

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**STUDIO SULLE CURVE DI ROTAZIONE
DELLE GALASSIE A SPIRALE**

Tesi di Laurea in Fondamenti di Astronomia

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MARCELLA BRUSA

Candidato:
FILIPPO BARTOLETTI

Sessione Unica
Anno Accademico 2017-2018

Introduzione

Fin dall'antichità il desiderio di conoscenza ha spinto l'uomo all'osservazione e allo studio dei corpi celesti.

Tuttavia è solamente tra il XVI e il XVII secolo, con l'avvento del metodo scientifico, che si è giunti ad una definitiva caratterizzazione della scienza astronomica, con la sua separazione netta dall'astrologia, dalla filosofia e dalle scienze della terra, alle quali era stata fino a quel momento legata.

Successivamente gli studi astronomici hanno iniziato un florido e inarrestabile processo di sviluppo dal punto di vista osservativo e teorico. Si è infatti assistito da un lato al progresso tecnologico che ha permesso la realizzazione di strumenti di osservazione sempre più efficienti, dall'altro allo sviluppo delle scienze che costituiscono la base dell'astronomia, ovvero la matematica e la fisica, in grado di giustificare le osservazioni effettuate. In taluni casi sono state proprio intuizioni matematiche a permettere una migliore descrizione dei fenomeni osservati.

Un esempio significativo è lo studio, trattato nel presente elaborato, sulle curve di rotazione delle galassie a spirale, che affonda le sue radici negli anni Sessanta del Novecento e ha visto come principale esponente l'astronoma statunitense Vera Rubin.

Questo studio ha permesso di rilevare l'esistenza della Materia Oscura, una componente non visibile ma presente nell'Universo in grande quantità, in grado di spiegare la struttura e i moti delle galassie a spirale. Senza il supporto delle scienze matematiche e fisiche ciò non sarebbe stato possibile, proprio a causa della natura non visibile della Materia Oscura, ma al tempo stesso le osservazioni hanno incentivato studi teorici più approfonditi sull'argomento.

Nel primo capitolo saranno descritte le caratteristiche delle galassie a spirale e le leggi che ne regolano il moto di rotazione differenziale; in seguito sarà trattata la radiazione 21 cm dell'idrogeno neutro e sarà riportato il Teorema del Viriale.

Nel secondo capitolo verrà studiata la curva di rotazione come somma delle curve rappresentanti le componenti della galassia, con una parentesi sulla scoperta della materia oscura. Quindi verrà illustrato come ottenere la curva di rotazione di una galassia, ovvero come ricavare la velocità in funzione del raggio nelle sue varie componenti.

Nel terzo ed ultimo capitolo saranno applicati i risultati esposti precedentemente per studiare la curva di rotazione della galassia a spirale NGC 3198, cercando di capire qua-

le tra le curve proposte si avvicini maggiormente a quella osservata e quali conclusioni generali si possano trarre sulla massa contenuta nelle varie componenti che costituiscono le galassie a spirale.

Quando non specificato altrimenti, le figure sono prese da Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J.; *Fundamental Astronomy*; Springer Verlag (2014).

Indice

Introduzione	i
Elenco delle figure	v
1 Galassie a spirale e rotazione differenziale	1
1.1 Struttura delle galassie a spirale	1
1.2 Rotazione Differenziale: Formule di Oort	2
1.3 Radiazione 21cm dell'idrogeno neutro	6
1.4 Teorema del Viriale	10
2 Curve di rotazione	13
2.1 Componenti di una curva di rotazione	13
2.1.1 La scoperta della materia oscura dalle curve di rotazione	17
2.2 Calcolo della velocità in funzione del raggio	18
3 Curva di rotazione di NGC 3198	23
3.1 La galassia a spirale NGC 3198	23
3.2 Curva di rotazione	24
3.3 Distribuzione di massa	28
Conclusione	33
Bibliografia	35

Elenco delle figure

1.1	A sinistra una figura che mostra le componenti della Via Lattea (<i>bulge</i> , <i>disk</i> e <i>halo</i>), appartenente alla categoria delle galassie a spirale; il Sole si trova nel disco, a circa 8 kpc dal centro; a destra la galassia a spirale NGC 6814. La prima figura è presa da Freedman R.A., Kauffman III W.J.; Universe. La seconda figura è un'immagine realizzata dal telescopio Hubble presa dalla rete.	2
1.2	Effetti della rotazione differenziale sulle velocità radiali e i moti propri delle stelle. (a) Le velocità orbitali delle stelle decrescono verso l'esterno della galassia. (b) La velocità relativa rispetto al Sole è ottenuta sottraendo la velocità solare dai vettori velocità in (a). (c) Componenti radiali delle velocità rispetto al Sole. Tale componente è nulla per stelle che percorrono l'orbita solare. (d) Componenti tangenziali delle velocità.	3
1.3	Per ottenere le formule di Oort, i vettori velocità del Sole e della stella S sono divisi nelle componenti lungo la linea $\odot S$ e la normale a quest'ultima.	4
1.4	Le componenti della velocità dovuta alla rotazione differenziale sono espresse, secondo le formule di Oort, in funzione della longitudine galattica. (a) Velocità radiali per oggetti a distanza di 1 e 2 kpc. (b) Moti propri.	5
1.5	L'origine della linea di assorbimento 21 cm dell'idrogeno. Allo stato iniziale il livello di energia è significativamente elevato. La lunghezza d'onda di un fotone corrispondente alla transizione tra i due possibili stati (spin paralleli e antiparalleli) è di 21 cm	7
1.6	Profili delle righe di emissione dell'idrogeno neutro 21 cm nel piano galattico a longitudine 180° , 90° , e 1° ; nella direzione $l = 1^\circ$ si può notare un forte assorbimento	7
1.7	Nubi P_1, P_2, \dots viste nella stessa direzione a varie distanze	8
1.8	La velocità radiale in funzione della distanza	9
1.9	Nubi a differenti distanze hanno differenti velocità e perciò danno vita a linee di emissione con shift differenti. Il profilo di densità del flusso osservato (<i>curva continua</i>) è la somma dei profili singoli (<i>curve tratteggiate</i>). I numeri dei profili corrispondono alle nubi della figura soprastante.	9

1.10	Mappatura della Via Lattea attraverso la linea di assorbimento 21cm. La densità è espressa in $atomi/cm^3$. Figura presa da R.Freedman, W.Kaufmann; Universe.	10
2.1	La curva di rotazione esprime la velocità in funzione del raggio. All'interno del bulge, la regione più interna, la velocità cresce con il raggio, mentre lungo il disco sembra non dipendere da quest'ultimo; oltre il raggio del disco, invece, inizia la discesa Kepleriana.	13
2.2	Esempio di curva di rotazione ottenuta come somma delle componenti del <i>bulge</i> (spheroid) e del <i>disco</i> (disk). Il raggio effettivo del bulge è $R_{eff} = 2.7kpc$; il picco di velocità ($\approx 210 \frac{km}{s}$) è raggiunto a 0.8 kpc di distanza dal centro. I parametri sono stati scelti in modo che la curva di rotazione sia piatta lungo un vasto range del raggio, infatti il raggio di scala del disco è $R_0 = 10kpc$ e il raggio di troncamento del disco è $R_{trunc} = 4R_0$; si è assunto inoltre il rapporto di massa $\frac{M_{bulge}}{M_{disk}} = 0.25$	16
2.3	Curva di rotazione della Via Lattea basata sui moti delle nubi di idrogeno. Se la massa fosse tutta concentrata entro il raggio 20 kpc, la curva continuerebbe secondo l'andamento Kepleriano (<i>linea tratteggiata</i>)	17
2.4	Curve di rotazione di alcune galassie a spirale	20
3.1	Raffigurazione nella riga dell'HI della galassia NGC 3198. I contorni descrivono la distribuzione dell'idrogeno neutro che interessa regioni della galassia assai più esterne rispetto a quelle popolate dalle stelle. Questo ci permette infatti di misurare la velocità di rotazione fino a 30 kpc di distanza dal centro. Immagine tratta da Van Albada et al. 1985; Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198.	23
3.2	A sinistra una tabella (tratta da Van Albada et Al.; Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198) elencante, a diverse distanze, i valori di velocità osservati, che sono parte della effettiva curva di rotazione di NGC 3198; a destra gli stessi valori riportati su un piano R-V.	24
3.3	Curva di rotazione realizzata considerando solo la componente del disco, supponendo quest'ultimo dotato della maggiore massa possibile. Come raggio di scala del disco è stato preso $R_0 = 4.23kpc$ (linea tratteggiata).	25
3.4	Curva di rotazione che presenta solo la componente dell'alone; i parametri utilizzati sono $a = 0.7kpc$, $\gamma = 2.25$, $\rho(R_0) = 0.0074 \frac{M_{\odot}}{pc^3}$	26
3.5	Curva di rotazione ottenuta come somma delle componenti del disco (assunto in questo caso con la massa più elevata possibile) e alone; il raggio di scala del disco è stato preso uguale a quello della distribuzione della luce ($2.68kpc$); la curva dell'alone è basata sull'equazione (2.24) con parametri $a = 8.5kpc$, $\gamma = 2.1$, $\rho(R_0) = 0.0040 \frac{M_{\odot}}{pc^3}$	27

3.6 Curva di rotazione composta da un disco la cui massa è $M = 0.3 \times M_{disk}^{max}$
 e dall'alone; i parametri per quest'ultimo sono $a = 1.3kpc$, $\gamma = 2.05$,
 $\rho(R_0) = 0.0063 \frac{M_{\odot}}{pc^3}$ 28

3.7 Distribuzioni di massa per le componenti del disco e dell'alone; la com-
 ponente dell'alone è basata sull'equazione (2.32) con gli stessi parametri
 riportati nella didascalia della Figura (3.2). 29

Capitolo 1

Galassie a spirale e rotazione differenziale

1.1 Struttura delle galassie a spirale

Le galassie sono insiemi di stelle, gas e polveri vincolati dalla forza di gravità. Possono contenere dalle 10^7 alle 10^{12} stelle, raggiungendo un diametro di dimensioni fino all'ordine di 10^5 parsec¹, ovvero, considerando che $1 \text{ parsec} = 3.2 \text{ anni luce}$, $3.2 \times 10^5 \text{ anni luce}$. Nel 1926 l'astronomo statunitense Edwin Hubble realizzò per la prima volta un diagramma di classificazione delle galassie, poi presentato nella versione definitiva nel 1936, in cui si definivano tre categorie di galassie, in base alla morfologia: galassie a spirale, galassie ellittiche e galassie irregolari. Le galassie a spirale, oggetto di questo elaborato, sono costituite dalle seguenti componenti (Figura 1.1):

- *Disco sottile*, dallo spessore di poche migliaia di anni luce ed estensione maggiore di 10 kpc, che presenta sia stelle giovani (denominate di Popolazione I) sia stelle vecchie (denominate di Popolazione II), e contiene la maggior parte del gas atomico e molecolare freddo;
- *Bulge*, la componente centrale, dal diametro di circa 3 kiloparsec e composta principalmente da stelle di Popolazione II;
- *Alone*, parte esterna che circonda il corpo galattico e che è composta principalmente, per quanto riguarda la materia barionica, da ammassi globulari e gas caldo.

