Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica - Indirizzo Didattico

L'insegnamento della probabilità nelle scuole secondarie di secondo grado.

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PASCUCCI ANDREA

Presentata da:
VALERIA TONTI

Terza Sessione
Anno Accademico 2017-2018

Introduzione

Questa tesi vuole mostrare l'importanza dello studio della teoria della probabilità, dal momento che ogni attività umana è soggetta a condizioni d'incertezza. In particolare si concentra sul metodo con cui questa viene insegnata nelle scuole secondarie di secondo grado, per poter suggerire un'alternativa rivolta ai docenti del primo biennio delle superiori.
La prima parte di questo elaborato vuole mostrare quanto sia indispensabile, al giorno d'oggi, affrontare questa tema. Oltre a caratterizzare la nostra quotidianità, ritroviamo applicazioni della probabilità nei campi più svariati. Una breve rassegna storica della nascita di questa disciplina mostra il suo carattere evolutivo e quali difficoltà ha incontrato durante il suo sviluppo; successivamente viene analizzato l'insegnamento della probabilità nelle scuole, seguendo l'approccio proposto dai libri di testo utilizzati.
Nella seconda parte viene inserito un riferimento alle Indicazioni Nazionali, che stabiliscono i contenuti essenziali delle diverse discipline nei differenti corsi di studio. Inoltre si dà spazio ad una breve presentazione delle prove Invalsi e se ne mostra l'utilità.
Il terzo capitolo tratta l'analisi di prove Invalsi reperite da un archivio interattivo online detto Gestinv 2.0; questo studio mostra quanta difficoltà abbiano gli studenti ad approcciarsi alla probabilità, non comprendendo a pieno le regole che la caratterizzano.
Infine, considerando i risultati ottenuti, si propone una dispensa rivolta ai docenti delle scuole secondarie di secondo grado. Questo materiale didattico si pone l'obiettivo di facilitare l'apprendimento dei concetti cardine di questa disciplina, mostrando come sia il Calcolo delle Probabilità, basato sulla formalizzazione effettuata da Kolmogorov, il vero protagonista di questa teoria. Si suggerisce di evitare la ricerca del significato della probabilità, ponendo invece l'attenzione sulla creazione di un modello matematico che,

interpretando il fenomeno tramite ragionamento astratto e logico-deduttivo, porti alla risoluzione del problema.

In questa tesi non si parla del calcolo combinatorio, poiché non è scopo di questo lavoro studiare i modi di raggruppamento e/o ordinamento di elementi di un insieme finito di oggetti. Al giorno d'oggi questa branca della matematica è strettamente ed unicamente collegata all'introduzione della definizione classica di probabilità, relativamente a certi tipi di eventi. Dal momento che il nostro obiettivo è fornire una strategia alternativa volta a modificare quest'approccio, si preferisce non analizzare questa disciplina (ma utilizzarla eventualmente come strumento per snellire la trattazione), in quanto siamo fortemente convinti che il suo insegnamento andrebbe ridotto al minimo indispensabile.

Indice

Capitolo 1

L'importanza dell'insegnamento della probabilità

1.1 Una teoria indispensabile

"... il caso della certezza, intesa come certezza assoluta, è, se non un'astrazione illusoria, per lo meno un caso limite, mentre sarebbe da considerarsi normale il caso dell'incertezza."
Bruno de Finetti
(Vero, falso, oppure probabile?)

Già da qualche secolo è cresciuta notevolmente la consapevolezza che tanti fenomeni naturali non possono essere riducibili al rigido determinismo meccanicistico; la presenza di incertezza è una caratteristica fondamentale della realtà in cui viviamo. Non ne possiamo essere esenti, dal momento che non è presente solo a livelli elevati della conoscenza umana ma è una caratteristica presente nella quotidianità di ciascuno. Le affermazioni "*Domani piove*", "*Domani la temperatura è superiore a* $25°C$", "*L' autobus è in orario*", "*Un bicchiere di plastica, lasciato cadere a terra, atterra in piedi* " sono solo alcuni banali esempi che mostrano quanto sia vera la frase di Bruno de Finetti posta all'inizio. Lo studio della quantificazione dell'incertezza ha quindi acquisito sempre più importanza; è divenuto una necessità nonché una vera e propria teoria matematica.

Al giorno d'oggi non esiste ambito applicativo della matematica in cui è possibile trascurare il fattore stocastico, inteso come casuale, aleatorio, non osservabile o non prevedibile. È per questo motivo che la teoria della probabilità costituisce il mezzo con cui è possibile modellizzare e gestire il rischio in tutti gli ambiti in cui si studiano fenomeni in condizioni d'incertezza; vediamone alcuni:

Economia e Finanza un esempio è la famosa formula di Black-Scholes-Merton per la quale gli autori hanno ricevuto il premio Nobel;

Fisica ed Ingegneria dove si fa ampio uso dei metodi numerici stocastici di tipo Monte Carlo, formalizzati fra i primi da Enrico Fermi e John von Neumann; inoltre le più famose teorie della fisica moderna (la relatività generale e la meccanica quantistica) sono particolarmente caratterizzate dalla presenza del fattore stocastico;

Meteorologia avere a disposizione modelli meteorologici di tipo probabilistico è fondamentale per la previsione oltre il quinto giorno;

Genetica è la scienza che studia la trasmissione dei caratteri e i meccanismi con i quali questi vengono ereditati. Si considera il precursore della moderna genetica il monaco agostiniano ceco Gregor Johann Mendel (1822-1884), dal momento che diede un fondamentale contributo di tipo metodologico applicando per la prima volta il calcolo delle probabilità allo studio dell'ereditarietà biologica;

Medicina e Botanica Robert Brown, botanico britannico, che verso il 1830 osservò il movimento irregolare di particelle colloidali in sospensione, diede il nome al principale processo stocastico conosciuto, il moto Browniano; quest'ultimo è stato utilizzato nel 1900 per modellare i prezzi delle azioni ed inoltre Albert Einstein ne fece uso in uno dei suoi più famosi lavori nel 1905. La prima definizione rigorosa del moto è stata data però nel 1923 da Norbert Wiener;

Giurisprudenza un giudice di un tribunale per poter emettere un verdetto deve considerare la probabilità di colpevolezza dell'imputato stimata a partire dalle informazioni fornite dalle indagini; è di fondamentale importanza saper utilizzare in modo corretto la probabilità condizionata, al fine di scongiurare clamorosi errori giudiziari;

Informatica i computer quantistici sfruttano le leggi della meccanica quantistica per l'elaborazione dei dati. In un computer attuale l'unità di informazione è il bit: è sempre possibile determinare lo stato di un bit e stabilire con precisione se è 0 o 1, mentre non possiamo determinare in modo altrettanto preciso lo stato di un qubit, l'unità di informazione quantistica, ma solo le probabilità che assuma i valori 0 e 1;

Telecomunicazioni per filtrare i segnali provenienti da satelliti e sonde inviati nello spazio, la NASA utilizza il metodo di Kalman-Bucy, cioè un filtro ottimo per rumori e disturbi agenti su sistemi gaussiani a media nulla;

Applicazioni militari "Nel 1983, Kolmogorov pubblicò uno scritto che stabiliva i teoremi fondamentali per regolarizzare e predire i processi stocastici stazionari. Un commento interessante sulla segretezza degli sforzi bellici viene da Norbert Wiener (1894-1964) che, all'Istituto di tecnologia del Massachusetts, lavorò sulle applicazioni di questi metodi per problemi militari durante e dopo la guerra. Questi risultati erano così importanti per gli sforzi bellici americani durante la Guerra Fredda che il lavoro di Wiener venne dichiarato top secret. Tutto questo però, sostenne Wiener, poteva essere dedotto dallo scritto precedente di Kolmogorov." (Traduzione da [9], p.139).

1.2 Lo sviluppo e i vari tentativi

Nonostante lo studio dei fenomeni in situazione d'incertezza abbia suscitato interesse in tutte le epoche (i giochi d'azzardo, ad esempio, sono sempre esistiti), la teoria della probabilità come disciplina matematica ha origini relativamente recenti. I primi studi risalgono al XV secolo: in Italia , fra i primi, emergono Luca Pacioli (1447-1517), Gerolamo Cardano (1501-1576), Niccolò Tartaglia (1499-1557), Pietro Cataneo (circa 1510-c. 1569) e Galileo Galilei (1564-1642).
Consideriamo il **problema della ripartizione della posta in gioco**, sul cui risultato i matematici sopra citati hanno dato il proprio contributo:

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori A e B, che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere, si sfidano. Sapendo che il premio è 22 ducati, se per una qualche ragione la partita viene interrotta quando A e B hanno rispettivamente 5 e 3 punti, come va suddivisa la posta in gioco?

Di seguito riportiamo i principali risultati storicamente ottenuti

- `Pacioli`, nella "*Summa de Arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*" pubblicata nel 1494, propone una soluzione che tiene conto unicamente delle partite già giocate. Egli consiglia di dividere la posta proporzionalmente ai punti raggiunti da ciascuno al momento della sospensione della partita;

- `Cardano` si occupa del problema nella "*Practica arithmetice et mensurandi singularis*", pubblicata nel 1539, e comprende che solo i punti mancanti al conseguimento del successo sono essenziali per la suddivisione della posta. Propone cioè di dividere la somma tenendo conto del numero di partite che mancano a ciascun giocatore per aggiudicarsi la vittoria dell'intera sfida;

- `Tartaglia` critica la soluzione di Pacioli nel "*General trattato*" del 1556, ma propone un metodo di soluzione (basato sull'esempio del primo autore) che fissa il risultato al momento dell'interruzione, disinteressandosi completamente degli scenari che si sarebbero potuti verificare e rendendo equivalenti situazioni di gioco molto differenti;

- `Cataneo` affronta il problema nel 1559 ragionando sul numero massimo di mani che possono essere giocate affinché il gioco si concluda con la vittoria di uno dei due giocatori. Egli sceglie di suddividere una porzione della posta tenendo conto del punteggio che hanno i due giocatori al momento dell'interruzione della partita e di dividere il resto in parti uguali.

Furono Cardano e Cataneo, con l'intuizione della massima importanza delle partite ancora da giocare, ad avvicinarsi alla soluzione corretta, trovata circa un secolo dopo.

Tradizionalmente la nascita del concetto moderno di probabilità, come studio di metodi per quantificare e stimare gli eventi casuali, viene attribuita a due grandi matematici francesi del XVII secolo: `Blaise Pascal` (1623-1662) e `Pierre de Fermat` (1601-1665). La data viene convenzionalmente fatta risalire al 1654, quando i due intrapresero uno scambio epistolare il cui contenuto venne pubblicato solo successivamente; di questo ne era già a conoscenza, anche se non dettagliatamente, lo scienziato olandese `Christiaan Huygens` (1629-1695).
Relativamente al problema della ripartizione della posta visto in precedenza, Pascal e Fermat espongono il loro metodo risolutivo nella corrispondenza del 1654. La soluzione esatta prevede la determinazione del numero massimo di partite necessarie a terminare il gioco e dunque al calcolo delle combinazioni, da intendersi come l'elencazione di tutti i casi possibili che possono presentarsi per concludere la sfida. A questo punto la posta viene divisa in base al numero dei casi favorevoli ai giocatori.

Anche Huygens diede un contributo notevole allo sviluppo della probabilità; nel 1657 pubblicò "*De ratiociniis in ludo aleae*", in cui venne dato spazio a concetti che poi furono considerati fondamentali, come quello di speranza matematica o valore atteso.

Nel panorama matematico della fine del XVII secolo ed inizio di quello successivo emersero le figure dei matematici della famiglia `Bernoulli`. Il più anziano, `Jacob` (1655-1705), si occupò di probabilità nel "*Ars conjectandi*" del 1713 (pubblicata da Nicolas Bernoulli); questo testo è organizzato in cinque parti che trattano rispettivamente: un'analisi critica del trattato di Huygens, permutazioni e combinazioni, l'utilizzo di oggetti combinatori applicati a problemi relativi al gioco dei dadi o a casi aleatori, l'interpretazione che Bernoulli diede del concetto di probabilità e soprattutto la Legge dei Grandi Numeri.

Altri due personaggi che contribuirono allo sviluppo della probabilità furono `Abraham de Moivre` (1667-1754) e `Pierre-Simon Laplace` (1749-1827), due matematici francesi. Essi lavorarono (in momenti differenti) ad un teorema che prese il loro nome (Teorema di De Moivre-Laplace), caso particolare del teorema centrale del limite, in cui si stabilisce che la distribuzione binomiale può essere approssimata con quella normale sotto certe condizioni.

Agli inizi del XX secolo si distinse il matematico italiano `Bruno de Finetti` (1906-1985), a cui si attribuì la nascita della concezione soggettivistica della probabilità, affiancata da tutto un impianto teorico a suo supporto.
In questo periodo si avvertiva con insistenza la necessità di sistematizzare in modo rigoroso le diverse concezioni, nel tentativo di costruire una teoria unificata della probabilità. Al congresso di Parigi del 1900 il matematico Hilbert presentò una lista di problemi di cui bisognava trovare una soluzione e inserì al sesto posto l'assiomatizzazione della probabilità. In questo contesto la scelta degli assiomi da porre a fondamento dell'intera teoria accese un dibattito molto intenso tra le diverse correnti di pensiero, che rivendicavano la propria concezione di probabilità come elemento fondante.
Fu grazie al lavoro del matematico russo `Andrej N. Kolmogorov` (1903-1987) , nell'opera "*Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità*" del 1933, che si raggiunse una prima *formalizzazione matematica* della probabilità, conferendole in questo modo il titolo di disciplina matematica a tutti gli effetti. L'autore si mise al di sopra delle parti, non fornendo una definizione diretta ma accettando qualunque approccio, purché questo rispettasse le proprietà fondamentali, assunte come assiomi.

1.3 La probabilità nelle scuole

Assistiamo con piacere alla recente comparsa della probabilità nei libri di testo e nelle prove d'esame, ma non possiamo non constatare quanto scalpore e quanta confusione questa novità abbia portato nell'ambiente scolastico, sia tra gli studenti che nel corpo docenti. Andremo dunque ad analizzare la modalità con cui fino ad oggi è stato proposto l'insegnamento di questa disciplina, poiché è di notevole importanza incrementare e rafforzare le conoscenze di tipo probabilistico, essenziali ormai in ambito sociale ed economico.

Vogliamo ora mostrare alcune delle principali interpretazioni del concetto di probabilità e si vuole far notare come queste non siano sempre in grado di spiegare alcuni fenomeni.
I libri di testo ci propongono ben tre diverse definizioni:

Definizione classica La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili. Questa definizione, attribuita a Pierre Simon Laplace (1749-1827), è la più antica ed anche la più gettonata, ma si limita a considerare fenomeni che ammettono un numero finito di casi possibili ed equiprobabili;

Definizione frequentista (o statistica) La probabilità di un evento E è la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero di prove effettuate è da ritenersi "sufficientemente alto". Cioè, se indichiamo con S_n il numero di successi su n esperimenti, la probabilità è definita come

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}$$

e si basa sulla Legge empirica del caso;

Definizione soggettiva (o Bayesiana) La probabilità di un evento è la misura del grado di fiducia che una persona attribuisce al verificarsi dell'evento, secondo la sua opinione. Il valore si ottiene effettuando il rapporto tra la somma P che si è disposti a pagare e la somma V che si riceverà nel caso si verifichi. In questo approccio, proposto e sviluppato da Frank P. Ramsey (1903-1930), Bruno de Finetti (1906-1985) e successivamente da Leonard J. Savage (1917-1971), la probabilità non è una proprietà intrinseca e oggettiva dei fenomeni casuali ma dipende dalla valutazione di un soggetto, dalla sua propensione al rischio e dalle informazioni di cui è in possesso.

Consideriamo tre eventi aleatori, facilmente osservabili nella realtà e posti in ordine crescente di difficoltà, di cui vogliamo calcolare la probabilità:

1. Lanciando una moneta, esce testa;
2. un italiano di 35 anni raggiungerà i 65;
3. il prossimo Premio Nobel per la medicina verrà assegnato ad un italiano.

