

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LA
DIMENSIONE DI HAUSDORFF
E
TECNICHE DI CALCOLO

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

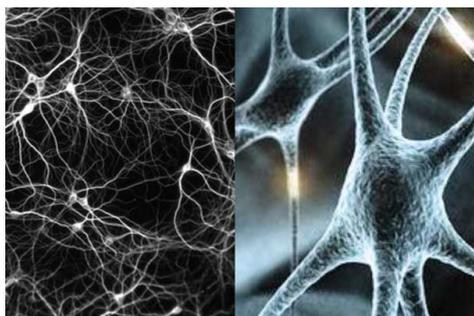
Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Giacomo Cuscela

Sessione unica
Anno Accademico 2017-2018

Introduzione

La natura presenta innumerevoli oggetti cosiddetti autosimilari, cioè caratterizzati da forme che si ripetono su tutte le scale. Esempi lampanti sono il cavolo romano, i fulmini, il nostro sistema vascolare che si rammifica in tutto il corpo, la struttura del nostro encefalo, ma anche più semplicemente un ramo di un abete, in cui ogni singolo rametto riproduce in scala ridotta il ramo e in miniatura l'albero.



(a) *neuroni*



(b) *fulmini*

Questi oggetti sono studiati dalla geometria frattale, fondata dal matematico Benoit Mandelbrot, secondo cui la modellizzazione della realtà attraverso i frattali permette, a differenza della geometria euclidea, di descrivere il mondo che ci circonda. Il concetto intuitivo di dimensione è quello topologico, per cui a una retta assegnamo dimensione 1, a un piano dimensione 2 e allo spazio dimensione 3. L'inadeguatezza, però, della dimensione topologica per la descrizione dei frattali porta a nuovi concetti di dimensione utili a tale scopo: le dimensioni frattali. Tra queste troviamo la dimensione di box-counting e la dimensione di Hausdorff, il tema principale di questo elaborato.

Nel primo capitolo enunciamo i principali risultati di *teoria della misura*, utili per definire la premisura di Hausdorff da cui si ricava la misura α -dimensionale di Hausdorff, che si verifica essere una misura esterna. Dopo aver dimostrato alcune proprietà fondamentali di questa potremo, quindi,

definire la dimensione di Hausdorff e descriverne il comportamento in relazione a isometrie e a mappe lipschitziane. Il primo capitolo termina con il calcolo della dimensione di alcuni fra i più noti e semplici frattali. Il secondo capitolo si pone, invece, come obiettivo quello di esporre tecniche di calcolo della dimensione di Hausdorff. In prima istanza, viene definita la dimensione di box-counting, utilizzata per stimare dall'alto la dimensione di Hausdorff, mentre, a fine capitolo, si presenta il metodo del potenziale teorico, utile per la stima dal basso. Nell'ultimo capitolo si prendono in considerazione gli insiemi autosimilari, per i quali è possibile stimare la dimensione di Hausdorff sotto certe ipotesi.

Il principale scopo, quindi, di questo elaborato è quello di presentare alcune tecniche di stima e di calcolo della dimensione di Hausdorff. Il filo conduttore della tesi è dato da alcuni esempi noti di frattali come l'insieme di *Cantor* e la curva di *Koch*, di cui viene calcolata la dimensione prima manualmente, per poi farlo con le tecniche mostrate.

Indice

Introduzione	ii
1 La dimensione di Hausdorff	5
1.1 Misure Astratte	5
1.2 Misure metriche e insiemi boreliani	7
1.3 Misure di Hausdorff in \mathbb{R}^N	8
1.3.1 Misura di Hausdorff α -dimensionale	8
1.3.2 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane	13
1.4 Dimensione di Hausdorff	15
1.4.1 L'insieme di Cantor	18
1.4.2 La curva di Koch	19
2 Tecniche di calcolo della dimensione di Hausdorff	21
2.1 Box-counting	21
2.2 Tecniche di base	23
2.3 Metodo del potenziale teorico	24
3 Frattali definiti da trasformazioni	27
3.1 Contrazioni e insiemi autosimiliari	27
3.2 Dimensione degli insiemi autosimiliari	31
Bibliografia	35

Elenco delle figure

1.1	esempi di δ -ricoprimenti	10
1.2	Costruzione dell'insieme di Cantor	18
1.3	Costruzione della curva di Koch	20
3.1	Curva di Koch	33
3.2	Triangolo di Sierpinski	34

Capitolo 1

La dimensione di Hausdorff

1.1 Misure Astratte

Definizione 1.1 (misura su X). Se X è un arbitrario insieme non vuoto, si chiama misura su X una funzione

$$m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B \subseteq X$ (m è monotona)
- 3.

$$m\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right) \leq \sum_{k \in N} m(A_k)$$

se $A_k \subseteq X, \forall k \in N$ (m è numerabilmente sub-additiva)

Osservazione 1. Ogni misura m su X è finitamente sub-additiva. Più esplicitamente:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n m(A_k)$$

Questa si ottiene dai punti 1 e 3 prendendo $A_k = \emptyset \quad \forall k \geq n + 1$.

Esempio 1. *La misura esterna di Lebesgue in \mathbb{R}^n è uno degli esempi più importanti di misura. Indicheremo tale misura con μ_n .*

Definizione 1.2. Un sottoinsieme A di X si dice m -misurabile se

$$m(E) = m(E \cap A) + m(E \cap A^c) \quad \text{per ogni } E \subseteq X \quad (1.1)$$

Osservazione 2. Si possono dimostrare le seguenti proprietà degli insiemi m -misurabili:

- Un sottoinsieme A di X è m -misurabile se, e solo se, è misurabile il suo complementare.
- Ogni sottoinsieme A di X avente m -misura nulla è m -misurabile.
- \emptyset e X sono m -misurabili.
- se $(A_k)_{k \in \mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \subseteq N$, è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi di X m -misurabili, allora $\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k$ e $\bigcap_{k \in \mathcal{A}} A_k$ sono m -misurabili. Inoltre se $A_k \cap A_h = \emptyset$ per $k \neq h$,

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} m(A_k)$$

- Se A e B sono sottoinsiemi m -misurabili di X , allora $A \setminus B$ è m -misurabile. Inoltre se $B \subseteq A$ e $m(B) < +\infty$,

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$$

- Se $(A_k)_{k \in N}$ è una successione di sottoinsiemi m -misurabili di X e se $(A_k)_{k \in N}$ è monotona crescente, allora

$$m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$$

(Ricordiamo che se $A_k \uparrow$ si pone $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k \in N} A_k$)

- Se $(A_k)_{k \in N}$ è una successione di sottoinsiemi m -misurabili di X e se $(A_k)_{k \in N}$ è monotona decrescente e se $m(A_1) < +\infty$ allora

$$m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$$

(Ricordiamo che se $A_k \downarrow$ si pone $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k \in N} A_k$)

Definizione 1.3. Il supporto di una misura μ è il più piccolo insieme chiuso X tale che $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$. Diciamo che μ è una misura sull'insieme A se A contiene il supporto di μ . Una misura μ su un insieme limitato in \mathbb{R}^n tale che $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ prende il nome di *distribuzione di massa*.

1.2 Misure metriche e insiemi boreliani

Sia m una misura su uno spazio metrico (X,d) , studiamo la m -misurabilità dei sottoinsiemi chiusi (o, equivalentemente aperti) di X .