¹ $1 \text{ parsec} = 3.018 \times 10^{18} \text{ cm}$

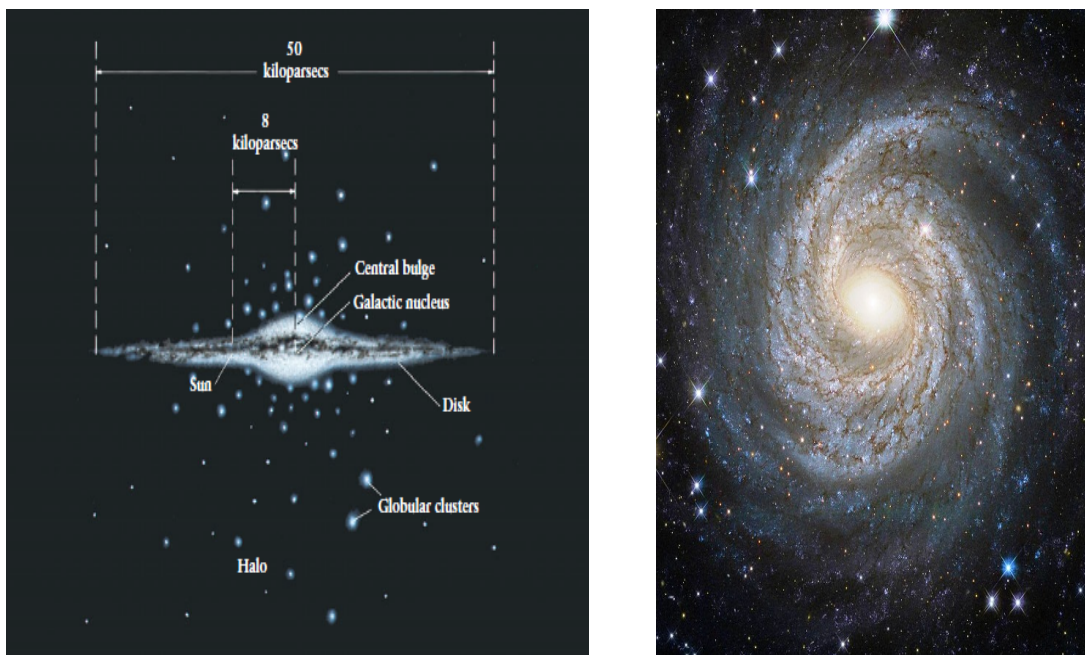


Figura 1.1: A sinistra una figura che mostra le componenti della Via Lattea (*bulge*, *disk* e *halo*), appartenente alla categoria delle galassie a spirale; il Sole si trova nel disco, a circa 8 kpc dal centro; a destra la galassia a spirale NGC 6814. La prima figura è presa da Freedman R.A., Kauffman III W.J.; Universe. La seconda figura è un'immagine realizzata dal telescopio Hubble presa dalla rete.

Il disco sottile è la zona in cui avviene il processo di formazione stellare: la struttura è caratterizzata da bracci, che dal bulge si dipartono fino alle estremità della superficie del disco. I bracci presentano una elevata concentrazione di gas e, come accennato precedentemente, di stelle di Popolazione I (giovani) che sono ricche di metalli.

1.2 Rotazione Differenziale: Formule di Oort

Osservazioni dei movimenti di stelle e di gas interstellare hanno confermato che il moto di rotazione compiuto attorno al centro della galassia è differenziale. Questo significa che la velocità angolare di rotazione dipende dalla distanza dal centro stesso (Figura 1.2). Ora osserviamo i moti delle stelle nella Via Lattea, visti dal Sole, supponendo che le orbite attorno al centro galattico siano circolari. Assumeremo il Sole in una posizione \odot , la stella in posizione S e il centro della galassia in posizione C .

La stella S , vista dal Sole a longitudine l e distanza r , ha velocità circolare V a distanza R dal centro della galassia. Per il Sole poniamo raggio galattico R_0 e velocità circolare V_0 . La relativa velocità radiale v_r della stella rispetto al Sole è la differenza tra le proiezioni delle velocità circolari lungo la linea di vista:

$$v_r = V \cos \alpha - V_0 \sin l, \quad (1.1)$$

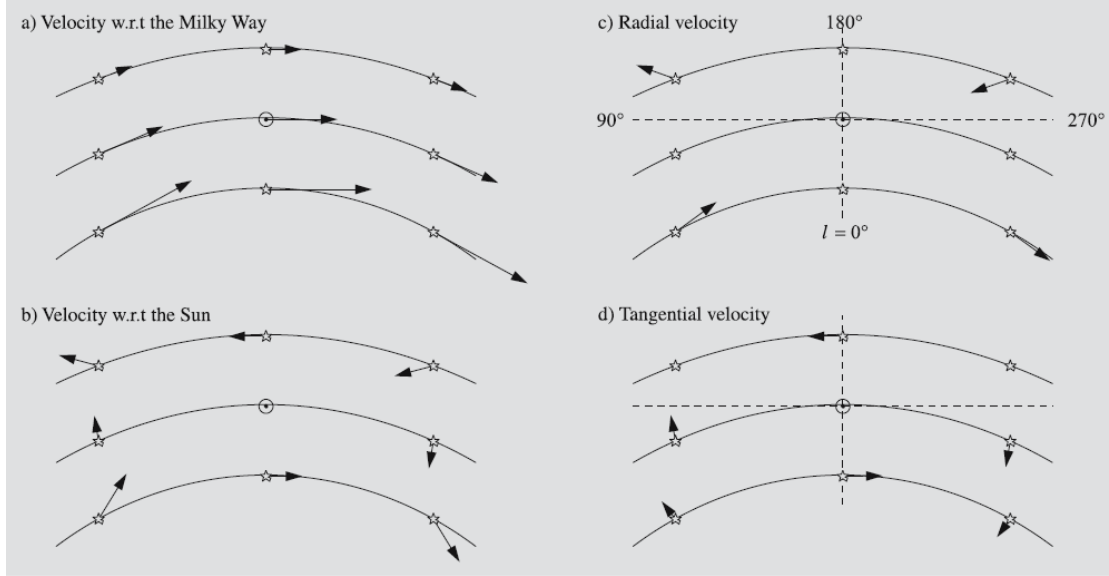


Figura 1.2: Effetti della rotazione differenziale sulle velocità radiali e i moti propri delle stelle. (a) Le velocità orbitali delle stelle decrescono verso l'esterno della galassia. (b) La velocità relativa rispetto al Sole è ottenuta sottraendo la velocità solare dai vettori velocità in (a). (c) Componenti radiali delle velocità rispetto al Sole. Tale componente è nulla per stelle che percorrono l'orbita solare. (d) Componenti tangenziali delle velocità.

dove α è l'angolo tra il vettore velocità della stella e la linea di vista.

Nella Figura 1.3 l'angolo $CS_{\odot} = \alpha + 90^{\circ}$.

Applicando il teorema dei seni al triangolo CS_{\odot} si ottiene:

$$\frac{\sin(\alpha + 90^{\circ})}{\sin l} = \frac{R_0}{R} \quad (1.2)$$

o

$$\cos(\alpha) = \frac{R_0}{R} \sin(l). \quad (1.3)$$

Denotando la velocità angolare della stella con $\omega = \frac{V}{R}$ e la velocità angolare del Sole con $\omega_0 = \frac{V_0}{R_0}$, si ricava la velocità radiale osservabile nella forma:

$$v_r = R_0(\omega - \omega_0) \sin(l). \quad (1.4)$$

La componente tangenziale della velocità relativa del Sole e della stella si ottiene come segue. Dalla Figura 1.3,

$$v_t = V \sin(\alpha) - V_0 \cos(l) = R\omega \sin(\alpha) - R_0\omega_0 \cos(l), \quad (1.5)$$

Il triangolo rettangolo $\odot CP$ dà

$$R \sin(\alpha) = R_0 \cos(l) - r, \quad (1.6)$$

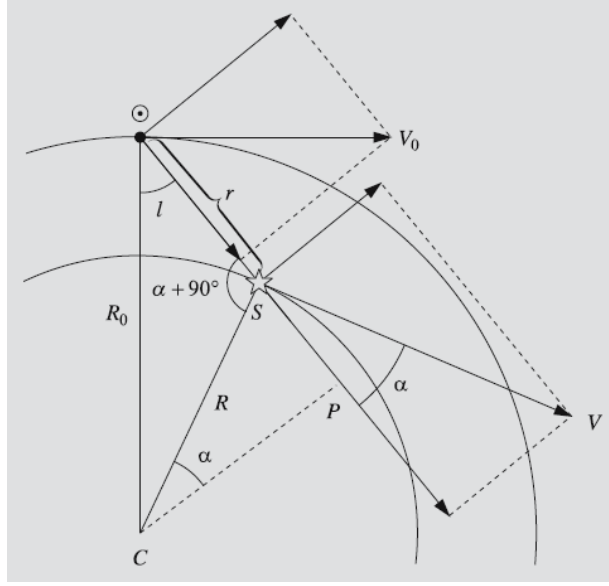


Figura 1.3: Per ottenere le formule di Oort, i vettori velocità del Sole e della stella S sono divisi nelle componenti lungo la linea $\odot S$ e la normale a quest'ultima.

e dunque

$$v_t = R_0(\omega - \omega_0) \cos(l) - \omega r. \quad (1.7)$$

Oort osservò che nelle vicinanze del Sole la differenza delle velocità angolari risulta molto piccola. Perciò si può giungere ad una buona approssimazione dell'equazione (1.7) mantenendo solo il primo termine della serie di Taylor di $\omega - \omega_0$ nelle vicinanze di $R = R_0$:

$$\omega - \omega_0 = \left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R=R_0} (R - R_0) + \dots \quad (1.8)$$

Usando $\omega = \frac{V}{R}$ e $V(R_0) = V_0$, si ha:

$$\omega - \omega_0 \approx \frac{1}{R_0^2} \left[R_0 \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R=R_0} - V_0 \right] (R - R_0). \quad (1.9)$$

Per $R \approx R_0 \gg r$, la differenza $R - R_0 \approx -r \cos(l)$. Dunque si ottiene una forma approssimativa

$$v_r \approx \left[\frac{V_0}{R_0} - \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R=R_0} \right] r \cos(l) \sin(l) \quad (1.10)$$

o

$$v_r \approx Ar \sin(2l), \quad (1.11)$$

dove A è la *prima costante di Oort*:

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{V_0}{R_0} - \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R=R_0} \right]. \quad (1.12)$$

Allo stesso modo per la velocità tangenziale relativa si ottiene, con $\omega r \approx \omega_0 r$:

$$v_t \approx \left[\frac{V_0}{R_0} - \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R=R_0} \right] r \cos^2(l) - w_0 r. \quad (1.13)$$

Dato che $2 \cos^2(l) = 1 + \cos(2l)$, v_t può essere scritta nella forma:

$$v_t \approx Ar \cos(2l) + Br, \quad (1.14)$$

in cui A è definita come in (1.12) e B è la *seconda costante di Oort*:

$$B = -\frac{1}{2} \left[\frac{V_0}{R_0} + \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R=R_0} \right]. \quad (1.15)$$

Il moto proprio $\mu = \frac{v_t}{r}$ si ottiene in seguito dall'espressione:

$$\mu \approx A \cos(2l) + B. \quad (1.16)$$

Dall'equazione (1.11) si evince che la velocità radiale osservata di stelle alla stessa distanza dovrebbe essere una doppia curva sinusoidale in funzione della longitudine galattica (Figura 1.4a). Se è nota la distanza dalle stelle, l'ampiezza della curva determina il valore della prima costante di Oort A .