La probabilità del *primo evento* è facilmente calcolabile tramite la definizione classica (la probabilità è pari a $\frac{1}{2} = 50\%$) o anche con quella frequentista ($\frac{S_n}{n}$ approssima il valore 50% per n che va all'infinito), ma si potrebbe verificare un paradosso se utilizziamo la terza definizione (per esempio, potremmo essere disposti a pagare dieci euro per riceverne venti ma non a pagare dieci milioni per poter ricevere venti milioni di euro).
Per quanto riguarda il *secondo evento*, si può calcolare la sua probabilità tramite la seconda interpretazione (come stima statistica basata su dati storici) o con la definizione soggettiva (se in possesso di particolari informazioni può essere una buona generalizzazione); risulta meno chiaro invece come studiare questo caso con la prima interpretazione.
Infine, la probabilità del *terzo evento* è calcolabile in modo efficace con la terza definizione, mentre non è chiaro come poter applicare la prima interpretazione e non è possibile riferirsi alla seconda poiché questo evento non è l'esito di un "esperimento aleatorio riproducibile".
Come si può notare, ai ragazzi viene insegnato a conoscere tutte le definizioni di probabilità ma queste non sono semplici da utilizzare e soprattutto non possono essere applicate in ogni contesto. È quindi naturale che l'impossibilità di riscontrare i concetti espressi dalle definizioni negli esercizi richiesti porti gli studenti a considerare la probabilità come

disciplina ostica, poco intuitiva e a commettere errori nella sua applicazione.

Nei libri di testo viene infine proposta un'impostazione assiomatica della probabilità, una sistemazione delle conoscenze e delle regole acquisite. Sebbene il più delle volte venga suggerita come quarta definizione, consiste sostanzialmente in un'interpretazione matematica, una formalizzazione astratta non avente in realtà lo scopo di indagare il concetto stesso di probabilità. Riportiamo la versione proposta da un libro di testo utilizzato nei licei ([1]):

Definizione assiomatica : La probabilità è una funzione p che associa ad ogni evento E dello spazio degli eventi U un numero reale in modo da soddisfare i seguenti assiomi:

- $P(E) \geq 0$;
- $P(U) = 1$;
- se due eventi E_1, E_2 sono tali che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, allora

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Questo approccio matematico costituisce un tentativo di interpretare le definizioni date in precedenza, anche se ponendolo come "definizione" può essere scambiato come un'altra indagine del concetto di probabilità. Infine, la scelta di utilizzare gli eventi (e quindi generici sottoinsiemi dello spazio degli eventi) può non essere di semplice comprensione. In questa tesi si propone un metodo più elementare e rigoroso per approcciarsi a questi argomenti nella speranza di facilitare l'apprendimento, ed al tempo stesso l'insegnamento, della probabilità.

Capitolo 2

Probabilità nella scuola secondaria di secondo grado

2.1 Le Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali per il Curriculum sono un testo di riferimento che entra in vigore nel Novembre 2012, sostituendo le precedenti Indicazioni Nazionali, avente lo scopo di fornire alle scuole obiettivi di apprendimento e competenze che ogni studente dovrebbe acquisire al termine del percorso scolastico. Le Indicazioni Nazionali costituiscono una intelaiatura dei singoli piani dell'Offerta Formativa, determinando gli obiettivi fondamentali che le istituzioni scolastiche sono chiamate a raggiungere e ad arricchire in base alla propria storia, al proprio territorio e al corpo docenti.

Bisogna sottolineare che non viene dettato alcun modello didattico-pedagogico. Ciò significa favorire la sperimentazione e lo scambio di esperienze metodologiche, valorizzare il ruolo dei docenti e la loro libertà di scelta delle strategie e delle metodologie che ritengono più appropriate.

Nelle Indicazioni Nazionali per l'insegnamento della matematica ritroviamo la probabilità e statistica nella sezione chiamata Dati e Previsioni.

2.1.1 Indicazioni Nazionali per i licei scientifici

Esaminando le Indicazioni Nazionali per i licei scientifici, per i quali è prevista una trattazione più approfondita della probabilità, possiamo notare nella sezione *"linee generali e competenze"* :

'Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.'

Inoltre, tra i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio, troviamo:
4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica.

Entrando più nello specifico, tra gli *Obiettivi Specifici di Apprendimento* del PRIMO BIENNIO, nella sezione *"Dati e Previsioni"* leggiamo:

'Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti. Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l' introduzione di nozioni di statistica. Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.'

Andando avanti, negli *Obiettivi Specifici* per il SECONDO BIENNIO:

'Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.'

Infine, per quanto riguarda il QUINTO ANNO:

'Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.'

2.2 Le prove Invalsi

INVALSI è l'Ente di ricerca dotato di personalità giuridica di diritto pubblico che ha raccolto, in un lungo e costante processo di trasformazione, l'eredità del Centro Europeo dell'Educazione (CEDE) istituito nei primi anni settanta del secolo scorso.
Le prove Invalsi, sostenute in modo anonimo, sono lo strumento utilizzato per rilevare e misurare periodicamente il livello di apprendimento degli studenti italiani, definito a partire dalle Indicazioni per il curricolo del Ministero. Attualmente, ai ragazzi frequentanti la seconda liceo (livello 10), su cui si concentra l'interesse di questa tesi, si prevede la somministrazione di prove di italiano e matematica. L'obiettivo principale delle prove Invalsi è infine quello di monitorare il Sistema nazionale d'Istruzione e confrontarlo con le altre realtà comunitarie ed europee.
In particolare il questionario è utile:

- alle istituzioni scolastiche, per mettere a punto eventuali strategie di miglioramento;
- a ciascuno studente, per conoscere il proprio livello di competenze ottenute;
- al Ministero dell'Istruzione, per operare investimenti e scelte politiche.

Nell'ambiente Dati e Previsioni, tra gli Obiettivi dalle Linee Guida e dalle Indicazioni Nazionali (LGIN) caratterizzanti le prove Invalsi, concentrandoci su quelli riguardanti la probabilità e relativi alla scuola secondaria di secondo grado, troviamo:
LG-IN 21 Dati, loro organizzazione e rappresentazione. Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati. Rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee;
LG-IN 22 Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere e principali rappresentazioni grafiche. Distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle;
LG-IN 24 Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Capitolo 3

Analisi dei risultati delle prove Invalsi

3.1 Rilevazioni Invalsi

Lo studio riguardante l'insegnamento della probabilità e quanto effettivamente l'apprendimento degli studenti possa essere influenzato da questo procede con una ricerca in cui vengono analizzate alcune domande presenti nelle prove Invalsi su una piattaforma online chiamata “Gestinv 2.0”. Poiché si vuole analizzare l'insegnamento della probabilità a livello di scuola secondaria di secondo grado, questa tesi si concentra sul grado 10 (seconda superiore) escludendo però il grado 13. Questa scelta è dovuta al fatto che le prove Invalsi vengono proposte per la prima volta ai ragazzi di quinta superiore dall'anno scolastico in corso (2018-2019) in una finestra che va dal 4 al 30 marzo; inoltre gli argomenti trattati riguardano un primo approccio alla probabilità, che costituisce quindi la base di una trattazione più completa affrontata al quinto anno.
“Il D. Lgs. n. 62/2017 stabilisce che le prove della scuola secondaria (Grado 8, 10 e 13) sono computer based (CBT). La modalità di svolgimento determina anche un cambiamento dell'impianto delle prove: non più lineari, cioè formate dalle stesse domande per tutti gli studenti, ma composte da un certo numero di quesiti differenti provenienti da un'unica banca di domande” (da [11]).

Nella figura seguente sono indicati i periodi in cui sono state effettuate tutte le rilevazioni Invalsi dalla loro comparsa in ambiente scolastico ad oggi:

	A.S. 2007-08	A.S. 2008-09	A.S. 2009-10	A.S. 2010-11	A.S. 2011-12	A.S. 2012-13	A.S. 2013-14	A.S. 2014-15	A.S. 2015-16	A.S. 2016-17	A.S. 2017-18	A.S. 2018-19
GRADO 2												
GRADO 5												
GRADO 6												
GRADO 8											CBT	CBT
GRADO 10											CBT	CBT
GRADO 13												CBT

Figura 3.1: Rilevazioni Invalsi.

Come si può notare, il range temporale che ci interessa va dall'a.s. 2010-2011 al 2018-2019; nella piattaforma interattiva Gestinv, però, troviamo "solo" le prove di matematica dal 2011 al 2017, quelle non computerizzate.
Un primo passo per classificare le domande interessate, e quindi per ottenere i risultati cercati, è individuare l'ambito di contenuto: nel nostro caso ci collochiamo in "Dati e previsioni". A questo punto aggiungiamo il livello e, per velocizzare il processo, effettuiamo una ricerca per parole chiave; queste ultime sono: *spazio degli eventi, probabilità composta , probabilità condizionata, probabilità frequentista e probabilità di eventi elementari.*
Si può notare che la suddivisione proposta dall'archivio non è del tutto efficace, per esempio nella classificazione data da *probabilità di eventi elementari* non sono considerati unicamente eventi elementari ma eventi generici; è possibile che per "elementari" si intendano eventi "semplici" e non oggetti definiti in modo rigoroso. Inoltre, possono essere trattate situazioni che possono rientrare in più parole chiave: queste possono essere trovate con ricerche differenti, ma ci limitiamo a considerarne una per non rendere l'analisi troppo pesante. Infine, esiste un caso in cui, nonostante il testo sia uguale a quello di esercizi posti in una data classificazione, la domanda viene collocata altrove. Di seguito si riporta comunque la classificazione proposta dal sito nell'ordine esposto precedentemente.

3.1.1 Spazio degli eventi

In questa sezione ritroviamo tre quesiti con un totale di quattro item: due hanno percentuali di risposte corrette che superano il 50% e gli altri due no. Gli anni interessati sono il 2011 e il 2017, gli estremi della nostra ricerca.
Per quanto riguarda la prova del **2011**, ci concentriamo su una sola domanda, la numero 2; questa è riscontrabile anche nella sezione "probabilità di eventi elementari" ed è a scelta multipla:

D2. La corriera passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere la corriera?

- ☐ A. 10%
- ☐ B. 40%
- ☐ C. 50%
- ☐ D. 60%

Figura 3.2: Quesito D2, 2011.

In figura sono mostrate le percentuali di risposte date dai ragazzi e si nota il maggior distrattore (C):

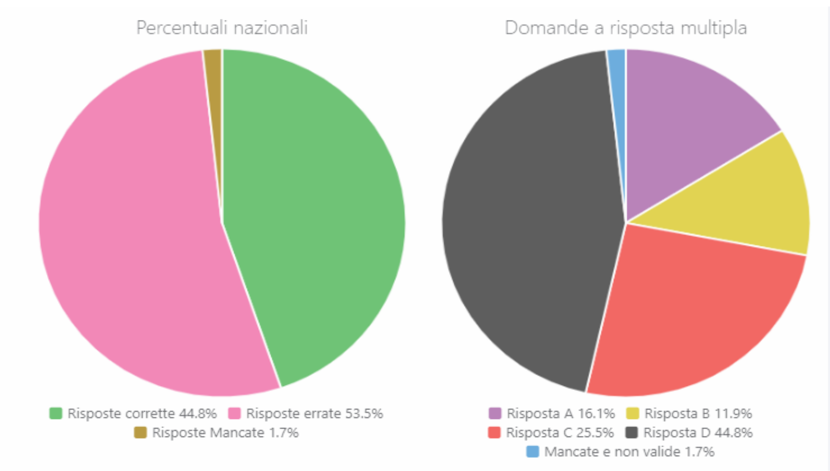
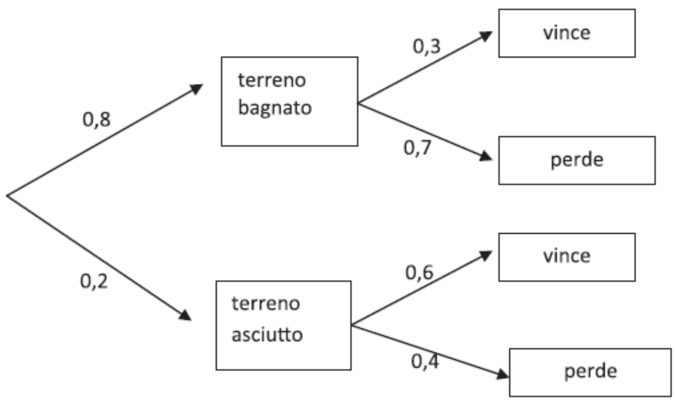


Figura 3.3: Percentuali risposte D2, 2011

Nella prova del **2017**, vengono analizzati due quesiti, il 17 e il 20, l'ultimo di questi avente due item.
Concentrandoci sulla domanda D17, abbiamo:

D17. In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:
- **0,3 se il terreno è bagnato;**
- **0,6 se il terreno è asciutto.**

La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Il diagramma può aiutare a determinare, per esempio, la probabilità che il terreno sia asciutto e che la moto M perda la gara. Essa è 0,2 · 0,4 = 0,08.

Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

Figura 3.4: Quesito D17, 2017.

In questo caso abbiamo un riscontro inaspettato, infatti solo il 18,7% degli studenti ha risposto correttamente (0.36), il 13% non ha risposto e il 68,3% ha sbagliato nonostante nel testo fosse presente un aiuto e fosse già suggerito il diagramma ad albero completamente compilato.

La domanda D20 è la seguente:

D20. Due urne A e B contengono ciascuna tre bigliettini numerati con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae un bigliettino dall'urna A e poi un bigliettino dall'urna B.

a. Completa l'elenco di <u>tutti</u> i possibili esiti che si possono ottenere:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), ...

b. Si estrae un bigliettino dall'urna A e poi uno dall'urna B e si esegue la somma dei due numeri estratti. Fra tutte le possibili somme che si possono ottenere, qual è la più probabile?

Risposta: la somma più probabile è ....

Figura 3.5: Quesito D20, 2017.

Si nota che viene richiesta la determinazione dello spazio degli eventi elencando tutte le possibili uscite, senza l'obbligo di avventurarsi nel calcolo combinatorio. Entrambi gli item hanno avuto un riscontro positivo: il primo ha avuto una percentuale di risposte corrette pari al 77.2%, mentre per il secondo il 58.8% degli studenti ha risposto in modo esatto (4).

3.1.2 Probabilità composta

I quesiti trovati appartenenti a questa classificazione sono tre, anche qui con un totale di quattro item; gli anni interessati sono il 2013, 2015 e 2016. Per questo argomento abbiamo una situazione di disparità, poiché ben tre item sono stati sbagliati.
Procediamo considerando nella prova del **2013** il quesito D11, in cui entrambi gli item sono a scelta multipla:

D11. **Una fabbrica utilizza due diversi macchinari, M_1 e M_2, per produrre tondini.**
M_1 ha un indice di qualità uguale a 0,96 (cioè la probabilità che un tondino che esce da M_1 non sia difettoso è del 96%), mentre M_2 ha indice di qualità uguale a 0,98.

a. **La probabilità che un tondino esca da M_2 difettoso è:**

- A. ☐ 0,02
- B. ☐ 0,04
- C. ☐ 0,96
- D. ☐ 0,98

b. **Per la realizzazione di tondini metallici, M_1 e M_2 lavorano in serie, cioè ogni tondino viene lavorato prima da M_1 e poi da M_2.**
Supponiamo che gli eventi "M_1 produce un tondino non difettoso" e "M_2 produce un tondino non difettoso" siano fra loro indipendenti; allora la probabilità che un tondino non sia difettoso alla fine del ciclo di produzione (cioè dopo essere stato lavorato sia da M_1 che da M_2) è:

- A. ☐ 98%
- B. ☐ 94,08%
- C. ☐ 6%
- D. ☐ 1,94%

Figura 3.6: Quesito D11, 2013.

Il primo consiste nel calcolo della probabilità dell'evento complementare; la soluzione esatta (A) è stata data dal 69% degli studenti, un buon risultato.
Al contrario invece, l'item b ha causato più difficoltà; riportiamo le percentuali di risposte fornite:

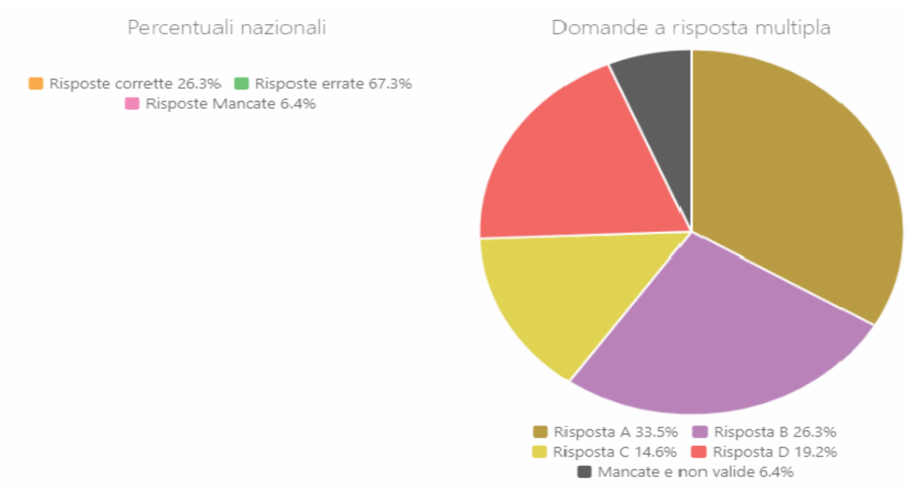


Figura 3.7: Percentuali risposte D11, 2013 item b.