Introduciamo la nozione di *distanza fra insiemi* in uno spazio metrico:

Definizione 1.4 (distanza fra insiemi). Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di X si chiama *distanza di A da B* il numero reale

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) / x \in A, y \in B\} \quad (1.2)$$

Si possono verificare le seguenti proprietà della funzione distanza fra insiemi:

Proposizione 1.2.1. *Siano A e B sottoinsiemi di X . Allora:*

- $d(A, B) = d(B, A)$;
- $d(A, B) = 0$ se $A \cap B \neq \emptyset$
- $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$
- se $x \in X$ allora $x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$;
- $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Definizione 1.5 (misura metrica). Se m è una misura su (X,d) , si dice che m è una misura metrica rispetto alla distanza d se

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad \forall A, B \subseteq X : d(A, B) > 0$$

Teorema 1.2.2 (Carathéodory). *Se m è una misura metrica su (X,d) , ogni sottoinsieme chiuso di X è m -misurabile.*

Corollario 1.2.3. *Se m è una misura metrica su (X,d) , ogni sottoinsieme aperto di X è m -misurabile.*

Definizione 1.6. Una famiglia \mathcal{A} di sottoinsiemi di X è chiamata σ -algebra se:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. $A \setminus B \in \mathcal{A}$ se A e $B \in \mathcal{A}$
3. $\bigcup_{k \in N} A_k \in \mathcal{A}$ se $A_k \in \mathcal{A}$ per ogni $k \in N$

Osservazione 3. Notare che anche l'intersezione finita o numerabile di elementi di una σ -algebra \mathcal{F} appartiene ad \mathcal{F} : infatti se $(A_n)_{n \in \mathcal{I}}$ è una famiglia finita o numerabile in \mathcal{F} , utizzando il fatto che una σ -algebra è chiusa per complementarità e per unione numerabile allora:

$$\bigcap_{n \in \mathcal{I}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathcal{I}} A_n^c \right)^c \in \mathcal{F} \quad (1.3)$$

Osservazione 4. Osserviamo inoltre che se $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ è una famiglia (non necessariamente numerabile) di σ -algebre su X allora

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i \quad (1.4)$$

è ancora una σ -algebra. Questo giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.7. Data una famiglia \mathcal{H} di sottoinsiemi di X , indichiamo con $\sigma(\mathcal{H})$ l'intersezione di tutte le σ -algebre che contengono \mathcal{H} . In altri termini, $\sigma(\mathcal{H})$ è la più piccola σ -algebra che contiene \mathcal{H} ed è pertanto chiamata σ -algebra generata da \mathcal{H} .

Definizione 1.8 (σ -algebra di *Borel*). Dato uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) , la σ -algebra geratata dalla topologia \mathcal{T} è detta σ -algebra di *Borel*. Gli insiemi di questa prendono il nome di *boreliani*.

Nel caso di uno spazio metrico (X, d) la topologia considerata è quella indotta dalla distanza d su X .

Osservazione 5. Se m è una misura metrica su (X, d) la totalità dei sottoinsiemi di X m -misurabili è una σ -algebra che contiene i chiusi di X . Tale σ -algebra contiene quindi quella dei boreliani.

Vale quindi la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.4. *Se m è una misura metrica su (X, d) ogni boreliano di (X, d) è m -misurabile.*

1.3 Misure di Hausdorff in \mathbb{R}^n

1.3.1 Misura di Hausdorff α -dimensionale

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, poniamo

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}, \quad (1.5)$$

dove Γ indica la *funzione gamma* di Eulero definita, per $s > 0$, nel modo seguente

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

È importante osservare che il numero reale positivo ω_α , quando α è un intero positivo, è la misura di Lebesgue α -dimensionale del disco unitario di \mathbb{R}^α .

Per ogni sottoinsieme non vuoto B di \mathbb{R}^n poniamo

$$r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) := \frac{1}{2} \sup\{|x - y| \mid x, y \in B\}$$

Poniamo inoltre $m_\alpha(\emptyset) = 0$ e, se $B \neq \emptyset$,

$$m_\alpha(B) = \omega_\alpha r(B)^\alpha \tag{1.6}$$

Esempio 2. *Sia*

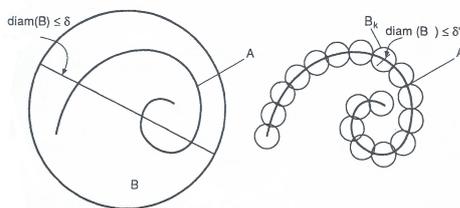
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2\}$$

il disco di \mathbb{R}^3 di centro (a, b, c) e raggio r . Risulta $r(B) = r$ e $m_\alpha(B) = \omega_\alpha r^\alpha$.
In particolare

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3, & \text{se } \alpha = 3, \\ \pi r^2, & \text{se } \alpha = 2, \\ 2r, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Definizione 1.9 (δ -ricoprimento). Se A è un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{R}^n e se δ è un numero reale positivo, si chiama δ -ricoprimento di A una famiglia $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n tale che:

1. \mathcal{A} è finito o numerabile,
2. $\text{diam}(B_k) \leq \delta$, per ogni $k \in \mathcal{A}$,
3. $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k$.

Figura 1.1: esempi di δ -ricoprimenti

Definiamo:

$$H_\alpha^\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k) \mid (B_k)_{k \in \mathcal{A}}, \delta\text{-ricoprimento di } A \right\} \quad (1.7)$$

Se $0 < \delta' < \delta$ ogni δ' ricoprimento di A è anche un δ -ricoprimento di A ; pertanto

$$H_\alpha^\delta(A) \leq H_\alpha^{\delta'}(A).$$

La funzione

$$]0, +\infty[\ni \delta \longmapsto H_\alpha^\delta(A) \in [0, +\infty]$$

è quindi monotona decrescente e, di conseguenza, ha limite in $[0, +\infty]$ per $\delta \longmapsto 0^+$.

Definizione 1.10 (misura di Hausdorff α -dimensionale). Si chiama **misura di Hausdorff** α -dimensionale di A il numero reale esteso

$$H_\alpha(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^\delta(A) = \sup_{\delta > 0} H_\alpha^\delta(A) \quad (1.8)$$

Osservazione 6. Esiste una iniezione naturale di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^{n+p} , con $p \geq 1$ (basta infatti identificare \mathbb{R}^n col sottospazio $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, $0 \in \mathbb{R}^p$), ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n è quindi anche contenuto in \mathbb{R}^{n+p} . Per questo la misura di Hausdorff α -dimensionale di A **non** dipende dallo spazio euclideo nel quale A si considera immerso. Basta infatti osservare che

$$m_\alpha(B \cap \mathbb{R}^n) \leq m_\alpha(B), \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^{n+p}.$$

Proposizione 1.3.1. H_α^δ e H_α sono misure su \mathbb{R}^n . Inoltre H_α è una misura metrica rispetto alla distanza euclidea.

Dimostrazione. Dimostriamo le affermazioni relative ad H_α . Per prima cosa si ha che:

$$H_\alpha(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^\delta(\emptyset) = 0.$$

Inoltre se $A \subseteq \bigcup_{k \in N} A_k$, per ogni $\delta > 0$ si ha, sfruttando la sub-additività di H_α^δ :

$$H_\alpha^\delta(A) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha^\delta(A_k) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha(A_k).$$

E quindi:

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^\delta(A) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha(A_k).$$

Con questo è provato che H_α è monotona e numerabilmente sub-additiva e che, quindi, è una misura su \mathbb{R}^n . Dimostriamo infine che H_α è una misura metrica.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $d(A, B) > 0$. Dobbiamo provare che

$$H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B).$$

Ovviamente, poiché m è sub-additiva, basta dimostrare la disuguaglianza

$$H_\alpha(A \cup B) \geq H_\alpha(A) + H_\alpha(B). \quad (1.9)$$

Se $H_\alpha(A \cup B) = +\infty$ la (1.9) è ovvia. Supponiamo quindi $H_\alpha(A \cup B) < +\infty$. Essendo $H_\alpha^\delta \leq H_\alpha$ sarà allora

$$H_\alpha^\delta(A \cup B) < +\infty, \quad \forall \delta > 0.$$

Fissato in modo arbitrario $\epsilon > 0$, scegliamo un δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di $A \cup B$, con $0 < \delta < d(A, B)$, tale che

$$H_\alpha^\delta(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \quad (1.10)$$

Poniamo ora $\mathcal{A}' = \{k \in \mathcal{A} / B_k \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{A}'' = \{k \in \mathcal{A} / B_k \cap B \neq \emptyset\}$. Poiché $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di $A \cup B$, le famiglie $(B_k)_{k \in \mathcal{A}'}$ e $(B_k)_{k \in \mathcal{A}''}$ sono δ -ricoprimenti, rispettivamente, di A e di B . Se $0 < \delta < d(A, B)$ risulta poi $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$. Infatti, se esistesse $k \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$, gli insiemi $B_k \cap A$ e $B_k \cap B$ sarebbero entrambi non vuoti, e risulterebbe,

$$d(A, B) \leq \text{diam}(B_k) \leq \delta$$

contrariamente all'ipotesi.