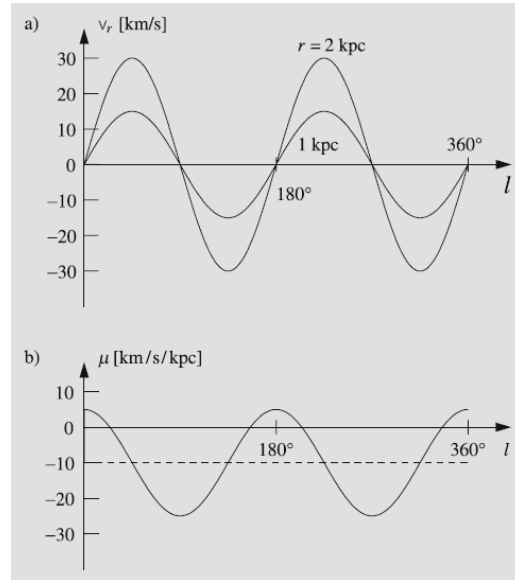


Figura 1.4: Le componenti della velocità dovuta alla rotazione differenziale sono espresse, secondo le formule di Oort, in funzione della longitudine galattica. (a) Velocità radiali per oggetti a distanza di 1 e 2 kpc. (b) Moti propri.

Indipendentemente dalla distanza, i moti propri delle stelle formano una doppia onda sinusoidale in funzione della longitudine galattica, come si può vedere nella Figura 1.4b. Nel 1927, sulla base di questa analisi, Oort stabilì che i moti osservati dalle stelle indi-

cassero una rotazione differenziale della Via Lattea (proprietà che successivamente si è scoperto caratterizzare tutte le galassie a spirale). In seguito a numerosi studi effettuati, l'Unione Astronomica Internazionale ha confermato i seguenti valori delle costanti di Oort:

$$A \sim 15 \frac{km}{s \times kpc} \quad , \quad B \sim -10 \frac{km}{s \times kpc} .$$

Riprendendo le relazioni (1.12) e (1.15), e sottraendole, otteniamo:

$$A - B = \frac{V_0}{R_0} - \omega_0, \tag{1.17}$$

mentre addizionandole si ha:

$$A + B = - \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R=R_0} . \tag{1.18}$$

Conoscendo i valori di A e B , possiamo calcolare la velocità angolare $\omega_0 = 0.0053''/year$, che costituisce la velocità angolare del sistema di riposo locale (in inglese local standard of rest, *LSR*), ovvero il movimento medio compiuto dalla materia nei dintorni del Sole attorno al centro galattico. La velocità circolare del Sole può essere misurata in maniera indipendente utilizzando come riferimenti gli oggetti extragalattici. In questo modo è stato ottenuto un valore di circa $220 \frac{km}{s}$ per V_0 . Dunque attraverso la relazione (1.17) si può calcolare R_0 , la distanza dal centro galattico, ottenendo il risultato di circa 8.5 kpc. La direzione verso il centro galattico è ottenuta dalla distribuzione delle velocità radiali e dei moti propri. Il periodo orbitale del Sole, in accordo con questi risultati, è di circa $2.5 \times 10^8 anni$. Stimando l'età del Sole a $5 \times 10^9 anni$, esso ha compiuto circa 20 rivoluzioni attorno al centro galattico. Il completamento dell'ultimo moto di rivoluzione effettuato è avvenuto quando sulla Terra erano appena comparsi i primi mammiferi.

1.3 Radiazione 21cm dell'idrogeno neutro

Le *Regioni HI* rappresentano una particolare classe di nubi di gas interstellari costituite da idrogeno neutro nella sua forma atomica (H I). Negli atomi di idrogeno neutro allo stato fondamentale, l'elettrone e il protone sono dotati di spin parallelo o contrario. La differenza di energia tra questi due stati corrisponde alla frequenza di 1420.4 MHz, e la transizione tra questi due livelli di energia genera una riga spettrale alla lunghezza d'onda di 21.049 cm (Figura 1.5).

Studi su questa riga, osservata per la prima volta nel 1951, hanno più di ogni altro rivelato informazioni sulle proprietà del mezzo interstellare, sulla struttura e sulla rotazione della Via Lattea e delle altre galassie. Solitamente la riga 21 cm dell'idrogeno si

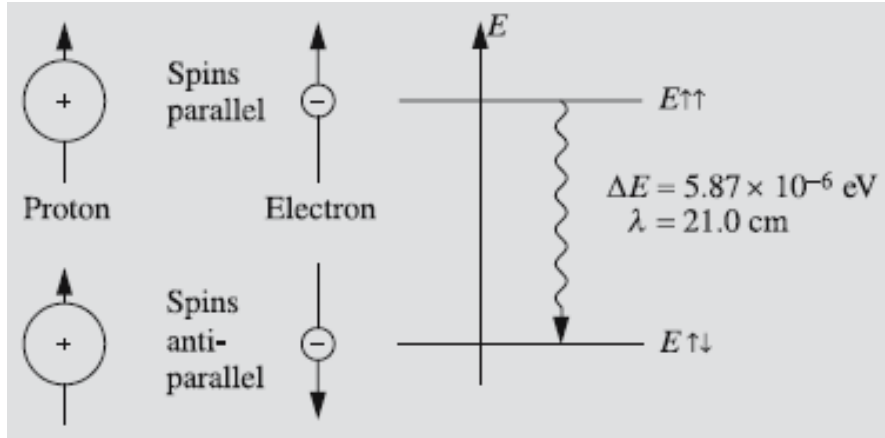


Figura 1.5: L'origine della linea di assorbimento 21 cm dell'idrogeno. Allo stato iniziale il livello di energia è significativamente elevato. La lunghezza d'onda di un fotone corrispondente alla transizione tra i due possibili stati (spin paralleli e antiparalleli) è di 21 cm

verifica in emissione e si può osservare in tutte le direzioni del cielo, a causa della vasta abbondanza di idrogeno. Alcuni profili della riga 21 cm sono riportati nella figura (1.6).

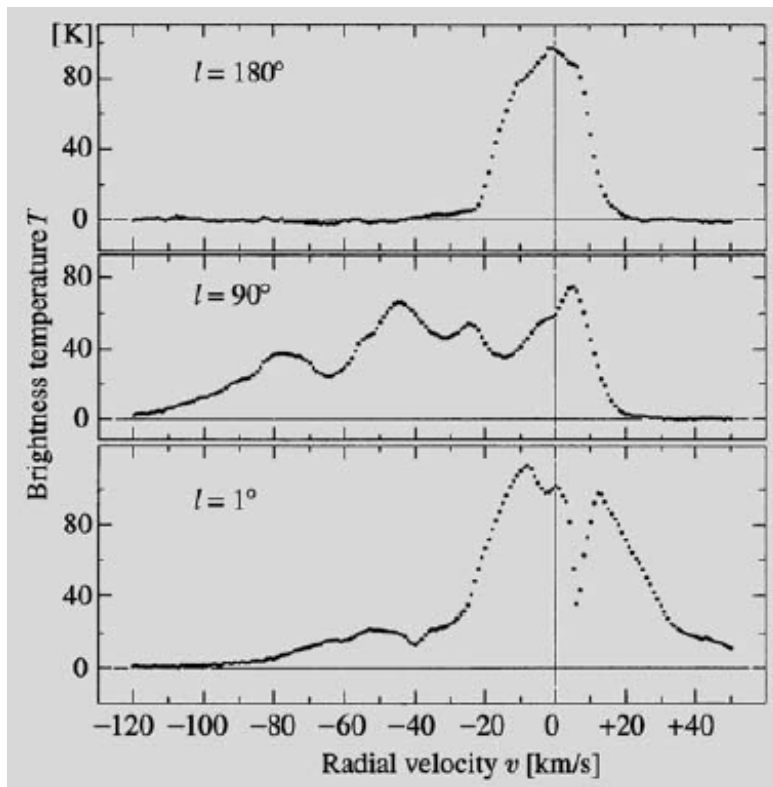


Figura 1.6: Profili delle righe di emissione dell'idrogeno neutro 21 cm nel piano galattico a longitudine 180° , 90° , e 1° ; nella direzione $l = 1^\circ$ si può notare un forte assorbimento

Piuttosto che la frequenza o la lunghezza d'onda, è la velocità radiale ad essere tracciata sull'asse orizzontale, utilizzando l'effetto Doppler: $v = \frac{\delta\lambda}{\lambda}c$. Questo perché l'allargamento

della riga spettrale 21 cm è sempre dovuto ai moti del gas all'interno della nube o ai moti della nube intera. L'asse verticale è mostrato in termini della temperatura T_A rilevata dall'antenna, usuale misura astronomica di intensità radio. L'intensità di radiazione I_ν dipende infatti in maniera diretta dalla temperatura:

$$I_\nu = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}, \quad (1.19)$$

dove ν è la frequenza.

La radiazione radio dell'idrogeno neutro non è fortemente assorbita o dispersa dalla polvere interstellare. Perciò può essere utilizzata per mappare la struttura della Via Lattea su larga scala e anche in direzione opposta al centro galattico.

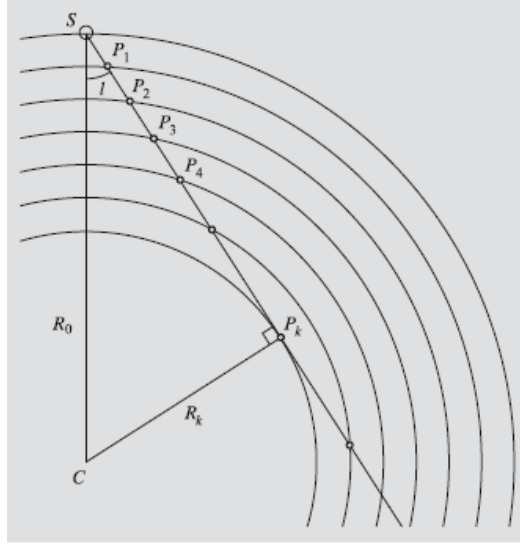


Figura 1.7: Nubi P_1, P_2, \dots viste nella stessa direzione a varie distanze

La posizione nella galassia di una sorgente radio, per esempio una nube HI, non può essere determinata direttamente. Tuttavia per calcolare la distanza è possibile sfruttare un metodo indiretto, basato sulla rotazione differenziale della galassia.

