{\omega})(c - d\sqrt{\omega})}{c^2 - d^2\omega}.
\end{aligned}$$

Sono tutti elementi di $\mathbb{K}'$. Si è sfruttato che $\mathbb{K}$ sia un campo, e quindi $a + c$, $a \cdot d$, ecc... appartengano a $\mathbb{K}$; e che se $c+d\sqrt{\omega}$ non è identicamente nulla, allora non lo sarà neppure $c^2 - d^2\omega$. □

Proposizione 2.74. *Esiste un campo ordinato euclideo e non-archimedeo che contiene* $\mathbb{R}(t)$.

Dimostrazione. L'insieme $\mathbb{E}$ contiene $\mathbb{R}(t)$ per costruzione.

Dimostriamo essere un campo: siano $x, y \in \mathbb{E}$, vogliamo provare che $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ e (se $y \neq 0$) x/y appartengono a $\mathbb{E}$.

L'elemento x è ottenuto da $\mathbb{R}(t)$ attraverso un numero finito di operazioni tra $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ e $f > 0 \mapsto \sqrt{f}$. Poiché $\mathbb{R}(t)$ è un campo, ogni volta che si usano $+$, $-$, $\cdot$ e $\div$, si rimane al suo interno; ma quando si estrae la radice quadrata si rischia di uscirne. Si applica allora il Lemma 2.9, determinando un campo incluso in $\mathbb{E}$ (e che include $\mathbb{R}(t)$), dentro il quale si trova ancora la radice. Si applica dunque il lemma ogniqualvolta nella costruzione di x si è estratta una radice, determinando così un campo $\mathbb{K}'$ tale che $\mathbb{R}(t) \subseteq \mathbb{K}' \subseteq \mathbb{E}$, e contenente x.

Analogamente y è stato costruito con un numero finito delle cinque operazioni a partire da elementi di $\mathbb{R}(t)$ (e dunque di $\mathbb{K}'$). Anche in questo caso somma, differenza, prodotto e divisione non ci permettono di uscire dal campo $\mathbb{K}'$, ma l'estrazione di radice forse. Applichiamo allora il lemma ogni volta che si estrae una radice, individuando un campo $\mathbb{K}''$ tale che $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}'' \subseteq \mathbb{E}$, e contenente sia x che y.

Allora $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ e (se $y \neq 0$) x/y appartengono a $\mathbb{K}''$, e dunque a $\mathbb{E}$.

Per ordinare $\mathbb{E}$ procediamo così: consideriamo $P_{\mathcal{C}}$, insieme dei positivi di $\mathcal{C}$, e poniamo l'insieme dei positivi di $\mathbb{E}$ l'insieme $P := P_{\mathcal{C}} \cap \mathbb{E}$. Soddisfando $P_{\mathcal{C}}$ tutte le proprietà richieste, così farà P.

$\mathbb{E}$ è ovviamente euclideo per costruzione.

L'ordine di $\mathcal{C}$, ristretto a $\mathbb{R}(t)$, è del tutto equivalente a quello che era stato già definito per quest'ultimo insieme, e che lo rendeva non-archimedeo. Poiché $\mathbb{E}$ contiene $\mathbb{R}(t)$ allora non potrà essere archimedeo.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Ora siamo in grado di costruire una geometria non archimedea: consideriamo il piano cartesiano $\mathbb{E}^2$, con le usuali definizioni di punto, retta, ordine e congruenza. Essendo $\mathbb{E}$ un campo ordinato euclideo, allora il piano cartesiano risulterà essere un modello di piano di Hilbert (che in particolare soddisfa anche l'assioma (**P**)); inoltre, per l'Osservazione 47, in tale piano cartesiano viene soddisfatto anche l'assioma (**E**). Tuttavia, non essendo $\mathbb{E}$ archimedeo, allora $\mathbb{E}^2$ non soddisfa l'assioma di Archimede (**A**), e dunque neppure l'assioma di continuità (**D**).

Possiamo quindi enunciare la seguente:

Proposizione 2.75. *L'assioma di Archimede (**A**) è indipendente da tutti gli assiomi dei gruppi di incidenza, ordine, congruenza, parallele e anche dall'assioma (**E**).*

Vorremo concludere questa parte dedicando due parole al legame che unisce i campi archimedei con i numeri reali.

Nella Sezione 1.4 abbiamo detto che per mezzo del postulato di Archimede Eudosso, ed Euclide, erano stati in grado di introdurre gli irrazionali, prima intrattabili. Attraverso (**A**) venivano aperte le porte per i numeri reali. In effetti, seguendo l'idea che fu di Eudosso, diventa manifesto che il postulato di Archimede permetta, una volta scelto un segmento come unità, di associare ad ogni altro segmento una misura; ovvero permetta di assegnare ad ogni segmento un numero reale (attraverso le approssimazioni, per eccesso e per difetto, già illustrate nella Sezione 1.4). Questo non è però sufficiente per rendere vero anche il viceversa: cioè non è detto che ad ogni numero reale sia possibile assegnare un segmento. A tal proposito si può recuperare l'esempio del campo dei numeri reali algebrici $\mathbb{A}$: ricorrendo alla definizione di distanza è stato possibile assegnare ad ogni segmento un numero reale (algebrico); tuttavia esistono numeri reali, nello specifico trascendenti, che non sono misura di alcun segmento (nel caso da noi trattato era il numero di Nepero e a non essere misura di un segmento). Perché questo viceversa divenga possibile è necessario ricorrere all'assioma di continuità (**D**) (o anche alla formulazione data da Hilbert: (**D***)).

Il legame che unisce campi archimedei e numeri reali è in effetti molto profondo, e può essere studiato ben oltre queste idee intuitive date fin'ora. Enunciamo a tal proposito una coppia di proposizioni che permetteranno di far luce su quanto stiamo dicendo.

Proposizione 2.76. *Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ un campo ordinato, sottocampo dei numeri reali. Allora $\mathbb{K}$ è archimedeo.*

Viceversa:

Proposizione 2.77. *Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato archimedeo. Allora $\mathbb{K}$ è isomorfo, come campo ordinato, a un sottocampo di $\mathbb{R}$.*

Queste due proposizioni ci dimostrano, quindi, che lo studio dei campi archimedei è lo studio dei sottocampi di $\mathbb{R}$. Ogniqualvota, dunque, si introduce l'assioma di Archimede, si sta entrando, direttamente o meno, nel dominio dei numeri reali. In questo senso Eudosso ed Euclide, nell'atto di studiare le grandezze archimedee, non potevano non incontrare una estensione dei razionali che fosse inclusa nei numeri reali.

Concludiamo ora con la categoricità.

2.4.3 La categoricità

Che i cinque gruppi di assiomi presentino *un* modello è stato ormai ampiamente provato. Rimane però aperto il dubbio su *quanti* siano i modelli che possano fungere a tale compito. Non è ancora da escludere, infatti, che oltre al noto piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ possano esistere altre interpretazioni della geometria. Ad esempio, se rinunciamo all'assioma di continuità (**D**), riusciamo a trovare più di un modello: oltre al già citato $\mathbb{R}^2$ si può considerare anche $\mathbb{A}^2$, ma risulta facilmente intuibile che in vero ne esistano infiniti altri.

Dunque, volendo tenere inalterati *tutti* gli assiomi di tutti e cinque i gruppi, possiamo affermare che esistano altri modelli oltre al piano cartesiano reale? Dimostreremo adesso che la risposta è negativa.

Cominciamo con una digressione - anche storica - sui segmenti, le loro misure e le operazioni sopra essi definite.

L'algebra dei segmenti

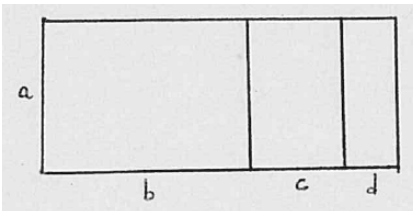
Euclide non fa mai uso di misure per le sue grandezze. Non ci sono numeri nella sua trattazione della geometria: così i segmenti non hanno lunghezza, né le superfici un'estensione. È presente solo una nozione di uguaglianza (equivalenza) che è soggetta a certe nozioni comuni.

In effetti la matematica greca si terrà lontana dalla misurazione ancora per lungo tempo, almeno fino a quando Erone di Alessandria non discuterà per la prima volta, nella sua opera la *Metrica*, le questioni relative alla misura. Non che prima non fosse noto il concetto di unità di misura, ma esso era utilizzato per lo più per fini pratici e non era invece presente all'interno delle trattazioni teoriche, e così neppure negli *Elementi*.

Per quanto Euclide, si è visto, attraverso il postulato di Archimede e la definizione di proporzioni fra grandezze, arrivi ad un passo dai numeri reali, egli non ha una visione di questi che sia paragonabile a quella moderna, né sviluppa la questione all'infuori della definizione di proporzione fra grandezze.

In assenza di numeri, ciononostante, Euclide è comunque in grado di trattare quella che oggi viene chiamata *algebra geometrica*. Nel Libro II degli *Elementi* è ad esempio presente la seguente proposizione:

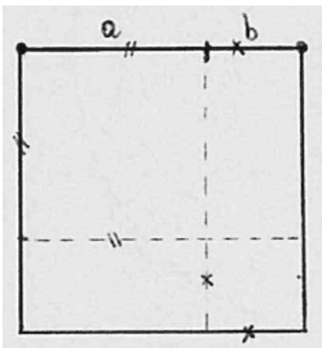
Proposizione (II.1)**.** *Se si danno due rette, e si divide una di esse in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale alla somma dei rettangoli compresi dalla retta indivisa e da ciascuna delle parti dell'altra.*



Questo teorema, al netto della sua formulazione fortemente geometrica, esprime una nota proprietà dell'aritmetica, ovvero la *legge distributiva*: nominando opportunamente i segmenti in questione, otteniamo infatti l'espressione $a(b+c+d) = ab+ac+ad$. Successivamente verranno provate anche le proprietà *commutativa* e *associativa* della moltiplicazione.

Sempre nel Libro II è presente un'altra proposizione, la cui espressione geometrica nasconde un significato algebrico oggi diversamente formulato:

Proposizione (II.4)**.** *Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti [stesse].*



Altro non stiamo dicendo se non che $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$; ovvero enunciando la formula per lo sviluppo del *quadrato di un binomio*.

In tutte queste rappresentazioni algebriche date, mai le lettere a, b, ecc... rappresentano le misure numeriche dei segmenti, ma bensì i segmenti stessi; e allo stesso modo ab, b^2, ecc... rappresentano rispettivamente il rettangolo di lati a e b, il quadrato di lato b, ecc...; mentre il simbolo $=$ rappresenta la nota equivalenza.

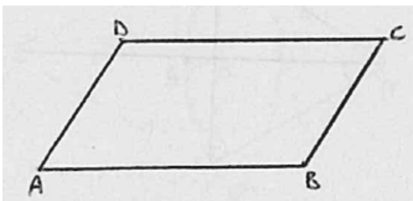
D'altra parte, in tutta la nostra trattazione precedente intorno ai *Fondamenti della geometria*, abbiamo più volte fatto ricorso, nell'atto di fornire un modello per una o per l'altra geometria, ai numeri reali. Anzi, non abbiamo, per il momento, fornito per tutti e cinque i gruppi di assiomi un modello diverso dal piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Così si è introdotto in maniera molto naturale il concetto di lunghezza di un segmento come distanza fra i suoi estremi, e si è parlato di congruenza di segmenti quando tali segmenti avevano la stessa lunghezza. Inoltre abbiamo appena detto che Euclide, pur senza ricorrere mai ai numeri, non si esimi dall'enunciare regole di calcolo, da lui applicate ai segmenti, le quali è tuttavia noto sono valide anche per i numeri reali. Noi stessi, poi, nella Sezione 2.2.4, abbiamo definito un'operazione di "somma" per i segmenti.

Dunque viene ora da chiedersi quanto in là questo calcolo con i segmenti possa essere spinto, e se possa, eventualemente, essere reso "equivalente" a quello dei numeri reali.

Nota alle pagine seguenti

In tutta la parte successiva della presente sezione si darà per scontanto che la geometria sia quella del piano di Hilbert (dunque con assiomi di incidenza, ordinamento e congruenza) con l'aggiunta dell'assioma delle parallele (**P**). Avranno quindi validità tutte le proposizioni della geometria euclidea, comprese quelle successive alla (I.28). In particolare possiamo fornire la seguente definizione di parallelogramma e la rispettiva proposizione sui suoi lati opposti:

Definizione 2.65 (Parallelogramma)**.** Un quadrangolo semplice $ABCD$ è detto *parallelogramma* se le rette AB e CD sono parallele, come anche le rette BC e DA.