Da $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ e da (1.10) otteniamo allora

$$H_\alpha^\delta(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}'} m_\alpha(B_k) + \sum_{k \in \mathcal{A}''} m_\alpha(B_k) \geq H_\alpha^\delta(A) + H_\alpha^\delta(B)$$

per $0 < \delta < d(A, B)$. Da questa, per $\delta, \epsilon \rightarrow 0$, si ottiene la (1.9). \square

Corollario 1.3.2. *Ogni boreliano di \mathbb{R}^n è H_α -misurabile qualunque sia $\alpha \geq 0$*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione precedente e dalla proposizione 1.2.4. \square

La misura di Hausdorff H_α è regolare nel senso seguente:

Teorema 1.3.3. *Qualunque sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un boreliano B di \mathbb{R}^n tale che*

$$B \supseteq A \text{ e } H_\alpha(B) = H_\alpha(A)$$

Dimostrazione. Se $H_\alpha(A) = +\infty$ l'affermazione è banale: in questo caso, infatti, basta prendere $B = \bar{A}$. Supponiamo allora $H_\alpha(A) < +\infty$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $\frac{1}{k}$ -ricoprimento di A , $(B_j^k)_{j \in \mathcal{A}_k}$, tale che

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(B_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}$$

Poniamo

$$B^k = \bigcup_{j \in \mathcal{A}_k} \bar{B}_j^k \quad B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B^k.$$

L'insieme B è un boreliano di \mathbb{R}^n contenente A e

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k} \quad (1.11)$$

in quanto

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(B^k) \leq \sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(\bar{B}_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}.$$

Per $k \rightarrow +\infty$ da (1.11) si trae $H_\alpha(B) \leq H_\alpha(A)$. D'altra parte, essendo $A \subseteq B$, $H_\alpha(A) \leq H_\alpha(B)$. Quindi $H_\alpha(A) = H_\alpha(B)$. \square

Inoltre abbiamo un altro importante risultato che riguarda la misura di Hausdorff n -dimensionale:

Teorema 1.3.4. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora*

$$H_n(A) = \mu_n(A)$$

Quindi se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vale che la misura di Hausdorff n -dimensionale coincide con la misura di Lebesgue.

1.3.2 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane

Definizione 1.11. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$, si dice lipschitziana in A se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in A \quad (1.12)$$

dove con $\|\cdot\|$ indichiamo la norma euclidea. La costante L che figura al secondo membro di questa disuguaglianza si dice che è una costante di Lipschitz di f .

Esempio 3. Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \|T\|$, dove $\|T\| = \max_{0 \neq x \in \mathbb{R}^p} \frac{|Tx|}{|x|}$. Infatti:

$$|T(x) - T(y)| = |T(x - y)| \leq \|T\| |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Esempio 4. Un'isometria $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione tale che:

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Quindi, ogni isometria è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$.

Le trasformazioni ortogonali di \mathbb{R}^n sono isometrie, infatti se T è una trasformazione ortogonale si ha

$$|T(x) - T(y)| = |T(x - y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Anche le traslazioni di \mathbb{R}^n sono isometrie, infatti se τ_α è una traslazione di ampiezza α , cioè $\tau_\alpha(x) = \alpha + x$, allora:

$$|\tau_\alpha(x) - \tau_\alpha(y)| = |(\alpha + x) - (\alpha + y)| = |x - y|$$

Il principale risultato di questo paragrafo è il seguente:

Teorema 1.3.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz L .

Allora, per ogni $\alpha \geq 0$, risulta

$$H_\alpha(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha(A). \quad (1.13)$$

Dimostrazione. Proviamo che per ogni $\delta > 0$ risulta

$$H_\alpha^{L\delta}(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha^\delta(A) \quad (1.14)$$

Da questa, per $\delta \rightarrow 0^+$, seguirà (1.13). Osserviamo prima di tutto che per ogni $B \subseteq A$,

$$\text{diam}(f(B)) = \sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| \leq L \sup_{x,y \in B} |x - y| = L \text{diam}(B).$$

Allora, se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un arbitrario δ -ricoprimento di A , $(f(B_k))_{k \in \mathcal{A}}$ è un $L\delta$ -ricoprimento di $f(A)$, e quindi

$$H_\alpha^{L\delta}(f(A)) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(f(B_k)) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} L^\alpha m_\alpha(B_k).$$

Da questa, per l'arbitrarietà del δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di A , segue la (1.14) e quindi l'asserto. \square

Corollario 1.3.6. *Se F è un'isometria in \mathbb{R}^n allora:*

$$H_\alpha(F(A)) = H_\alpha(A) \quad (1.15)$$

per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \geq 0$.

Dimostrazione. F e F^{-1} , in quanto isometrie, sono entrambe lipshitziane con costante di Lip. $L = 1$. Allora, per il precedente Teorema:

$$H_\alpha(F(A)) \leq H_\alpha(A) = H_\alpha(F^{-1}(F(A))) \leq H_\alpha(F(A)) \quad (1.16)$$

e quindi

$$H_\alpha(F(A)) = H_\alpha(A) \quad (1.17)$$

\square

Corollario 1.3.7. *Per ogni $\lambda > 0$ risulta*

$$H_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha H_\alpha(A) \quad (1.18)$$

Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \geq 0$. Qui abbiamo posto

$$\lambda A = \delta(\lambda)(A) := \{\lambda x / x \in A\} \quad (1.19)$$

Dimostrazione. Poiché $\delta(\lambda)$ è una funzione lipshitziana con costante $L = \lambda$, per il teorema 1.3.5 risulta:

$$H_\alpha(\lambda A) \leq \lambda^\alpha H_\alpha(A) = \lambda^\alpha H_\alpha\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) \leq \lambda^\alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha H_\alpha(\lambda A) = H_\alpha(\lambda A)$$

Quindi $H_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha H_\alpha(A)$. \square

1.4 Dimensione di Hausdorff

Enunciamo prima la seguente proposizione:

Proposizione 1.4.1. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n tale che*

$$H_\alpha(A) < +\infty$$

per un opportuno $\alpha \geq 0$, allora

$$H_{\alpha+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \tag{1.20}$$

Dimostrazione. Per ogni δ e $t > 0$ e per ogni δ -ricoprimento di A , $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$, si ha

$$\begin{aligned} H_{\alpha+t}^\delta(A) &\leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_{\alpha+t}(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_{\alpha+t} \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^{\alpha+t} \\ &\leq \left(\text{poiché } \text{diam}(B_k) \leq \delta \right) \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} \left(\frac{\delta}{2} \right)^t \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_\alpha \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^\alpha = \\ &= \left(\text{posto } c_{\alpha,t} = \frac{\omega_{\alpha+t} 2^{-t}}{\omega_\alpha} \right) c_{\alpha,t} \delta^t \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \end{aligned}$$