La Figura 1.7 mostra una vista schematica di una situazione in cui nubi di gas sui cerchi P_1, P_2, \dots sono osservate nella direzione l ($-90^\circ < l < 90^\circ$). La velocità angolare aumenta verso l'interno, e dunque il valore più alto sulla linea di vista si trova nel punto P_k , dove la linea di vista è tangente al cerchio. Questo significa che la velocità radiale delle nubi di gas in una direzione fissata cresce fino alla velocità massima alla P_k :

$$v_{r,max} = R_k(\omega - \omega_0) = R_0(\omega - \omega_0) \sin(l), \quad (1.20)$$

dove $R_k = R_0 \sin(l)$. La distanza della nube P_k dal Sole è $R = R_0 \cos(l)$. All'aumentare di R , subisce una decrescita monotona.

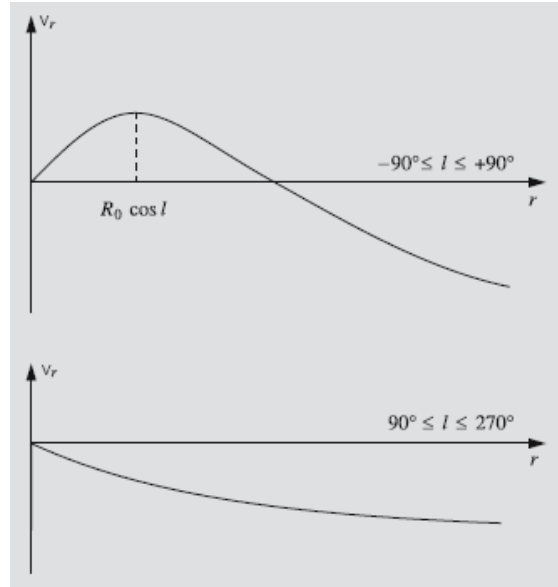


Figura 1.8: La velocità radiale in funzione della distanza

La Figura 1.8 mostra come la velocità radiale osservata in una data direzione varia con la distanza r , se le nubi di gas si muovono con rotazione differenziale in orbite circolari e la velocità angolare diminuisce verso l'esterno.

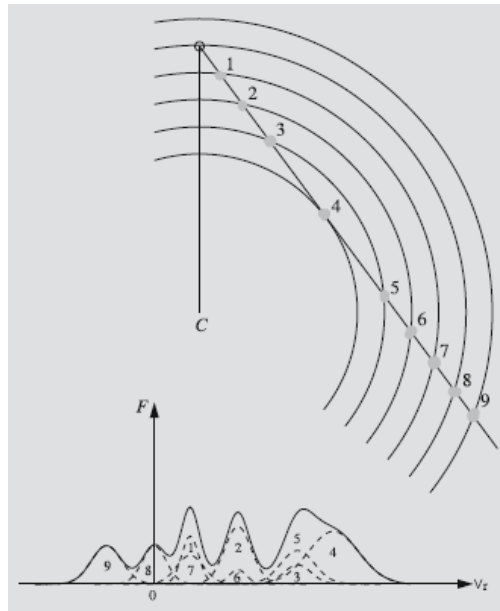


Figura 1.9: Nubi a differenti distanze hanno differenti velocità e perciò danno vita a linee di emissione con shift differenti. Il profilo di densità del flusso osservato (*curva continua*) è la somma dei profili singoli (*curve tratteggiate*). I numeri dei profili corrispondono alle nubi della figura soprastante.

La linea di idrogeno neutro da 21cm è stata particolarmente importante per la mappatura della Via Lattea e, in generale, delle galassie a spirale.

La Figura 1.9 fornisce una vista schematica di come la linea spettrale dell'idrogeno sia costituita dalla radiazione di molte concentrazioni individuali di idrogeno neutro, nubi di gas o bracci spirali. La componente di linea prodotta da ciascuna nube ha lunghezza d'onda che dipende dalla velocità radiale della nube e intensità che dipende dalla sua massa e dalla sua densità. L'emissione totale è data dalla somma di queste componenti. Effettuando osservazioni a varie longitudini galattiche, e assumendo che le nubi di gas formino almeno parzialmente i bracci spirali, la distribuzione dell'idrogeno neutro nel piano galattico può essere mappata. La figura 1.10 mostra una mappatura della Via Lattea ottenuta dalle osservazioni della linea 21cm dell'idrogeno neutro.

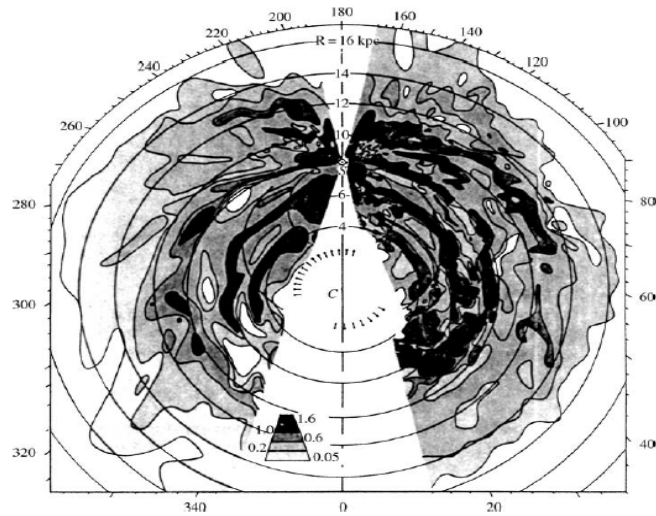


Figura 1.10: Mappatura della Via Lattea attraverso la linea di assorbimento 21cm. La densità è espressa in atomi/cm^3 . Figura presa da R.Freedman, W.Kaufmann; Universe.

Per ottenere le distanze delle nubi di gas, è necessario conoscere la curva di rotazione, la velocità circolare in funzione del raggio. Questo è determinato dalle stesse osservazioni della velocità radiale e coinvolge ipotesi relative alla densità e alla rotazione del gas, come vedremo nel prossimo capitolo.

1.4 Teorema del Viriale

Per potere ottenere la velocità in funzione del raggio (e della massa, a sua volta in funzione del raggio stesso), introduciamo un importante teorema, ben noto dalla meccanica classica: il *Teorema del Viriale*. Esso consente lo studio dell'evoluzione globale di sistemi di punti materiali interagenti in condizioni di equilibrio stazionario; con questa espressione si intende che i punti si muovono in modo disordinato senza alterare la struttura macroscopica del sistema.

Si considerino le equazioni del moto dei punti di un sistema di N punti di massa m_i ,

posizione r_i , velocità \dot{r}_i , accelerazione \ddot{r}_i e soggette a forze (interne) F_i :

$$F_i = m_i \ddot{r}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.21)$$

La risoluzione del sistema permette di trovare le traiettorie delle singole particelle, ma non fornisce una visione globale dell'evoluzione del sistema. A tale scopo si possono utilizzare le costanti di moto, energia, momento e momento angolare, che si conservano in sistemi isolati (ovvero non soggetti a forze esterne). Ad esse è possibile aggiungere un risultato statistico.

Definiamo il *Viriale* del sistema la quantità:

$$A = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \cdot r_i, \quad (1.22)$$

la cui derivata temporale è:

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^n (m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i + m_i \ddot{r}_i \cdot r_i). \quad (1.23)$$

Il primo termine equivale al doppio dell'energia cinetica della i -esima particella, e il secondo termine contiene un fattore $m_i \ddot{r}_i$ che, secondo le leggi di Newton, è uguale alla forza applicata alla i -esima particella. Dunque abbiamo:

$$\dot{A} = 2K + \sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i, \quad (1.24)$$

dove K è l'energia cinetica totale del sistema. Se $\langle A \rangle$ denota la media temporale di A nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$, abbiamo:

$$\langle \dot{A} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{A} dt = \langle 2K \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i \right\rangle. \quad (1.25)$$

Se il sistema rimane legato, ovvero nessuna particella sfugge all'infinito, le posizioni r_i e le sue derivate rimarranno finite; pertanto $\langle \dot{A} \rangle$ non divergerà mai nell'integrale presente in (2.5) che allora per $\tau \rightarrow \infty$ si annullerà. In conclusione si ottiene:

$$\langle 2K \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i \right\rangle = 0. \quad (1.26)$$

Questa è la forma generale del Teorema del Viriale. Se le forze sono dovute unicamente alla gravitazione reciproca, possono essere espresse nel seguente modo:

$$F_i = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}, \quad (1.27)$$

dove $r_{ij} = |r_i - r_j|$. Sostituendo all'equazione (2.6) otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \cdot r_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \cdot (r_i - r_j), \quad (1.28)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene riorganizzando i termini delle due sommatorie, combinando i termini

$$m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \cdot r_i,$$

$$m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \cdot r_j = m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \cdot (-r_j).$$

Osservando che $(r_i - r_j) \cdot (r_i - r_j) = r_{ij}^2$ otteniamo:

$$-2 \langle K \rangle = \sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \langle U \rangle, \quad (1.29)$$

dove U è l'energia potenziale del sistema. Quindi il Teorema del Viriale diventa:

$$2 \langle K \rangle + \langle U \rangle = 0, \quad (1.30)$$

oppure analogamente:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle. \quad (1.31)$$

Applicando il Teorema del Viriale a un qualsiasi sistema in equilibrio stazionario sono determinabili tre possibili scenari:

- $2K > |U| \rightarrow$ l'energia cinetica è maggiore dell'energia potenziale gravitazionale e il sistema di particelle si espande;
- $2K < |U| \rightarrow$ l'energia cinetica è minore dell'energia potenziale e il sistema di particelle collassa;
- $2K = |U| \rightarrow$ l'energia potenziale è bilanciata dall'energia cinetica e il sistema è all'equilibrio.

Capitolo 2

Curve di rotazione

2.1 Componenti di una curva di rotazione

Nell'equazione (1.20) la longitudine l fornisce il raggio R_k delle nubi dotate di velocità radiale massima. Compiendo osservazioni a differenti longitudini si può dunque utilizzare (1.20) per determinare la velocità angolare del gas per varie distanze dal centro galattico (assumendo moti circolari). In questo modo si ricavano la curva di rotazione $\omega = \omega(R)$ e la corrispondente curva di velocità $V = V(R)(= \omega(R)R)$.