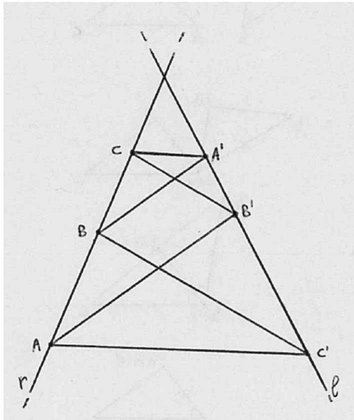


Proposizione (I.34)**.** *I parallelogrammi hanno lati opposti congruenti fra loro.*

Il teorema di Pascal e la fondazione del calcolo

Nella parte successiva saranno di grande importanza sia la nozione di campo (per la quale rimandiamo alla Definizione 2.54), sia il seguente teorema, una cui dimostrazione può essere data in ogni piano di Hilbert con l'assioma (**P**) (a tal proposito si veda [7, p. 55]).

Teorema 2.14 (Teorema di Pascal)**.**



Siano date due rette distinte r ed l che si intersecano. Siano A, B e C tre punti su r distinti dal punto di intersezione, e siano A', B' e C' tre punti su l distinti dall'intersezione. Allora, se CB' è parallelo a BC' e CA' è parallelo AC', anche BA' è parallelo ad AB'.

Il teorema di Pascal ci rende possibile l'introduzione, nella geometria, di un calcolo dei segmenti che gode di tutte quelle proprietà di calcolo già enunciate per un campo, ed in particolare per i numeri reali.

D'ora in avanti non cosidereremo gli specifici segmenti, quanto le classi di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza. Se $\mathcal{S}$ è l'insieme di tutti i segmenti del piano, chiameremo $P := \mathcal{S}/\equiv$ lo spazio quoziente, indicando con a, b, c, ecc... le classi di equivalenza dei segmenti. In tal modo sostituiremo il simbolo $\equiv$ (congruenza), con il simbolo $=$ (uguaglianza), intesa come uguaglianza fra classi.

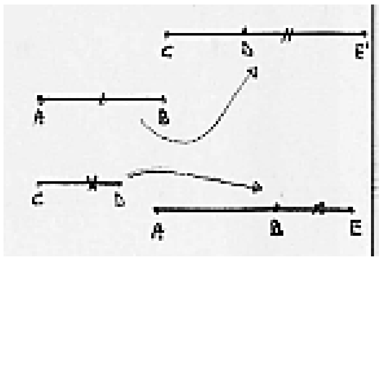
Nella Sezione 2.2.4 abbiamo già provveduto a definire una somma tra segmenti (Definizione 2.19), mostrando come questa sia compatibile con la relazione di congruenza (Proposizione 2.17). In tal senso possiamo allora definire anche una somma su P, nel seguente modo: siano $\left[\overline{AB}\right]_{\equiv}$ e $\left[\overline{CD}\right]_{\equiv}$ due classi di equivalenza, allora

$$\left[\overline{AB}\right]_{\equiv} + \left[\overline{CD}\right]_{\equiv} := \left[\overline{AB} + \overline{CD}\right]_{\equiv}.$$

Tale definizione risulta dunque ben posta e non dipende dalla scelta del rappresentante di ciascuna classe; e inoltre possiamo anche enunciare la seguente:

Proposizione 2.78. *La somma fra segmenti gode delle proprietà commutativa e associativa. Inoltre, per ogni $a, b \in P$, una sola delle seguenti condizioni vale:*
i) $a = b$.
ii) Esiste una classe c tale che $a + c = b$.
iii) Esiste una classe d tale che $a = b + d$.

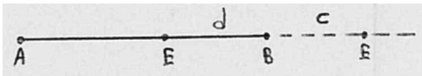
Dimostrazione. Siano a e b due classi arbitrarie. Siano ora $\overline{AB} \in a$ e $\overline{CD} \in b$.
Commutatività: la somma $a+b$ si effettua trasportando il segmento $\overline{CD}$ sulla retta AB, si trova ovvero il punto E su AB, dalla parte parte opposta di A rispetto a B, tale che $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$. Poniamo poi $\overline{AB} + \overline{CD} := \overline{AE}$. Notiamo che $A * B * E$. La somma $b + a$ si effettua trasportando il segmento $\overline{AB}$ sulla retta CD, individuando un punto E'. Vale in particolare che $C * D * E'$.



Si tratta ora di una semplice applicazione dell'assioma (**C 3**), da cui concludiamo che $\overline{AE} \equiv \overline{CE'}$.

Associatività: segue sostanzialmente lo stesso principio visto al punto precedente.

Per l'ultima affermazione procediamo come segue: trasportiamo il segmento $\overline{CD}$ sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$, individuando un punto E. Se $E = B$ segue dagli assiomi di congruenza che $a = b$; se $A * E * B$ poniamo d la classe del segmento $\overline{EB}$, ottenendo che $b + d = a$; se $A * B * E$ poniamo c la classe di $\overline{BE}$, ottenendo che $a + c = b$.



La tesi è dunque verificata. □

È nostra intenzione, ora, definire un'operazione di *prodotto tra segmenti*. Perché ciò sia possibile dobbiamo definire il *segmento unità*, ovvero scegliere, in maniera del tutto arbitraria, una qualsiasi classe di segmenti del piano, la quale sarà indicata, d'ora in avanti, con il simbolo 1. Posto che si abbia deciso, una volta per tutte, quale che sia il segmento unità, definiamo il prodotto tra segmenti come segue:

Definizione 2.66 (Prodotto di segmenti)**.** Siano dati due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ del piano. Scegliamo un qualsiasi angolo retto $\widehat{sOt}$. Trasportiamo ora sulla semiretta t il segmento 1 (indichiamo sempre con 1 il punto individuato).

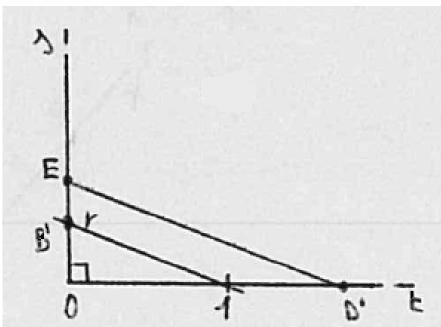
Il prodotto di $\overline{AB}$ per $\overline{CD}$ è indicato con i simboli $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

Se $\overline{CD} \in 1$, poniamo:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot 1 := \overline{AB}.$$

Altrimenti si opera trasportando il segmento $\overline{AB}$ sulla semiretta s (individuando un punto B'), mentre il segmento $\overline{CD}$ ancora sulla semiretta t (individuando un punto D', che non potrà coincidere con l'estremo di 1). Colleghiamo i punti B' e 1, determinando una retta r; dopodiché prendiamo la retta l, parallela ad r e passante per D'. Sia E il punto di intersezione tra l e la semiretta s. Poniamo:

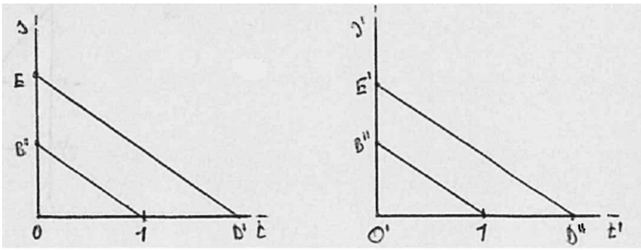
$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} := \overline{OE}.$$



Osserviamo che la costruzione è lecita, nel senso che, oltre all'ovvia possibilità del trasporto dei segmenti, garantita dall'assioma (**C 1**), esiste la retta

l, per via dell'assioma delle parallele (**P**), ed effettivamente deve intersecare la semiretta s in un punto E. Se infatti per assurdo non avessero intersezione significherebbe che: o l interseca l'altra parte della retta su cui giace s (e questo non ci impedirebbe di definire comunque il prodotto, semplicemente trasportando poi il punto di intersezione su s - in poche parole, una riflessione rispetto a t), oppure l e la retta di s sarebbero parallele; in particolare sia r che la retta di s dovrebbero essere parallele ad l, e dunque parallele fra loro (Proposizione (I.30)), in assurda contraddizione con la costruzione.

Osserviamo poi che la scelta dell'angolo retto è del tutto superflua. Ovvero, preso un altro angolo retto $\widehat{s'O't'}$, e operando le medesime costruzioni, giungeremo ad un certo segmento prodotto $\overline{O'E'}$. Osserviamo che i triangoli $B'O1$ e $B''O'1$ (sul secondo angolo) sono congruenti per il primo criterio di congruenza. Inoltre, per la Proposizione (I.29), gli angoli $\widehat{ED'O}$ e $\widehat{B'1O}$ sono congruenti; e così anche gli angoli $\widehat{E'D''O'}$ e $\widehat{B''1O'}$. Mettendo insieme questi fatti concludiamo che $\widehat{ED'O} \equiv \widehat{E'D''O'}$, e che i triangoli $ED'O$ e $E'D''O'$ sono congruenti. In particolare $\overline{O'E'} \equiv \overline{OE}$.



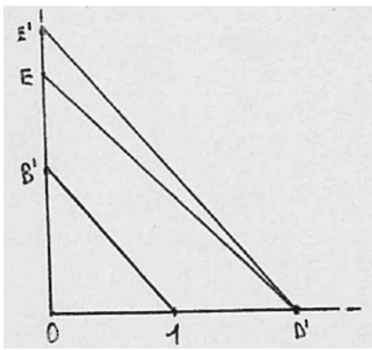
D'ora in avanti non verrà dunque data importanza alla scelta dell'angolo retto.

Passiamo adesso ad una proposizione di garanzia del rispetto della relazione di congruenza da parte del prodotto appena definito.

Proposizione 2.79. *Il prodotto fra segmenti è compatibile con la relazione di congruenza. Ovvero, date le seguenti coppie di segmenti:* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *e* $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$*; allora* $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \equiv \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}$.

Dimostrazione.

Siano $\overline{OE} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ e $\overline{OE'} = \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}$, i segmenti prodotto ottenuti con la costruzione descritta sopra. È di veloce verifica (attraverso i soliti criteri di congruenza fra triangoli) che i triangoli corrispondenti sono congruenti, in particolare otteniamo $\overline{OE} \equiv \overline{OE'}$.



□

Possiamo allora definire anche un prodotto fra classi di segmenti come segue:

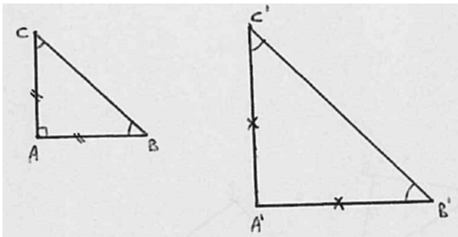
Definizione 2.67. Date due classi $\left[\overline{AB}\right]_{\equiv}$ e $\left[\overline{CD}\right]_{\equiv}$, sia

$$\left[\overline{AB}\right]_{\equiv} \cdot \left[\overline{CD}\right]_{\equiv} := \left[\overline{AB} \cdot \overline{CD}\right]_{\equiv}.$$

Prima di proseguire enunciamo il seguente:

Lemma 2.10. *Siano dati due triangoli ABC e $A'B'C'$, isosceli ($\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{A'B'} \equiv \overline{A'C'}$) e retti (rispettivamente negli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B'A'C'}$). Allora gli angoli alla base dei due triangoli sono tutti congruenti fra loro.*

Dimostrazione. Per la Proposizione (I.32), sia l'angolo $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}$, come anche $\widehat{A'B'C'}+\widehat{A'C'B'}$, sono congruenti all'adiacente a un angolo retto, e dunque retti a loro volta. Allora vale che $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'B'C'} + \widehat{A'C'B'}$.