Prendendo, all'ultimo membro, l'estremo inferiore rispetto a tutti i δ -ricoprimenti di A , si ottiene

$$H_{\alpha+t}^\delta(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha^\delta(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha(A).$$

Per $\delta \rightarrow 0+$ l'ultimo membro di queste disuguaglianze tende a zero, in quanto $t > 0$ e $H_\alpha(A) < +\infty$ per ipotesi. Allora

$$H_{\alpha+t}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} H_{\alpha+t}^\delta(A) = 0.$$

□

Corollario 1.4.2. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ risulta*

$$H_{n+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Se $D(0, k)$ indica il disco di \mathbb{R}^n di centro 0 e raggio k , risulta

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap D(0, k))$$

e quindi, per la sub-additività numerabile della misura di Hausdorff,

$$H_{n+t}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_{n+t}(A \cap D(0, k)). \quad (1.22)$$

D'altra parte

$$H_n(A \cap D(0, k)) = \mu_n(A \cap D(0, k)) \leq \mu_n(D(0, k)) = \omega_n k^n < +\infty,$$

e quindi, per la proposizione 1.4.1

$$H_{n+t}(A \cap D(0, k)) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da questa e dalla (1.22) segue subito la (1.21). \square

Definizione 1.12 (Dimensione di Hausdorff). Si chiama **dimensione di Hausdorff** di un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n il numero reale non negativo

$$\dim_H(A) = \inf \{s > 0 / H_s(A) = 0\} \quad (1.23)$$

Osserviamo che per il Corollario 1.4.2, qualunque siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $s > n$ risulta $H_s(A) = 0$. Pertanto

$$\dim_H(A) \leq n \text{ per ogni } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Più in generale si ha:

Proposizione 1.4.3. *Se A è un sottoinsieme p -piatto di \mathbb{R}^n (cioè è contenuto in un sottospazio vettoriale di $\dim=p$ in \mathbb{R}^n) allora:*

$$\dim_H(A) \leq p \quad (1.24)$$

Proposizione 1.4.4. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n avente dimensione di Hausdorff $\dim_H(A) > 0$, allora*

$$H_t(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > \dim_H(A) \\ +\infty & \text{se } 0 \leq t < \dim_H(A) \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $t > \dim_H(A)$ esiste $s < t$ tale che $H_s(A) = 0$. Per la proposizione 1.4.1 risulta quindi $H_t(A) = 0$.

Se $0 \leq t < \dim_H(A)$ e se fosse, ragionando per assurdo, $H_t(A) < +\infty$, ancora per la Proposizione 1.4.1 si avrebbe $H_s(A) = 0$ per ogni $s > t$. Ne verrebbe per la definizione 1.12, $\dim_H(A) \leq t$, contro l'ipotesi. \square

Concludiamo con alcuni esempi:

Esempio 5. Se $a \in \mathbb{R}^n$, allora

$$H_0(\{a\}) = 1.$$

Infatti se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di A , allora

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} m_0(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_0(r(A))^0 = \omega_0 \text{card} \mathcal{A} = \text{card} \mathcal{A} \geq 1$$

Pertanto $H_0^{(\delta)}(\{a\}) \geq 1$ per ogni $\delta > 0$. D'altra parte, essendo ovviamente $(\{a\})$ un δ -ricoprimento di $\{a\}$, qualunque sia $\delta > 0$, risulta

$$H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq m_0(\{a\}) = \omega_0(r\{a\})^0 = 1$$

Allora $H_0^{(\delta)}(A) = 1$ per ogni $\delta > 0$, e quindi $H_0(A) = 1$.

Esempio 6. Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n finito o numerabile allora

$$H_0(A) = \text{card}(A) \text{ e } \dim_H(A) = 0.$$

Infatti, se $A = \{a_k/k \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ e $a_k \neq a_h$ se $k \neq h$, allora

$$H_0(A) = H_0\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} \{a_k\}\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} H_0(\{a_k\}) = \text{card} A$$

Per dimostrare che $\dim_H(A) = 0$ basta osservare che, per ogni $t > 0$, si ha

$$H_t(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} H_t(\{a_k\}) = 0$$

in quanto, essendo $H_0(\{a_k\}) = 1$, risulta $H_t(\{a_k\}) = 0$ per ogni $t > 0$.

Esempio 7. Ogni sottoinsieme μ_p -misurabile di \mathbb{R}^p avente misura (di Lebesgue) positiva ha dimensione di Hausdorff p . Infatti se $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e $\mu_p(A) > 0$, allora per il Teorema 1.3.4, $H_p(A) > 0$. Di conseguenza, se s è un numero reale non negativo tale che $H_s(A) = 0$, deve essere $s > p$. In altri termini

$$\inf \{s \geq 0 / H_s(A) = 0\} \geq p,$$

D'altra parte, poiché $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $\dim_H(A) \leq p$. In definitiva $\dim_H(A) = p$.

1.4.1 L'insieme di Cantor

Il piú noto sottoinsieme di \mathbb{R} avente dimensione di Hausdorff non intera è l'insieme di Cantor C , cosí definito:

$$C = \bigcap_{k \geq 0} C_k \quad (1.25)$$

dove $(C_k)_{k \geq 0}$ è la successione di plurintervalli chiusi definita, per ricorrenza, col procedimento seguente:

- C_0 è l'intervallo chiuso $[0, 1]$.
- C_1 si ottiene rimuovendo da C_0 l'intervallo aperto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, quindi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
- C_2 si ottiene rimuovendo, dal centro di ogni intervallo componente C_1 , un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^2$; quindi $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

In generale, C_{k+1} si ottiene rimuovendo dal centro di ogni intervallo componente C_k un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^{k+1}$.

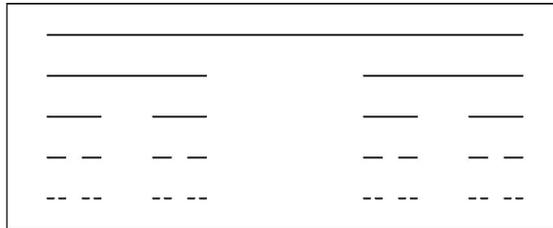


Figura 1.2: Costruzione dell'insieme di Cantor

Calcoliamo la misura di Lebesgue di questo insieme. Notiamo che il plurintervallo C_k è quindi unione di 2^k intervalli chiusi e disgiunti ciascuno dei quali ha lunghezza $(\frac{1}{3})^k$. La lunghezza totale di ogni C_k è quindi $(\frac{2}{3})^k$. La misura di Lebesgue di C è:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Notiamo quindi che la misura di Lebesgue è nulla pur essendo un insieme non vuoto. Questa misura non è molto vantaggiosa. Calcoliamone, ora, la dimensione e la misura di Hausdorff.