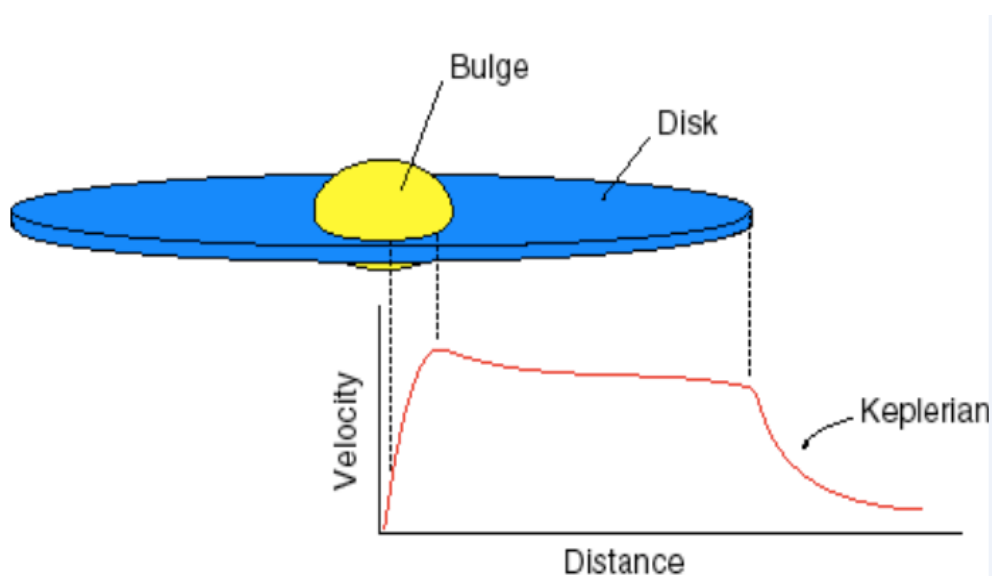


Figura 2.1: La curva di rotazione esprime la velocità in funzione del raggio. All'interno del bulge, la regione più interna, la velocità cresce con il raggio, mentre lungo il disco sembra non dipendere da quest'ultimo; oltre il raggio del disco, invece, inizia la discesa Kepleriana.

La parte più interna delle galassie ruota come un corpo rigido, dunque la velocità angolare non dipende dal raggio ($\omega(R) = costante$) e la velocità radiale cresce in maniera direttamente proporzionale con il raggio (Figura 2.1). Al di fuori di questa regione la

velocità inizialmente sale, per poi scendere gradualmente. La velocità massima è raggiunta a circa 8 kpc dal centro. Nella Via Lattea il Sole, che si trova a circa 8.5 kpc dal centro stesso, ha una velocità rotazionale di circa $220 \frac{km}{s}$. Procedendo verso l'esterno la velocità continua a decrescere. Questo significa che la maggior parte della massa si trova all'interno del raggio solare (ovvero la distanza del Sole dal centro galattico), e questa massa può essere determinata attraverso la terza legge di Keplero.

Sapendo che:

$$M = \frac{R_0 V_0^2}{G}, \quad (2.1)$$

inserendo i valori $R_0 = 8.5 kpc$ e $V_0 = 220 \frac{km}{s}$, si ottiene:

$$M = 1.9 \times 10^{41} kg = 1.0 \times 10^{11} Msun. \quad (2.2)$$

La velocità di fuga al raggio R è:

$$V_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = V\sqrt{2}, \quad (2.3)$$

Allora la velocità di fuga alla distanza solare è $V_{f,Sun} = 310 \frac{km}{s}$. Dunque non si dovrebbero poter osservare stelle muoversi nella direzione di rotazione della galassia, $l = 90^\circ$, con velocità che superi quella solare di più di $90 \frac{km}{s}$, poiché in tal caso la velocità delle stelle supererebbe la velocità di fuga.

Le precedenti osservazioni sono state effettuate assumendo che, vicino al Sole, la massa possa essere presa come tutta concentrata in un punto centrale. Se questo fosse vero, la curva di rotazione assumerebbe la forma Kepleriana, ovvero $V \sim R^{-\frac{1}{2}}$. Che questo fatto non avvenga può essere verificato analizzando i valori delle costanti di Oort. Dalla relazione della Kepleriana:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{GM} R^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

derivando:

$$\frac{dV}{dR} = -\frac{1}{2} \sqrt{GM} R^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{V}{R}, \quad (2.5)$$

Usando le proprietà (1.17) e (1.18) delle costanti di Oort, si ottiene:

$$\frac{A - B}{A + B} = 2, \quad (2.6)$$

per una curva di rotazione Kepleriana.

Tuttavia, sin da subito, si è visto che i dati osservativi per diverse galassie a spirale (velocità in funzione del raggio, misurati rispettivamente assumendo effetto Doppler e

rotazione differenziale) non erano in accordo con le predizioni per una curva di rotazione Kepleriana.

Questo perchè bisogna tenere conto della effettiva distribuzione di massa nelle galassie. Come si è visto in precedenza, una tipica galassia a spirale è costituita da un disco sottile e un bulge. Quindi, per la derivazione delle curve di rotazione bisogna tener conto delle distribuzioni di massa di queste due componenti.

Analiticamente, si assume per il disco sottile una distribuzione in stelle o gas (e quindi luminosità) che vada come un disco esponenziale, mentre per il bulge si assume una distribuzione in stelle con un profilo detto di "de Vaucouleurs".

Per passare dalla distribuzione in intensità a quella in massa si assume un rapporto $\frac{M}{L}$ (Massa/Luminosità) costante.

Per il bulge, partendo dalla distribuzione di densità di emissione, giungiamo alla densità di luminosità osservata, che indichiamo con $I(R)$:

$$I(R) = \frac{I_0 R_0^2}{[R + R_0]^2}, \quad (2.7)$$

dove $I_0 = I(R_0)$ e R_0 è il raggio di scala. Assumendo il rapporto $\frac{M}{L}$ costante, si ricava il *profilo di Jaffe*, che permette di ottenere la densità (e dunque la distribuzione di massa) di uno sferoide di Vaucouleurs di raggio R:

$$\rho(R) = \frac{\rho_0}{4\pi} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2} \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)^{-2}, \quad (2.8)$$

dove $\rho_0 = \rho(R_0)$, e dunque si ottiene la massa:

$$M(R) = \frac{4}{3}\pi\rho(R)R^3. \quad (2.9)$$

Per il disco consideriamo il profilo di luminosità superficiale esponenziale $\Sigma(R)$:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-\frac{R}{R_0}}; \quad (2.10)$$

Da essa si può ottenere, integrando, la massa:

$$M(R) = 2\pi \int \Sigma(R)RdR = 2\pi\Sigma_0 R_0^2 \left[1 - e^{-\frac{R}{R_0}} \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\right], \quad (2.11)$$

dove $\Sigma_0 = \Sigma R_0$ è la densità superficiale di massa, che si assume proporzionale al profilo di luminosità.

In questo scenario, il massimo della curva di rotazione per lo sferoide e per il disco, cade rispettivamente a 0.3 e a 2.2 volte il raggio di scala. Nell'intervallo tra questi due punti

la forma della curva dipende dal rapporto di massa tra lo sferoide e il disco, ma può essere molto piatta. In molti casi quindi un modello combinato con un bulge e un disco produce una velocità che sembra non dipendere dal raggio, come si osserva nelle Figure (2.1) e (2.2), dove le componenti di bulge e disco sono mostrate separatamente.

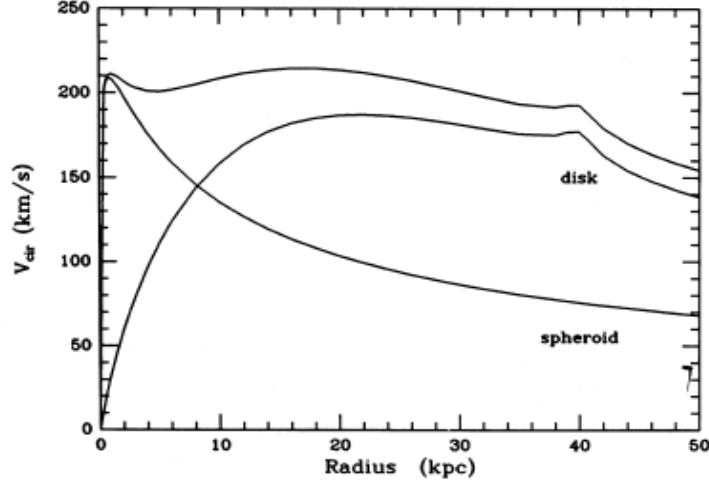


Figura 2.2: Esempio di curva di rotazione ottenuta come somma delle componenti del *bulge* (spheroid) e del *disco* (disk). Il raggio effettivo del bulge è $R_{eff} = 2.7kpc$; il picco di velocità ($\approx 210 \frac{km}{s}$) è raggiunto a 0.8 kpc di distanza dal centro. I parametri sono stati scelti in modo che la curva di rotazione sia piatta lungo un vasto range del raggio, infatti il raggio di scala del disco è $R_0 = 10kpc$ e il raggio di troncamento del disco è $R_{trunc} = 4R_0$; si è assunto inoltre il rapporto di massa $\frac{M_{bulge}}{M_{disk}} = 0.25$.

Superato 3 volte (circa) il raggio di scala, la curva di rotazione dovrebbe mostrare un progressivo declino Kepleriano.

Confrontando la curva di rotazione osservata con quella predetta da un modello di bulge più disco, si rilevano invece discrepanze; per esempio osservazioni della curva di rotazione della Via Lattea al di fuori del circolo solare (ovvero ad una distanza dal centro maggiore rispetto a quella del Sole) indicano che la velocità di rotazione possa iniziare ad aumentare nuovamente (Figura (2.3)).