La tesi si conclude osservando che, essendo i triangoli isosceli, allora vale la congruenza $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$, e che

$$\frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} \equiv \frac{\widehat{A'B'C'} + \widehat{A'C'B'}}{2}.$$

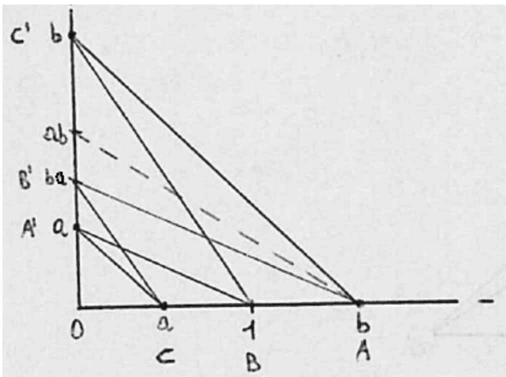
□

In questo modo siamo ora in grado di mostrare che la Definizione 2.67 gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 2.80. *Il prodotto fra classi è*
a) ben definito.
b) Commutativo.
c) Associativo.
Inoltre,
d) $a \cdot 1 = a$, per ogni $a \in P$.
e) (Proprietà distributiva) $a(b + c) = ab + ac$, per ogni $a, b, c \in P$.
f) Per ogni a e b, esiste un unico c tale che $b = ac$. c verrà detto quoziente di b per a, e indicato con il simbolo b/a.
g) Per ogni a, esiste un unico b tale che $ab = 1$. b verrà indicato, oltre che con $1/a$, anche con il simbolo a^{-1}.

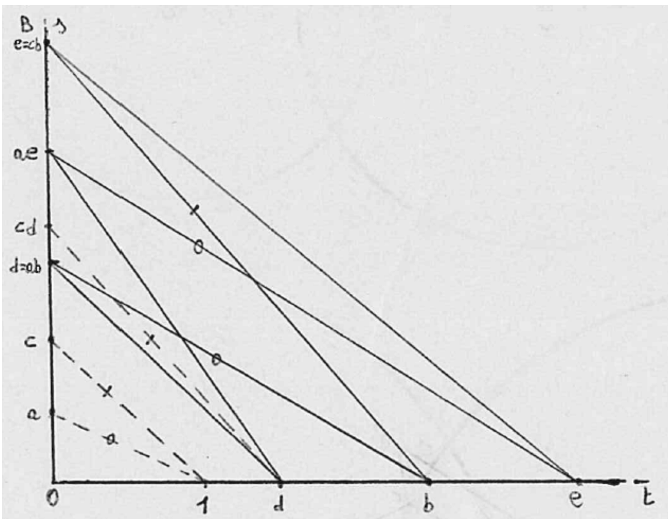
Dimostrazione. a) Diretta conseguenza della Proposizione 2.79.

b) Costruiamo il segmento ab come è stato illustrato sopra (supporremo, $a, b, c \neq 1$, altrimenti si tratta di verifiche banali). Dopodiché, nell'atto di costruire ba, trasporteremo i segmenti a e b sulle semirette s e t, inversamente a come fatto per ab. Per semplicità, dato che tutti i segmenti hanno un vertice in O, li identificheremo con il loro secondo estremo; in questo senso a indicherà sia il segmento che il suo estremo diverso da O, e così anche per gli altri segmenti. Ciò detto, nominiamo con A, B e C, i punti b, 1 e a su t; mentre con A', B' e C' i punti a, ba e b su s.



Il Lemma 2.10, congiuntamente alla Proposizione (I.28), garantisce che le rette AC' e CA' sono parallele. Inoltre la retta BC' è parallela a CB' per costruzione di ba. Applicando allora il Teorema di Pascal (Teorema 2.14), possiamo concludere che le rette BA' e AB' sono parallele. Quindi la retta passante per i punti b e ba è parallela alla retta $a1$ e passa per b; per l'assioma (**P**) allora tale retta coincide con quella passante per b e ab. Da ciò la tesi.

c) Vogliamo provare che $a(bc) = (ab)c$. Preso l'angolo retto $\widehat{sOt}$, trasportiamo 1 e b sulla semiretta t, mentre a e c sulla semiretta s. Costruiamo quindi i segmenti $d = ab$ ed $e = cb$, i quali verranno poi trasportati anch'essi su t. Possiamo in tal modo costruire anche ae e cd. Nominiamo A, B e C i punti d, b ed e su t; mentre nominiamo A', B' e C' i punti e, ae e d su s.



Osserviamo che le rette CA' e AC' sono parallele. Inoltre anche le rette BA' e Acd sono parallele (per costruzione); come pure CB' e BC'. Utilizzando il primo e l'ultimo dei parallelismmi enunciati, e applicando il Teorema di Pascal, possiamo affermare che AB' sia parallela a BA'; quest'ultima parallela ad Acd. Usando l'assioma (**P**) concludiamo che:

$$cd = ae;$$

ovvero che:

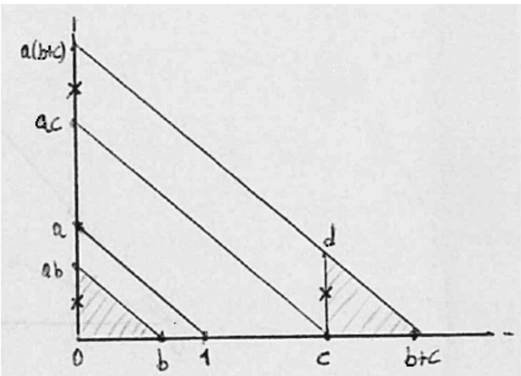
$$c(ab) = a(cb).$$

Da cui, con l'ausilio della proprietà commutativa, otteniamo la tesi:

$$a(bc) = (ab)c.$$

d) Semplice conseguenza della definizione di prodotto.

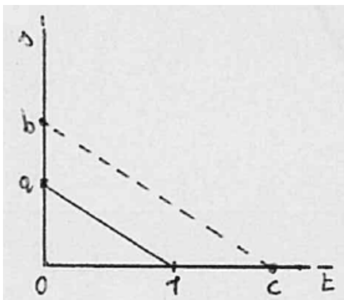
e) Costruiamo, come solito, i segmenti ab, ac e $a(b+c)$. Per il punto c tracciamo (l'unica) parallela alla retta di s (si guardi la figura), la quale dovrà intersecare la retta passante per i punti $a(b+c)$ e $b+c$ (questa necessità è dovuta a questioni di parallelismo e all'assioma (**P**)); sia d l'intersezione. Allora abbiamo ottenuto un parallelogramma di vertici $a(b+c)$, ac, c e d; in particolare il lato di estremi c e d è congruente al lato di estremi ac e $a(b+c)$. Quest'ultimo lato è d'altra parte congruente al segmento $a(b+c) - ac$.



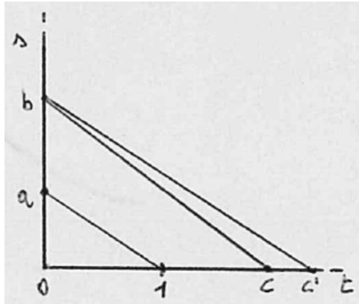
Osserviamo allora che i triangoli evidenziati in figura sono congruenti; da cui la congruenza tra ab e il lato di estremi c e d. Possiamo allora stabilire che $a(b+c) - ac = ab$. Da cui la tesi.

f) Siano a e b dati.

Considerato il solito angolo retto $\widehat{sOt}$, trasportato 1 su t, mentre a e b su s; colleghiamo a con 1 e dopodiché consideriamo la parallela alla retta trovata, passante per b. Il punto d'intersezione tra tale retta e t (la quale intersezione deve esistere) è l'estremo che congiuntamente ad O fornisce il segmento c.



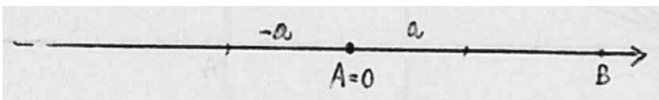
Per l'unicità si supponga l'esistenza di un secondo segmento c' tale che $b = ac'$. Si trasporti c' sulla semiretta t. La costruzione del prodotto impone che la retta per c' e b sia parallela alla retta per a e 1, oltre che ovviamente passante per b. Ma così fa anche la retta per c e per b, in contraddizione con l'assioma delle parallele (**P**).



g) Diretta conseguenza del punto precedente. □

Siamo fino a questo punto riusciti a fondare sopra l'insieme dei segmenti due operazioni, dette di somma e prodotto, le quali godono di ottime proprietà, in effetti molto vicine a quelle di un campo, elencate nella Definizione 2.54 (in particolare il segmento 1 è l'elemento neutro del prodotto). Tuttavia si può immediatamente notare che non tutte le più desiderabili proprietà sono soddisfatte: è infatti vero che manca completamente la nozione di elemento neutro per l'addizione (il noto 0), come anche l'inverso addittivo (od opposto) di ogni segmento. In effetti i segmenti, per come sono stati intesi in questa Sezione, sono solamente "positivi" e non esiste ancora un'idea di "segmento negativo", o di "segmento nullo". Non che non sia possibile fornirla. Seguendo infatti l'idea di Hilbert possiamo procedere nel modo seguente:

data una retta r arbitraria nel piano, e fissati liberamente due suoi punti A e B, è già stato mostrato che sono possibili due ordinamenti di detta r; si supponga per esempio di considerare quello da A verso B. In questo modo tutti i punti sulla semiretta aperta $\overrightarrow{AB}$ sono posteriori a quelli dell'altra semiretta e possono essere intesi come "positivi"; mentre il punto A può essere detto "nullo"; e i punti rimanenti "negativi". Si osservi ora che l'assioma (**C 1**) garantisce il trasporto di ogni segmento, in maniera unica, sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$, ovvero ogni classe di congruenza ha un suo rappresentante (e uno solo) su tale semiretta. In questo modo possiamo identificare ogni classe con un segmento sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$, e tale segmento può poi essere identificato con il suo estremo distinto da A. Siamo in tal modo leggittimati a parlare di segmenti "positivi". Il punto A, come già detto, conserva la propria nomenclatura di elemento nullo. Adesso, sulla seconda semiretta di AB, è sempre possibile effettuare univocamente il trasporto di ogni segmento, associando in tal modo ad ogni punto della semiretta una e una sola classe di congruenza: parleremo dunque di segmenti "negativi". Si osservi poi che esiste una corrispondenza biunivoca tra i segmenti positivi e quelli negativi.



In simboli: continueremo ad usare le solite notazioni a, b, ecc... per i segmenti (e i punti) positivi; useremo il simbolo 0 per l'elemento nullo A; e infine indicheremo con $-a$, $-b$, ecc... i segmenti (e i punti) negativi.

Per tutti gli elementi detti positivi sono già state definite le due operazioni di somma e prodotto, per i restanti si può procedere così:
presi a, b, $-a$, $-b$, ecc... segmenti qualsiasi,

$$\begin{aligned} &a + 0 = 0 + a := a, \\ &-a + 0 = 0 + (-a) := -a, \\ &a \cdot 0 = 0 \cdot a := 0, \\ &(-a) \cdot 0 = 0 \cdot (-a) := 0; \end{aligned}$$

che sistema operativamente l'elemento neutro 0.

Per la somma, invece: siano $\overline{AB} \in a$ e $\overline{CD} \in b$ (come è ovvio che sia, $\overline{AB} \in -a$ e $\overline{CD} \in -b$). Nella Sezione 2.2.4 abbiamo visto come siano possibili definizioni di ordine e di differenza di segmenti, entrambe ben poste rispetto alla relazione di congruenza.

Dunque:

$$(-a) + (-b) = -(a + b);$$

$$a + (-b) := \begin{cases} [\overline{AB} - \overline{CD}] & \text{se } \overline{AB} > \overline{CD}, \\ -[\overline{CD} - \overline{AB}] & \text{se } \overline{AB} < \overline{CD}, \\ 0 & \text{se } a = b; \end{cases}$$

$$(-a) + b := \begin{cases} [\overline{CD} - \overline{AB}] & \text{se } \overline{AB} < \overline{CD}, \\ -[\overline{AB} - \overline{CD}] & \text{se } \overline{AB} > \overline{CD}, \\ 0 & \text{se } a = b. \end{cases}$$

Infine, per il prodotto:

$$\begin{aligned} &(-a) \cdot (-b) := a \cdot b; \\ &(-a) \cdot b := -(a \cdot b); \\ &a \cdot (-b) := -(a \cdot b). \end{aligned}$$

Con le definizioni ora poste diviene possibile fondare un calcolo ampliato con i segmenti (o, se si preferisce, con i punti della retta r). Non è difficile dimostrare che quest'ultime definizioni - tutte ben poste - rendono il calcolo tale da soddisfare ancora a tutte le proprietà enunciate nelle Proposizioni 2.78 e 2.80. Inoltre è sempre possibile dimostrare che valgono anche due ulteriori proprietà, ovvero le proprietà 3. e 4. enunciate nella Definizione 2.54: in particolare 0 (ovvero A) è l'elemento neutro per l'operazione di somma; mentre dato un qualsiasi $a \in P$, $-a$ è il suo inverso additivo.