Se indichiamo con $\mathcal{I}_k = (I_{k,j})_{j=1,\dots,2^k}$ la famiglia di questi intervalli di lunghezza $(\frac{1}{3})^k$, allora \mathcal{I}_k é un δ_k -ricoprimento di C con $\delta_k = (\frac{1}{3})^k$. Per ogni $t \geq 0$ risulta quindi

$$H_t^{(\delta_k)}(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} m_t(I_{k,j}) = 2^k \omega_t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^k \right)^t = \omega_t 2^{-t} 2^k 3^{-kt}$$

Da questa disuguaglianza, indicando con s il numero reale

$$s := \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{1.26}$$

si trae

$$H_t^{(\delta_k)}(C) \leq \omega_t 2^{-t} \exp(k(s-t)\log 3)$$

e quindi, per ogni $t > s$

$$H_t(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_t^{(\delta_k)}(C) = 0$$

mentre, per $t=s$,

$$H_s(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_s^{(\delta_k)}(C) \leq \omega_s 2^{-s}.$$

Si può dimostrare che vale anche la disuguaglianza inversa:

$$H_s(C) \geq \omega_s 2^{-s} \quad *$$

Pertanto

$$H_s(C) = \omega_s 2^{-s} \quad \dim_H(C) = s$$

1.4.2 La curva di Koch

La curva di Koch, descritta per la prima volta da Helge Von Koch, matematico svedese, nel 1904 è definita ricorsivamente in questo modo: partiamo dal primo intervallo C_0 , un segmento che possiamo identificare con l'intervallo $[0, 1]$, poi dividiamo C_0 in tre parti uguali. Togliamo la parte centrale e la sostituiamo con una 'punta' costituita da due lati lunghi un terzo della linea originaria che formano un angolo pari a 60 gradi. In questo modo si ottiene una spezzata costituita da quattro segmenti uguali. Si ripete la stessa operazione su ognuno di questi quattro segmenti, ottenendo così una spezzata più complessa formata da 16 piccoli segmenti, lunghi ciascuno $\frac{1}{9}$ della linea originaria. Si prosegue così all'infinito e, il limite di questa sequenza è la curva di Koch. Dato che la curva di Koch, che denotiamo con K , è costruita

*Una dimostrazione di questa disuguaglianza si può vedere nella monografia: K.J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.

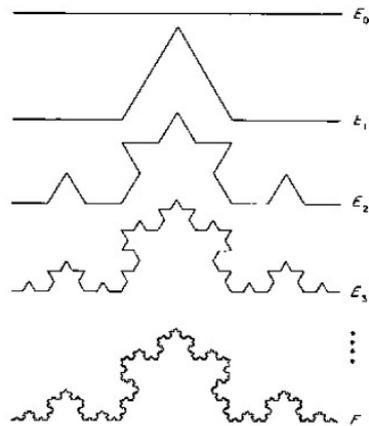


Figura 1.3: Costruzione della curva di Koch

ricorsivamente come l'insieme di Cantor, possiamo ripetere lo stesso ragionamento che abbiamo utilizzato per trovare la dimensione di Hausdorff di C e otterremo che:

$$\dim_H(K) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

Va infine fatta una piccola osservazione su questa curva molto particolare: è una curva continua, che non interseca mai se stessa, perchè i nuovi triangoli costruiti su ciascun lato sono sempre abbastanza piccoli da evitare di urtarsi tra loro, ma pur essendo continua non ha tangente in nessun punto.

Osservazione 7. Per costruire la curva di Koch divido per tre il segmento $[0, 1]$ e poi costruisco un "triangolo" nell'intervallo in mezzo, così da tre segmenti ne ottengo quattro e così via. La sua dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. Allo stesso modo, nell'insieme di Cantor divido l'intervallo unitario in tre segmenti e ne prendo solo due e così via. La sua dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Se avessi un frattale costruito dividendo l'intervallo unitario in tre parti e poi prendendone cinque (e così via), la sua dimensione sarebbe $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Capitolo 2

Tecniche di calcolo della dimensione di Hausdorff

2.1 Box-counting

Vi sono tante definizioni di dimensioni e tra queste una delle più usate è la dimensione di box-counting, che si caratterizza per la facilità di calcolo e stima. Essa si definisce nel seguente modo:

Definizione 2.1. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$, $F \neq \emptyset$, limitato e sia $N_\delta(F)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che ricoprono F . Le dimensioni di box-counting *inferiore* e *superiore* sono rispettivamente definite come:

$$\underline{dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.1)$$

$$\overline{dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.2)$$

Se queste coincidono allora il limite esiste e definiamo in generale la dimensione di box-counting di F come:

$$dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.3)$$

Ci sono, però, varie definizioni equivalenti di box-counting che alcune volte sono più convenienti da usare. Prendiamo i cubi in \mathbb{R}^n nelle δ -coordinate della forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

dove m_1, \dots, m_n sono interi. Sia $N'_\delta(F)$ il numero di δ -cubi definiti prima che intersecano F . Sicuramente questi formano una collezione di $N'_\delta(F)$ insiemi

di diametro $\delta\sqrt{n}$ che ricoprono F , quindi $N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$.
Se $\delta\sqrt{n} \leq 1$ allora:

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}$$

Quindi facendo limite inferiore e superiore per $\delta \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\underline{\dim}_B F \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (2.4)$$

$$\overline{\dim}_B F \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (2.5)$$

D'altra parte ogni insieme di diametro al più δ è contenuto in 3^n δ -cubi, quindi:

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

e prendendo i logaritmi otteniamo le disuguaglianze opposte di (2.4) e (2.5). Quindi nella definizione di box-dimension possiamo prendere $N_\delta(F)$ come il numero di δ -cubi che intersecano F . Allo stesso modo vale il seguente risultato:

Proposizione 2.1.1. *La dimensione inferiore e superiore di box-counting di un sottinsieme F di \mathbb{R}^n sono date da:*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (2.6)$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (2.7)$$

e se il limite esiste la dimensione di box-counting di F è

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (2.8)$$

dove $N_\delta(F)$ è equivalentemente:

- il più piccolo numero di palle chiuse di raggio δ che ricoprono F
- il più piccolo numero di cubi di lato δ che ricopre F
- il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che ricoprono F
- il più grande numero di palle disgiunte di raggio δ con centri in F

Questa lista può essere ulteriormente estesa; in sostanza si considera la definizione più adatta a una particolare applicazione.

2.2 Tecniche di base

È possibile ottenere una stima dall'alto della dimensione di Hausdorff attraverso la dimensione di box-counting, infatti vale:

Proposizione 2.2.1. *Supponiamo che F possa essere ricoperto da n_k insiemi di diametro al più δ_k , con $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$, allora:*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

e se $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$, per qualche $0 < c < 1$, vale

$$\overline{\dim}_B F \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

Inoltre, se $n_k \delta_k^s$ è limitata allora $H_s(F) < \infty$.

Dimostrazione. Posto $s = \dim_H(F)$, possiamo supporre $s > 0$, altrimenti la tesi sarebbe banalmente verificata. Per $t > 0$ sufficientemente piccolo, per la proposizione 1.4.4, vale che $H_{s-t}(F) > 0$. Possiamo inoltre supporre, ponendo $s - t = c$, che $H_c(F) > w_c$; infatti se non fosse vero potremmo dilatare F utilizzando il corollario 1.3.7 e il fatto che la dimensione di Hausdorff rimane invariata. Consideriamo, ora, un δ -ricoprimento di F costituito da N_δ insiemi. Si ha che:

$$2w_c < H_c^\delta(F) \leq w_c N_\delta \delta^c \quad \forall \delta > 0 \text{ abbastanza piccolo}$$

Da cui:

$$e^0 = 1 < 2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} N_\delta \delta^c = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} e^{\log(N_\delta) + c \log \delta}$$

Quindi, dato che

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} (\log(N_\delta) + c \log \delta) > 0$$

per la permanenza del segno si ha che $\exists \delta_0$ $0 < \delta_0 < 1$ tale che

$$\log(N_\delta) + c \log(\delta) > 0 \quad \forall \delta \in]0, \delta_0[$$

allora

$$c(-\log \delta) < \log N_\delta \implies c < \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Passando al limite inferiore si ottiene che:

$$c \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Dato, infine, che si era posto $c = s - t$ si ottiene per $t \rightarrow 0^+$ la prima disuguaglianza dell'enunciato, mentre le altre derivano immediatamente dalle definizioni. Per l'ultima parte si ha che

$$H_s^{\delta_k}(F) \leq w_s n_k \delta_k^s$$

quindi $H_s^{\delta_k}(F)$ tende per $k \rightarrow \infty$ a un limite finito $H_s(F)$. \square

Esempio 8. Riprendiamo il caso dell'insieme di Cantor C e dimostriamo che $\overline{\dim}_B C = \underline{\dim}_B C = \dim_B C = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, confermando così la proposizione 2.2.1. Un ricoprimento di C è dato sicuramente dai 2^k intervalli di \mathcal{I}_k di lunghezza 3^{-k} , da cui $N_\delta(C) \leq 2^k$ se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$. Dalla definizione di box-counting si ha che:

$$\overline{\dim}_B C = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

D'altra parte, qualsiasi intervallo di lunghezza δ con $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ interseca al massimo un solo intervallo di lunghezza 3^{-k} usato per la costruzione di C . Come sappiamo, di questi intervalli ve ne sono 2^k , quindi necessitano almeno 2^k intervalli di lunghezza δ per ricoprire C , da cui $\underline{\dim}_B C \geq \frac{\log 2}{\log 3}$.