Possiamo concludere che la forma della curva di rotazione all'interno di 3 volte il raggio di scala misurato in banda ottica può essere spiegata come una combinazione delle distribuzioni di materia (bulge e disco) con rapporto $\frac{M}{L}$ costante. Tuttavia, le curve di rotazione ottenute dalla linea 21 cm dell'idrogeno neutro nelle regioni più esterne delle galassie a spirale non lasciano dubbi sulla necessità di prendere in considerazione l'influenza gravitazionale di un'altra componente, non visibile e dunque di materia non barionica, che costituisce e permea le galassie, consentendone l'assunzione della struttura a spirale e impedendo la disgregazione del materiale che le costituisce. Tale componente non emette radiazione elettromagnetica ed è rilevabile solo attraverso i suoi effetti gravitazionali,

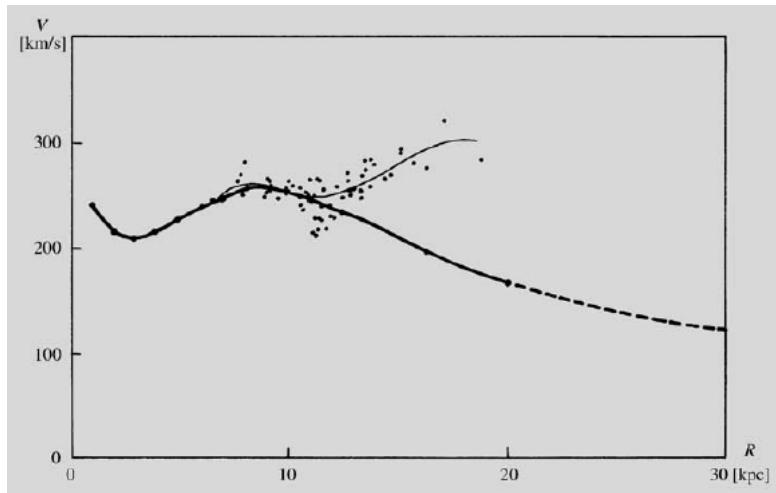


Figura 2.3: Curva di rotazione della Via Lattea basata sui moti delle nubi di idrogeno. Se la massa fosse tutta concentrata entro il raggio 20 kpc, la curva continuerebbe secondo l'andamento Kepleriano (*linea tratteggiata*)

in maniera dunque indiretta. Si tratta della *Materia Oscura*.

2.1.1 La scoperta della materia oscura dalle curve di rotazione

Negli anni Sessanta del Novecento, utilizzando lo spettrometro più potente dell'epoca, Vera Rubin compì uno studio approfondito dei moti delle stelle della vicina galassia di Andromeda (M31), aspettandosi di esaminare un sistema dotato di moti rotatori simili a quelli del Sistema Solare; ciò che osservò fu invece che, come notato precedentemente, la velocità delle stelle non diminuiva all'aumentare del raggio. Molteplici galassie furono oggetto di numerose osservazioni, e tutte rivelarono lo stesso risultato: il moto di rotazione non rispettava il modello newtoniano conosciuto. Questo portò Vera Rubin a considerare la Materia Oscura, la cui esistenza era già stata ipotizzata all'inizio degli anni Trenta del Novecento, come agente gravitazionale attivo, causa della discrepanza tra le previsioni effettuate e le osservazioni registrate.

Oggi sappiamo che la Materia Oscura rappresenta l'84% della materia dell'Universo e il 26% dell'energia dell'Universo; non siamo a conoscenza di ciò che la componga, ma gli scienziati hanno scoperto che una piccola frazione di essa è costituita da neutrini, e alcune strutture, come il Laboratorio Nazionale del Gran Sasso in Italia, sono luoghi di studi volti a catturare particelle di Materia Oscura attive, per cercare di osservarne l'essenza.

La scoperta della Materia Oscura ha rivoluzionato la concezione dell'Universo e l'intera scienza dell'astronomia.

2.2 Calcolo della velocità in funzione del raggio

Per ottenere la velocità in funzione del raggio (e della massa che è a sua volta in funzione del raggio stesso), consideriamo una galassia a spirale e assumiamone la condizione di equilibrio. Per il Teorema del Viriale (2.12), deve valere $2K + U = 0$, dove, ricapitolando, K è l'energia cinetica e U rappresenta l'energia potenziale del sistema. Sia m una massa di prova tale da non alterare la distribuzione di massa (M) del sistema. Essa, per il *primo teorema di Gauss*, non risente di alcuna forza gravitazionale. Ricordando che $K = \frac{1}{2}mv^2$ e $U = \frac{GMm}{r^2}$, si ha:

$$mv^2 = \frac{GMm}{r},$$

e, ricordando che il *potenziale* ϕ si definisce come $\phi = \frac{GM}{r}$,

$$mv^2 = \phi m,$$

e dunque:

$$v = \sqrt{\phi}. \quad (2.12)$$

Allora, in base al volume e alla distribuzione di massa della regione analizzata, si otterrà un corrispondente potenziale, da cui si può giungere alla velocità. Vediamone alcuni esempi:

- *Massa puntiforme M :*

il potenziale è

$$\phi(r) = \frac{GM}{r}, \quad (2.13)$$

allora la velocità di rotazione sarà:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.14)$$

- *Sfera omogenea con densità costante:*

siano ρ la densità della sfera e R il suo raggio; a seconda del rapporto $\frac{r}{R}$ il potenziale può assumere due forme:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 - 2\pi G\rho R^2, & r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi G\rho r^2, & r \geq R \end{cases} \quad (2.15)$$

Dunque per $r \leq R$ si ha:

$$V = \sqrt{\frac{4\pi}{3}G\rho r} \quad (2.16)$$

- *Sfera isoterma di raggio R :*

sia $r \leq R$; la densità è:

$$\rho(r) = \frac{\rho(r_0)}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}, \quad (2.17)$$

il potenziale è:

$$\phi(r) = V_H^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (2.18)$$

dove:

$$V_H^2 = 4\pi G r_0^2 \rho(r_0). \quad (2.19)$$

La velocità di rotazione risulta:

$$V = V_H = \text{costante}. \quad (2.20)$$

I casi appena elencati sono riscontrati nell'individuazione delle componenti della curva di rotazione di una galassia.

Il *bulge* è uno sferoide di de Vaucouleurs, dunque si può fare riferimento al potenziale della sfera omogenea di raggio R e alla velocità ottenuta nell'equazione (2.16).

Per il *disco sottile*, invece, dobbiamo distinguere due casi: entro il raggio di scala continua a valere il potenziale della sfera omogenea, e dunque la stessa equazione (2.16), mentre al di fuori di esso la forza di attrazione gravitazionale esercitata è la stessa che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro puntiforme della galassia (come afferma il *secondo teorema di Gauss*), dunque possiamo ricondurci al potenziale con massa puntiforme M e alla conseguente velocità di rotazione riportata nell'equazione (2.14).

Ricapitolando, per il disco vale:

$$V(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho r}, & r \leq R_0 \\ \sqrt{\frac{GM}{r}}, & r \geq R_0 \end{cases} \quad (2.21)$$

in cui R_0 è il raggio di scala.

Per quanto riguarda l'*alone oscuro*, rientriamo nel caso della sfera isoterma osservato precedentemente. La distribuzione di materia oscura è data più genericamente da:

$$\rho_{halo}(R) \propto \left[\left(\frac{a}{R_0} \right)^\gamma + \left(\frac{R}{R_0} \right)^\gamma \right]^{-1}, \quad (2.22)$$

dove R_0 , come prima, indica il raggio di scala. I parametri γ e a possono variare liberamente. Quest'ultimo è legato al raggio centrale della distribuzione di massa dell'alone, che si definisce come il raggio R_{core} tale che

$$\rho(R_{core}) = 2^{-\frac{3}{2}} \rho(R=0). \quad (2.23)$$

Se poniamo $R_0 = 8kpc$, possiamo osservare la densità $\rho_{halo}(R_0)$ per modelli con densità di massa dell'alone nelle vicinanze del Sole ($\sim 0.01 \frac{Msun}{pc^3}$). L'equazione (2.22) diventa

equivalente a:

$$\rho_{halo}(R) = \rho_{halo}(0) \left[1 + \left(\frac{R}{R_0} \right)^\gamma \right]^{-1}. \quad (2.24)$$

Secondo quanto riportato nelle equazioni (2.17) e (2.19), la densità dell'alone si può scrivere come:

$$\rho_{halo}(r) = \frac{1}{4\pi G} \frac{V_H^2}{r^2 + a^2}, \quad (2.25)$$

che risulta essere una formulazione equivalente dell'equazione (2.22).

La velocità di rotazione risulta:

$$V^2(r) = V_H^2 \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right) \arctan \left(\frac{r}{a} \right) \right], \quad (2.26)$$

dove V_H^2 è stata definita nella sezione del potenziale di una sfera isoterma (equazione (2.19)).

Osserviamo che $V^2(r \gg a) \sim V_H^2$, ovvero per r sufficientemente maggiore del parametro a la velocità di rotazione si comporta come la velocità ottenuta nell'equazione (2.29), che è costante.

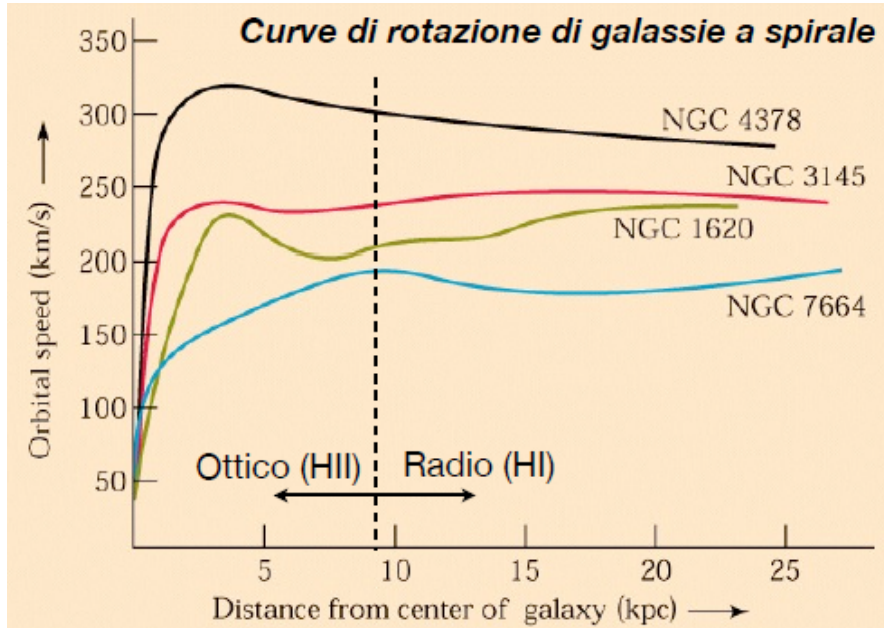


Figura 2.4: Curve di rotazione di alcune galassie a spirale

Una volta ricavate le distribuzioni di massa e le velocità delle varie componenti, la forma analitica della curva di rotazione di una galassia si deriva sommando le componenti stesse. Nella Figura (2.4) sono raffigurate le curve di rotazione di alcune galassie a spirale note. Per mappare correttamente una galassia è dunque necessario considerare sia i dati ottici (per le regioni più interne) sia i dati delle regioni HI (per le zone più esterne).

Le curve di rotazione possono essere utilizzate anche per studiare le distribuzioni di massa, che come abbiamo visto presentano alcuni parametri che variano liberamente (ad esempio a e γ nella distribuzione dell'alone riportata nell'equazione (2.22)): al variare di essi si può ricercare la distribuzione adeguata che riproduca in maniera corretta la curva di rotazione.