Possiamo poi fare un'ulteriore osservazione: presi $a, b \in P$, vale ovviamente che $a + b$ e $a \cdot b$ sono ancora elementi di P; d'altra parte, preso un qualsiasi elemento x dell'insieme ampliato dei segmenti (i.e. un qualsiasi punto della retta r), vale che o $x = 0$, o $x \in P$ oppure $-x \in P$.

Unendo tutti questi fatti possiamo concludere il seguente teorema:

Teorema 2.15. *Dato un piano di Hilbert soddisfacente l'assioma delle parallele* ***(P)****, e scelto un segmento unità* 1*, allora esiste un campo ordinato* $\mathbb{K}$ *tale che il suo sottoinsieme degli elementi positivi rispetto all'ordine è l'insieme* P *delle classi d'equivalenza di segmenti, dotato delle operazioni* $+$, $\cdot$ *definite sopra.*

Osservazione 50. Come è intuitivo che debba accadere, l'ordinamento del campo $\mathbb{K}$ e quello di P sono fra loro compatibili; ovvero, presi $a, b \in P$, $a < b$ in P (secondo l'ordinamento dei segmenti) se e solo se $a < b$ in $\mathbb{K}$.

Osservazione 51. È possibile dimostrare (si veda [5, p. 174]) che nel campo $\mathbb{K}$ or ora definito, è possibile la seguente operazione: $\sqrt{1+c^2}$, per ogni $c \in \mathbb{K}$. Il che ci permette (Osservazione 47) di fondare su di esso una geometria cartesiana che sia modello di un piano di Hilbert.

Proporzioni e similitudini

Dedichiamo adesso qualche parola alla teoria delle proporzioni e delle similitudini, già trattate da Euclide nel Libro V e nel Libro VI degli *Elementi*, e poi di nuovo esposte brevemente, ma su basi rigorose, da Hilbert senza l'ausilio dell'assioma di Archimede, nel capitolo terzo dei *Fondamenti*.

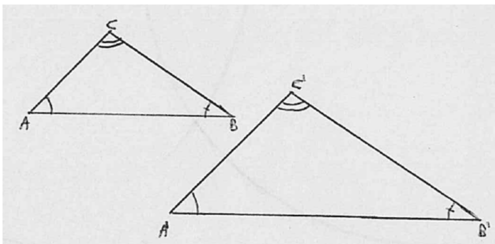
Definizione 2.68 (Proporzione fra segmenti)**.** Date quattro classi di segmenti a, b, a' e b', la *proporzione*:

$$a : b = a' : b',$$

significa che $a \cdot b' = b \cdot a'$.

Tale definizione può essere ritenuta valida anche per segmenti negativi.

Definizione 2.69 (Triangoli simili)**.** Due triangoli sono detti *simili* quando i loro angoli corrispondenti sono congruenti.



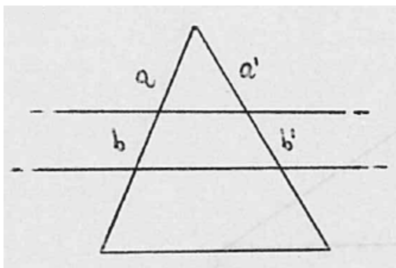
Proposizione 2.81. *Se a, b e a', b' sono lati (classi di lati) corrispondenti in due triangoli simili, vale la proporzione:*

$$a : b = a' : b'.$$

Osservazione 52. Nei triangoli i lati sono classi positive.

Proposizione 2.82 (Teorema di Talete)**.** *Se due rette parallele intersecano sui lati di un qualsiasi triangolo i segmenti a, b e, rispettivamente, a', b', allora vale la proporzione:*

$$a : b = a' : b'.$$



Viceversa, quando quattro segmenti a, b, a' e b' soddisfano a questa proporzione e a, a' e b, b' vengono trasportati rispettivamente sui lati di un triangolo qualsiasi, allora le rette congiungenti gli estremi di a, b e, rispettivamente, di a', b' sono fra loro parallele.

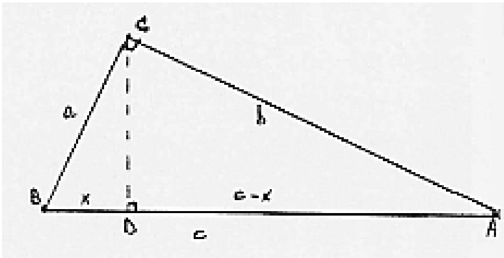
Proposizione 2.83. *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli con gli angoli in A e in A' congruenti, e con lati $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'C'}$ proporzionali; allora i due triangoli sono simili.*

Proposizione 2.84 (Teorema di Pitagora)**.** *Sia dato un triangolo rettangolo ABC, di lati a, b, c (supponiamo c sia l'ipotenusa). Allora vale la seguente identità:*

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

espressa nel calcolo dell'algebra dei segmenti su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Siano $\overline{BC} \in a$, $\overline{AC} \in b$, $\overline{AB} \in c$. Tracciamo la perpendicolare ad AB passante per il punto C; sia D l'intersezione tra tale retta e AB. Si osservi che necessariamente $A * D * B$, altrimenti, se per esempio fosse $D * B * A$, il triangolo CBD avrebbe un angolo retto - in D - ed uno ottuso - in B - contravvenenendo alla Proposizione (I.17).



Posto $\overline{BD} \in x$, e di conseguenza $\overline{DA} \in c - x$. Osserviamo che i triangoli CBD e ABC hanno angoli corrispondenti congruenti, e perciò sono simili. Da cui $x : a = a : c$, ovvero:

$$x \cdot c = a \cdot a.$$

Con un discorso analogo, applicato ai triangoli ACD e ABC deduciamo che $(c - x) : b = b : c$, da cui:

$$(c - x) \cdot c = b \cdot b.$$

Le due identità sopra portano alle seguenti conclusioni:

$$cx = a^2,$$
$$c^2 - cx = b^2.$$

Ovvero:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Osservazione 53. La precedente Proposizione è in effetti una versione del Teorema di Pitagora (I.47). Tuttavia Euclide esprime tale proposizione in termini di equivalenza fra le aree dei quadrati, il che rende il suo enunciato molto diverso rispetto al nostro, che è puramente algebrico.

L'introduzione delle coordinate

Tutte le costruzioni e le proposizioni enunciate fino a questo punto ci permettono di arrivare ad un teorema di fondamentale importanza. Quello che vorremmo dimostrare, infatti, è che qualsiasi geometria soddisfacente ai primi quattro gruppi di assiomi sia riconducibile alla geometria cartesiana sopra un opportuno campo. Fino ad ora abbiamo infatti fornito numerosi modelli, che altro non erano se non piani cartesiani; tuttavia nulla vietava che potessero esistere altre interpretazioni degli enti e delle relazioni della geometria, anche assai diverse e non riconducibili ad un piano cartesiano. Insomma, è stato verificato che per esempio $\mathbb{A}^2$ sia un piano di Hilbert, ma nulla vietava che potessero esistere particolari piani di Hilbert che non fossero piani cartesiani; magari un certo insieme, congiuntamente a un sottoinsieme del suo insieme delle parti, dotato di alcune nozioni di ordinamento e congruenza, poteva dare luogo alla geometria di un piano di Hilbert, ma non essere riconducibile ad un campo.

Ciò dà l'idea che possano esistere geometrie, certamente soddisfacenti i detti quattro gruppi di assiomi, ma anche molto diverse da quelle che la nostra intuizione riconosce come possibili. Il passo che ora faremo, in sostanza, ci permetterà di dimostrare che un qualsiasi piano di Hilbert, con l'aggiunta essenziale dell'assioma (**P**), è certamente indistinguibile (in un senso che ora verrà spiegato) da un opportuno piano cartesiano.

Diamo adesso la seguente definizione:

Definizione 2.70 (Geometrie isomorfe)**.** Siano $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ e $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{R}')$ due piani di Hilbert. Diremo che essi sono *isomorfi* se esiste una biezione $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ che rispetta le nozioni di incidenza, ordine e congruenza. Ovvero:

a) sia $r \subseteq \mathcal{P}$, allora $r \in \mathcal{R}$ se e solo se $\varphi(r) \in \mathcal{R}'$.

b) Siano $A, B, C \in \mathcal{P}$, allora $A*B*C$ (in Π) se e solo se $\varphi(A)*\varphi(B)*\varphi(C)$ (in Π').

c) Siano dati $A, B, C, D \in \mathcal{P}$, allora $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (in Π) se e solo se $\overline{\varphi(A)\varphi(B)} \equiv \overline{\varphi(C)\varphi(D)}$ (in Π').

d) Dati $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{P}$, allora $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ (in Π) se e solo se $\widehat{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} \equiv \widehat{\varphi(D)\varphi(E)\varphi(F)}$ (in Π').

Osservazione 54. L'ipotesi che φ sia biettiva, unitamente ai punti *a)* e *b)*, dimostrano che $\varphi(\overline{AB}) = \overline{\varphi(A)\varphi(B)}$ e che $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$, come anche che $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ e $\varphi(C)$ non possono essere allineati se non lo sono A, B e C; dando senso ai punti *c)* e *d)*.

Due geometrie isomorfe sono a tutti gli effetti indistinguibili, nel senso che possono avere definizioni formali anche assai diverse, ma le loro strutture interne sono del tutto identificabili. Di più, una qualsiasi proposizione concernenete le reciproche relazioni di incidenza, ordine e congruenza è vera in una geometria se e solo se è vera in una sua geometria isomorfa. In tal senso, ad esempio:

Proposizione 2.85. *Siano dati due piani di Hilbert Π e Π', isomorfi. L'assioma di continuità (**D**) vale in Π se e solo se vale anche in Π'.*

Un'altra considerazione importante, riguardante specificatamente i campi, poggia sull'osservazione che nell'atto di studiare $\mathbb{K}^2$ come modello del piano di Hilbert, tutte le relazioni della geometria sono state fatte discendere dalle proprietà di $\mathbb{K}$ come campo ordinato, e che in particolare ogni retta del piano è isomorfa (come insieme ordinato) al campo stesso. Dunque:

Proposizione 2.86. *Siano $\mathbb{K}$ ed $\mathbb{F}$ due campi ordinati. Supponiamo che $\mathbb{K}^2$ ed $\mathbb{F}^2$ siano modelli per il piano di Hilbert con le usuali definizioni di ordinamento, congruenza ecc... Se $\mathbb{K}$ ed $\mathbb{F}$ sono isomorfi come campi ordinati, allora $\mathbb{K}^2$ ed $\mathbb{F}^2$ sono isomorfi come piani di Hilbert (nel senso cioè della Definizione 2.70).*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una biezione $f : \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ che gode delle seguenti tre proprietà:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(xy) = f(x)f(y)$,
3. $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$,

qualsiasi siano $x, y \in \mathbb{K}$.