2.3 Metodo del potenziale teorico

In questa sezione introduciamo una tecnica per il calcolo della dimensione di Hausdorff che è importante sia nella teoria che nella pratica: il metodo del potenziale teorico. Per farlo, però, enunciamo qualche risultato utile, la cui dimostrazione si può vedere in [2].

Proposizione 2.3.1. Sia μ una distribuzione di massa su \mathbb{R}^n , F un boreliano e sia c una costante con $0 < c < \infty$, allora se $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} < c \quad \forall x \in F$, si ha che

$$H_s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c} \tag{2.9}$$

dove con $B_r(x)$ si indica la palla di centro x e raggio r .

Teorema 2.3.2. Sia F un boreliano in \mathbb{R}^n con $H_s(F) = \infty$. Allora esiste un compatto $E \subset F$ tale che $0 < H_s(E) < \infty$.

Proposizione 2.3.3. Sia F un boreliano tale che $0 < H_s(F) < \infty$, allora esistono una costante b e un compatto $E \subset F$ con $H_s(E) > 0$ tali che:

$$H_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s \tag{2.10}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Corollario 2.3.4. *Sia F un boreliano di \mathbb{R}^n con $H_s(F) = \infty$. Si ha che esiste un compatto $E \subset F$ tale che $0 < H_s(E) < \infty$ e tale che per qualche costante b*

$$H_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Dimostrazione. La tesi viene immediatamente applicando il teorema 2.3.2 e la proposizione 2.3.3 \square

Definizione 2.2. Per $s \geq 0$ definiamo l' s -potenziale nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ dovuto a una distribuzione di massa μ su \mathbb{R}^n come:

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \quad (2.11)$$

Quindi definiamo l' s -energia di μ come l'integrale:

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \quad (2.12)$$

Enuciamo, ora, un risultato importante:

Teorema 2.3.5. *Sia F un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Se μ è una distribuzione di massa su F tale che $I_s(\mu) < \infty$ allora $H_s(F) = \infty$, dunque $\dim_H \geq s$.*
2. *Se F è un boreliano tale che $H_s(F) > 0$ allora esiste una distribuzione di massa μ su F per cui vale che $I_t(\mu) < \infty$ per ogni $t < s$.*

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte, supponiamo che $I_s(\mu) < \infty$ per qualche distribuzione di massa μ con supporto contenuto in F . Definiamo:

$$F_1 = \left\{ x \in F : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} > 0 \right\}$$

Se $x \in F_1$ possiamo trovare $\epsilon > 0$ e una successione $\{r_i\}$ tale che decresce a 0 e tale che $\mu(B_{r_i}(x)) \geq \epsilon r_i^s$. A meno che $\mu(\{x\}) > 0$ (in tal caso è chiaro che $I_s(\mu) = \infty$) per la continuità di μ , prendendo q_i con $0 < q_i < r_i$ abbastanza piccoli, si ha che $\mu(A_i) \geq \frac{1}{4}\epsilon r_i^s$ ($i = 1, 2, \dots$), dove gli A_i sono gli anelli $B_{r_i}(x) \setminus B_{q_i}(x)$. Prendendo eventualmente una sottosuccessione,

possiamo supporre che $r_{i+1} < q_i \forall i$ in modo che gli A_i siano disgiunti e centrati in x . Dato che $x \in F_1$

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4} \epsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty$$

dato che $|x-y|^{-s} \geq r_i^{-s}$ su A_i . Ma $I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) < \infty$, dunque $\phi_s(x) < \infty$ per μ -quasi x . Possiamo concludere che $\mu(F_1) = 0$. Dato che $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} = 0$ se $x \in F \setminus F_1$ allora la proposizione 2.3.1 ci dice che per ogni $c > 0$ abbiamo:

$$H_s(F) \geq H_s(F \setminus F_1) \geq \frac{\mu(F \setminus F_1)}{c} \geq \frac{\mu(F) - \mu(F_1)}{c} = \frac{\mu(F)}{c}$$

Da cui $H_s(F) = \infty$.

Dimostriamo, quindi, la seconda parte. Supponiamo che $H_s(F) > 0$. Prendendo eventualmente $s_1 < s$ tale che $H_{s_1}(F) = \infty$, possiamo applicare il corollario 2.3.4 dal quale abbiamo che esiste un compatto $E \subset F$ con $0 < H_s(F) < \infty$ tale che:

$$H_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r \geq 0$$

per qualche costante b . Sia μ la restrizione di H_s ad E , cioè $\mu(A) = H_s(E \cap A)$; allora μ è una distribuzione di massa su F . Fissato, ora, $x \in \mathbb{R}^n$ scriviamo:

$$m(r) = \mu(B_r(x)) = H_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$$

Osserviamo che m è una funzione monotona crescente e pertanto possiamo definire l'integrale di Stieltjes rispetto a m , che vale:

$$m(R) = \mu(B_R(x)) = \int_0^R dm(r)$$

Allora, se $0 \leq t < s$ si ha che:

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \int_{|x-y| \leq 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} + \int_{|x-y| > 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \leq \int_0^1 r^{-t} dm(r) + \mu(\mathbb{R}^n) \\ &= [r^{-t} m(r)]_0^1 + t \int_0^1 r^{-(t+1)} m(r) dr + \mu(\mathbb{R}^n) \leq b + bt \int_0^1 r^{s-t-1} dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\ &= b \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \mathcal{H}_s(E) \end{aligned}$$

Dato che $\phi_t \leq c$ per qualche c , allora:

$$I_t(\mu) = \int \phi_t(x) d\mu(x) \leq c\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

□

Capitolo 3

Frattali definiti da trasformazioni

3.1 Contrazioni e insiemi autosimilari

Molti frattali sono composti da parti che sono, in qualche modo, simili al tutto. Ad esempio, l'insieme di Cantor, visto in precedenza, è l'unione di due copie di se stesso, mentre la curva di Koch è formata da quattro copie "simili". Questa autosimilarità è una proprietà che può essere usata per definirli. Iniziamo con il dare le seguenti definizioni:

Definizione 3.1. In generale se consideriamo uno spazio metrico (X, d) , una mappa $f : X \rightarrow X$ è detta contrazione se esiste α reale tale che $0 < \alpha < 1$ per cui vale che:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Se poi si ha $d(f(x), f(y)) = cd(x, y)$ allora f trasforma insiemi in altri geometricamente simili. In questo caso f prende il nome di *similitudine*.

Definizione 3.2. Siano S_1, \dots, S_m delle contrazioni su $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso. $F \subseteq D$ è detto *invariante* o *autosimilare* per le trasformazioni S_i , se

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \tag{3.1}$$

Faremo vedere che spesso questi insiemi sono frattali.

Esempio 9. Prendiamo l'insieme di Cantor. Siano:

$$S_1, S_2 \text{ tali che } S_1(x) = \frac{1}{3}x; S_2(x) = \frac{1}{3}(x) + \frac{2}{3} \tag{3.2}$$

Allora $S_1(C)$ e $S_2(C)$ sono la parte sinistra e destra di C , dunque $C = S_1(C) \cup S_2(C)$. Questo mostra che C è invariante per le mappe S_1 e S_2 .