Un'altra importante osservazione riguarda il rapporto tra la luminosità delle galassie a spirale e l'andamento delle curve di rotazione delle stesse; si nota infatti che se la luminosità è alta si manifesta una rapida crescita della velocità con il raggio, seguita da un assestamento approssimabile ad una costante; al contrario le spirali dotate di bassa luminosità presentano, all'aumentare del raggio, una crescita di velocità più graduale. Questo suggerisce che le galassie molto luminose siano caratterizzate da un bulge dalla massa elevata, mentre le galassie meno luminose sembrano non avere neppure il bulge.

La galassia a spirale NGC 3198, della quale è proposto uno studio sulla curva di rotazione nel prossimo capitolo, appartiene a questa seconda categoria.

Capitolo 3

Curva di rotazione di NGC 3198

3.1 La galassia a spirale NGC 3198

La galassia NGC 3198 è una galassia a spirale barrata situata nella costellazione dell'Orsa Maggiore (Figura 3.1). Appartiene al *superammasso* di galassie *Virgo*, di cui fa parte anche il *Gruppo Locale* che contiene la Via Lattea, dalla quale dista circa 47 milioni di anni luce.

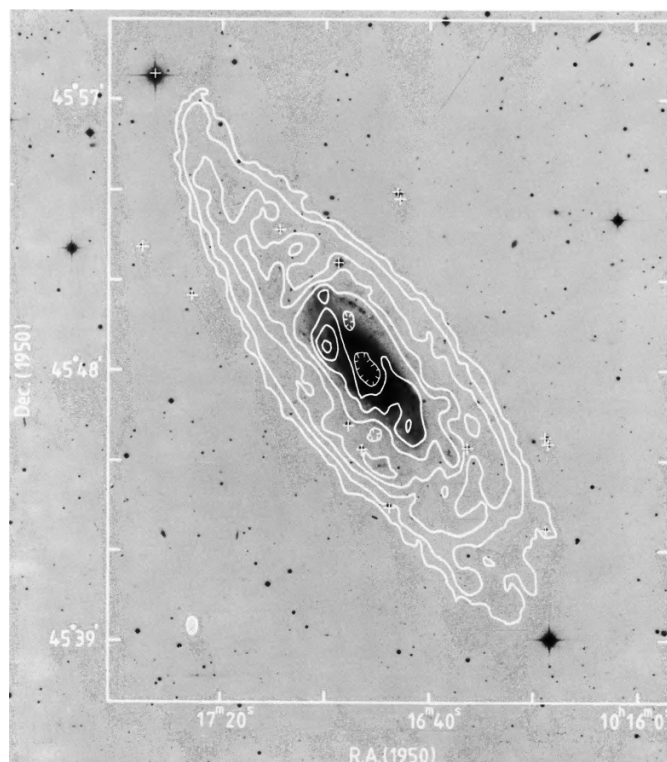


Figura 3.1: Rappresentazione nella riga dell'HI della galassia NGC 3198. I contorni descrivono la distribuzione dell'idrogeno neutro che interessa regioni della galassia assai più esterne rispetto a quelle popolate dalle stelle. Questo ci permette infatti di misurare la velocità di rotazione fino a 30 kpc di distanza dal centro. Immagine tratta da Van Albada et al. 1985; Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198.

NGC 3198 è una galassia dalla bassa luminosità, che non mostra evidenti prove dell'esistenza di un bulge. Possiamo dunque limitarci a considerare le componenti del disco e dell'alone. La distribuzione della luce suggerisce che qualsiasi troncamento della componente del disco deve occorrere al di fuori di 5.5 volte il raggio di scala, ma oltre tale distanza il contributo del disco non risulta alterare i risultati in maniera significativa, allora, per semplicità, possiamo trattare il caso di un disco infinito. Un altro fattore a conferma di questa assunzione è il fatto che nelle regioni più esterne della galassia non bisogna trascurare il contributo di idrogeno neutro HI nella densità di massa totale. La quantità totale di HI presente in NGC 3198 è $4.8 \times 10^9 M_{\odot}$ e il suo contributo massimo alla massa del disco è del 15%.

3.2 Curva di rotazione

Nella figura 3.2 osserviamo i dati registrati della curva di rotazione di NGC 3198. Nella tabella, le distanze sono riportate in minuti d'arco ($'$), dove un minuto d'arco corrisponde a circa 2.68 kpc.

TABLE 2
HI ROTATION CURVE OF NGC 3198

DISTANCE FROM CENTER	V_{hel} (km s $^{-1}$)	DISTANCE FROM CENTER	V_{hel} (km s $^{-1}$)
0.25	55 ± 8	4.5	153 ± 2
0.50	92 ± 8	5.0	154 ± 2
0.75	110 ± 6	5.5	153 ± 2
1.00	123 ± 5	6.0	150 ± 2
1.25	134 ± 4	6.5	149 ± 2
1.50	142 ± 4	7.0	148 ± 2
1.75	145 ± 3	7.5	146 ± 2
2.00	147 ± 3	8.0	147 ± 2
2.25	148 ± 3	8.5	148 ± 2
2.50	152 ± 2	9.0	148 ± 2
2.75	155 ± 2	9.5	149 ± 2
3.00	156 ± 2	10.0	150 ± 2
3.50	157 ± 2	10.5	150 ± 3
4.00	153 ± 2	11.0	149 ± 3

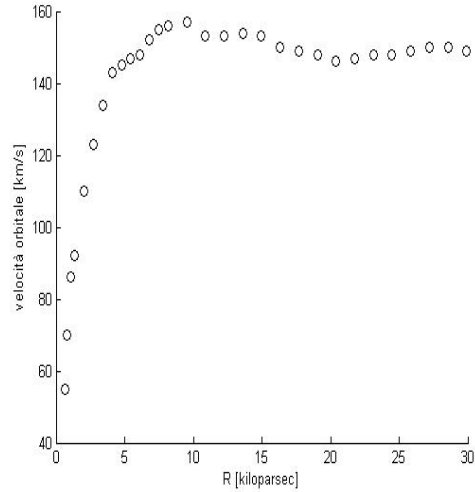


Figura 3.2: A sinistra una tabella (tratta da Van Albada et Al.; Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198) elencante, a diverse distanze, i valori di velocità osservati, che sono parte della effettiva curva di rotazione di NGC 3198; a destra gli stessi valori riportati su un piano R-V.

Come asserito nella Sezione (2.2), sarà necessario considerare le diverse componenti, variare le distribuzioni di massa e alterare i parametri liberi, fino a trovare la curva analitica che meglio approssima i risultati osservati.

Il primo modello realizzato è quello di un disco con la più alta massa possibile ($M_{\text{disk}} =$

3.1×10^{10}), trascurando la componente di alone. Un rigoroso limite superiore di velocità per il disco è $V_{max} = 150 \frac{km}{s}$. Questa scelta implicherebbe un alone dotato di un nucleo cavo, che non è plausibile. Perciò V_{max} deve assumere valori più bassi. Si osserva che ridurre V_{max} fino a $140 \frac{km}{s}$ è sufficiente a permettere un alone la cui densità cresce in maniera monotona con la distanza dal centro galattico. Nella Figura (3.3) è mostrato il grafico di questo primo caso.

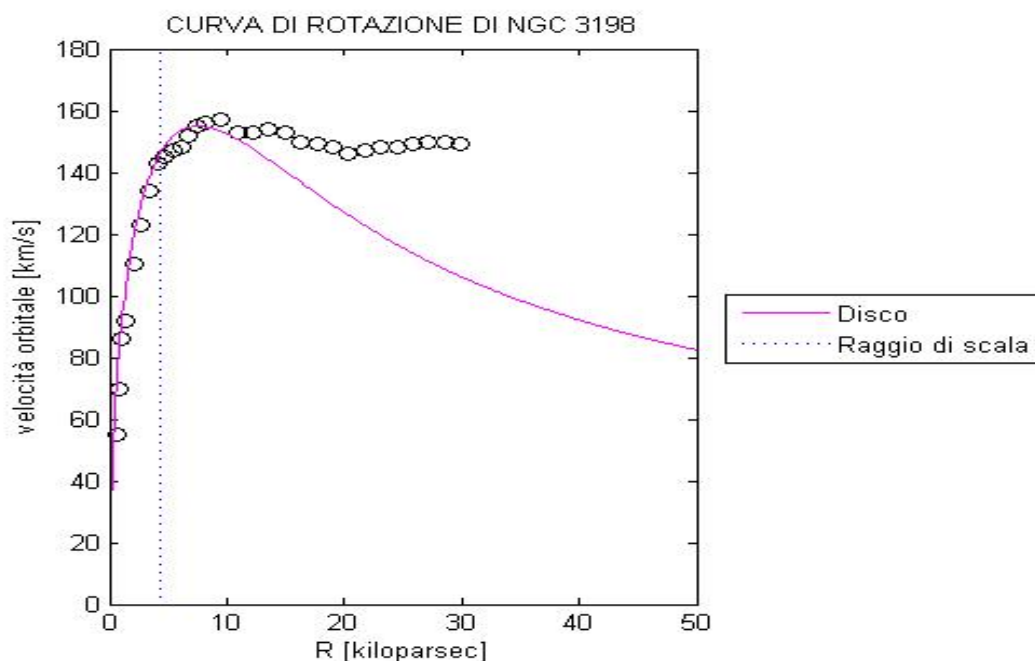


Figura 3.3: Curva di rotazione realizzata considerando solo la componente del disco, supponendo quest'ultimo dotato della maggiore massa possibile. Come raggio di scala del disco è stato preso $R_0 = 4.23 kpc$ (linea tratteggiata).

Dal grafico appena proposto si può osservare come la componente del disco approssimi molto bene la curva di rotazione nelle regioni più interne della galassia. In tali zone infatti il contributo della materia oscura è minimo, dunque la curva di rotazione risulta ben descritta senza considerare la componente dell'alone oscuro. Tuttavia, nel momento in cui la discesa Kepleriana ha inizio, la discrepanza tra la curva del disco e i valori registrati inizia ad essere evidente, per poi aumentare molto velocemente, sancendo quindi l'inesattezza di questo modello e confermando che la materia oscura gioca un ruolo fondamentale nella determinazione della curva di rotazione di una galassia.