Definiamo allora la seguente applicazione:

$$\begin{aligned}\varphi \colon \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{F}^2\\ (x, y) &\mapsto \big(f(x), f(y)\big).\end{aligned}$$

Tale applicazione è biettiva, come diretta conseguenza della biettività della funzione f. Inoltre, è immediato verificare che, presi A e B due punti di $\mathbb{K}^2$, e t un elemento arbitrario di $\mathbb{K}$, allora vale che:

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

$$\varphi(tA) = f(t)\varphi(A).$$

Dimostriamo ora che gode di tutte le proprietà atte a renderla un isomorfismo di geometrie:

a) sia r una qualsiasi retta di $\mathbb{K}^2$. Dati due suoi punti distinti A e B, r può essere riscritta nel modo usuale; ovvero, preso un suo generico punto C, esso può essere espresso in dipendenza da un parametro $t \in \mathbb{K}$:

$$C = t(B - A) + A.$$

Da qui applichiamo la funzione φ:

$$\begin{aligned}&\varphi(C) =\\ &\qquad \varphi(t(B - A) + A) =\\ &\qquad f(t)\big(\varphi(B) - \varphi(A)\big) + \varphi(A).\end{aligned}$$

Dato che f è biettiva, allora il parametro $f(t)$ copre tutti i possibili valori assumibili nel campo $\mathbb{F}$. Ciò sta a significare che la retta r viene mandata nella retta di $\mathbb{F}^2$ passante per i punti $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ (che risultano distinti per la biettività di φ).

b) Supponiamo di avere tre punti distinti C, D ed E in $\mathbb{K}^2$, tali che $C * D * E$. In particolare essi saranno allineati (ipotiziamo su una retta per due punti A e B), e quindi possono essere anch'essi scritti in dipendenza da un parametro di $\mathbb{K}$, esattamente come è stato fatto nel punto *a)*. Siano t_C, t_D e t_E i tre parametri associati rispettivamente a C, D ed E. Immediato è verificare che l'ordinamento sopra espresso si realizza soltanto se:

$$t_C < t_D < t_E \quad \text{oppure} \quad t_E < t_D < t_C.$$

Inoltre, i tre punti vengono mandati sulla retta passante per $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$, e associati rispettivamente ai parametri di $\mathbb{F}$: $f(t_C)$, $f(t_D)$ ed $f(t_E)$. Le immagini

$\varphi(C)$, $\varphi(D)$ e $\varphi(E)$, allora, soddisfano alla relazione $\varphi(C) * \varphi(D) * \varphi(E)$ se e solo se:

$$f(t_C) < f(t_D) < f(t_E) \quad \text{oppure} \quad f(t_E) < f(t_D) < f(t_C).$$

Il che è verificato per la proprietà 3., espressa a inizio dimostrazione.

c-d) Per concludere la preservazione delle congruenze - sia di segmenti che di angoli - è sufficiente verificare che la funzione φ preservi il prodotto scalare (e quindi anche le distanze). Siano dunque (A, B, C) e (D, E, F) due terne ordinate di punti in $\mathbb{K}^2$. Vogliamo verficare che se $< B - A, C - A > = < E - D, F - D >$, allora $< \varphi(B) - \varphi(A), \varphi(C) - \varphi(A) > = < \varphi(E) - \varphi(D), \varphi(F) - \varphi(D) >$.Usando le più ovvie notazioni per i punti, abbiamo che per ipotesi vale la seguente uguaglianza:

$$(b_1 - a_1) \cdot (c_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \cdot (c_2 - a_2) = (e_1 - d_1) \cdot (f_1 - d_1) + (e_2 - d_2) \cdot (f_2 - d_2).$$

Applicando ora la funzione f, otteniamo che:

$$f\big((b_1 - a_1) \cdot (c_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \cdot (c_2 - a_2)\big) = f\big((e_1 - d_1) \cdot (f_1 - d_1) + (e_2 - d_2) \cdot (f_2 - d_2)\big).$$

Ricorrendo ora alle proprietà 1. e 2. di f, possiamo spezzare somme e prodotti, e applicare perciò f direttamente alle singole componenti. La scrittura che ne ricaviamo è esattamente la tesi che volevamo provare.

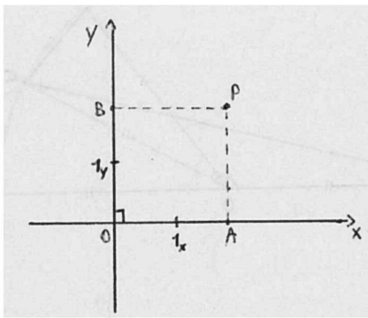
Le implicazioni inverse di ciasuna di queste proprietà vengono provate ricorrendo alla funzione φ^{-1}, e dunque alla funzione f^{-1}. $\square$

Veniamo adesso al teorema fondamentale di questa Sezione:

Teorema 2.16. *Sia* Π *un piano di Hilbert che soddisfi l'assioma delle parallele* ***(P)****. Sia* $\mathbb{K}$ *il campo dell'algebra dei segmenti di* Π*. Allora il piano* Π *è isomorfo, come geometria, al piano cartesiano* $\mathbb{K}^2$*.*

Dimostrazione. Notiamo intanto che, per l'Osservazione 51, $\mathbb{K}^2$ è un modello per un piano di Hilbert. Detto questo, cominciamo.

Siano date due rette perpendicolari (chiamate *asse* x e *asse* y) in Π, aventi intersezione in un punto O. Scelta liberamente una semiretta su ciascuna delle due rette, avente origine in O, trasportiamo il segmento unitario 1 su tali semirette, individuando i due punti (alias segmenti) 1_x e 1_y, rispettivamente su x e su y. Per ciascun asse scegliamo il verso di percorrenza da O a 1_x, e da O a 1_y.



Una qualsiasi retta parallela all'asse x sarà detta *orizzontale*; mentre una retta parallela all'asse y sarà detta *verticale.*

Sia ora P un punto qualsiasi del piano. Da P tracciamo le perpendicolari a x e a y. L'esistenza e l'unicità di queste perpendicolari è garantita dal Corollario 2.3 o dalla Proposizione 2.43, a seconda che P appartenga o meno ad uno degli assi. Inoltre, il Corollario 2.6 (ovvero come conseguenza della Proposizione (I.27) e della Proposizione (I.29)) garantisce che la perpendicolare ad x sia parallela ad y e viceversa. Siano dunque A la proiezione di P su x, e B quella su y. I segmenti $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ verranno identificati a certi $\pm a, \pm b \in \mathbb{K}$. Questa costruzione ci permette di definire la funzione:

$$\begin{aligned}\varphi\colon \Pi &\longrightarrow \mathbb{K}^2\\ P &\mapsto (\pm a, \pm b).\end{aligned}$$

Dove l'utilizzo del simbolo $\pm$ sta ad indicare l'opportuna scelta del segno dei segmenti, da operare in base alla posizione di A e B (se A giace nella semiretta positiva di x, sceglieremo a; e così via). D'ora in avanti, a costo di un leggero abuso di notazioni, indicheremo anche $P = (\pm a, \pm b)$ se $\varphi(P) = (\pm a, \pm b)$.

La funzione φ appena definita è *iniettiva*: se infatti, presi i punti P e Q, vale $\varphi(P) = (\pm a, \pm b) = \varphi(Q)$, allora tracciando per $\pm a$ la perpendicolare (unica) a x dovremo incontrare sia P che Q, che quindi giacciono sulla stessa retta; analogo se tracciamo la perpendicolare a y passante per $\pm b$. Queste due rette hanno due punti in comune (P e Q), ma non possono coincidere: perché ad esempio la perpendicolare a x è parallela a y, cosa che la perpendicolare a y, ovviamente, non è. Allora $P = Q$.

La funzione è anche *surriettiva*: preso un qualsiasi $(\pm a, \pm b) \in \mathbb{K}^2$, innalzando le perpendicolare per $\pm a$ e $\pm b$, rispettivamente a x e a y, si determinano due rette che debbono intersecarsi (pena la non validità di (**P**), e in particolare della Proposizione (I.30)), individuando un certo P tale che, per costruzione, $\varphi(P) = (\pm a, \pm b)$.

Dobbiamo ora dimostrare siano verificate le quattro proprietà della Definizione 2.70.

Dimostriamo prima questa sorta di *piccolo lemma*:

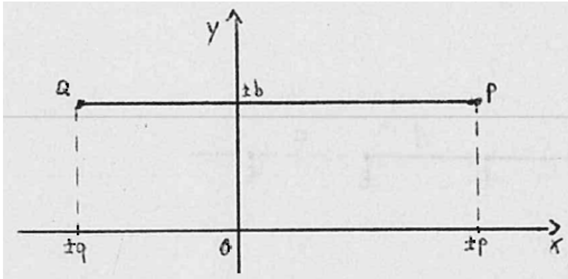
se P e Q sono due punti tali che la retta PQ sia parallela all'asse x, allora $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ hanno stessa componente y.

Infatti, se $\varphi(P) = (\pm p_1, \pm p_2)$ e $\varphi(Q) = (\pm q_1, \pm q_2)$, la retta PQ è l'unica retta per P parallela a x, e anche l'unica retta per Q parallela sempre a x, deve quindi intersecare y simultaneamente in $\pm p_2$ e $\pm q_2$. Non potendo tale retta coincidere con l'asse y, allora $\pm p_2 = \pm q_2$. Lo stesso discorso può essere ovviamente applicato alle componenti x, qualora la retta fosse verticale.

Inoltre,

se $\varphi(P) = (\pm p, \pm b)$ e $\varphi(Q) = (\pm q, \pm b)$, osserviamo che $\overline{PQ} \in |q - p|$.

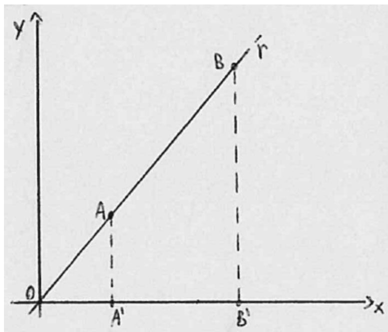
Se infatti costruiamo il quadrangolo $PQ(\pm q)(\pm p)$, esso è per costruzione un parallelogramma, e dunque ha lati opposti congruenti. Non è a questo punto difficile convincersi che la base di tale quadrangolo sia effettivamente la classe $|q - p|$ (dove è stato usato il valore assoluto per assicurarsi di avere una classe positiva). Discorso del tutto analogo se la retta PQ fosse stata parallela all'asse y. In poche parole, possiamo identificare segmenti orizzontali e verticali con le loro proiezioni sull'asse rispettivamente x e y.



a) Sia r una retta nel piano. Supponiamo che non sia ortogonale a nessuno dei due assi. L'unica difficoltà sta nel porre attenzione ai segni delle componenti di ciascun punto della retta. A tal proposito facciamo la seguente osservazione: supponiamo che la retta r passi per l'origine O, e siano A e B due suoi punti diversi da O.

Se A e B stanno dalla stessa parte della retta r rispetto a O, allora le loro proiezioni sull'asse x, rispettivamente y, stanno dalla stessa parte dell'asse x, rispettivamente y, rispetto a O.

Infatti: dato che r non è ortogonale all'asse x non può coincidere con l'asse y, in particolare i punti A e B non appartengono a tale asse; supponiamo stiano dalla stessa parte di r, e siano A' e B' le loro proiezioni su x (le quali anch'esse non possono giacere sull'asse y). L'asse y divide il piano in due parti.
Ora, A' deve giacere dalla stessa parte di A, perché il segmento $\overline{AA'}$, porzione della retta AA' parallela ad y, non può intersecare y; stesso discorso per B e B' (questo vale indipendentemente che A e B giacciano dalla stessa parte di r o meno). Inoltre la retta r ha solo O come intersezione con tale asse, e allora, visto che *non* vale $A{*}O{*}B$, A e B giacciono anche dalla stessa parte del piano. Dunque i quattro punti giacciono dalla stessa parte del piano; in particolare il segmento $\overline{A'B'}$ (porzione dell'asse x) non interseca l'asse y.



Visto che asse x e asse y hanno intersezione O, allora O non giace fra A' e B'. Ovvero A' e B' giacciono dalla stessa parte dell'asse x.

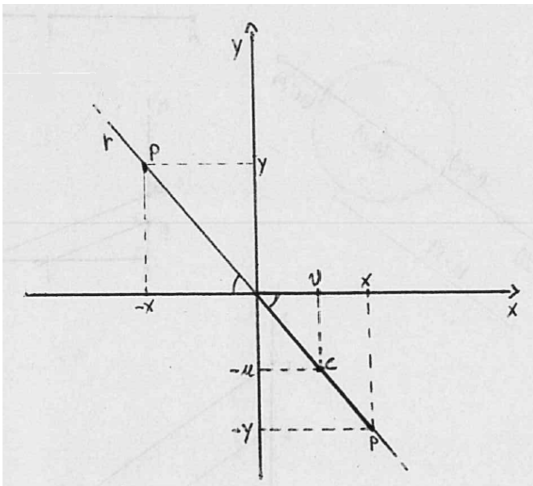
Logicamente se A e B avessero giaciuto da parti opposte di r, il ragionamento fatto avrebbe portanto alla conclusione che anche A' e B' giacessero da parti opposte di x. Inoltre il discorso può essere ripetuto per l'asse y.