Enunciamo, ora, un teorema che ci tornerà utile più avanti:

Teorema 3.1.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \rightarrow X$ una contrazione di costante α . Allora esiste unico $\bar{x} \in X$ tale che $T\bar{x} = \bar{x}$. \bar{x} è detto punto fisso della mappa T .*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ arbitrario e consideriamo la successione:

$$x_{k+1} = Tx_k \quad x_1 = Tx_0 \quad (3.3)$$

Si ha che:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(Tx_k, Tx_{k-1}) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq \alpha^k d(x_1, x_0) \quad (3.4)$$

L'obiettivo è dimostrare che la successione è di Cauchy per poi sfruttare la completezza dello spazio metrico. Si ha che:

$$d(x_{m+1}, x_n) \leq \sum_{k=n}^m d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^m \alpha^k d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^m \alpha^k \quad (3.5)$$

$$\leq d(x_1, x_0) \alpha^n \frac{1}{1 - \alpha} \quad (3.6)$$

dove l'ultima disuguaglianza è ottenuta raccogliendo α^n e maggiorando con la somma della serie. Abbiamo ottenuto che per $m \geq n$

$$d(x_{m+1}, x_n) \leq d(x_1, x_0) \alpha^n \frac{1}{1 - \alpha} \quad (3.7)$$

quindi la successione è di Cauchy perchè:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{\min\{n, m\}}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad (3.8)$$

Usiamo, infine, la completezza dello spazio e la continuità di T (dato che è lipschitziana) per concludere che $\exists! \bar{x} \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ da cui, dato che $x_n = Tx_{n-1}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_{n-1} = T\bar{x}$, si ha $\bar{x} = T\bar{x}$.

Si è quindi dimostrato l'esistenza del punto fisso, vediamo ora l'unicità.

Se $\exists \bar{x}', \bar{x}''$ punti fissi, allora:

$$d(\bar{x}', \bar{x}'') = d(T\bar{x}', T\bar{x}'') \leq \alpha d(\bar{x}', \bar{x}'') \quad (3.9)$$

da questo e dal fatto che d è una distanza viene che

$$0 \leq d(\bar{x}', \bar{x}'')(1 - \alpha) \leq 0 \implies d(\bar{x}', \bar{x}'') = 0 \implies \bar{x}' = \bar{x}'' \quad (3.10)$$

□

Mostriamo che *famiglie di contrazioni* definiscono univocamente insiemi invarianti compatti (non vuoti). Questo significa, ad esempio, che l'insieme di Cantor descritto prima è completamente specificato come l'insieme compatto invariante delle mappe S_1 e S_2 definite sopra. Per farlo definiamo una metrica sui sottoinsiemi di $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso.

Definizione 3.3. Sia \mathcal{L} la classe dei sottoinsiemi di D non vuoti e compatti. Preso $A \in \mathcal{L}$, consideriamo $N_\epsilon(A) = \{x \in D : |x - a| \leq \epsilon \text{ per qualche } a \in A\}$. Poniamo su \mathcal{L} la distanza:

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta : A \subset N_\delta(B) \text{ e } B \subset N_\delta(A)\} \quad (3.11)$$

Quest'ultima è detta *distanza di Hausdorff* su \mathcal{L} .

Teorema 3.1.2. (\mathcal{L}, d_H) è uno spazio metrico completo

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}$ una successione di Cauchy arbitraria in \mathcal{L} , cioè tale che per ogni $\epsilon > 0$ possiamo scegliere un $m = m(\epsilon)$ abbastanza grande per cui $d_H(A_p, A_q) \leq \epsilon$ per ogni coppia di interi p e q , $p \geq q \geq m$. Dobbiamo far vedere che la successione $\{A_i\}$ converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un elemento di \mathcal{L} . Poniamo

$$E_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}.$$

Ogni E_k è un insieme compatto. Dato che la successione $\{E_k\}$ è monotona decrescente, l'insieme

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

appartiene a \mathcal{L} . Da qui segue che

$$E \subset E_q = \overline{\bigcup_{i=q}^{\infty} A_i} \subset N_\epsilon(A_q).$$

Dall'altro lato, dato $x \in A_q$, esistono punti $y_p \in A_p$ tali che $\|x - y_p\| \leq \epsilon$, per ogni intero p , $p \geq q$, perché $A_q \subset N_\epsilon(A_p)$. Se z è un punto di accumulazione della successione $\{y_p\}$, abbiamo che $\|x - z\| \leq \epsilon$. Inoltre, per ogni $p \geq k$ abbiamo

$$y_p \in A_p \subset E_p \subset E_k,$$

e E_k è compatto, otteniamo che $z \in E_k$ e dato che k era arbitrario ciò implica che $z \in E$. Quindi abbiamo che

$$x \in N_\epsilon(\{z\}) \subset N_\epsilon(E).$$

Così $d_H(E, A_q) \leq \epsilon$ e cioè la successione $\{A_i\}$ converge a E . \square

Supponiamo, ora, di avere m contrazioni f_1, f_2, \dots, f_m di fattori rispettivamente L_1, \dots, L_m su $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso. Dato che l'unione di un numero finito di compatti è ancora un compatto, possiamo definire l'applicazione:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ K &\longmapsto \bigcup_{i=1}^m F_i(K) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dove F_i è la contrazione di fattore L_i da \mathcal{L} in sé definita da $F_i(K) = f_i(K)$ per ogni $K \in \mathcal{L}$.

Per mostrare l'esistenza e l'unicità dell'insieme autosimilare relativo a F premettiamo alcuni risultati:

Lemma 3.1.3. *Siano H, K, I e J in \mathcal{L} allora:*

$$d_H(H \cup K, I \cup J) \leq \max \{d_H(H, I), d_H(K, J)\} \quad (3.13)$$

Teorema 3.1.4. *F è una contrazione di \mathcal{L} in sé, di fattore:*

$$L = \max \{L_1, \dots, L_m\} \quad (3.14)$$

Dimostrazione. Siano H e K in \mathcal{L} . Usando più volte il lemma precedente abbiamo che:

$$d_H(F(H), F(K)) = d_H\left(\bigcup_{j=1}^m F_j(H), \bigcup_{j=1}^m F_j(K)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \{d_H(F_i(H), F_i(K))\}$$

Dato che le F_i sono contrazioni di fattore L_i si ha dunque che:

$$d_H(F(H), F(K)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \{L_i d_H(H, K)\} \quad (3.15)$$

$$= \max_{1 \leq i \leq m} (L_i) d_H(H, K) = L d_H(H, K) \quad (3.16)$$

Da tutto questo segue che:

Corollario 3.1.5. *Siano f_1, \dots, f_m contrazioni su $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso allora esiste ed è unico l'insieme compatto \bar{K} F -invariante.*

Dimostrazione. Dato che le f_i sono contrazioni su D allora per (3.1.4) F è una contrazione su (\mathcal{L}, d_H) quindi per 3.1.1 esiste unico \bar{K} compatto F -invariante, che si ottiene come limite (nella metrica di Hausdorff) della successione $K_n = F^n(K_0)$ ottenuta iterando F a partire da un compatto qualsiasi K_0 . \square

Osservazione 8. Se \bar{x}_i è l'unico punto fisso di f_i , allora $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ è contenuto in \bar{K} . Infatti, se consideriamo $K_0 = \{\bar{x}_j\}$, per qualche j tale che $1 \leq j \leq m$, allora dato $f_j^n(\bar{x}_j) = \bar{x}_j$ per ogni n .

$$\bar{x}_j \in \bigcup_{i=1}^m f_i(\bar{x}_j) = F(K_0) = K_1 \quad (3.17)$$

$$\bar{x}_j \in \bigcup_{i=1}^m f_i^2(\bar{x}_j) \subset F(K_1) = K_2 \quad (3.18)$$

ed in generale

$$\bar{x}_j \in \bigcup_{i=1}^m f_i^n(\bar{x}_j) = F(K_{n-1}) = K_n \quad (3.19)$$

Dato che la successione costante $\{x_n = \bar{x}_j\}$ è tale che x_n appartiene a K_n per ogni n , e converge a \bar{x}_j , dalla caratterizzazione di \bar{K} come limite dei K_n , si ha che \bar{x}_j appartiene a \bar{K} per ogni j , $1 \leq j \leq m$.