La risposta esatta si ottiene dall'applicazione della definizione di eventi indipendenti e quindi è la scelta B. La maggioranza dei ragazzi però ha preferito il distrattore A, come se dovesse prevalere la probabilità maggiore.

Per l'anno **2015** troviamo il quesito D18, riguardante anch'esso la probabilità di eventi indipendenti (caratteristica suggerita dal testo del problema). Si considera l'item b, che prevede una risposta a scelta multipla:

D18. **Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce "Effetti collaterali" si legge che:**

- **il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini;**
- **il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.**

I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l'uno dall'altro.

a. **Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco non abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in forma percentuale.**

Risposta: .... %

b **Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali?**

A. ☐ 9%
B. ☐ 0,14%
C. ☐ 14%
D. ☐ 0,9%

Figura 3.8: Quesito D18, 2015.

La risposta corretta è la B, ma, come si può notare dal grafico seguente, solo una piccola percentuale di ragazzi l'ha riconosciuta. Più del doppio ha preferito invece la risposta A, trovata *sommando* i dati del problema e non *moltiplicandoli*. Si può dedurre che il concetto di eventi indipendenti e l'indicazione del verificarsi di "entrambi" gli eventi non siano ancora ben chiari ai ragazzi di seconda superiore.

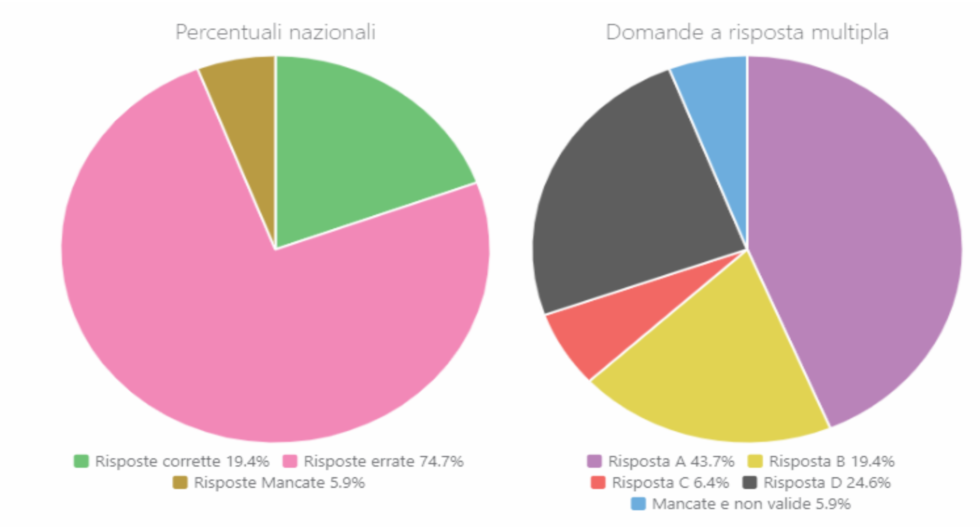
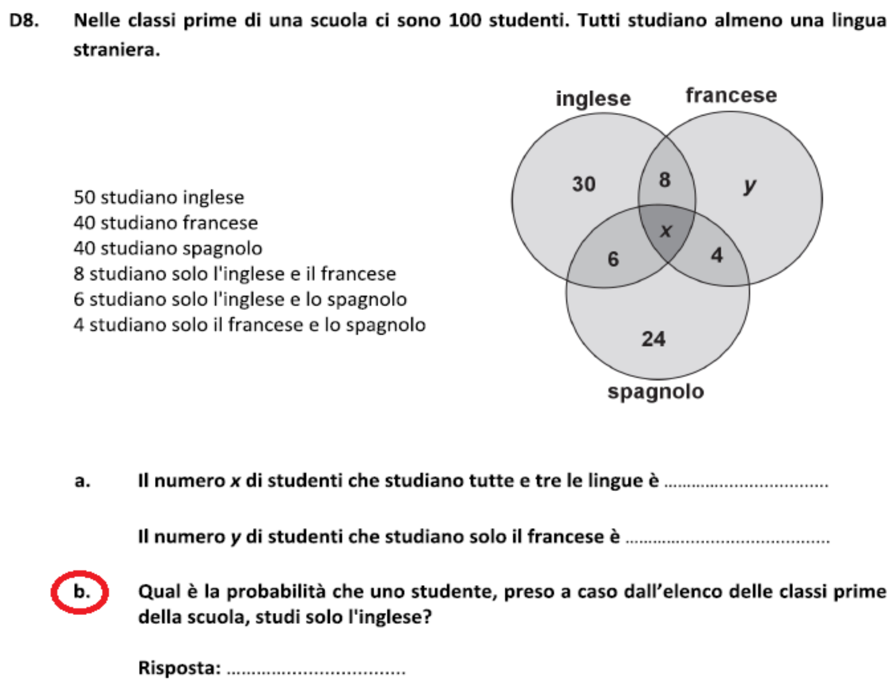


Figura 3.9: Percentuali risposte D18, 2015.

Infine analizziamo il quesito D8, item b, dell'anno **2016**:



D8. Nelle classi prime di una scuola ci sono 100 studenti. Tutti studiano almeno una lingua straniera.

50 studiano inglese
40 studiano francese
40 studiano spagnolo
8 studiano solo l'inglese e il francese
6 studiano solo l'inglese e lo spagnolo
4 studiano solo il francese e lo spagnolo

a. Il numero *x* di studenti che studiano tutte e tre le lingue è ....

Il numero *y* di studenti che studiano solo il francese è ....

b. Qual è la probabilità che uno studente, preso a caso dall'elenco delle classi prime della scuola, studi solo l'inglese?

Risposta: ....

Figura 3.10: Quesito D8, 2016.

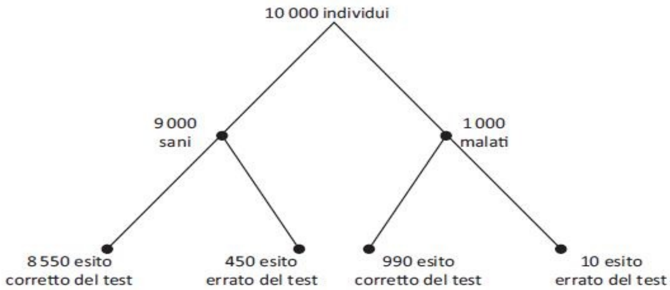
Per ottenere la soluzione gli studenti possono estrapolare i dati occorrenti avvalendosi del diagramma di Eulero-Venn suggerito dal testo, anche se ciò non sembra aiutarli. Infatti, la risposta corretta è 0.3 (o scritture equivalenti) ma viene data solo dal $35,3\%$ dei ragazzi; invece la percentuale di risposte errate è 41%, mentre quella delle mancanti è $23,8\%$.

3.1.3 Probabilità condizionata

Per questa classificazione ritroviamo tre quesiti con un totale di tre item coinvolti; ogni domanda appartiene ad un anno diverso, cioè 2012, 2014 e 2015. Questo argomento può essere considerato uno dei più ostici, infatti si nota che la percentuale di risposte corrette non raggiunge il 40% in nessun quesito.

Partiamo dall'anno **2012**, quesito D6. L'item in considerazione, c, può risultare anche nella suddivisione data da "probabilità di eventi elementari". Il testo fornisce un diagramma ad albero già compilato per visualizzare il problema e chiede di completare una tabella per schematizzare maggiormente i dati. Tuttavia la risposta esatta (89,6) viene data solo dal $14,8\%$ dei ragazzi ed omessa dal $31,8\%$. Si riporta nella pagina successiva il testo dell'esercizio.

D6. **Si sa che in una popolazione di 10 000 individui il 10% è affetto da una malattia, mentre il 90% è sano.**
Il test che diagnostica la presenza della malattia è affidabile solo parzialmente: nel 5% dei casi rileva la malattia su un individuo sano e nell' 1% dei casi non rileva la malattia su un individuo malato. Il diagramma seguente riassume la situazione:



a. **Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella.**

	Esito corretto del test	Esito errato del test	Totale
Sani	....	450	....
Malati	....	....	....
Totale	9 540	....	10 000

b. **Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta a caso da quella popolazione?**

A. ☐ 99,0%

B. ☐ 97,0%

C. ☐ 95,4%

D. ☐ 85,5%

c. **Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso tra tutti quelli che hanno avuto un esito corretto al test, sia sano? Scrivi il risultato in percentuale con una cifra dopo la virgola.**

Risposta: .... %

Figura 3.11: Quesito D6, 2012.

Nel **2014** è possibile riscontrare un problema di probabilità condizionata nel quesito D12, item d. Anche in questo caso si richiede di estrapolare i dati da una tabella e di riconoscere la probabilità condizionata. Si può notare che, similmente all'item precedente, il modo in cui viene posta la domanda non segue la classica esposizione tipica dei problemi di probabilità condizionata "sapendo che si verifica un certo evento, calcolare la probabilità che se ne verifichi un altro".

D12. **È stato effettuato un sondaggio su un campione di 1 500 donne di età compresa tra i 25 e i 55 anni per conoscere la loro opinione su una rivista mensile dedicata alla salute. Si sono ottenuti i seguenti risultati:**

	Occupate	Disoccupate
Giudizio positivo	450	276
Giudizio negativo	367	407

a. **Quante sono le donne che hanno espresso un giudizio positivo?**

Risposta: ....

b. **Quante sono le donne disoccupate intervistate?**

Risposta: ....

c. **Scegliendo a caso una delle donne intervistate, qual è la probabilità che abbia espresso un giudizio negativo?**

Risposta: ....

d. **Scegliendo a caso una delle donne intervistate tra quelle che hanno espresso un giudizio positivo, qual è la probabilità che sia una donna occupata?**

Risposta: ....

Figura 3.12: Quesito D12, 2014.

Nonostante il significato di probabilità condizionata sia il medesimo, non viene riconosciuto, infatti solo il 24, 1% degli studenti ha risposto correttamente, il 46% ha sbagliato e il 29.9% non ha risposto affatto.

Infine, vediamo il quesito D22 del **2015**:

D22. **Un'urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu.**
Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu.
Senza reintrodurre le due palline estratte, si estrae dall'urna una terza pallina.
Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu?

Risposta: ....

Figura 3.13: Quesito D22, 2015.

Questo è uno degli esercizi fondamentali e che più frequentemente si incontra durante la spiegazione della probabilità condizionata. Il mancato reinserimento delle palline unito alla conoscenza del colore di quelle estratte fornisce l'informazione essenziale per trovare la soluzione richiesta ($\frac{15}{38}$). La percentuale di risposte corrette è maggiore rispetto ai quesiti analizzati in precedenza ma non è comunque sufficiente, infatti è pari al $37,7\%$; le risposte sbagliate si aggirano sul $45,7\%$, mentre quelle mancate sono il $16,7\%$.

3.1.4 Probabilità frequentista

La probabilità frequentista viene trattata in due soli quesiti, più precisamente in due soli item, presenti nelle prove del 2015 e del 2016. Come vedremo, anche in questo caso le risposte corrette non sono state molto soddisfacenti.
Analizziamo il quesito D25 del **2015**:

D25. Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci si aspetta di ottenere un numero maggiore di 4?

A. ☐ circa 100 volte
B. ☐ circa 50 volte
C. ☐ circa 30 volte
D. ☐ circa 150 volte

Figura 3.14: Quesito D25, 2015.

Si può notare che la domanda è a scelta multipla ed ha come soluzione l'opzione A, scelta prevalente data dal 45% dei ragazzi. Nel grafico seguente sono riportate le percentuali di risposta relative ad ogni opzione; il maggiore distrattore è la risposta B, trovata considerando $\frac{1}{6}$ la probabilità che si ottenga un numero maggiore di 4 lanciando un dado a sei facce.

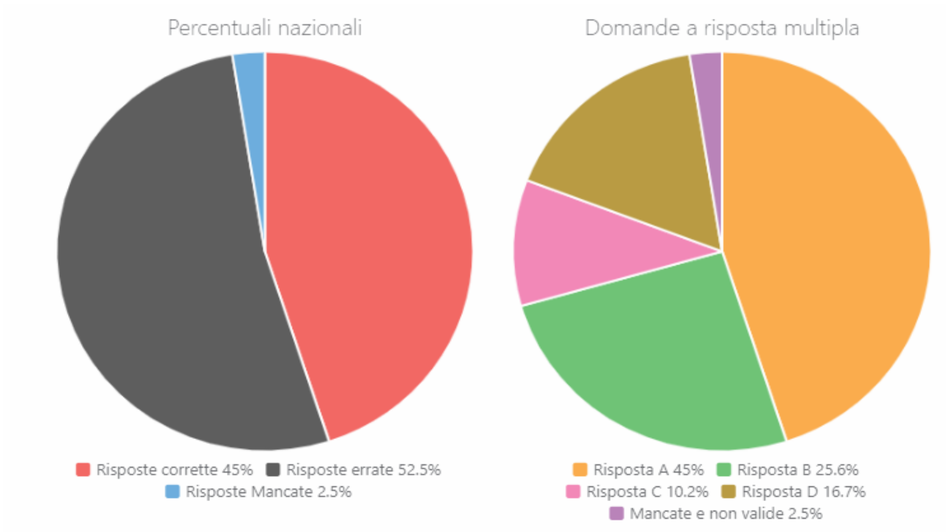


Figura 3.15: Percentuali risposte D25, 2015.

Nel **2016** abbiamo il quesito D12, di cui ci interessa l'item b:

D12. **La seguente tabella riporta, per alcune regioni, il numero di incidenti stradali verificatisi nell'anno 2010 e la lunghezza della rete stradale in chilometri:**

Regioni	Numero di incidenti	Lunghezza della rete stradale (km)
Umbria	4 520	6 639
Sicilia	10 283	20 833
Sardegna	5 562	12 132

Fonte: Elaborazione su dati ACI

a. **Basandoti solo sulle informazioni presenti in tabella, in quale delle tre regioni era più rischioso circolare nel 2010?**

Risposta: ………………………………

b. **Nel 2010 in Italia si sono verificati 292 762 incidenti e la lunghezza della rete stradale italiana era di 303 365 km. Laura afferma che in Sicilia il rischio di incidenti nel 2010 era maggiore di quello che si aveva in Italia nello stesso anno.**
Laura ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ **Laura ha ragione, perché in Sicilia** ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

☐ **Laura non ha ragione, perché in Sicilia** ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Figura 3.16: Quesito D12, 2016.

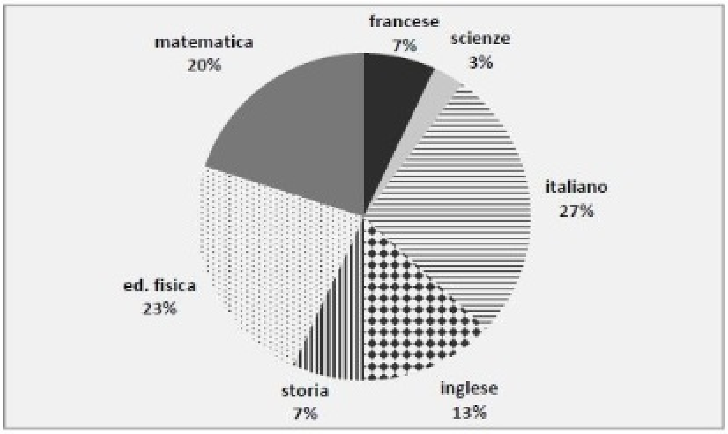
Il quesito prevede una risposta aperta che per essere accettabile deve suggerire chiaramente che il confronto tra i rapporti (numero incidenti/lunghezza rete stradale) è stato preso in considerazione. L'analisi dei risultati mostra che il $29,6\%$ degli studenti ha risposto correttamente, il $21,5\%$ non ha risposto mentre il $48,9\%$ ha sbagliato.

3.1.5 Probabilità di eventi elementari

Questa è la parte più positiva delle rilevazioni. Senza contare i quesiti già citati in precedenza, ci soffermiamo su undici domande, per un totale di sedici item di cui dieci hanno ottenuto un risultato positivo. La ricerca coinvolgerà le prove di tutti gli anni considerati a parte il 2011, visto che il quesito interessato (D2) è stato trattato in precedenza.
Nel **2012** si analizza l'item b del quesito D6 (testo in figura 3.11). L'item in considerazione richiede la capacità di estrapolare dati da una tabella ed è a scelta multipla. La risposta corretta (C) è stata data dal $57,9\%$ dei ragazzi, percentuale nettamente superiore rispetto a quella delle altre opzioni (rispettivamente $12,7\%, 13,1\%$ e $10,3\%$).