Sia dunque r una retta obliqua (i.e. non ortogonale agli assi) passante per O. Sia C un suo altro punto qualsiasi. Possiamo supporre che C abbia ascissa positiva, ovvero che la sua proiezione su x stia sul semiasse positivo delle x. Se così non fosse basterebbe trasportare il segmento $\overline{OC}$ sull'altra semiretta di r rispetto a quella in cui si trova, l'osservazione sopra ci porterebbe a concludere che anche la sua ascissa si sposta sull'altra semiretta e diventa positiva. Sia dunque $C = (v, \pm u)$. Non sappiamo ancora il segno dell'ordinata (cioè della proiezione su y): ora lo supporemo negativo, ma tutti i ragionamenti successivi avranno ancora validità anche se fosse positivo. Allora $C = (v, -u)$.

Sia $P = (\pm x, \pm y)$ un qualsiasi punto di r, diverso da O e da C. Se P e C giacciono dalla stessa parte di r rispetto ad O, allora dovranno fare lo stesso anche le loro componenenti rispetto agli assi; i segni dovranno dunque concordare e varrà: $P = (x, -y)$. Inoltre gli angoli $\widehat{POx}$ e $\widehat{COv}$ coincidono. Se, viceversa, P e C giacessero da parti opposte di r, si avrebbe $P = (-x, y)$, e i due angoli appena citati sarebbero opposti al vertice O. In ambo i casi i triangoli POx (o $PO(-x)$) e COv sono simili. Allora possiamo usare le Proposizioni 2.82 e 2.83 e dedurre che i lati di tali triangoli sono in proporzione:

$$y : u = x : v.$$

(Nella quale si sono identificati i lati - verticali od orizzontali - dei triangoli con le loro proiezioni sugli assi, per mezzo del piccolo lemma sopra).



Tale proporzione ha, per definizione, il significato di:

$$ux + v(-y) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad u(-x) + vy = 0.$$

In ambo i casi il punto P, che stia o meno dalla stessa parte di C, ha coordinate soluzione dell'equazione (in x', y'): $ux' - vy' = 0$.

Il caso in cui r non passi per O, ma per un punto $A = (\pm a, 0)$, si può trattare allo stesso modo, avendo l'accortezza di considerare le componenti di P e C non in virtù della loro positività, ma del loro essere maggiori o minori delle componenti di A. In particolae si perviene ad una equazione come quella che segue:

$$ux' - vy' + w = 0.$$

Quindi, se un punto P appartiene a r, $\varphi(P)$ soddisfa l'equazione lineare sopra scritta, che è una retta di $\mathbb{K}^2$. Quindi ogni punto P di r viene mandato, attraverso φ, in un punto di $ux - vy + w = 0$. Il viceversa segue da considerazioni simili e sempre dalla Proposizione 2.82.

Il caso di rette orizzontali è anche più semplice: è una mera conseguenza del lemma sopra. Perciò, sia r parallela all'asse x, e dunque intersecante l'asse y

in un certo punto $A = (0, \pm a)$. Sia P un punto su r; allora dovrà soddisfare l'equazione: $y = \pm a$.

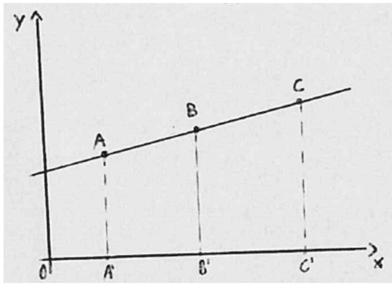
Il caso di rette verticali è analogo.

b) Escludiamo momentaneamente il caso di rette verticali. Siano allora dati i punti $A = (\pm a_1, \pm a_2)$, $B = (\pm b_1, \pm b_2)$ e $C = (\pm c_1, \pm c_2)$, tali che $A * B * C$. Notiamo intanto che, per il punto *a)*, $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ e $\varphi(C)$ giacciono su una retta di $\mathbb{K}^2$. Rimane da dimostrare la disuguaglianza fra le loro componenti.

Proiettiamo tutti questi punti sull'asse x, individuando dunque $A' = (\pm a_1, 0)$, $B' = (\pm b_1, 0)$ e $C' = (\pm c_1, 0)$. Dato che i tre punti A, B e C non giacciono su una retta verticale, allora A e C non giacciono su BB', e dato che $A * B * C$, allora giacciono da parti opposte rispetto a BB'. Possiamo allora iterare il ragionamento fatto in apertura del punto *a)*, sostituendo all'asse y la retta BB'. Allora $A' * B' * C'$.

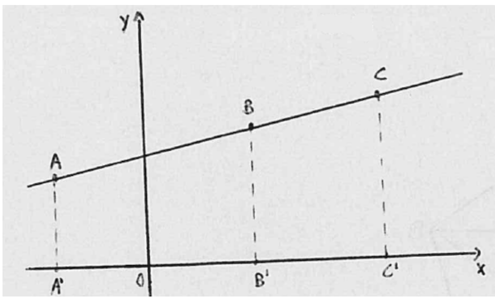
Vogliamo provare che $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$, ovvero che $\pm a_1 < \pm b_1 < \pm c_1$, oppure $\pm c_1 < \pm b_1 < \pm a_1$.

Supponiamo che tutti e tre i punti A', B' e C' stiano nel semiasse positivo delle x, allora varrà che $\overline{OA'} < \overline{OB'} < \overline{OC'}$, oppure $\overline{OC'} < \overline{OB'} < \overline{OA'}$; i quali implicano rispettivamente le disuguaglianze $a_1 < b_1 < c_1$ e $c_1 < b_1 < a_1$.



Se tutti i punti si trovassero nel semiasse negativo la dimostrazione sarebbe analoga, solo scambiando i versi delle disuguaglianze.

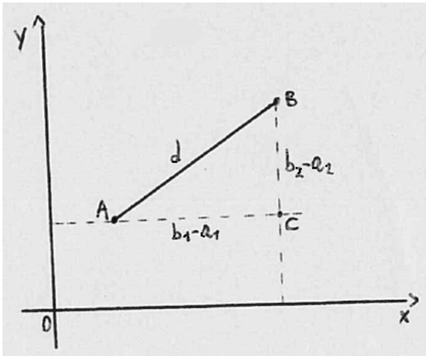
Se i punti hanno segni discordi possono presentarsi più casi, tutti riconducibili al seguente (è evidente che non possa essere B ad essere discorde da entrambi gli altri; il discorde o è A, oppure è C): $A' = (-a_1, 0)$ negativo, $B' = (b_1, 0)$ e $C' = (c_1, 0)$ positivi. Immediato è che $-a_1 < b_1$. Ma dato che $A' * B' * C'$, e che $A' * O * B'$ e $A' * O * C'$, allora, per l'ordinamento di quattro punti, vale $O * B' * C'$. Perciò $\overline{OB'} < \overline{OC'}$. Da cui $b_1 < c_1$.



Il caso di punti allineati su rette verticali procede analogo, ma proiettando i punti sull'asse y.

c) In questo passaggio i segni delle componeneti hanno relativa importanza, dunque porremo i simboli a_1, a_2, ecc... come sia positivi che negativi. Siano dunque $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ due segmenti nel piano Π. Supponiamo che nessuno dei due giaccia su una retta orizzontale o verticale.

Consideriamo allora $\varphi(A) = (a_1, a_2)$ e $\varphi(B) = (b_1, b_2)$. Possiamo proiettare A sull'asse y e B sull'asse x, le due rette si incontreranno in un punto C. Dato che $\overline{AB}$ è obliquo, C non può giacere sulla retta AB. Individuiamo allora un triangolo rettangolo ABC. Inoltre, essendo C sia sulla retta $y = a_2$, sia sulla retta $x = b_1$, avrà coordinate (b_1, a_2). Sfruttando il piccolo lemma all'inizio di questa dimostrazione, possiamo identificare i lati del triangolo con le classi $|b_2 - a_2|$ e $|b_1 - a_1|$.



Sia ora d la classe del segmento $\overline{AB}$; il Teorema di Pitagora (Proposizione 2.84) ci garantisce che:

$$d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

Per la medesima ragione, usando notazioni simili per A' e B', possiamo evincere che:

$$d'^2 = (b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)^2.$$

I due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sono congruenti se e solo se le rispettive classi di congruenza coincidono, ovvero se e solo se $d = d'$. Questo, ricordando che sia d che d' sono positivi in $\mathbb{K}$, equivale a:

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)^2};$$

che altro non è se non la definizione di congruenza fra segmenti in $\mathbb{K}^2$.

Qualora almeno uno dei due segmenti fosse orizzontale: supponiamo per esempio $A = (a, c)$ e $B = (b, c)$ (con $a < b$). Allora:

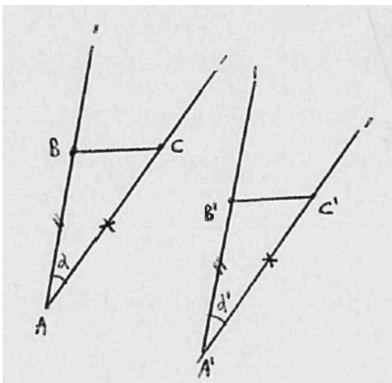
$$\overline{AB} \in b - a = \sqrt{(b-a)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (c-c)^2}.$$

Siamo quindi in grado di ricondurre questo caso al precedente.

Così anche per segmenti verticali.

d) Siano α e α' due angoli di vertici rispettivamente A e A'.

Sulle semirette dell'angolo α individuiamo due punti B e C; mentre sulle semirette di α' i due punti B' e C'. Possiamo supporre che $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$. Osserviamo ora che, nell'ipotesi $\alpha \equiv \alpha'$, applicando il primo criterio di congruenza dei triangoli, allora conseguiamo che $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$; e che, viceversa, se $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, applicando il terzo criterio di congruenza dei triangoli, allora $\alpha \equiv \alpha'$.



In parole povere $\alpha \equiv \alpha'$ se e solo se $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

Applichiamo ora le conseguenze del punto *c)*: $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ se e solo se $\overline{\varphi(B)\varphi(C)} \equiv \overline{\varphi(B')\varphi(C')}$. D'altra parte, essendo $\mathbb{K}^2$ un piano di Hilbert, e valendo dunque i criteri di congruenza, allora $\overline{\varphi(B)\varphi(C)} \equiv \overline{\varphi(B')\varphi(C')}$ se e solo se $\varphi(\alpha) \equiv \varphi(\alpha')$.

Abbiamo appena espresso una catena di equivalenze logiche che dimostra la tesi che si voleva provare.

Abbiamo in questo modo provato ciascuna parte dell'enunciato del Teorema, che risulta quindi dimostrato. $\square$

Dopo questa lunga digressione sull'algebra dei segmenti e l'introduzione delle coordinate in un piano di Hilbert, torniamo alla domanda che ci eravamo posti in apertura della sezione: è possibile trovare un modello per un piano di Hilbert soddisfacente agli assiomi di tutti e cinque i gruppi, che non sia il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$? Avevamo accennato che la risposta sarebbe stata negativa, ma non ne avevamo dato una prova. Ora, per mezzo di tutti i risultati che dalla digressione siamo riusciti a ricavare, possiamo finalmente enunciare e dimostrare la seguente:

Proposizione 2.87. *Sia* Π *un piano di Hilbert che soddisfi anche all'assioma delle parallele (**P**) e agli assiomi di continuità (**A**) e (**D**); allora è isomorfo (come geometria) al piano cartesiano sopra i numeri reali* $\mathbb{R}^2$*.*

Dimostrazione. Sia Π il piano di Hilbert come da ipotesi. Il Teorema 2.16 ci garantisce che Π è isomorfo (come geometria) al piano cartesiano $\mathbb{K}^2$ dell'algebra dei segmenti. Nel piano $\mathbb{K}^2$, in particolare, dovrà allora valere anche l'assioma di continuità (**D**) (Proposizione 2.85), e così il campo $\mathbb{K}$ dovrà dunque essere completo. Tuttavia, esiste un unico (a meno di isomorfismi di campi ordinati) campo ordinato completo, ovvero $\mathbb{R}$ (Osservazione 46). Dunque $\mathbb{K}$ è isomorfo (come campo ordinato) a $\mathbb{R}$; e perciò, applicando la Proposizione 2.86, concludiamo che $\mathbb{K}^2$ è isomorfo (come geometria) a $\mathbb{R}^2$, e così anche Π. $\square$

Abbiamo quindi appena dimostrato che un qualsiasi piano di Hilbert ove valgano gli assiomi di tutti e cinque i gruppi, ovvero un qualsiasi modello per la geometria dei *Fondamenti*, deve necessariamente essere isomorfo al piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Quest'ultimo si caratterizza, dunque, come l'*unico modello* - a meno di identificazioni astratte rese possibili dall'isomorfia - della geometria assiomatica di Hilbert, costituita da tutti e cinque i gruppi di assiomi.