Osserviamo che nell'insieme invariante ci sono tutti i punti fissi delle m contrazioni, ma non solo. Infatti, in generale, \bar{K} può essere molto più ricco.

3.2 Dimensione degli insiemi autosimilari

Uno dei vantaggi della costruzione frattale attraverso famiglie di contrazioni sta nel fatto che la dimensione dell'insieme invariante è spesso facile da calcolare o stimare in termini delle contrazioni. Consideriamo il caso in cui abbiamo $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ similitudini, cioè:

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3.20)$$

dove $0 < c_i < 1$. Le S_i trasformano sottoinsiemi di \mathbb{R}^n in sottoinsiemi geometricamente simili. In questo caso un insieme autosimilare è unione di copie simili di se stesso. Definiamo la seguente proprietà:

Definizione 3.4. Diciamo che $\{S_1, \dots, S_m\}$ soddisfa la proprietà di *insieme aperto* se esiste un insieme non vuoto, limitato e aperto V tale che

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V \quad \text{con } S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset \text{ per } i \neq j \quad (3.21)$$

In questo caso si ha che:

Teorema 3.2.1. *Supponiamo che la condizione di insieme aperto valga per le similitudini S_i su \mathbb{R}^n di costante rispettivamente c_i per $1 \leq i \leq m$. Se \bar{K} è l'insieme invariante, cioè:*

$$\bar{K} = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{K}) \quad (3.22)$$

allora la dimensione di Hausdorff $\dim_H(\bar{K}) = s$ dove s è dato da:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1 \quad (3.23)$$

s è detta *dimensione simile dell'insieme invariante \bar{K}* e la denotiamo con $\dim_s(\bar{K})$.

Se, invece, consideriamo il caso, più generale, in cui si ha una famiglia di contrazioni S_i allora vale solo una disuguaglianza:

Teorema 3.2.2. *Per un insieme autosimilare \bar{K} vale che:*

$$\dim_H(\bar{K}) \leq \dim_s(\bar{K}) \quad (3.24)$$

Quindi il risultato precedente ci dà una stima dall'alto della misura di Hausdorff di \bar{K} .

I frattali più noti sono per la maggior parte esempi di insiemi invarianti per contrazioni simili.

Esempio 10. *Consideriamo di nuovo l'insieme di Cantor C , abbiamo visto che è autosimilare e corrisponde alle due similitudini:*

$$S_1(x) = \frac{x}{3}, \quad S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

I fattori di contrazione $L(S_1) = L(S_2) = \frac{1}{3}$ e quindi secondo l'equazione (3.23) $\dim_S(C)$ è data da:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

Da questa equazione troviamo che $d = \dim_S(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$. In questo caso la condizione di insieme aperto è soddisfatta con $U = (0, 1)$, quindi $\dim_S(C)$ coincide con la dimensione di Hausdorff: abbiamo trovato esattamente lo stesso risultato ottenuto nel Capitolo 1.

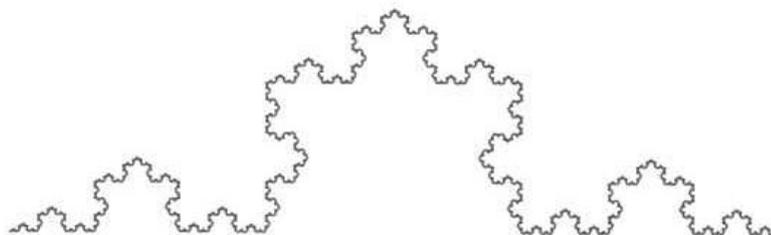


Figura 3.1: Curva di Koch

Esempio 11. Controlliamo con questo teorema anche la dimensione della curva di Koch K . In pratica si suddivide l'intervallo $[0, 1]$ come descritto nel Capitolo 1. K è un insieme autosimilare, corrispondente alle similitudini di $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$:

$$\psi_1(z) = \omega \bar{z}, \quad \psi_2(z) = \bar{\omega}(\bar{z} - 1) + 1$$

dove $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6}$. Siccome $L(\psi_1) = L(\psi_2) = |\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, risolvendo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d = 1$$

otteniamo che $\dim_S(K) = \frac{\log 4}{\log 3}$ che è uguale alla dimensione di Hausdorff poiché soddisfa la condizione di insieme aperto.

Esempio 12. Esaminiamo ora il triangolo di Sierpinski. Esso è ottenuto partendo da un triangolo equilatero di lato unitario ed eliminando dalla sua superficie il triangolo che ha come lati i segmenti che uniscono i punti medi dei lati del triangolo precedente, ottenendo tre triangoli di lato $\frac{1}{2}$. Poi si ripete l'operazione precedente sui tre triangoli rimasti e così via. Otteniamo così una figura di perimetro infinito e di area che tende a zero.

Esso è definito dalle seguenti contrazioni:

$$\psi_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \quad \psi_2(x, y) = \psi_1(x, y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \psi_3 = \psi_1(x, y) + (1, 0)$$

Per cui $L(\psi_1) = L(\psi_2) = L(\psi_3) = \frac{1}{2}$, allora l'equazione (2.3) diventa:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

perciò la dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$.

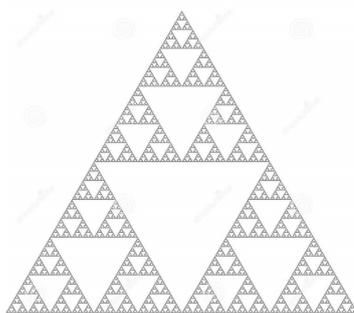


Figura 3.2: Triangolo di Sierpinski

Bibliografia

- [1] [Lanconelli, 1997] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [2] [Falconer, 1985] K.J. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley And Sons, 1990.
- [3] [Mandelbrot, 1982] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, 1982.
- [4] [Apostol, 1974] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1982.

Siti Web consultati

- [5] Luigi Orsina, Teorema delle contrazioni e sistemi di funzioni iterate, Appunti del Corso.
URL:<http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/Frattali.pdf>

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare anzitutto i compagni con cui ho condiviso questo lungo percorso. Riccardo, Yuri, Lorenzo, Guido grazie del supporto e dell'aiuto che mi avete sempre dato; è stato un piacere sorvegliare l'ultima fila con voi. Grazie anche a Marina per avermi sopportato durante tutto questo tempo e grazie a tutti i miei amici storici per tutti i momenti passati insieme durante questi anni e per avermi aiutato a tirarmi su in periodi un po' bui. Grazie alla mia sterminata famiglia, dalle infaticabili zie, che riescono sempre a farmi ridere, passando per i cugini di tutte le età e grado, arrivato ai miei nonni, a cui penso sempre, ma che troppo poco vedo. Grazie di cuore a mamma e papà, che mi hanno sostenuto e guidato anche nei momenti più frenetici e stressanti, e grazie a Nico, il mio fratellone che ha sempre avuto la parola giusta da dirmi e che mi protegge fin da quando siamo piccoli. Grazie a te Lucrì, che forse hai capito quanto sia ansioso e insopportabile, ma nonostante questo non sei ancora scappata.

Vorrei, infine, ringraziare la mia Professoressa per la disponibilità e la gentilezza che mi ha mostrato.