Il quesito D12 del **2013** ha due item coinvolti ed il testo è mostrato in figura 3.17, nella pagina seguente. Per quanto concerne l'item a, in realtà non viene propriamente chiesto il calcolo della probabilità; piuttosto, una giusta applicazione delle informazioni ricavate dal grafico a torta proposto dal testo. Le percentuali di risposte corrette e di quelle sbagliate si aggirano sullo stesso livello: sono rispettivamente il $45,2\%$ e il 43%.
L'item b invece è a scelta multipla e può essere affrontato in diversi modi: attraverso una buona comprensione del grafico, oppure utilizzando i dati ottenuti nell'item a. Infatti, seguendo quest'ultima strategia, si può ricavare il numero di chi ha indicato la matematica come materia preferita e dividerla per il numero totale di studenti intervistati. Questo item ha ottenuto il $39,9\%$ di risposte corrette mentre la scelta A è stata il principale distrattore con il $25,3\%$ di risposte.

D12. **In una scuola frequentata da 800 studenti si sceglie un campione di 300 studenti per un sondaggio sulla materia preferita. I risultati del sondaggio sono rappresentati nel seguente diagramma.**



a. **Qual è il numero di studenti del campione che <u>non</u> hanno indicato come materia preferita la matematica?**

Risposta: ……………………………

b. **Qual è la probabilità che uno studente, scelto a caso dal campione, abbia indicato come materia preferita la matematica?**

A. ☐ $\frac{1}{20}$

B. ☐ $\frac{1}{15}$

C. ☐ $\frac{1}{7}$

D. ☐ $\frac{1}{5}$

Figura 3.17: Quesito D12, 2013.

Per quanto riguarda il **2014**, abbiamo tre quesiti interessati.
Il primo è il D12, il cui testo è riportato in figura 3.12. L'item da considerare è il c: si osserva che solo il 32, 2% degli intervistati ha risposto correttamente, il 29, 2% ha lasciato in bianco e il resto ha risposto in modo errato. Questi dati possono essere dovuti sia a una sbagliata lettura della tabella come alla confusione causata dalla distinzione occupate/disoccupate.

Il secondo quesito in esame è il D20:

D20. **Da un controllo di qualità è emerso che una macchina ha prodotto 14 pezzi difettosi su una produzione di 1 200 pezzi. Che stima è ragionevole fare del numero di pezzi difettosi su una produzione di 2 150 pezzi?**
Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato approssimandolo all'unità.

……

……

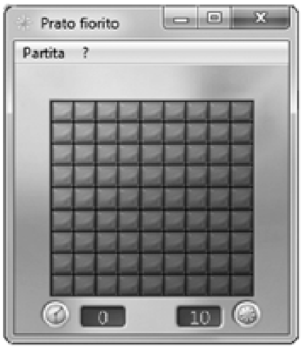
……

Risultato (approssimato all'unità): …………………

Figura 3.18: Quesito D20, 2014.

Questa domanda, tra tutte quelle analizzate, è quella che riporta la più alta percentuale di risposte mancate: pari al 47, 9%, cioè quasi un ragazzo su due non ha risposto. Nonostante il problema si possa risolvere con una semplice proporzione, solo il 35, 8% dei ragazzi ha risposto correttamente (25). Non avendo le effettive risposte possiamo fare solo supposizioni sul motivo di questi risultati; per esempio, può essere che la richiesta di approssimazione all'unità abbia "spaventato" i ragazzi, convincendoli a saltare completamente la domanda.
L'ultimo quesito trattato in questa prova è il D25, di cui sono analizzati entrambi gli item. Come vedremo, è un problema che trae ispirazione dagli interessi dei ragazzi e li pone di fronte a un gioco già visto nella loro quotidianità, sebbene da un punto di vista diverso. Il primo item è a scelta multipla, mentre il secondo a risposta aperta.

D25. "Prato fiorito" è un gioco per computer che si gioca su una scacchiera. Cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Per esempio, nella scacchiera di 9×9 riquadri rappresentata in figura sono nascosti 10 fiori.



a. Qual è la probabilità di scoprire al primo tentativo un fiore nella scacchiera rappresentata in figura?

A. ☐ $\frac{1}{9}$

B. ☐ $\frac{1}{81}$

C. ☐ $\frac{10}{80}$

D. ☐ $\frac{10}{81}$

b. È possibile personalizzare il gioco impostando le dimensioni della scacchiera (cioè il numero di righe e di colonne) e il numero di fiori nascosti. Se si gioca con una scacchiera di 12 x 20 riquadri, quale deve essere il numero dei fiori nascosti perché la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo sia $\frac{1}{8}$?

Risposta: ....

Figura 3.19: Quesito D25, 2014.

La soluzione dell'item a è stata individuata dalla maggioranza dei ragazzi, infatti il $61,4\%$ dei ragazzi ha scelto l'opzione D. Tra le altre opzioni, invece, quella più ambita (ma che si ferma comunque al $16,9\%$) è la B. L'item b è simile al quesito D20 dello stesso anno e può essere risolto in modo analogo, cioè tramite l'utilizzo di una proporzione. Bisogna notare che anche in questo caso la percentuale di risposte mancate è abbastanza alta: $35,6\%$; invece la percentuale di risposte corrette è migliorata rispetto alla domanda precedente, infatti è uguale al $44,8\%$.

Nel **2015** sono presenti due quesiti che rientrano in questa classificazione: il D6, di cui analizziamo entrambi gli item, e il D18, di cui ci soffermiamo solo sull'item a. Concentriamoci sul primo:

D6. **Da un mazzo di 52 carte da gioco (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori, picche) sono stati tolti i 4 assi.**

a. **Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?**

Risposta: ....

b. **Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è $\frac{6}{45}$. Quante carte di fiori sono state tolte?**

Risposta: ....

Figura 3.20: Quesito D6, 2015.

Similmente all'esercizio delle palline, anche le carte sono oggetti spesso studiati per problemi probabilistici. La risposta corretta ($\frac{12}{48}$ o $\frac{1}{4}$ oppure 0,25) è stata data dal $54,2\%$ degli studenti; un buon risultato anche se, per un problema presumibilmente già affrontato, potevamo aspettarci un valore maggiore. L'item b fornisce come dato la probabilità risultante e chiede di ricavare il numero di carte coinvolte: un procedimento generalmente affrontato al contrario. Nonostante ciò, il responso degli studenti è positivo, infatti il $54,3\%$ di questi ha risposto correttamente, il $25,2\%$ ha sbagliato e il $20,5\%$ non ha risposto affatto.

Il testo del quesito D18 è rappresentato in figura 3.8; questa volta, però, ci concentriamo sull'item a. Il calcolo richiesto è sostanzialmente la determinazione della probabilità dell'evento complementare. La risposta esatta (93%) è stata data dal $58,4\%$ dei ragazzi, mentre viene sbagliata o omessa dal restante $41,6\%$. Nonostante il risultato sia complessivamente positivo, possiamo ipotizzare che l'aggiunta di un evento indipendente a quello considerato possa aver influenzato la risposta degli studenti.

L'anno **2016**, insieme al 2014, ha il maggior numero di esercizi che affrontano il problema del calcolo della probabilità di eventi elementari. I quesiti considerati sono tre: il D10, di cui interessano gli item b e c, il D19 e il D29.
Per quanto riguarda il primo, il testo è il seguente:

D10. **La seguente tabella riporta i dati relativi alla popolazione *P* dei diciannovenni residenti in Italia nel 2012 (fonte: ISTAT). Alcuni dati sono stati tolti.**

a. **Completa tu la tabella.**

Popolazione residente all'1 gennaio 2012 - Età 19 anni

	Maschi	**Femmine**	**Totale**
Mai sposati	308 653	288 014	596 667
Sposati	325	.....	4 067
Divorziati	.....	25	.....
Vedovi	2	.....	6
Totale	308 994	291 785	600 779

b. **Utilizzando i dati della tabella, scrivi la frazione corrispondente alla probabilità che un individuo estratto a caso dalla popolazione *P* sia una femmina mai sposata.**

Risposta: $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

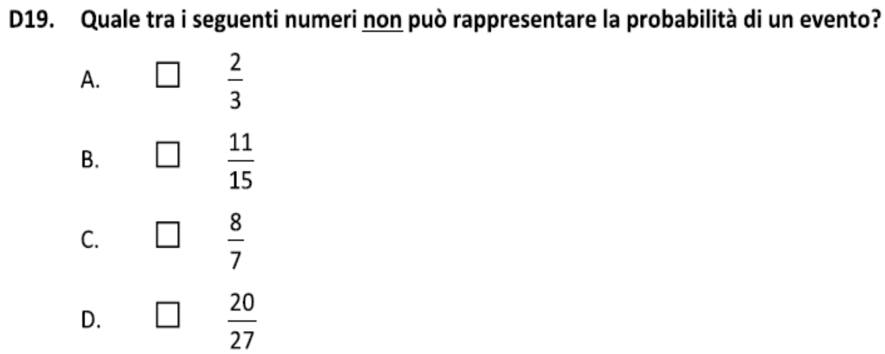
c. **Dalla popolazione *P* è stato estratto a caso un individuo che non si è <u>mai sposato</u>. Utilizzando i dati della tabella, scrivi la frazione corrispondente alla probabilità che sia un maschio.**

Risposta: $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Figura 3.21: Quesito D10, 2016.

Il quesito comincia chiedendo di completare una tabella, successivamente richiede la capacità di estrapolare dati da essa e di calcolare la probabilità di un evento ed infine modifica lo spazio campionario in cui ci si trova per chiedere nuovamente il calcolo della probabilità di un evento. Si nota che viene suggerita ed anche impostata la rappresentazione richiesta per la soluzione, cioè tramite frazione.

Concentrandoci sui risultati dell'item b, si nota che le percentuali delle tre tipologie di risposta sono vicine tra loro: infatti la percentuale di risposte corrette (la soluzione è $\frac{288014}{600779}$) è $33,1\%$, quella di risposte errate è 37% mentre la percentuale di risposte mancate è 30%. Va comunque sottolineato che quella maggiore è la percentuale di risposte sbagliate.
Anche per quanto riguarda l'item c le percentuali dei risultati sono vicine tra loro e simili a quelle dell'item precedente: le risposte corrette di aggirano attorno al $30,5\%$, quelle errate sono il $37,8\%$ e quelle omesse il $31,7\%$. Si nota che il problema in esame apparterrebbe in realtà alla sezione *probabilità condizionata*: infatti la stesura del testo è praticamente uguale all'item c del quesito D6 del 2012 oppure all'item d del quesito D12 del 2014, analizzati in precedenza. Nonostante ciò, la ricerca per parole chiave non posiziona questo esercizio in quella classificazione: per essere coerenti con quanto spiegato all'inizio di quest'analisi, vogliamo dunque inserirlo qui.
Il quesito D19 è il seguente:



D19. Quale tra i seguenti numeri non può rappresentare la probabilità di un evento?

A. ☐ $\frac{2}{3}$

B. ☐ $\frac{11}{15}$

C. ☐ $\frac{8}{7}$

D. ☐ $\frac{20}{27}$

Figura 3.22: Quesito D19, 2016.

La domanda è a scelta multipla e riguarda le principali nozioni di probabilità. Gli studenti sembrano aver familiarizzato con questi concetti, infatti il $74,8\%$ di loro ha scelto correttamente l'opzione C mentre le altre alternative non superano l'8%.

Proseguiamo quindi con l'ultimo quesito, il D29:

D29. **Nella scatola *A* vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola *B* vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola *B* alla scatola *A* affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da *A* diventi uguale alla probabilità di estrarre una pallina verde da *B*?**

A. ☐ 5

B. ☐ 7

C. ☐ 4

D. ☐ 2

Figura 3.23: Quesito D29, 2016.

Anch'esso è a scelta multipla e tratta l'estrazione di palline da due scatole differenti. L'esercizio chiede di saper maneggiare gli spazi campionari che identificano le due scatole in modo da ottenere la stessa probabilità di estrarre una pallina verde da ogni scatola. Si osservi il grafico seguente:

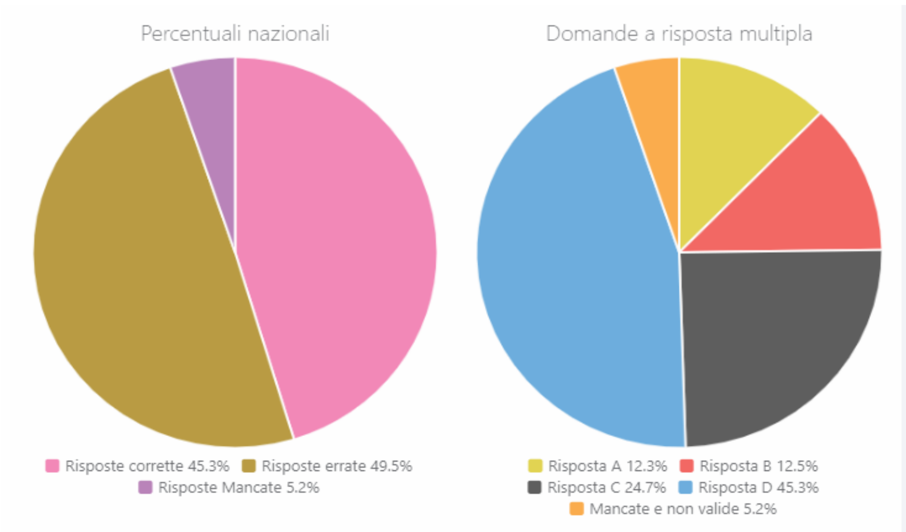


Figura 3.24: Percentuali risposte D29, 2016.

La risposta corretta è la D e viene scelta dal 45,3% dei ragazzi; il maggior distrattore è l'opzione C, scelto dal 24,7% degli studenti. Non sappiamo determinare il motivo di questa scelta, forse i ragazzi spostano le palline verdi dalla scatola B ad A ma non le sottraggono dalla scatola di partenza. In questo modo, infatti, vengono due rapporti simili pari a "0,714" e "0,705". Ad ogni modo, la percentuale di riposte errate è $49,5\%$, maggiore di quelle corrette.

Infine, analizziamo un solo quesito per l'anno **2017**, il D29, di cui trattiamo entrambi gli item:

D29. Una fabbrica utilizza due diverse macchine M_1 e M_2 che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Ciascuna delle due macchine produce chiavette USB da 16 GB e da 32 GB nelle percentuali descritte dalla seguente tabella.

	chiavette USB da 16 GB	chiavette USB da 32 GB	Totale
M_1	18%	42%	60%
M_2	22%	18%	40%
Totale	40%	60%	100%

a. Qual è la probabilità di estrarre dalla produzione della fabbrica una chiavetta da 16 GB prodotta da M_1?

Risposta: .... %

b. Qual è la probabilità che una chiavetta USB estratta dalla produzione della fabbrica sia da 16 GB?

Risposta: .... %

Figura 3.25: Quesito D29, 2017.

Differentemente dai quesiti analoghi visti in precedenza, questo esercizio non inserisce nella tabella il numero di pezzi prodotti, ma fornisce già la percentuale di produzione. Viene richiesto di saper estrapolare dati da una tabella e calcolare la probabilità degli eventi descritti. Nonostante avvenga questa variazione, le percentuali delle risposte sono comunque positive. Per quanto concerne l'item a, il $52,7\%$ dei ragazzi ha risposto in modo esatto (18%), il $27,8\%$ ha sbagliato la risposta mentre il $19,5\%$ non ha rischiato. Considerando invece l'item b, il $21,6\%$ degli studenti ha risposto in modo errato, il $21,2\%$ non ha risposto affatto, mentre il $57,2\%$ ha individuato la risposta corretta (cioè 40%).

3.2 Conclusioni

L'analisi delle prove Invalsi dal 2011 fino al 2017 ha preso in considerazione 19 quesiti in cui compare la probabilità, in particolare vengono studiati 29 item. Possiamo notare che il numero di item riguardanti questa disciplina aumenta anno per anno: si parte dal 2011 con un unico item e si arriva ad un picco di sei nel 2015 e 2016. Questo incremento può indicare la consapevolezza del ruolo fondamentale che la probabilità ricopre al giorno d'oggi.
Considerando come positiva una percentuale di risposte corrette superiore al 50%, l'analisi ha mostrato che:

- i ragazzi hanno risposto bene ad 11 item su 29. Otto di questi appartengono alla classificazione "probabilità di eventi elementari", uno alla sezione "probabilità composta" e i restanti a "spazio degli eventi";
- una percentuale di risposte corrette maggiore del 40% ma non positiva viene assegnata a 5 item su 29; tre item vengono rintracciati dalla ricerca "probabilità di eventi elementari", uno da "spazio degli eventi" ed infine uno da "probabilità frequentista".