Appendice A

Sull'approccio formalista

Dedichiamo adesso qualche parola al riprendere, e dunque approfondire, l'aspetto epistemologico e formale del lavoro che Hilbert ha svolto nei *Fondamenti della geometria*.

Recuperando cose già dette nelle Sezioni 1.2 e 2.1, ricordiamo che la geometria nacque, con ogni probabilità, dalla necessità dello studio dello spazio fisico. Questa disciplina matematica aveva, presso i popoli della Mesopotamia e dell'Egitto, soprattutto finalità di tipo pratico. Che fosse la misurazione di un campo o la costruzione di un altare, la geometria era vista nel suo stretto legame con la realtà.

Ancora nei secoli successivi questo modo di intendere la geometria rimase.

Il lavoro dei grandi matematici greci, da Talete ai pitagorici, da Eudosso a Euclide, avvicinò la geometria ad un mondo astratto, fatto di oggetti idealizzati che andavano trattati attraverso processi dimostrativi ipotetico-deduttivi. Ciononostante la geometria manteneva un forte indirizzo sperimentale: per quanto si fossero, i matematici, avvicinati all'astrazione, la geometria rimaneva ancora una materia i cui concetti, gli enti e le proprietà, erano suggeriti da - e riflettevano in piena conformità - enti e proprietà caratteristici del mondo fisico. La geometria era una formalizzazione matematica di un'intuizione spaziale e si presentava, perciò, come una «fisica dell'estensione».[1] In questo senso, per quanto i processi dimostrativi avevano, almeno nelle intenzioni, una struttura ipotetico-deduttiva, la quale faceva discendere da poche affermazioni prime (gli assiomi) tutte le proposizioni successive attraverso strumenti puramente logici, tuttavia permaneva forte un richiamo, più o meno esplicito, alla realtà e all'intuizione fisica. Dunque perché il primo postulato di Euclide può essere assunto per vero e posto in cima alla catena di deduzioni di tutte le successive dimostrazioni? Perché, molto semplicemente, la verità di tale postulato era suggerita da un'esperienza sperimentale, o se non altro da un'intuizione spaziale, sulle quali tutti i matematici erano concordi. È l'auto-evidenza dei postulati che porta ad una loro piena accettazione. La realtà fisica, dunque, non è un limite, quanto un ausilio: essa si fa carico della responsabilità di essere garante della coerenza del teoria geometrica, come della veridicità dei postulati, quando questi sono desunti dall'esperienza.

[1] [2, p. 5]

Un tale approccio non appaga pienamente il matematico moderno. Seguendo il pensiero che già fu di Cartesio, nacque un ragionevole dubbio nei confronti della realtà sensibile e del suo ruolo di legittimatrice della verità. Che l'auto-evidenza empirica potesse essere sufficiente non convinceva la totalità dei matematici del ventesimo secolo, anche perché l'esperienza sensibile poteva essere, volendo citare sempre Cartesio, ingannata. D'altra parte la stessa verità manifesta di alcuni postulati non era poi così manifesta: si è già detto come i dubbi sul celebre V postulato nacquero forse già in seno allo stesso Euclide, proprio perché tale postulato non appariva del tutto evidente. Si è poi anche visto come il metodo dimostrativo adottato da Euclide, per quanto ottimo negli intenti, mostrava il fianco a più di una critica. Da qui il lavoro di Hilbert: un progetto di assiomatizzazione di tutta la geometria che permettesse - e questa volta pienamente - attraverso procedimenti rigorosi, di ricostruire gli *Elementi* e di fondare su solide basi questo ambito della matematica. Il tutto è avvenuto attraverso un forte processo di astrazione, ancora più grande di quello, pur notevole, operato dai matematici greci. Tacendo cosa siano punti, rette e piani, e quale sia la loro natura, Hilbert predilige un approccio relazionale, che descrive gli enti primitivi solo in virtù delle relazioni reciproche che li legano. Bisognava abbandonare il livello empirico-intuitivo delle vecchie idee geometriche e concepire gli enti della geometria soltanto come elementi di certi insiemi assegnati. Si è già detto: punti e rette sono meri elementi di due insiemi e devono soddisfare a certe regole fissate dagli assiomi. Qualsiasi siano questi insiemi, fintantoché rispettano le regole assegnate, potranno essere a ragione considerati come insiemi di punti, rette e piani, poco importa se poi, "in realtà" sono tavoli, sedie o boccali di birra. Se dunque per Euclide la costruzione assiomatica era una descrizione di proprietà di oggetti (che avevano una propria dignità nel mondo fisico), per Hilbert è una descrizione di relazioni fra nomi. Dopodiché, gli assiomi acquisiscono una nuova prospettiva: non più verità dedotte dall'esperienza, ma affermazioni arbitrariamente assunte a fondamento della costruzione logica. Che un assioma sia vero o falso nella realtà sensibile non tange significativamente il matematico, che anzi è portato a studiare con interesse quali nuovi risultati possono essere ora dedotti se lo si assume a monte della catena di deduzioni logiche oppure no. L'auto-evidenza dei postulati euclidei non ha più l'importanza che possedeva prima.

Questi fatti portano, inevitabilmente, a quello che appare come troncamento del legame tra geometria e realtà: la caratteristica essenziale della geometria (ma in verità di tutta la matematica) viene a costituirsi dalla sua struttura logica e non più da una qualsiasi asserzione relativa al mondo sensibile in essa contenuta.

In effetti il lavoro di Hilbert ha una struttura pienamente formalista. Lo stesso Formalismo, come corrente di pensiero matematico degli inizi del ventesimo secolo, ha in Hilbert il suo massimo esponente. Secondo questo pensiero le teorie matematiche, come anche la nozione di deduzione, hanno luogo fra espressioni linguistiche, a loro volta costituite da segni, e attraverso la logica diviene possibile esprimere certi enunciati attraverso delle formule. Gli assiomi, poi, dettano le regole che permettono di derivare formule da altre formule. In questo senso i segni matematici di cui si fa utilizzo sono totalmente svuotati di significato: la matematica si tramuta in un gioco privo di significato, che fa ricorso a contrassegni a loro volta privi di significato e nel quale si devono seguire alcune regole fissate a priori. Tanto che, come fa notare - non senza una vena polemica - Poincaré, in *Scienza e metodo*, per dimostrare un teorema non sarebbe neppure più necessario, né utile, sapere cosa esso significhi: il geometra potrebbe essere sostituito da una macchina nella quale da una parte si introducono gli assiomi e dall'altra ne escono i teoremi.[2]

Un approccio tanto astratto non poteva infatti non destare perplessità o critiche da parte di alcuni matematici contemporanei. Le prime perplessità derivano proprio dal reciso legame con il mondo fisico: se la matematica è stata trasformata in un gioco dove si adoperano segni privi di un significato, quale può essere allora l'utilità di una tale disciplina? Tanto maggiore è l'astrazione, tanto maggiore è l'allontanamento dal mondo fisico. Nel momento in cui l'astrazione è divenuta tale da prendere a postulati delle affermazioni totalmente arbitrarie, e tale che gli enti con cui si lavora non vengono neppure più definiti se non in funzione degli assiomi, il rischio è di creare una teoria matematica forse coerente, forse elegante, ma la cui utilità è poi concretamente nulla. Un bellissimo gioco formale che tradisce le origini della geometria stessa, così vicine alla pratica. È anche vero, però, che a questo dilemma si può dare una parziale risposta notando come la geometria che Hilbert è intenzionato a edificare è, forse implicitamente, di carattere empirico: gli assiomi sono suggeriti dai sensi, così come le mutue relazioni tra gli enti. In un certo senso il rapporto con lo spazio fisico non è stato totalmente reciso. Quella che Hilbert compie è "un'analisi logica della nostra intuizione dello spazio". Per quanto solo in parte dichiarato, e sicuramente non esplicitamente quanto fu per i matematici dell'antichità, rimane l'intenzione di dare una descrizione matematica del mondo fisico, o se non altro di fondare una teoria che possa avere una significativa utilità nell'atto pratico. A posteriori deve essere possibile, in conclusione, effettuare un'assegnazione di significati agli assiomi e agli enti della geometria per mezzo del mondo empirico, in modo tale da non trasformare la matematica in un gioco vuoto e sterile.

Abbiamo appurato che il rapporto matematica-realtà sia drasticamente mutato. Questo porta a un sostanziale cambiamento dal punto di vista epistemologico: se gli enti non sono più definiti e non c'è più un diretto richiamo all'esperienza, e se la matematica è ora un puro sistema formale, non è più così chiaro come vada riguardata dal punto di vista epistemologico. Un'altra conseguenza di questo fatto è alla base di una delle critiche che il matematico e filosofo tedesco G. Frege (1848-1925) muoverà a Hilbert. Il fulcro della diatriba riguarda la natura stessa della verità matematica. Per Frege è l'intuizione spaziale a garantire che gli assiomi siano veri, e dunque a liberare il matematico dalla pesante necessità di dimostrare la loro coerenza. La non esistenza di una realtà oggettiva che faccia da garante, per mezzo della sua evidenza, a quelle ipotesi iniziali che sono gli assiomi porta in essere il dubbio che esse non possano condurre, attraverso una delle infinite deduzioni da loro ricavabili, a una qualche contraddizione. Per Hilbert la verità degli assiomi e l'esistenza degli enti possono essere affermate soltanto se non si è in grado di giungere, attraverso di essi, ad una contraddizione. Come si è visto (Sezione 2.4) la verifica diretta che tra le molteplici conseguenze degli assiomi non ci siano contraddizioni è praticamente impossibile. La consistenza della geometria, allora, viene dimostrata mediante la costruzione di un modello per il sistema di assiomi, ovvero il piano cartesiano reale. In questo modo, però, il problema non viene risolto, quanto semmai spostato dalla coerenza della geometria alla coerenza della teoria dei numeri reali, e da lì alla coerenza dell'aritmetica. In parole povere si era soltanto riusciti ad

[2][8, p. 127]

effettuare un passaggio di testimone, ottenendo al più una prova della *coerenza relativa* della teoria.

Rimaneva però aperto il problema della coerenza dell'aritmetica. Gli assiomi di Peano non risolvevano il dilemma perché una dimostrazione della loro coerenza non è stata possibile. È proprio da queste premesse che muove il *secondo problema di Hilbert*: durante il Secondo Congresso Internazionale di Matematica di Parigi (1900), il matematico tedesco presentò una relazione nella quale esponeva quelli che, a suo giudizio, sarebbero dovuti essere i problemi che maggiormente avrebbero impegnato i matematici del ventesimo secolo. Propose ben ventitrè problemi, il secondo dei quali chiedeva se fosse possibile dimostrare la coerenza dell'insieme di assiomi dell'aritmetica.

Proprio nel corso degli anni '20 del novecento, Hilbert e la sua scuola iniziarono un ambizioso tentativo di dimostrazione della coerenza dell'aritmetica. Evidentemente, se ne fossero stati in grado, avrebbero risolto non solo il problema della consistenza della geometria, ma della matematica tutta. Sfortunatamente tale tentativo era destinato a fallire, e a darne il colpo di grazia fu il matematico austriaco K. Gödel (1906-1978), che nel 1931 enunciò i due celebri teoremi di incompletezza, teoremi i quali ebbero un grande impatto sul mondo della logica matematica. Il primo di tali teoremi sancisce che se una teoria dell'aritmetica risultasse essere non-contraddittoria, allora esisterebbero enunciati indecidibili in essa. In poche parole, la teoria sarebbe *incompleta*: dovrebbe esistere una formula φ della teoria tale che nè φ nè la sua negazione $\neg\varphi$ sarebbero dimostrabili nella teoria. Il secondo teorema di incompletezza, invece, afferma che se una teoria dell'aritmetica gode della proprietà di non-contraddittorietà, allora non è possibile dimostrarne la non-contraddittorietà con metodi formalizzabili all'interno di quella teoria. Il secondo teorema di incompletezza sta dicendo, in sostanza, che nel momento stesso in cui si ammette che l'aritmetica è coerente, allora si deve rinunciare alla possibilità di utilizzare gli strumenti di tale teoria per dimostrarne la coerenza stessa. Questo pose una pietra tombale sul Programma di Hilbert, rendendo quindi evidente che l'aritmetica non era in grado di *dimostrare* la coerenza della geometria. Si poteva, al più, confidare nella coerenza della prima, ricavando così anche la coerenza della seconda.