Si può affermare che gli studenti hanno avuto maggiori difficoltà nell'approcciarsi a specifici argomenti. Si nota infatti che:

1. nessuno dei tre item coinvolti nella classificazione "probabilità condizionata" ha raggiunto il 40% di risposte corrette, dunque hanno ottenuto tutti un punteggio negativo. Inoltre, uno dei questi, il D6-c del 2012, ha ottenuto la minor percentuale di risposte esatte ($14,8\%$) tra tutte quelle analizzate nelle rilevazioni;
2. anche la sezione "probabilità frequentista" ha un riscontro negativo per entrambi gli item che le appartengono;
3. l'item maggiormente sbagliato fa parte della classificazione "probabilità composta" ed è il D18-b del 2015.

Si può affermare che gli studenti sono a proprio agio con esercizi già affrontati in classe (come il caso delle carte), mentre faticano ad orientarsi tra le proprietà della probabilità quando viene richiesta un'applicazione un po' più complessa. Inoltre, i risultati ottenuti riguardanti la concezione frequentista della probabilità dimostrano che il metodo utilizzato per avvicinarli a questa disciplina può non essere quello ottimale.
L'apprendimento degli studenti riguardante la probabilità non ha dunque basi solide e questa mancanza si manifesta in particolar modo quando vengono trattati concetti come probabilità condizionata o indipendenza di eventi. Sembra che le regole caratterizzanti questi argomenti siano confuse: i ragazzi non sanno quando sommare o moltiplicare le probabilità degli eventi, non riconoscono quando viene richiesta la probabilità che si verifichino due eventi contemporaneamente, hanno insomma diverse lacune e parecchia confusione.
Consapevoli di questa situazione, vogliamo proporre un metodo d'insegnamento alternativo a quello odierno e che possa diminuire lo scompiglio causato da questa disciplina, avvicinando i ragazzi ad una visione più chiara della probabilità ed allo stesso tempo aiutando i docenti nella trattazione.

Capitolo 4

Materiale didattico

Considerati i risultati ottenuti nel capitolo precedente, si vuole proporre una dispensa utilizzabile dai docenti delle scuole superiori di secondo grado con lo scopo di agevolare l'insegnamento ed avvicinare i ragazzi ai concetti fondamentali della probabilità, evidenziandone gli aspetti più significativi. Questo materiale si basa sul percorso formativo elaborato dal prof. Pascucci, dott. Cosso e dott. Lanconelli, autori di un corso di formazione insegnanti tenuto a settembre 2018 a Rimini.

4.1 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

Lo studio della Probabilità non può sottrarsi a tre quesiti fondamentali che la caratterizzano:

1. Che cos'è la Probabilità?;
2. Come si valuta/ stima la Probabilità?;
3. Che regole verifica la Probabilità?

Da meno di un secolo è emersa la consapevolezza della diversa natura di questi problemi e soprattutto che questi ultimi debbano essere indagati con strumenti e metodi specifici di ben tre differenti discipline.

In *Introduzione alla probabilità* di Domenico Costantini ci viene mostrata questa suddivisione:

1. "*La consapevolezza che la risposta a Che cos'è la probabilità? è di pertinenza della* ***Filosofia*** *è abbastanza recente e ben lungi dall'essere comune a tutti gli studiosi di probabilità. Ne consegue che è ancora molto frequente trovare trattati di Calcolo delle probabilità che si aprono con una definizione esplicita di probabilità e quindi col tentativo di individuare la natura della probabilità*";

2. "*Il problema posto dalla domanda Come si valuta/stima la probabilità? può essere affrontato a due livelli: ingenuo o formale... La fine dell' Ottocento e gli inizi del Novecento vedono uno sviluppo rigoglioso di queste ricerche che riescono a elaborare metodi sempre più efficaci per la valutazione della probabilità; esse si organizzazione in modo autonomo e prendono il nome di* ***Statistica inferenziale***";

3. "*Infine, il problema posto dalla domanda Che regole verifica la probabilità? può essere risolto servendosi unicamente di argomentazioni assiomatico-deduttive ed è quindi di pertinenza della Matematica. La disciplina che se ne occupa è il* ***Calcolo delle probabilità***".

È utile notare che gli scopi di queste discipline sono molto diversi fra loro, quindi le conseguenze a cui il loro utilizzo conduce non possono che essere differenti. Infatti, la **Filosofia** per esempio, ha il compito di indagare il concetto di Probabilità e il suo possibile significato, cercando di darne una definizione e studiarne la natura da un punto di vista generale. Essa ha portato a interpretazioni e definizioni anche molto differenti (come si è visto nel paragrafo 1.3).
Per quanto riguarda la **Statistica**, essa studia i metodi per la stima e la valutazione della Probabilità a partire da osservazioni e dati disponibili sul fenomeno aleatorio considerato.
Infine, il **Calcolo delle probabilità** applica il ragionamento astratto e logico-deduttivo per formalizzare la Probabilità e le sue regole, partendo da assiomi e definizioni primitive. Le dà quindi dignità matematica, portandola ad essere una vera e propria *Teoria*.

Alla base della confusione che purtroppo accompagna lo studio di questa disciplina è presente l'incapacità di saper distinguere i tre approcci precedentemente esposti. Con questa dispensa vogliamo avvicinare i ragazzi alla Teoria della Probabilità, dunque utilizzeremo un tono puramente matematico per mostrare ed analizzare la formalizzazione matematica effettuata da Kolmogorov. Nonostante ciò, si tiene presente il livello di apprendimento e di conoscenze richiesto a studenti di una scuola secondaria di secondo grado, dunque non ci dilungheremo in complicati tecnicismi o approfondimenti troppo specifici.

4.2 Concetti fondamentali

Procediamo con la trattazione fornendo definizioni ed esempi fondamentali per poter approfondire questo argomento. Descriviamo, per prima cosa, il problema che generalmente si vuole analizzare:

1. Un *esperimento aleatorio (o fenomeno aleatorio)* è un esperimento di cui non siamo in grado di prevedere con certezza il risultato;

2. Un *esito* è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio;

3. Un *evento* è un'affermazione riguardante l'ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio, della quale è possibile dire con certezza se è vera oppure falsa una volta noto il risultato dell'esperimento aleatorio.

Esempio 4.1. Si lancia un dado non truccato a quattro facce.
Qual è la probabilità che esca un numero maggiore di 1?

Analizzando questo semplice esempio possiamo stabilire che:

- L'**esperimento aleatorio** consiste nel lancio di un dado a quattro facce;

- l'**evento** è l'affermazione "*esce un numero maggiore di 1*" ;

- l'**esito** dell'esperimento è l'uscita del numero 1, oppure del numero 2, o del 3 o del numero 4.

Per poter risolvere un problema di questo tipo è possibile ed anche conveniente tradurre l'esperimento in linguaggio matematico; vogliamo creare un *modello* che ci permetta di schematizzare la situazione proposta ed infine aiutarci nella risoluzione. Diamo quindi alcune definizioni di strumenti che danno vita al modello matematico.

Definizione 4.1. Si chiama *spazio campionario* un insieme non vuoto i cui elementi rappresentano tutti gli ipotetici esiti dell'esperimento aleatorio. Lo spazio campionario si indica generalmente con Ω*:*

$$\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Definizione 4.2. Ogni elemento e_i dello spazio campionario si dice *esito.*

Definizione 4.3. Si chiama *evento* ogni sottoinsieme di Ω costituito dagli esiti per cui l'evento è vero (corrisponde all'insieme vuoto se è sempre falso).

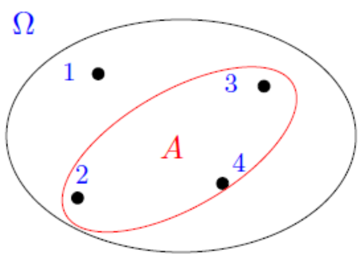
Definizione 4.4. Si dice *evento elementare* ogni sottoinsieme di Ω costituito da un unico elemento.

Considerando ancora l'esempio del lancio del dado, possiamo modellizzare il problema in questo modo:

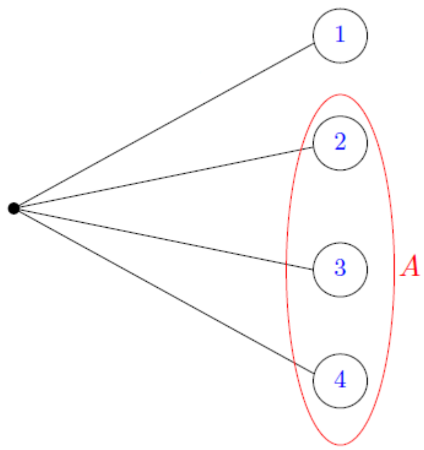
- lo **spazio campionario** è l'insieme $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$;
- i possibili **esiti** sono 1, 2, 3 o 4;
- l'**evento** è il sottoinsieme di Ω, $A = \{2, 3, 4\}$.

Osservazione 1. Va sottolineata la differenza tra *esito* ed *evento elementare*: parliamo del primo quando consideriamo ogni elemento dello spazio campionario, mentre il secondo è un suo sottoinsieme costituito da un solo elemento, anche detto singoletto.

Infine, può essere utile utilizzare un'altra rappresentazione per capire e sviluppare l'esempio del dado a quattro facce: quella grafica.



(a) *Diagramma di Eulero-Venn*



(b) *Diagramma ad albero*

Figura 4.1: Rappresentazioni grafiche

Può essere conveniente, per facilitare la descrizione dei fenomeni, fornire una denominazione utilizzata per indicare alcune caratteristiche degli insiemi:

- due eventi vengono detti *incompatibili* (o mutuamente esclusivi) quando sono insiemi disgiunti :
- due eventi si dicono *compatibili* quando il verificarsi di uno non esclude il verificarsi dell'altro;
- due eventi vengono detti *contrari* quando il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro ma uno dei due si verificherà di sicuro: i due insiemi sono complementari e la loro unione costituisce lo spazio campionario.

A questo punto, abbiamo a disposizione vari strumenti per inseguire l'obiettivo caratteristico del Calcolo delle Probabilità, e cioè fornire un modello matematico per la descrizione e l'analisi di esperimenti aleatori. Per giungere a questo scopo, introdurremo nel prossimo paragrafo la strategia con cui è possibile formalizzare la Probabilità.

4.3 Modello matematico: definizioni ed assiomi

Si consideri un esperimento aleatorio con un numero finito di esiti possibili o eventi elementari mutuamente esclusivi[1] che indichiamo con $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (o con i rispettivi singoletti). Poniamo dunque $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Per introdurre una misura di probabilità su Ω dobbiamo definire le probabilità dei singoli esiti. Ci avvaliamo dei seguenti assiomi:

Assioma I Ad ogni elemento e_i di Ω con $i \in \{1, \ldots, n\}$ è associato un numero $P(\{e_i\}) := P(e_i)$ compreso tra 0 e 1, che chiamiamo *probabilità dell'evento elementare* e_i;

Assioma II I numeri $P(e_1), \ldots, P(e_n)$ assegnati nell'Assioma I soddisfano l'equazione

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1;$$

Assioma III Se A è un sottoinsieme di Ω, allora $P(A)$ è uguale alla somma dei $P(e_i)$ per tutti gli e_i che appartengono ad A. Se A è l'insieme vuoto, si pone $P(A) = 0$.

Andiamo ora a determinare l'ambiente di lavoro in cui ci si trova e a specificare ciò che ci viene solitamente richiesto da esercizi di tipo probabilistico.

Definizione 4.5. La coppia (Ω, P) viene detta *spazio di probabilità.*
Se Ω è un insieme finito o numerabile, (Ω, P) si chiama *spazio di probabilità discreto.*
Nel caso in cui Ω sia non numerabile, la coppia viene detta *spazio di probabilità continuo.*

I sottoinsiemi citati nell'Assioma III, come sappiamo, sono detti *eventi.*

Osservazione 2. Se A è un evento, la quantità $P(A)$, determinata dall'Assioma III, si chiama *probabilità dell'evento A* e consiste nella probabilità che l'esito dell'esperimento aleatorio appartenga all'insieme A. In particolare, il valore associato a $P(A)$ è tanto maggiore quanto più è elevata la probabilità che si verifichi l'evento stesso.

[1]Non possono essere contemporaneamente veri. Per esempio, nel lancio di una moneta l'uscita del risultato testa non può essere contemporaneamente vero all'uscita del caso croce.

L'evento che deve obbligatoriamente verificarsi in seguito ad un esperimento viene detto *evento certo* e ad esso è associata una probabilità pari a 1; al contrario, l'evento che non può accadere è detto *impossibile* e ad esso viene attribuita probabilità nulla.

Vediamo di seguito l'applicazione di questi concetti su alcuni esempi fondamentali.

Esempio 4.2. Si lanci un dado **perfettamente bilanciato**[2] a sei facce.
Qual è la probabilità che esca un numero pari?

Svolgimento. Procediamo analizzando i dati del problema e convertendoli in linguaggio matematico:

- Lo spazio campionario è l'insieme $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- gli esiti sono i singoli elementi di Ω;
- l'evento "Esce un numero pari" è rappresentato dal sottoinsieme A di Ω così formato $A = \{2, 4, 6\}$.

Per completare il modello matematico bisogna determinare le quantità

$$P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$$

I dati del problema relativi al perfetto bilanciamento del dado ci suggeriscono che gli esiti dell'esperimento sono tutti *equiprobabili*, quindi dovrà valere la relazione

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$$

A questo aggiungiamo quanto ci viene specificato dall'Assioma II:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

[2]Regolare, non truccato, equilibrato, ... oppure non viene data alcuna specificazione seguendo il "Principio di Indifferenza" definito da Bernoulli e da Laplace come "Principio di ragione non sufficiente". Infatti, in mancanza di informazioni sufficienti a far prediligere un'ipotesi rispetto ad un'altra, vale la distribuzione uniforme della probabilità a priori delle ipotesi.

Andiamo dunque a riassumere queste condizioni in un sistema:

$$\begin{cases} P(1) = P(2) \\ P(2) = P(3) \\ P(3) = P(4) \\ P(4) = P(5) \\ P(5) = P(6) \\ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \end{cases}$$

Ponendo per esempio $x = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$, la soluzione del sistema lineare è data da:

$$\begin{cases} P(1) = \frac{1}{6} \\ P(2) = \frac{1}{6} \\ P(3) = \frac{1}{6} \\ P(4) = \frac{1}{6} \\ P(5) = \frac{1}{6} \\ P(6) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Infine, per rispondere a quanto richiesto dal problema, utilizziamo l'Assioma III per determinare la probabilità che esca un numero pari.
Avremo dunque

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$$

e quindi $P(A) = \frac{3}{6} = 50\%$. $\square$

Esempio 4.3 (Versione semplificata del secondo quesito dell'esame di Maturità 2018)**.** Si dispone di un dado **non bilanciato** a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando il dado, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lancia il dado, qual è la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 3?

Svolgimento. Come abbiamo fatto nel caso precedente, andiamo a trascrivere i dati del problema:

- Lo spazio campionario è determinato dall'insieme $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$;
- gli esiti sono i singoli elementi di Ω;
- l'evento "Esce un numero maggiore o uguale a 3" è rappresentato dal sottoinsieme A di Ω così formato $A = \{3, 4\}$.

Per determinare i valori $P(1), P(2), P(3), P(4)$ dobbiamo considerare l'Assioma II come nell'esempio precedente, ma questa volta dobbiamo tenere presente che abbiamo informazioni specifiche riguardanti la relazione esistente tra queste quantità. Andiamo quindi a riassumere il tutto in un sistema:

$$\begin{cases} P(1) = 2P(2) \\ P(2) = 2P(3) \\ P(3) = 2P(4) \\ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema consiste nella determinazione delle probabilità di uscita di ogni singolo numero, cioè:

$$\begin{cases} P(1) = \frac{8}{15} \\ P(2) = \frac{4}{15} \\ P(3) = \frac{2}{15} \\ P(4) = \frac{1}{15} \end{cases}$$

A questo punto, seguendo quanto esposto dall'Assioma III, possiamo calcolare la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 3.
Avremo dunque

$$P(A) = P(3) + P(4) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%$$

. $\square$

Proponiamo infine un terzo esempio per poter visualizzare al meglio l'utilità dell'assiomatizzazione della probabilità. Viene cambiato esperimento e, differentemente dai casi precedenti, si assiste ad un doppio lancio. Nonostante l'esercizio possa sembrare di difficoltà maggiore, vedremo che il modus operandi sarà lo stesso ed agevolerà notevolmente la comprensione del testo e la determinazione della soluzione.

Esempio 4.4. Si consideri una moneta equilibrata. Dopo due lanci, qual è la probabilità di ottenere almeno una testa?

Svolgimento. Gli elementi che costituiscono il modello matematico sono i seguenti:

- Lo spazio campionario è dato dall'insieme $\Omega := \{CC, CT, TC, TT\}$;
- gli esiti dell'esperimento sono i singoli elementi di Ω;
- l'evento "Si ottiene almeno una testa" è descritto dall'insieme $A = \{CT, TC, TT\}$, sottoinsieme di 'Ω.

Dobbiamo ora assegnare i valori $P(CC), P(CT), P(TC), P(TT)$; la proprietà che caratterizza la moneta (l'essere equilibrata) ci suggerisce che queste quantità sono tutte uguali fra loro e l'Assioma II ci dice che la loro somma è pari all'unità.
Riassumiamo il tutto in un sistema:

$$\begin{cases} P(CC) = P(CT) \\ P(CT) = P(TC) \\ P(TC) = P(TT) \\ P(CC) + P(CT) + P(TC) + P(TT) = 1 \end{cases}$$

Il sistema è risolubile e ci permette di ottenere i valori

$$P(CC) = P(CT) = P(TC) = P(TT) = \frac{1}{4}.$$

Rimane dunque da completare un ultimo passaggio: la quantificazione della probabilità dell'evento richiesto.

Il sottoinsieme A è costituito da tre elementi, perciò la sua probabilità è data dalla somma delle probabilità di questi ultimi (Assioma III).
Risulta

$$P(A) = P(CT) + P(TC) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

□

4.4 Conseguenze degli assiomi

Dal momento che abbiamo trattato gli eventi come sottoinsiemi dello spazio campionario, le *operazioni logiche* che si presentano tra eventi possono essere affrontate in termini di *operazioni insiemistiche*:

i) "A oppure B" si traduce in $A \cup B$;

ii) "A e B" viene tradotto con $A \cap B$;

iii) " Non A" si traduce in A^c;

iv) "A ma non B" viene tradotto in $A \setminus B$.

Tenendo presente queste corrispondenze, dai tre assiomi è possibile ricavare quattro conseguenze fondamentali.

Proposizione 1. Considerato lo spazio di probabilità (Ω, P), dove $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ e P misura di probabilità specificata dagli assiomi, valgono le seguenti proprietà:

1. $P(\Omega) = 1$*,*

2. se A e B sono eventi disgiunti, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *;*

3. per ogni evento A vale $P(A^c) = 1 - P(A)$*;*

4. se $A \subseteq B$*,* $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$*.*

Dimostrazione. 1. Poiché $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ possiamo affermare, utilizzando l'Assioma I e III, che la sua probabilità è data dalla somma delle probabilità dei singoli elementi, cioè $P(\Omega) = P(e_1) + \cdots + P(e_n)$. Infine, sappiamo che questa somma deve essere pari a 1 per l'Assioma II e quindi $P(\Omega) = 1$;

2. la relazione è data da un'opportuna iterazione dell'Assioma III e viene anche detta **Assioma III-bis**;

3. considerando un qualunque evento A, vale la relazione $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$ per definizione di insieme complementare e per la proprietà numero 1. Inoltre, essendo i due eventi disgiunti, possiamo applicare la proprietà 2 per la quale vale $1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$. Infine, da quest'ultima relazione possiamo ricavare quanto richiesto;

4. se $A \subseteq B$, per l'additività di P si ha $P(B) = P(A \cup (B \setminus A))$; poiché l'unione è disgiunta vale $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, dunque si ottiene $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
.

□

Osservazione 3. La terza proprietà è particolarmente importante poiché fornisce un metodo alternativo per il calcolo della probabilità di un evento. Vediamo ora un esercizio in cui è possibile applicare quanto appena visto.

Esercizio 4.1. Calcolare la probabilità di ottenere *almeno* una testa in tre lanci di una moneta equilibrata.

Svolgimento. Lo spazio di probabilità per questo esperimento è la coppia (Ω, P) dove lo spazio campionario Ω è l'insieme $\Omega = \{CCC, CCT, CTC, CTT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$ e bisogna calcolare la probabilità dell'evento A " si ottiene almeno una testa".

Primo metodo Si rappresenta A come un sottoinsieme di Ω, quindi $A = \{CCT, CTC, CTT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$. Poiché la moneta è equilibrata per ipotesi, tutte le quantità $P(e_i)$ $\forall e_i \in \Omega$ sono uguali fra loro e la loro somma è pari a 1 (per l'Assioma II). Dunque avremo $P(e_i) = \frac{1}{8}$ $\forall e_i \in \Omega$; utilizzando l'Assioma III abbiamo allora $P(A) = \frac{7}{8}$;

Secondo metodo definiamo l'evento complementare A^c come "non si ottengono teste" e quindi la sua rappresentazione come sottoinsieme di Ω è $A^c = \{CCC\}$. Successivamente, dalla terza conseguenza degli assiomi possiamo ricavare la relazione

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Dunque la probabilità richiesta sarà $P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

$\square$

Osservazione 4. Per ora la seconda conseguenza è stata trattata solo nel caso particolare in cui A e B siano eventi disgiunti, ma è possibile definirla anche se così non fosse. Infatti, considerando due eventi NON disgiunti A e B (per i quali vale $A \cap B \neq 0$), non è difficile verificare che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

L'Assioma III-bis si può facilmente ritrovare a partire da questa relazione: nel caso di eventi disgiunti, vale che $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. In questo modo quindi si torna alla probabilità dell'unione di eventi precedentemente esposta.

Esempio 4.5. Si lanci un dado equilibrato due volte. Qual è la probabilità di ottenere 1 al primo lancio oppure 2 al secondo?

Svolgimento. Scriviamo lo spazio di probabilità (Ω, P): lo spazio campionario è

$$\Omega = \{(1,1); \ldots; (1,6); (2,1); \ldots; (2,6); \ldots; (6,1); \ldots; (6,6)\}$$

mentre per calcolare le varie probabilità utilizziamo lo stesso procedimento degli esercizi precedenti (Assioma II e dato sulla regolarità del dado). Otteniamo dunque il risultato

$$P(e_i) = \frac{1}{36}, \quad \forall e_i \in \Omega.$$

L'evento di cui si richiede il calcolo della probabilità è A := {"si ottiene 1 al primo lancio oppure 2 al secondo"}.
Possiamo notare che l'evento A può anche essere scritto come unione di due sottoinsiemi $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 := \{\text{“si ottiene 1 al primo lancio”}\}$$
$$A_2 := \{\text{“si ottiene 2 al secondo lancio”}\}.$$

Riscrivendo questi eventi come sottoinsiemi di Ω e facendo uso dell'Assioma III possiamo calcolare le loro probabilità:

$$P(A_1) = P(\{(1,1);(1,2);\ldots;(1,6)\}) = \tfrac{6}{36} = \tfrac{1}{6}$$
$$P(A_2) = P(\{(1,2);(2,2);\ldots;(6,2)\}) = \tfrac{6}{36} = \tfrac{1}{6}.$$

Per calcolare la probabilità dell'evento A bisogna notare che A_1 e A_2 non sono insiemi disgiunti: la loro intersezione è pari a $A_1 \cap A_2 = \{(1,2)\} \neq \emptyset$ e la probabilità di quest'ultima vale $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$.
A questo punto, per trovare la soluzione del problema ci avvaliamo dell'Assioma III-bis nel caso di eventi compatibili

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Otteniamo dunque il risultato

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

. □

Nonostante la formula vista sia molto utile per il calcolo della probabilità dell'unione di due eventi, può risultare pesante se applicata al caso di tre o più eventi.
Infatti, nel caso generale di tre insiemi non disgiunti, si presenta in questo modo

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Esempio 4.6. Si lanci un dado equilibrato tre volte.
Calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno dei seguenti eventi: A := {"si ottiene 1 al primo lancio"}, B:= {"si ottiene 2 al secondo lancio"} e C := {"si ottiene 3 al terzo lancio"}.

Svolgimento. Come al solito, descriviamo per prima cosa lo spazio di probabilità.
La rappresentazione di Ω risulta più complicata dell'esempio precedente dal momento che abbiamo un lancio in più; invece di elencare tutti gli elementi che lo compongono, ci

limitiamo a stimare la sua cardinalità.
In questo caso i numeri che possono uscire in un lancio sono 6 e i lanci sono 3, avremo dunque

$$|\Omega| = 6^3 = 216$$

Poiché il dado è equilibrato e vale l'Assioma II, grazie al procedimento già esposto si trova

$$P(e_i) = \frac{1}{216}, \quad \forall e_i \in \Omega$$

Andiamo ad elencare gli elementi dei tre eventi esposti:

- $A = \{(1,1,1); (1,1,2); \ldots; (1,1,6); (1,2,1); \ldots; (1,2,6); \ldots; (1,6,1); \ldots; (1,6,6)\}$;
- $B = \{(1,2,1); (1,2,2); \ldots; (1,2,6); (2,2,1); \ldots; (2,2,6); \ldots; (6,2,1); \ldots; (6,2,6)\}$;
- $C = \{(1,1,3); (1,2,3); \ldots; (1,6,3); (2,1,3); \ldots; (2,2,3); \ldots; (6,1,3); \ldots; (6,6,3)\}$.

Si calcola la probabilità di ognuno di questi eventi con l'Assioma III e si ottiene

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

Non essendo eventi disgiunti, per poter utilizzare la formula per il calcolo della probabilità dell'unione di questi ultimi occorre determinare gli insiemi intersezione e stabilirne la probabilità.

- $P(A \cap B) = P(\{(1,2,1), (1,2,2), \ldots, (1,2,6)\}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$;
- $P(A \cap C) = P(\{(1,1,3), (1,2,3), \ldots, (1,6,3)\}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$;
- $P(B \cap C) = P(\{(1,2,3), (2,2,3), \ldots, (6,2,3)\}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$;
- $P(A \cap B \cap B) = P(\{(1,2,3)\}) = \frac{1}{216}$.

Possiamo quindi determinare la probabilità che almeno uno tra i tre eventi si verifichi usando la formula (4.4.1), ottenendo il risultato

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}.$$

$\square$

Osservazione 5. Come previsto, l'esercizio è stato risolto utilizzando molti passaggi e concentrandosi su tanti insiemi differenti. La formula 4.4.1 è valida, ma può risultare abbastanza "ingombrante" in alcuni casi. La soluzione dell'esempio precedente poteva anche essere trovata più velocemente utilizzando la terza conseguenza degli assiomi, ossia adoperando l'insieme complementare.
La seconda legge di De Morgan suggerisce che

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

quindi nel caso dei tre lanci del dado si ottiene

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c.$$

L'evento $A^c \cap B^c \cap C^c$ rappresenta l'affermazione "non si ottiene 1 al primo lancio né 2 al secondo né 3 al terzo lancio". Questo insieme possiede 125 elementi aventi ognuno probabilità $\frac{1}{216}$ per quanto visto prima, quindi la sua probabilità per l'Assioma III è

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = \frac{125}{216}.$$

La probabilità che *almeno* uno dei tre eventi si verifichi è dunque

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P((A \cup B \cup C)^c) \\ &= 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) \\ &= 1 - \frac{125}{216} \\ &= \frac{91}{216} \end{aligned}$$

come ci aspettavamo.

4.5 Spazi di probabilità uniformi

Gli esempi che abbiamo trattato fino ad ora riguardano il caso in cui le probabilità degli eventi elementari siano tutte uguali fra loro (tranne nell'esempio 4.3). È possibile formalizzare questa situazione introducendo gli *spazi di probabilità uniformi*.

Definizione 4.6. Uno spazio di probabilità (Ω, P) si dice *uniforme* se Ω è costituito da un numero finito di eventi elementari $\{e_1\}, \{e_2\}, \ldots, \{e_n\}$ e vale

$$P(e_1) = P(e_2) \cdots = P(e_n).$$

Grazie all'Assioma II, possiamo ricavare

$$P(e_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

da cui segue che, considerando un qualunque $A \subseteq \Omega$, vale

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{numero di eventi elementari contenuti in A}}{n}$$

La misura di probabilità P viene detta *probabilità uniforme* ed ogni esito si dice *equiprobabile.*

Con questa definizione ritroviamo una interpretazione di probabilità molto usata nelle scuole: la definizione classica. Infatti, la probabilità uniforme corrisponde al concetto classico di probabilità, individuata come rapporto di *casi favorevoli* su *casi possibili.* Possiamo dunque notare che questo famoso approccio altro non è che una conseguenza di una scelta particolare di misura di probabilità, meglio trattata tramite assiomatizzazione.

Vediamo di seguito due esempi fondamentali per poter comprendere gli spazi di probabilità uniformi; questi esempi sono descritti da esperimenti spesso utilizzati in ambito probabilistico, come l'estrazione di palline da contenitori o la somma di lanci di dadi o monete.

Esempio 4.7. Si consideri una scatola contenente 4 palline bianche, 2 palline rosse e 1 pallina nera. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

Svolgimento. Costruiamo lo spazio di probabilità (Ω, P): Ω è l'insieme $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, r_1, r_2, n_1\}$ avente per elementi i risultati delle singole estrazioni. La misura di probabilità è uniforme dunque vale

$$P(b_1) = P(b_2) = P(b_3) = P(b_4) = P(r_1) = P(r_2) = P(n_1)$$

e per l'Assioma II

$$P(e_i) = \frac{1}{7}, \quad \forall e_i \in \Omega.$$

L'evento A:= { "viene estratta una pallina bianca" } $=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ha quattro elementi, dunque $P(A) = \frac{4}{7}$. □

Osservazione 6. Potremmo essere portati a costruire lo spazio campionario suddividendolo per colori, come $\Omega = \{b, r, n\}$. Così facendo però, si potrebbe cadere in errore considerando la probabilità uniforme $P(b) = P(r) = P(n) = \frac{1}{3}$ per l'Assioma II; in questo modo infatti l'estrazione di una pallina bianca non dipende né dal numero di palline contenute nella scatola né da quello di palline del colore richiesto.

Esempio 4.8. Si lanciano due dadi equilibrati e si sommano i risultati ottenuti.
Qual è la probabilità che la somma sia 8?

Svolgimento. Lo spazio di probabilità uniforme (Ω, P) è costituito dallo spazio campionario $\Omega = \{(1,1); \ldots; (1,6); (2,1); \ldots; (2,6); \ldots; (6,1); \ldots; (6,6)\}$ in cui sono rappresentate tutte le coppie di lanci possibili. Gli esiti sono equiprobabili fra loro, quindi abbiamo una probabilità uniforme che stabilisce

$$P((1,1)) = P((1,2)) = \cdots = P((6,5)) = P((6,6)) = \frac{1}{36}$$

(dove 36 è la cardinalità di Ω).
Se chiamiamo A:= {"la somma del lancio dei due dadi è 8"}, abbiamo per definizione

$$P(A) = \frac{\text{numero coppie con somma 8}}{36}$$

Per risalire alla cardinalità di A ci conviene elencare i casi in cui la somma sia 8, dunque

$$A = \{(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)\}$$

Perciò il risultato richiesto è $P(A) = \frac{5}{36}$. □

Osservazione 7. Anche in questo caso avremmo potuto risolvere l'esercizio diversamente. Al posto di elencare analiticamente tutte le uscite possibili, avremmo potuto costruire Ω come lo spazio delle somme, cioè $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

In questo modo però, non possiamo avere una probabilità uniforme, infatti la probabilità che la somma sia 2 non può essere uguale alla probabilità di ottenere come somma 5. Questo accade poiché, se possiamo individuare la somma 2 con una sola coppia, cioè $(1,1)$, non possiamo dire lo stesso per quanto riguarda l'uscita della somma pari a 5. Infatti, quest'ultima può essere determinata dall'uscita di quattro coppie, cioè $(1,4)$ o $(2,3)$ oppure $(3,2)$ o $(4,1)$.

4.6 Probabilità condizionata

Come visto all'inizio di questa tesi, la Teoria della Probabilità si occupa di fenomeni il cui esito è incerto. L'incertezza può essere causata da *mancanza di informazioni* riguardanti il fenomeno e questa assenza può dipendere da diversi fattori. Per esempio, l'evento avverrà nel futuro, dunque deve ancora verificarsi (come l'andamento di un titolo azionario), oppure è già avvenuto ma non vi erano le condizioni per osservarlo (come la traiettoria di un elettrone). Si può anche assistere ad un'evoluzione del possesso di informazioni, come nel caso in cui alcune di esse diventino disponibili, e questa situazione richiede un "aggiornamento" dello spazio di probabilità che descrive il fenomeno. A questo scopo si introduce un concetto peculiare della Teoria della Probabilità: la probabilità condizionata. Quest'ultima ci permette di analizzare come l'*informazione* riguardo al verificarsi di un evento B *influenzi la probabilità* che si verifichi un altro evento A. Proviamo a comprendere questo nuovo concetto tramite un esempio:

Esempio 4.9. *Si lanci un dado equilibrato.*
Come abbiamo visto precedentemente, lo spazio di probabilità (Ω, P) più indicato per la descrizione di questo fenomeno è dato da

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- $P(1) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$ dati dalla regolarità del dado e dall'Assioma II.