Altre critiche, di carattere assai diverso da quelle viste fino ad ora, sono state mosse a Hilbert sempre da Poincaré, e sempre nello scritto *Scienza e metodo*. Allontanandosi da questioni strettamente teoretiche, Poincaré si sofferma, nel Capitolo secondo del Libro secondo, su questioni inerenti alla didattica della matematica. Il discorso di Poincaré parte dall'osservare come il concetto di buona definizione sia assai diverso per un matematico (o un logico) e per uno studente. Dove per il primo una buona definizione è tale se si applica a tutti e soli gli oggetti che si vogliono definire, per l'alunno è quella che viene compresa. Osserva Poincaré come definizioni assai rigorose, eleganti e magari tenute in grande stima dai matematici, possano non essere efficaci a livello didattico. La matematica come scienza e la matematica come insegnamento non sempre corrono parallele.

«Siamo in una classe quarta; il professore detta: *la circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto interno detto centro*. L'alunno diligente scrive questa frase sul suo quaderno, quello negligente disegna pupazzetti, ma né l'uno né l'altro hanno capito. Il professore prende allora il gesso e traccia una circonferenza sulla lavagna. *Ah* - pensano i ragazzi - *perché non l'ha detto subito; una circonferenza è un tondo, avremmo capito.* [...] Ma sarebbe anche necessario convincerli che essi non capiscono ciò che invece credono di capire, indurli a rendersi conto della rozzeza del loro concetto primitivo e a desiderare da soli che venga perfezionato e dirozzato.»[3]

Questo esempio, portato dallo stesso Poincaré, mostra esattamente cosa egli intendesse dire.

Come si inserisce dunque Hilbert all'interno di detta questione? Evidentemente l'approccio così astratto adottato dal matematico tedesco non può essere proposto a cuor leggero ad uno studente. Per quanto Poincaré sostenga di ammirare il lavoro di Hilbert, allo stesso modo è convinto che mai lo cosiglierebbe ad uno studente liceale: Hilbert, abbiamo visto, comincia la sua trattazione senza neppure dare una definizione di punto, retta e piano, ma li presenta come sistemi di oggetti. Che cosa sono questi oggetti? Sappiamo bene che per Hilbert questa domanda non ha interesse. Dunque chi si appresta alla lettura dei *Fondamenti* non ne otterrà una risposta. Allo stesso modo nozioni come "giacere su", "stare fra" ecc... vengono introdotte come mere relazioni reciproche indicate attraverso costrutti linguistici, e mai definite. Soltanto le loro proprietà vengono presentate (per mezzo degli assiomi). Un tale modo di procedere, pur nel suo elegante formalismo, è, ad opinione di Poincaré, assolutamente sconsigliabile nell'insegnamento.

Procedere immediatamente da forme così astratte e formali di definizioni non porterebbe a nulla; e dunque è forse meglio procedere per gradi. Poincaré lo spiega con un altro esempio: in questo caso utilizzando le frazioni. Nelle scuole elementari vengono introdotte le frazioni per via empirica: si dividono mele oppure torte; si procede poi, man mano che si avanza nel percorso scolastico, in definizioni sempre più rigorose, fino al punto in cui le frazioni vengono presentate come coppie di numeri interi, per le quali possono essere definite mediante convenzione delle operazione; queste operazioni, verrà poi dimostrato, godono di tutte le proprietà di calcolo già note per gli interi. Procedere perciò per gradi, partendo anche da immagini sensibili, e avanzando dunque per successive astrazioni, ripercorrendo tutti i passi che storicamente hanno portato alla definizione di quell'oggetto matematico. Da una sua prima formulazione a una corretta definizione. Man mano lo studente acquisirà dimestichezza con quell'oggetto (nel nostro caso si sono dette le frazioni) come anche con le operazioni su di esso, e in questo modo la sua mente, ormai affinata da un'educazione matematica e presa familiarità con l'oggetto stesso, sarà pronta ad accogliere una più rigorosa definizione; anzi, sarà portata in prima persona a farne richiesta.

D'altra parte, un senso pratico non può mancare nell'insegnamento della materia, per quanto gli sviluppi della matematica pura abbiano avuto come conseguenza un suo sempre maggior allontanamento dalla realtà, al prezzo del rigore assoluto. Per il logico, sostiene Poincaré, questo può anche essere un bene, ma in termini più generali non viene meno la necessità di trovare collegamenti tra gli oggetti dello studio matematico e gli oggetti reali che l'esperienza ci fornisce, dovendo essere sicuri che le tanto rigorose definizioni fornite si addicano anche agli enti del mondo sensibile. Questo non solo perché altrimenti la matematica si ridurrebbe ad una collezione di teoremi rigorosi quanto inutili, ma anche perché

[3][8, pp. 104-105]

gran parte degli alunni chiede a gran voce che gli vengano forniti strumenti per affrontare la realtà stessa.

Infine, un'ultima critica, questa di carattere spiccatamente geometrico, riguarda l'indipendenza degli assiomi. Abbiamo già detto che una significativa proprietà che Hilbert richiedeva al suo sistema assiomatico era per l'appunto l'indipendenza. Se un dato assioma era deducibile dai rimanenti, il mantenerlo all'interno del sistema costituiva un'iperfezione dello stesso; la presenza di quell'assioma è infatti sovrabbondante e non necessaria. Inoltre, trattandosi gli assiomi di affermazioni considerate vere a priori, senza alcuna garanzia di auto-evidenza, è ovvio che minore è il numero di queste assunzioni, meno artificiosa risulterà la teoria. Tutte queste considerazioni non sono tuttavia valide nel momento in cui si parla di didattica. Poincaré fa infatti notare come l'indipendenza non sia affatto una proprietà poi così desiderabile: taluni assiomi siamo costretti ad assumerli se vogliamo sviluppare una teoria significativa, ma anche se ne aggiungiamo qualcuno in più, che pure potrebbe essere dimostrato successivamente come teorema, non è certo un grande danno. Ciò che Poincaré ritiene fondamentale dell'introduzione del metodo assiomatico nelle scuole, è che si impari a ragionare correttamente sulla base degli assiomi che si è scelto di assumere, acquisendo pienamente il metodo ipotetico-deduttivo. La presenza di qualche assioma in più può snellire la trattazione ed evitare che gli studenti si impantanino in tediose dimostrazioni, le quali rischiano di farli focalizzare più sugli aspetti di una "logica in piccolo", concentrata sui più minuti dettagli logici di una dimostrazione, e di far loro perdere di vista qual è la visione d'insieme. Non è un caso, infatti, che alcune volte - e lo si è sempre fatto notare - anche noi ci siamo allontananti dalla formulazione che Hilbert ha adottato originariamente per i suoi assiomi, scegliendo enunciati magari sovrabbondanti, ma più funzionali ai fini dell'esposizione.

Proprio a questo proposito è da osservare come la totalità dei moderni testi di geometria rivolti alle scuole adottino un approccio che non è né quello puramente euclideo, né quello puramente hilbertiano. Hanno preferito, invece, scegliere una strada che fosse intermedia fra le due. Prendendo come esempio [1]: punti, rette e piani non vengono qui presentati come elementi di insiemi astratti, assoggettati a regole dettate da assiomi, ma come enti che dovrebbero essere ben noti - almeno intuitivamente - a tutti quanti, e dunque dotati di una ben precisa identità ontologica. Gli assiomi presentati, dal canto loro, ricordano molto quelli di Hilbert, ma sono in numero decisamente maggiore. Come detto, didatticamente parlando, inserire come postulato un'affermazione che potrebbe invece essere dimostrata non è da ritenersi un errore particolarmente grave. In questo senso la possibilità di dividere un piano per mezzo di una retta, che Hilbert dimostra nella Proposizione 2.7, viene presentato come postulato ([1, p. 10]). Similmente, viene presentanta come postulato l'esistenza e l'unicità del punto medio di un segmento ([1, p. 19]), quando invece per l'esistenza si può tranquillamente ricorrere alla Proposizione 2.39 e l'unicità non dà maggiori crucci, essendo una mera conseguenza degli assiomi di ordine e di congruenza. In sostanza hanno scelto di adoperare una strada forse formalmente meno elegante, ma - almeno nelle intenzioni - più semplice in un'ottica di insegnamento-apprendimento.

Appendice B

Definizioni:

I. Punto è ciò che non ha parti.

II. Linea è lunghezza senza larghezza.

III. Estremi di una linea sono punti.

IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa.

V. Superficie e ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

VI. Estremi di una superficie sono linee.

VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa.

VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.

IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.

X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui e innalzata.

XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.

XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.

XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.

XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea tale che tutte le rette, le quali cadano sulla linea, a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.

XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.

XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.

XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.

XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.

XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.

XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.

XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Proposizioni (I.1-48):

I.1 Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.

I.2 Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.

I.3 Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.

I.4 Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo].

I.5 Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno uguali fra loro.

I.6 Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali fra loro.

I.7 Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite ed aventi un diverso punto d'incontro.

I.8 Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali.

I.9 Dividere per metà un angolo rettilineo dato.

I.10 Dividere per metà una retta terminata data.

I.11 Su una retta data, da un punto dato su essa, innalzare una linea retta perpendicolare.

I.12 Ad una data retta illimitata, da un punto dato ad essa esterno, condurre una linea retta perpendicolare.

I.13 Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti od angoli la cui somma è uguale a due retti.

I.14 Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto ad essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra loro.

I.15 Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali.

I.16 In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.

I.17 In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

I.18 In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.

I.19 In ogni triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore.

I.20 In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanenete.

I.21 Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore.

I.22 Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente.

I.23 Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineao uguale ad un angolo rettilineo dato.

I.24 Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.

I.25 Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente.

I.26 Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uaguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente.

I.27 Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, le due rette saranno fra loro parallele.

I.28 Se una retta che cada su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.

I.29 Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.

I.30 Rette parallele ad una stessa retta sono parallele anche fra loro.

I.31 Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data.

I.32 In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.

I.33 Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono anch'esse uguali e parallele.

I.34 I parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali.

I.35 Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

I.36 Parallelogrammi che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

I.37 Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

I.38 Triangoli che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

I.39 Triangoli uguali che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche [compresi] fra le stesse parallele.

I.40 Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi fra le stesse parallele.

I.41 Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.

I.42 Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

I.43 In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali fra loro.

I.44 Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

I.45 Costruire un parallelogrammo uguale ad una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo.

I.46 Descrivere un quadrato su una retta data.

I.47 Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

I.48 Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.

Bibliografia

[1] Bergamini M., Trifone A., Barozzi G., *Manuale di geometria - Terza edizione*, Zanichelli, Bologna, 2008.

[2] Berzolari L., Vivanti G., Gigli D. (a cura di), *Enciclopedia delle matematiche elementari, volume II, parte I*, Hoepli, Milano, 1937.

[3] Boyer C. B., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1990.

[4] Frajese A., Maccioni L., *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino, 1970.

[5] Hartshorne R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.

[6] Heath T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements* , Cambridge University Press, Cambridge, 1908.

[7] Hilbert D., *Fondamenti della gometria con i Supplementi di Paul Bernays*, Franco Angeli, Milano, 2009.

[8] Poincaré J. H., *Scienza e metodo*, Einaudi, Torino, 1997.

Ringraziamenti

Giunto alla conclusione della tesi - e di un percorso universitario durato un lustro - non posso esimermi dall'esprimere alcuni dovuti ringraziamenti.

Vorrei cominciare ringraziando le professoresse Silvia Benvenuti e Alessia Cattabriga, per aver accettato di seguirmi nella scrittura di questo elaborato e per avermi fornito tutti quei suggerimenti e quegli aiuti che mi hanno concesso di migliorarlo passo dopo passo.

Ringrazio la mia famiglia, per essermi stata accanto, per avermi dato il sostegno di cui avevo bisogno, per avermi aiutato - nei limiti di quanto fosse lei possibile - e per aver dimostrato interesse per tutto ciò che stavo facendo; al netto, probabilmente, della comprensione dello stesso.

Infine, ma non per importanza, ci tengo a ringraziare qualsiasi persona mi sia stata vicino, anche solo per breve tempo, nel corso di questi ultimi cinque anni. Forse non mi avrà aiutato in fase di stesura della tesi, ma la sua presenza, ne sono convinto, mi ha concesso l'arrichimento di cui avevo bisogno.

Grazie.