Supponiamo ora di non poter assistere al lancio del dado, ma che una persona presente al momento dell'esecuzione dell'esperimento ci riferisca che il risultato del lancio è un numero pari.

L'informazione acquisita trasforma lo spazio di probabilità: Ω diventa $\tilde{\Omega} = \{2, 4, 6\}$, mentre la misura di probabilità P viene aggiornata con $\tilde{P}$ per cui vale

$$\begin{cases} \tilde{P}(1) = \tilde{P}(3) = \tilde{P}(5) = 0 \\ \tilde{P}(2) = \tilde{P}(4) = \tilde{P}(6) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Procediamo con la generalizzazione di questi concetti, in modo da avere una maggior chiarezza e possibilità di applicazione.

Definizione 4.7 (Probabilità condizionata). Nello spazio di probabilità (Ω, P) si considerino due eventi $A, B \subset \Omega$ tali che B non sia trascurabile (cioè $P(B) > 0$). Si definisce *probabilità condizionata* di A dato B, e si indica con il simbolo $P(A|B)$, il rapporto

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.6.1}$$

Il valore $P(A|B)$ rappresenta la probabilità che si verifichi A sapendo che l'esito dell'esperimento aleatorio appartiene a B.

La misura di probabilità $P(\cdot|B)$ soddisfa tutti gli assiomi elencati e quindi $(\Omega, P(\cdot|B))$ è un nuovo spazio di probabilità *aggiornato sulla base dell'informazione che si è verificato B.*

Osservazione 8. Dopo essere venuti a conoscenza dell'appartenenza dell'esito dell'esperimento all'evento B, è possibile riscrivere lo spazio di probabilità come $(B, P(\cdot|B))$ invece di $(\Omega, P(\cdot|B))$. Infatti in questo modo vengono eliminati dallo spazio campionario quegli esiti a cui avremmo assegnato probabilità nulla.

Esercizio 4.2. Calcolare la probabilità che la somma degli esiti di due lanci di un dado sia 7 sapendo che nel primo lancio si è ottenuto un numero pari.

Svolgimento. **Primo metodo** L'esperimento non ci è nuovo, dunque possiamo dire che lo spazio campionario è

$$\Omega = \{(1, 1); \dots; (1, 6); (2, 1); \dots; (2, 6); \dots; (6, 1); \dots; (6, 6)\}$$

in cui sono rappresentati tutti i lanci possibili.
Conosciamo la probabilità che si ottenga ognuno di essi

$$P(e_i) = \frac{1}{36}, \quad \forall e_i \in \Omega$$

ed inoltre sappiamo che si è verificato l'evento B ={"è uscito un numero pari al primo lancio"}, dunque $B = \{(2,1); \ldots; (2,6); (4,1); \ldots; (4,6); (6,1); \ldots; (6,6)\}$.
Utilizzando l'Assioma III possiamo quindi trovare $P(B) = \frac{18}{36}$.
A questo punto determiniamo l'evento

$(A \cap B) = \{$"La somma di due lanci di un dado è 7 **e** al primo lancio è uscito un numero pari"$\}$

Questo evento è formato dagli elementi seguenti $(A \cap B) = \{(2,5); (4,3); (6,1)\}$ e quindi ha probabilità di verificarsi pari a $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$. Applicando infine la definizione di probabilità condizionata, siamo in grado di calcolare la probabilità dell'evento richiesto

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{1}{6}.$$

Secondo metodo E' possibile aggiornare lo spazio campionario sostituendolo con l'evento B che sappiamo essersi verificato. Dunque se consideriamo

$$\tilde{\Omega} = B = \{(2,1); \ldots; (2,6); (4,1); \ldots; (4,6); (6,1); \ldots; (6,6)\},$$

il nuovo spazio di probabilità sarà $(B, P(\cdot|B))$ ed abbiamo che la nuova misura di probabilità vale

$$P(e_i|B) = \frac{1}{18}, \quad \forall e_i \in \tilde{\Omega}.$$

L'evento A= {"la somma di due lanci è 7"} è costituito perciò da tre elementi:
$A = \{(2,5); (4,3); (6,1)\}$; si ottiene dunque il risultato $P(A|B) = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$, come sopra.
□

Proposizione 2. Sia B un evento non trascurabile. Valgono le seguenti proprietà:

1. se $A \subseteq B$ allora $P(A|B) \geq P(A)$;

2. se $B \subseteq A$ allora $P(A|B) = 1$;

3. se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A|B) = 0$;

4. se $P(A) = 0$ allora $P(A|B) = 0$.

Dimostrazione. Queste proprietà sono tutte dimostrabili usando la definizione di probabilità condizionata:

1. se $A \subseteq B$ segue che $A \cap B = A$ dunque $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$. Poiché $0 < P(B) \leq 1$ per ipotesi e per l'Assioma I, si ottiene la disuguaglianza cercata $P(A|B) \geq P(A)$;
2. se $B \subseteq A$ si ha che $A \cap B = B$, perciò $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$;
3. se $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cap B) = 0$ per l'Assioma III. Dunque si ottiene $P(A|B) = \frac{0}{P(B)} = 0$;
4. se $P(A) = 0$, allora anche $P(A \cap B) = 0$. Come nel caso (3) risulta quindi $P(A|B) = 0$.

□

Esercizio 4.3. Una scatola contiene due palline bianche e due palline nere. Si eseguono due estrazioni senza reinserimento e si osservano i colori delle palline estratte. Qual è la probabilità che la prima estratta sia bianca sapendo che la seconda sarà invece nera?

Svolgimento. Questo esperimento ha una soluzione abbastanza intuitiva, perciò possiamo permetterci di non utilizzare la definizione di probabilità condizionata. Sapendo per ipotesi che si è ottenuta una pallina nera durante la seconda estrazione, allora la palline disponibili per la prima estrazione sono solo tre: due bianche e una nera. A questo punto, la probabilità di scegliere una pallina qualunque fra queste è $\frac{1}{3}$ perciò la probabilità di estrarne una bianca è $\frac{2}{3}$. Notiamo che l'informazione acquisita sulla seconda estrazione fa aumentare la probabilità di estrarre una pallina bianca, numericamente da $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$. □

Abbiamo appena visto un caso in cui per calcolare la probabilità condizionata non occorre passare tramite la sua definizione. Questo procedimento ci è utile quando risulta complicato calcolare la probabilità dell'intersezione di due o più eventi compatibili. Esiste una formula utilizzata per questo scopo, data dalla la proposizione seguente e ricavabile iterando la definizione di probabilità condizionata:

Proposizione 3 (**Formula di moltiplicazione**). Siano $A_1, \dots, A_n$ eventi per i quali vale $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Si ha

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \dots \cap A_{n-1}) \tag{4.6.2}$$

Esempio 4.10. Due eventi. Se si considerano due eventi A e B, allora dalla definizione $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si ottiene $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$;

Tre eventi. Siano A, B, C tre eventi per cui vale $P(A \cap B) > 0$; iterando il caso precedente si ha $P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$.

Esercizio 4.4. All'interno di una scatola ci sono tre palline bianche, due palline nere e una pallina rossa e si eseguono tre estrazioni senza rimessa. Qual è la probabilità di ottenere nell'ordine una pallina bianca, una rossa e una nera?

Svolgimento. Gli eventi considerati sono

$$\text{A} = \{\text{“Alla prima estrazione si ottiene una pallina bianca”}\}$$
$$\text{B} = \{\text{“ Alla seconda estrazione si ottiene una pallina rossa”}\}$$
$$\text{C} = \{\text{“Alla terza estrazione si ottiene una pallina nera”}\}$$

Per risolvere l'esercizio utilizziamo la formula di moltiplicazione 4.6.2 nel caso di tre eventi. Per trovare la probabilità dobbiamo calcolare dunque le seguenti quantità:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

$P(B|A) = \frac{1}{5}$ ottenuta come nell'esempio precedente;

$P(C|A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ trovata intuitivamente dopo aver estratto le prime due.

La probabilità che si estraggano nell'ordine richiesto, senza reinserirle nella scatola, è

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$$

□

Osservazione 9. In generale, *non* vale l'uguaglianza $P(A|B) = P(B|A)$.

Esempio 4.11. Si supponga di estrarre una carta da un mazzo di 40 carte. Si considerino gli eventi A = {"Si ottiene una carta denari"} e B = {"Si ottiene una figura"}. Le due rispettive probabilità condizionate sono uguali?

Svolgimento. Non ci dilunghiamo nella specificazione dello spazio di probabilità, poiché l'esempio è abbastanza intuitivo. Infatti abbiamo:

$P(A|B) = \frac{3}{12}$ dal momento che, sapendo che è stata estratta una figura (e sono in tutto dodici), ci sono tre figure di denari;

$P(B|A) = \frac{3}{10}$ poiché, avendo estratto una carta denari, le figure di questo seme sono tre.

Risulta quindi che le due probabilità condizionate sono differenti. □

Esiste una formula che mette in relazione le due quantità e ci consente di passare da una all'altra:

Teorema 4 (Formula di Bayes). Siano A, B due eventi non trascurabili. Vale allora

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \tag{4.6.3}$$

Dimostrazione. La formula si ricava dalla definizione di probabilità condizionata. Infatti

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

dove la seconda uguaglianza è data dalla formula di moltiplicazione. □

Possiamo vedere una semplice applicazione della formula di Bayes riferendoci all'esempio 4.11. Se volessimo calcolare analiticamente il valore di $P(B|A)$ ci occorrono anche le quantità:

$P(A) = \frac{10}{40}$ poiché la probabilità di estrarre una carta qualunque è pari a $\frac{1}{40}$ e le denari sono dieci;

$P(B) = \frac{12}{40}$ visto che ci sono tre figure per ogni seme.

A questo punto applichiamo la formula 4.6.3:

$$P(B|A) = \frac{\frac{12}{40}\frac{3}{12}}{\frac{10}{40}}$$

possiamo notare che il risultato è quello che ci aspettavamo.

Proposizione 5 (Formula delle probabilità totali). Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità associato ad un esperimento aleatorio e si consideri $\{B_1, \dots, B_n\}$ una partizione finita di Ω, cioè:

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_i \subseteq \Omega$ e $P(B_i) > 0$;
per ogni $i \neq j$ si ha $B_i \cap B_j = \emptyset$ ed inoltre $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

Allora per ogni evento $A \subseteq \Omega$ vale la formula

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i). \tag{4.6.4}$$

Dimostrazione. E' possibile scrivere l'evento A come unione di eventi disgiunti, in questo modo:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

dove $A \cap B_i$ è disgiunto da $A \cap B_j$ se $i \neq j$, poiché $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.
Grazie a questo risultato andiamo a calcolare la sua probabilità:

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

dove la seconda uguaglianza è data dall'Assioma III-bis, mentre l'ultima dalla formula di moltiplicazione. □

Esercizio 4.5. Una scatola contiene 10 palline delle quali 6 sono bianche e 4 sono nere. Si eseguono due estrazioni senza reinserimento. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?

Svolgimento. Lo spazio campionario Ω è dato dall'insieme delle palline disponibili. Chiamiamo l'evento $B_1 = \{$"la prima pallina estratta è bianca"$\}$ mentre $B_2 = \{$"la prima pallina estratta è nera"$\}$; notiamo che $(B_1)^c = B_2$, dunque $\{B_1, B_2\}$ costituiscono una partizione di Ω in quanto non sono eventi trascurabili, sono incompatibili e la loro unione è uguale allo spazio campionario Ω. Si richiede il calcolo della probabilità dell'evento A = $\{$" la seconda pallina estratta è bianca"$\}$. Per lo svolgimento di questo esercizio può esserci utile usufruire della rappresentazione grafica ad albero.

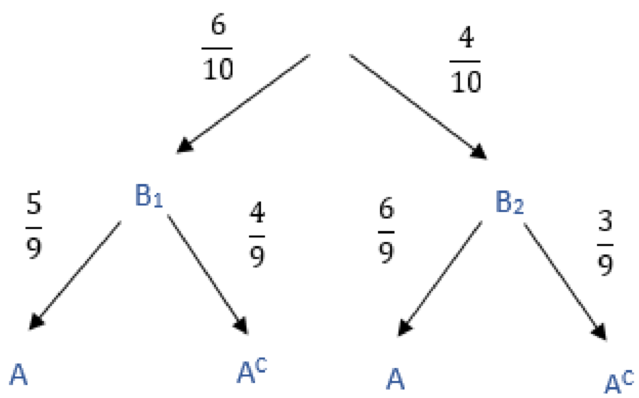


Figura 4.2: Diagramma ad albero, esercizio 4.5

Sul primo livello dall'alto rappresentiamo la prima estrazione, mentre in quello seguente la seconda. Abbiamo che $P(B_1) = \frac{6}{10}$ e quindi $P(B_2) = 1 - P(B_1) = \frac{4}{10}$. A questo punto lo spazio di probabilità deve essere modificato in base al risultato della prima estrazione: se si verifica B_1 rimarranno 5 palline bianche e 9 palline totali; quindi la probabilità di estrarne ancora una bianca è $P(A|B_1) = \frac{5}{9}$. Al contrario, se si verifica B_2 significa che rimarranno 3 palline nere su 9 totali; dunque la probabilità di estrarne una bianca sarà $P(A|B_2) = \frac{6}{9}$.

Concludiamo quindi utilizzando la formula delle probabilità totali, ottenendo il risultato

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{3}{5}.$$

□

Esercizio 4.6. Si supponga di avere due scatole: la scatola A contiene una pallina bianca e due nere, la scatola B due palline bianche. Viene lanciata una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla scatola A, se esce croce l'estrazione avviene dalla scatola B. Sapendo di aver estratto una pallina bianca, qual è la probabilità che il lancio della moneta abbia dato come risultato testa?

Svolgimento. Indichiamo con T l'evento "esce testa", mentre con C "esce croce"; la probabilità che si verifichino questi eventi è $P(T) = P(C) = \frac{1}{2}$. Chiamiamo D l'evento "viene estratta una pallina bianca" e D^c= {"si estrae una pallina nera"}.
Rappresentiamo l'esperimento attraverso un diagramma ad albero, dove sul primo livello abbiamo il lancio della moneta mentre sul secondo l'estrazione di una pallina:

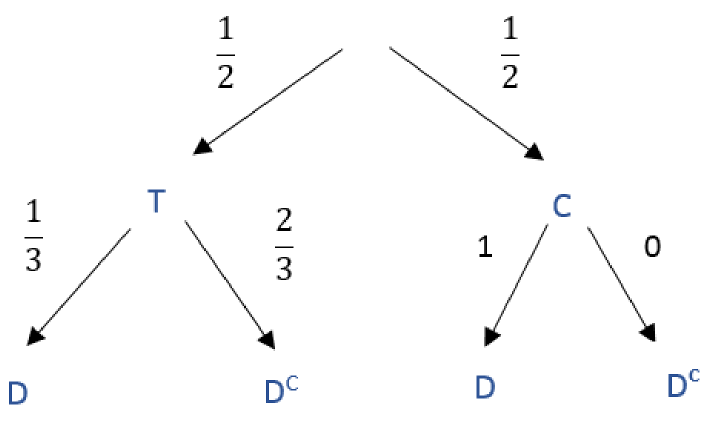


Figura 4.3: Diagramma ad albero, esercizio 4.6

La probabilità richiesta, pari a $P(T|D)$, si ottiene utilizzando la formula di Bayes (4.6.3); calcoliamo dunque le quantità che la identificano:

$P(D|T)$ $=\frac{1}{3}$ poiché c'è una sola pallina bianca su tre totali nella scatola A;

$P(T)$ $=\frac{1}{2}$;

$P(D)$ $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ per la formula delle probabilità totali.

Concludiamo quindi determinando $P(D|T)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$. □

4.7 Indipendenza di eventi

Definizione 4.8. In uno spazio di probabilità (Ω, P) diciamo che due eventi A e B sono *indipendenti in P* (oppure solo *indipendenti*) se

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B). \tag{4.7.1}$$

Osservazione 10. Può accadere che l'informazione del verificarsi di un evento B non alteri la probabilità che si verifichi un evento A; questo si ottiene quando i due eventi sono indipendenti. In termini matematici:
La (4.7.1) è equivalente a

$$P(A|B)=P(A) \text{ se } P(B)>0$$

oppure a

$$P(B|A)=P(B) \text{ se } P(A)>0.$$

Dimostrazione. Utilizzando la definizione di probabilità condizionata e quella di eventi indipendenti, se consideriamo per esempio $P(B)>0$ allora abbiamo

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A).$$

Al contrario, se vale $P(A|B)=P(A)$ allora per la formula di moltiplicazione risulta

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=P(A)\cdot P(B).$$

□

Esempio 4.12. Nello spazio di probabilità associato al lancio di un dado equilibrato, qual è la probabilità che esca un numero maggiore di 4 sapendo che si è ottenuto un numero pari?

Svolgimento. Indicando con A l'evento "Esce un numero maggiore di 4" e con B l'evento "Si ottiene un numero pari", possiamo definire $A = \{5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ e $A \cap B = \{6\}$. La probabilità di ottenere un qualunque numero è $\frac{1}{6}$, quindi il risultato richiesto è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{6\})}{P(\{2, 4, 6\})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} = P(A).$$

□

Osservazione 11. Va sottolineato il fatto che il concetto di indipendenza è *relativo alla misura di probabilità considerata.* Inoltre la (4.7.1) ha il vantaggio di essere simmetrica rispetto ad A e B e non pone condizioni né su $P(A)$, né su $P(B)$.

Osservazione 12 (Importante). Non bisogna confondere la nozione di *indipendenza* con quella di *disgiunzione*.
Due eventi indipendenti A e B per i quali vale che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ generalmente non sono disgiunti: infatti se vale la (4.7.1) allora si ha $P(A \cap B) > 0$ e quindi $A \cap B \neq \emptyset$. Si riscontra il caso in cui A e B sono contemporaneamente indipendenti e disgiunti solo quando $P(A) = 0$ oppure $P(B) = 0$: infatti $0 = P(\emptyset) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Proposizione 6. Se A e B sono due eventi indipendenti, allora lo sono anche le coppie (A, B^c), (A^c, B) e (A^c, B^c).

Dimostrazione. Vediamo la relazione per la coppia (A, B^c).
Per prima cosa possiamo stabilire che $A \cap B^c = A \setminus B = A \setminus A \cap B$; dunque

$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A \setminus A \cap B).$$

Applicando la proprietà della probabilità riguardante la differenza di insiemi otteniamo

$$P(A \setminus A \cap B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Infine, essendo per ipotesi A e B indipendenti e ricordando la terza conseguenza degli assiomi, si ricava

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c).$$

Quindi si ottiene $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$, cioè A e B^c sono indipendenti. □

Esercizio 4.7. Vengono lanciati due dadi equilibrati. Si stabilisca se gli eventi

$$\begin{aligned} \text{A} &= \{\text{“La somma degli esiti è 7”}\} \\ \text{B} &= \{\text{“Il massimo dei due esiti è 6”}\} \end{aligned}$$

sono indipendenti.

Svolgimento. Lo spazio di probabilità (Ω, P) associato all'esperimento dato è descritto, come abbiamo già visto, da uno spazio campionario Ω costituito da 36 possibili coppie rappresentanti tutti i lanci possibili e P misura di probabilità uniforme.
Abbiamo che $A = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$, dunque $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
L'evento B è individuato dall'insieme $B = \{(6,1); \ldots; (6,6); (1,6); \ldots; (5,6)\}$ costituito da 11 elementi, quindi $P(B) = \frac{11}{36}$. L'intersezione dei due eventi è identificata da $A \cap B = \{(6,1); (1,6)\}$, quindi ha probabilità pari a $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Utilizzando la definizione di eventi indipendenti otteniamo lo stesso risultato?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{216} \neq \frac{1}{18}.$$

Possiamo quindi concludere che i due eventi non sono indipendenti. □

4.8 Puntualizzazioni sull'approccio assiomatico

L'esperimento di cui si parla nella trattazione assiomatica della probabilità viene scelto aleatorio e ripetibile. Dalle puntualizzazioni effettuate nei confronti di queste due caratteristiche nascono due risultati importanti: la *scuola soggettivistica* ha origine dalla necessità che l'esperimento venga scelto “ripetibile”, mentre il *paradosso di Bertrand* vuole sottolineare l'uso incerto dell'attributo “aleatorio”.
Questi risultati possono fornire degli spunti per intraprendere discussioni da effettuare in classe. È possibile mostrare come sia fondamentale l'interpretazione del fenomeno da analizzare e di come questo possa essere tradotto in tanti modelli matematici differenti. Inoltre, si può mostrare agli studenti come lo studio della probabilità possa avere anche un ruolo educativo in ambito sociale relativamente al gioco d'azzardo.

4.8.1 La concezione soggettivistica

Gli esperimenti aleatori considerati nell'approccio assiomatico devono essere ripetibili, ma non sempre questa richiesta può essere soddisfatta. Supponiamo per esempio di voler calcolare la probabilità che:

(a) domani piova;

(b) il prossimo presidente americano sia una donna;

(c) un paziente guarisca;

(d) la squadra maschile italiana vinca i mondiali di pallavolo.

A tutte queste domande non si riesce ad associare un esperimento aleatorio che sia ripetibile, quindi il metodo assiomatico, come quello frequentista, non ci fornisce una risposta. Al massimo è possibile parlare di plausibilità di un evento che conduce però in errore se si cerca di misurarla quantitativamente. Entra quindi in gioco la concezione soggettivistica che definisce "Probabilità di un evento la massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria". Questa definizione non pone limiti, a parte la razionalità del soggetto, sul modo in cui si perviene ad un'assegnazione di probabilità ed è in grado di esprimere quantitativamente il grado di fiducia che un soggetto ripone nel verificarsi di un evento, seppur in modo approssimato.
Bisogna comunque sottolineare che l'approccio soggettivistico non è in realtà alternativo a quello assiomatico: una volta assegnate le probabilità basilari agli eventi elementari, il resto segue automaticamente come nell'approccio di Kolmogorov.
Gli assiomi infatti sono compatibili con tutti gli approcci: qualunque sia il significato attribuito alla probabilità di un evento, questi assiomi sono ragionevoli e quindi vengono generalmente accettati. L'unica differenza risiede nel fatto che lo spazio campionario è, possiamo dire, "puramente ipotetico", invece che concretamente generabile dagli esiti delle prove ripetute.

La concezione soggettivistica può dimostrarsi un'interpretazione particolarmente efficace per trattare determinati fenomeni e per mostrarne un aspetto alternativo.
Per esempio, consideriamo il gioco del lotto su una ruota singola scommettendo 1€; si ha possibilità di fare ambo giocando due numeri, terno puntandone tre e così via. Avvalendoci del calcolo combinatorio, abbiamo che:

- l'evento A = {"Si vince l'ambo"} ha probabilità pari a
$$P(A) = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = 0,002496;$$
- l'evento A= {"Si vince il terno"} ha probabilità di verificarsi
$$P(A) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = 8,5 \cdot 10^{-5};$$
- l'evento A= {"Si vince la quaterna"} ha probabilità pari a
$$P(A) = \frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = 1,96 \cdot 10^{-6};$$
- l'evento A= {"Si vince la cinquina"} ha probabilità di verificarsi
$$P(A) = \binom{90}{5} = 2,2 \cdot 10^{-8}.$$

Come si può vedere le probabilità di vincita sono molto basse, ma, partendo dal presupposto di perdere un solo euro, è un rischio che si è disposti a correre.

Proviamo ora a vedere la stessa situazione usufruendo della concezione soggettivistica:
$$P(A) = \frac{\text{prezzo da pagare}}{\text{premio se si verifica A}}$$
da cui si ricava
$$\text{premio se si verifica A} = \frac{1}{P(A)} \cdot (\text{prezzo da pagare}).$$

Indicando con *moltiplicatore equo* il rapporto $\frac{1}{P(A)}$ e scommettendo 1€, si ottiene il prezzo che si dovrebbe ricevere in caso di vincita. Nella tabella sottostante sono riportati tutti i valori riguardanti lo scenario analizzato:

Evento A	PREMIO	MOLT. ATTUALE	MOLT. EQUO
Cinquina	6000000 €	6000000	$\binom{90}{5} = 43949268$
Quaterna	120000 €	120000	$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{86}{1}} = 511038$
Terno	4500 €	4500	$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{87}{2}} = 11748$
Ambo	250 €	250	$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{88}{3}} = 400.5$

Figura 4.4: Il banco non perde mai.

La colonna di destra ci mostra dunque la cifra che dovremmo vincere scommettendo 1€ nei casi in cui si verifichino gli eventi della colonna di sinistra. Ciò che si nota è che il premio che riceveremmo in caso di vincita non corrisponde all'importo previsto. Questa prospettiva, dunque, mostra non la bassa probabilità di vincita (caso precedente) ma la disparità tra quello che dovremmo vincere e ciò che in realtà ci viene elargito. Può essere una strategia efficace per porre i ragazzi di fronte alle insidie del gioco d'azzardo ed evitare eventuali avvicinamenti futuri.

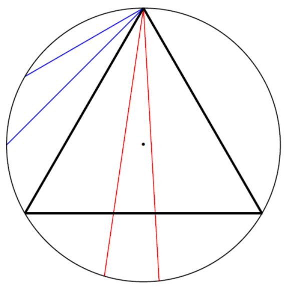
4.8.2 Il paradosso di Bertrand

Quando si dice che un esperimento ha un esito casuale, possiamo intendere cose diverse che prevedono accezioni differenti:

- la più debole implica che risulta impossibile prevedere con certezza quale dei suoi vari esiti si produrrà;
- la più forte consiste nell'aggiungere la condizione che ogni esito dell'esperimento è probabile quanto gli altri.

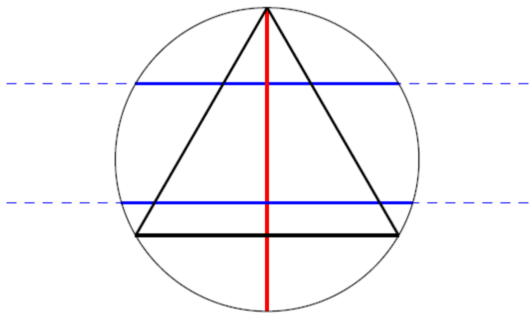
Per esempio, se estraiamo "a caso" una carta da un mazzo, con tutta probabilità intendiamo l'accezione forte; se estraiamo "a caso" una lettera dell'alfabeto da un dizionario di italiano, ci aspettiamo invece che abbia una probabilità di uscita diversa rispetto alla lettera "z". È bene quindi precisare, quando si usa l'espressione "casuale", "a caso" o una simile, le operazioni che si compiono per eseguire l'esperimento aleatorio, poiché procedimenti diversi possono portare a stime di probabilità differenti per lo stesso evento. Il seguente problema mostra chiaramente l'ambiguità che risiede nel termine "casuale", proponendo diversi metodi risolutivi che conducono a risposte differenti.
Il paradosso di Bertrand: *si consideri un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di raggio r (quindi avente lato $l = r\sqrt{3}$). Supponiamo di scegliere casualmente una corda del cerchio. Qual è la probabilità che la corda sia più lunga del lato del triangolo?*

1. *Primo metodo*: si sceglie un punto qualsiasi sulla circonferenza e, fissato questo come primo estremo della corda, si fa ruotare il triangolo inscritto in modo che un suo vertice coincida con il punto scelto. Si procede quindi scegliendo casualmente un altro punto della circonferenza e congiungendo i due punti per ottenere una corda.

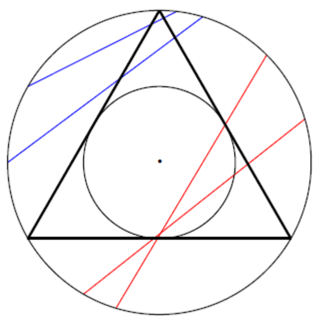
   La probabilità dell'evento richiesto è dunque pari a $\frac{1}{3}$, poiché, per avere lunghezza maggiore di l, il secondo estremo della corda deve appartenere all'arco delimitato dai vertici del triangolo non ancora considerati;

2. *Secondo metodo*: si sceglie casualmente un diametro del cerchio e si fa ruotare il triangolo in modo che un lato sia perpendicolare al diametro fissato. Si tracciano ora delle rette perpendicolari al diametro (e parallele al lato del triangolo) che, intersecando il cerchio, individuano delle corde. Dal momento che il lato del triangolo divide il raggio in due parti uguali, per soddisfare la condizione richiesta la corda considerata deve trovarsi nella parte più vicina al centro del cerchio rispetto al punto in cui il lato del triangolo interseca il diametro.



Quindi si ottiene che la probabilità richiesta è pari a $\frac{1}{2}$;

3. *Terzo metodo*: si sceglie un punto casuale appartenente al cerchio (non necessariamente sulla circonferenza) e si costruisce poi una corda che ha come punto medio quello fissato. La corda ha lunghezza maggiore del lato del triangolo se il punto scelto cade all'interno di un cerchio concentrico rispetto a quello di partenza, ma con raggio dimezzato;



Dal momento che l'area del cerchio interno è un quarto di quella con raggio r, si ottiene che la probabilità richiesta è $\frac{1}{4}$.

Il procedimento che caratterizza ognuna delle scelte elencate è legittimo come metodo di estrazione di una corda.
Il paradosso di Bertrand non ha quindi una soluzione univoca; esso illustra il pericolo di un uso troppo leggero dell'attributo "aleatorio o casuale" di cui si parla nella definizione assiomatica. In particolare, si vuole sottolineare il ruolo fondamentale dell'interpretazione del testo, da cui segue la formulazione di svariati modelli matematici che conducono infine a soluzioni differenti dello stesso problema.

Capitolo 5

Conclusioni

Il materiale didattico proposto costituisce uno strumento per promuovere un percorso formativo alternativo a quello esistente nelle scuole secondarie di secondo grado. Considerando i risultati poco promettenti ottenuti dal metodo odierno, si vogliono mostrare le qualità che caratterizzano questa proposta.

Per prima cosa, si vuole promuovere la cessazione del bisogno di *definire* la probabilità in diversi modi. Questa scelta infatti ha contribuito a rendere più difficoltoso l'apprendimento dei ragazzi, confusi dalle diverse applicazioni relative a specifici contesti.

Grazie a questo percorso si pone l'accento sull'importanza del ruolo del modello matematico; l'interpretazione delle situazioni in condizioni d'incertezza tramite ragionamento astratto e logico-deduttivo è infatti alla base di questo studio. Vengono inoltre mostrate le puntualizzazioni fatte nei confronti di quest'approccio, causate però da problemi di interpretazione e dalla possibilità di traduzione del fenomeno in più modelli.

L'impostazione assiomatica proposta ha origine determinando le probabilità di ogni singolo esito. Ne consegue che il metodo utilizzato per introdurre gli aspetti più significativi di questa disciplina è più elementare, rigoroso e può aiutare maggiormente i ragazzi nell'avvicinamento alla teoria stessa.

L'approccio utilizzato per la trattazione è strettamente analitico. Nonostante questa scelta possa sembrare "fastidiosa", è preferibile utilizzare maggior tempo per far comprendere a pieno questi concetti piuttosto che porre rimedio ad eventuali problematiche future in modo più dispendioso.

Infine, è possibile affiancare l'esposizione degli argomenti proposti avvalendosi di strumenti tecnologici, utilizzati per permettere una rapida visualizzazione del problema e per semplificare la traduzione del fenomeno considerato in un modello matematico.

Bibliografia

[1] M. Bergamini and A. Trifone and G. Barozzi, *Manuale blu 2.0 di matematica 4*, Zanichelli, Bologna, 2013.

[2] D. Costantini, *Introduzione alla probabilità*, Bollati Boringhieri, 1977.

[3] B. De Finetti, *Teoria delle probabilità*, 1970.

[4] V. Malvestuto, *Corso in Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica. Lezione 2.*

[5] C. Marchini, *Appunti di Matematiche complementari AA. 2010-2011*, Parma.

[6] A. Pascucci, *Teoria della Probabilità. Corso di Laurea Triennale in Matematica*, Bologna, 2018.

[7] A. Pascucci and A. Cosso and A. Lanconelli, *Probabilità: logica, calcolo e informazione. PLS Matematica*, Bologna, 2018.

[8] I. Scardovi, *Il tempo e il caso. Una endiadi statistica*, Milano, Edizioni Martello, 1999.

[9] D. Salsburg, *The Lady Tasting Tea: How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century*,Henry Holt and Company, 2002.

Siti consultati

[10] Indicazioni Nazionali, *www.indire.it*.

[11] Invalsi, *www.invalsi.it*.

[12] Gestinv 2.0, Archivio interattivo delle prove Invalsi, *www.gestinv.it*.