Il secondo modello proposto è invece quello di una curva di rotazione costituita solo dalla componente dell'alone. Malgrado questa ipotesi possa sembrare, similmente alla precedente, sbagliata in partenza, essa è da prendere in considerazione. Esaminare so-

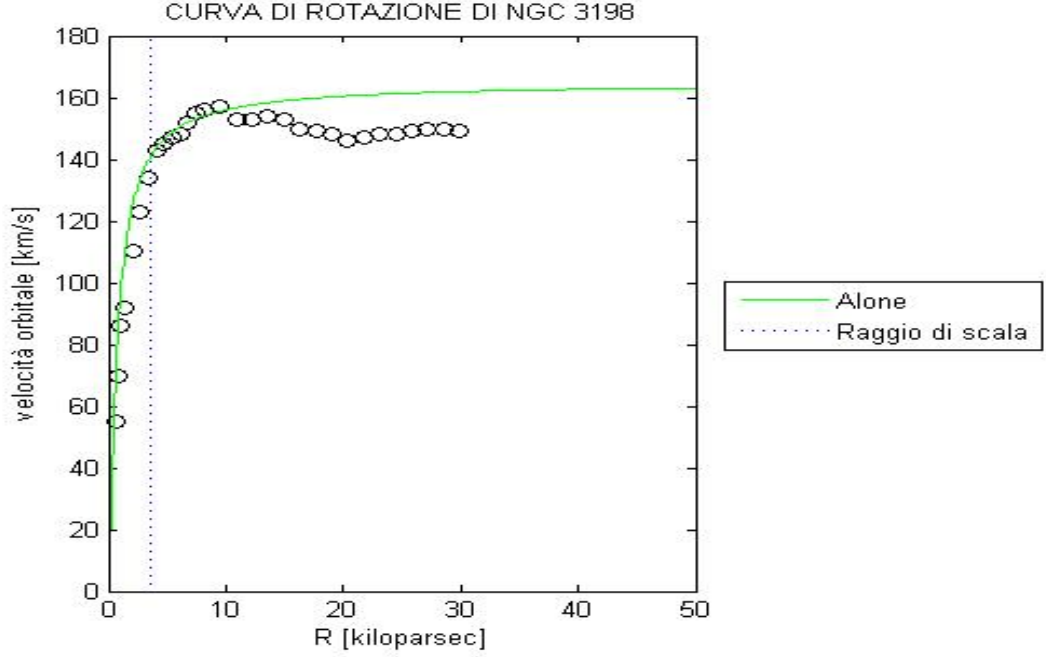


Figura 3.4: Curva di rotazione che presenta solo la componente dell'alone; i parametri utilizzati sono $a = 0.7 \text{ kpc}$, $\gamma = 2.25$, $\rho(R_0) = 0.0074 \frac{M_\odot}{\text{pc}^3}$.

lamente la componente dell'alone significa, infatti, supporre che la massa della materia oscura sia così elevata rispetto a quella della materia visibile da rendere quest'ultima trascurabile.

Tuttavia anche in questo caso notiamo che siamo ben lontani dalla giusta curva di rotazione: questo ci suggerisce che nella galassia NGC 3198 il contributo della materia visibile sia molto rilevante, come approfondiremo in seguito.

Un'importante precisazione, già effettuata nella Sezione (2.2), riguarda il fatto che i parametri dedotti per l'alone non siano unici: curve con due parametri liberi sono genericamente sufficienti per ottenere i modelli della massa. Riprendendo l'equazione (2.32), in questo caso si ha che i parametri γ e a variano all'interno dei seguenti intervalli:

$$1.9 < \gamma < 2.9 \quad , \quad 7 < a < 12$$

mentre $\rho(R_0)$ è fissata all'interno di un intervallo ristretto. Questa libertà nella scelta dei parametri non è tuttavia rilevante, infatti l'interesse principale della ricerca è la distribuzione di massa nell'alone oscuro, che deriva direttamente dalla forma della componente dell'alone nella curva di rotazione. Quest'ultima è fissata dalla curva di rotazione stabilita e dal disco adottato.

Ricordando la definizione di Raggio di core (2.23), abbiamo:

$$R_{core} = (2^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{1}{\gamma}} a, \quad (3.1)$$

da cui, nel nostro caso particolare, ricaviamo l'intervallo di fiducia

$$11kpc < R_{core} < 14kpc, \quad (3.2)$$

ovvero $R_{core} = 4.7 \pm 0.6$ volte il raggio di scala del disco. Sottolineiamo come questo sia un limite massimo per R_{core} , infatti per dischi con massa minore il valore di R_{core} diminuisce, come vedremo in seguito.

Il terzo modello di curva di rotazione è realizzato sommando la componente di disco massimo (ovvero assumendo nuovamente il disco con la più elevata massa possibile) e quella dell'alone. Rispetto ai due esempi precedenti, questo modello, rappresentato nella Figura (3.5), fornisce una buona approssimazione della curva di rotazione di NGC 3198, presentando la caratteristica forma piatta lungo la maggior parte della galassia. Oltre i 30 kpc la curva è una pura estrapolazione, ma le osservazioni entro tale distanza non mostrano alcun segnale di declino, dunque ci si aspetta che anche al di fuori dei 30 kpc la curva sia molto simile a quella ottenuta dalle simulazioni.

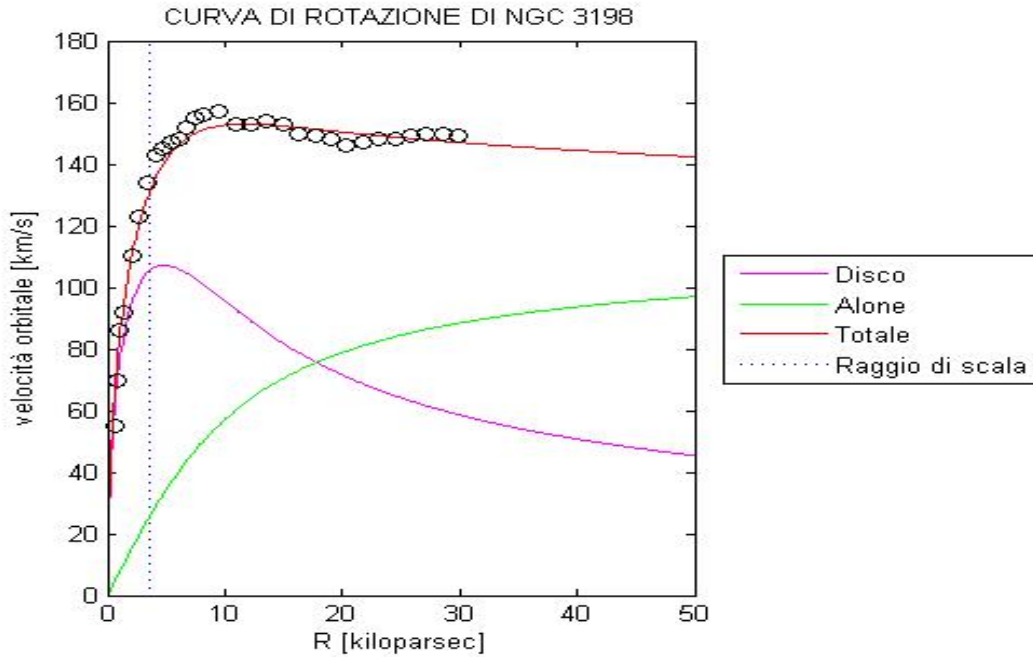


Figura 3.5: Curva di rotazione ottenuta come somma delle componenti del disco (assunto in questo caso con la massa più elevata possibile) e alone; il raggio di scala del disco è stato preso uguale a quello della distribuzione della luce ($2.68kpc$); la curva dell'alone è basata sull'equazione (2.24) con parametri $a = 8.5kpc$, $\gamma = 2.1$, $\rho(R_0) = 0.0040 \frac{M_{\odot}}{pc^3}$.

Attraverso la variazione dei parametri dell'alone o l'alterazione della massa totale del disco, si ricerca la curva di rotazione che meglio approssima i dati osservati.

Consideriamo ora una famiglia di dischi con $V_{max} < 140 \frac{km}{s}$ (tutti con lo stesso raggio di

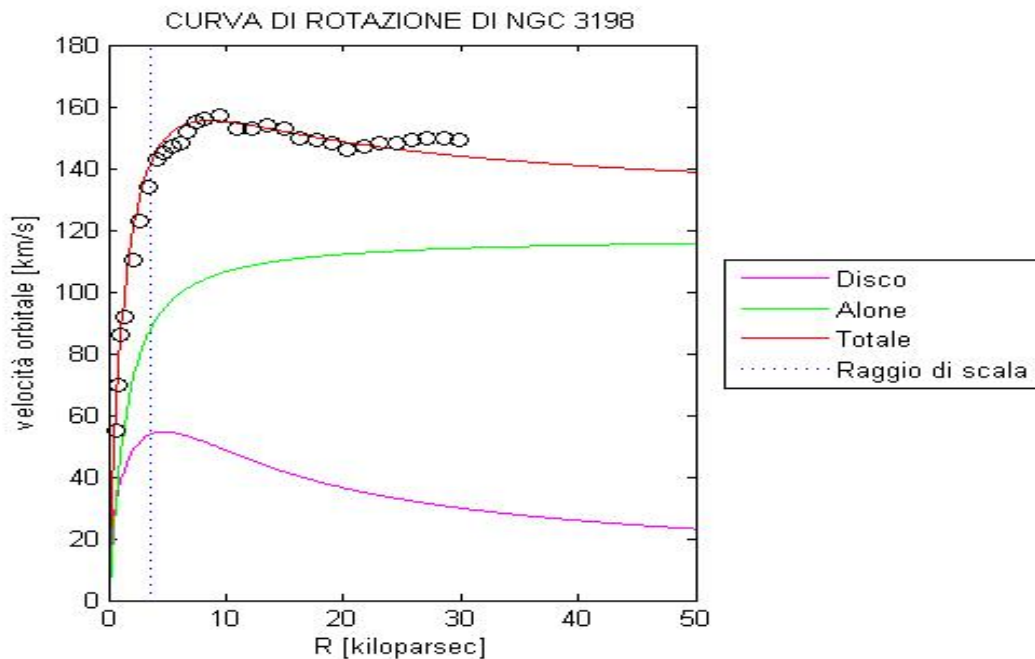


Figura 3.6: Curva di rotazione composta da un disco la cui massa è $M = 0.3 \times M_{disk}^{max}$ e dall'alone; i parametri per quest'ultimo sono $a = 1.3kpc$, $\gamma = 2.05$, $\rho(R_0) = 0.0063 \frac{M_{\odot}}{pc^3}$.

scala); troviamo che per ciascuno di questi dischi si può risalire all'alone corrispondente attraverso l'equazione (2.22), e in seguito ottenere la curva di rotazione sommando le componenti di disco e alone.

Il quarto modello realizzato, proposto nella Figura (3.7), mostra la curva di rotazione di NGC 3198 supponendo che il disco abbia massa uguale al 30% del massimo valore consentito.

La principale differenza tra gli aloni risultanti è il raggio centrale R_{core} : esso scende da $R_{core} = 12kpc$ per il disco con la massa più elevata, fino a $R_{core} = 1.7kpc$ quando l'alone oscuro domina maggiormente. Osserviamo che l'esponente γ della distribuzione di densità dell'alone assume sempre valori vicini a 2.

3.3 Distribuzione di massa

La Figura (3.7) mostra le distribuzioni di massa del disco e dell'alone per il modello di curva di rotazione rappresentato nella Figura (3.5).

Osserviamo che a 30 kpc la massa totale è di circa $15 \times 10^{10} M_{\odot}$ e il rapporto tra materia

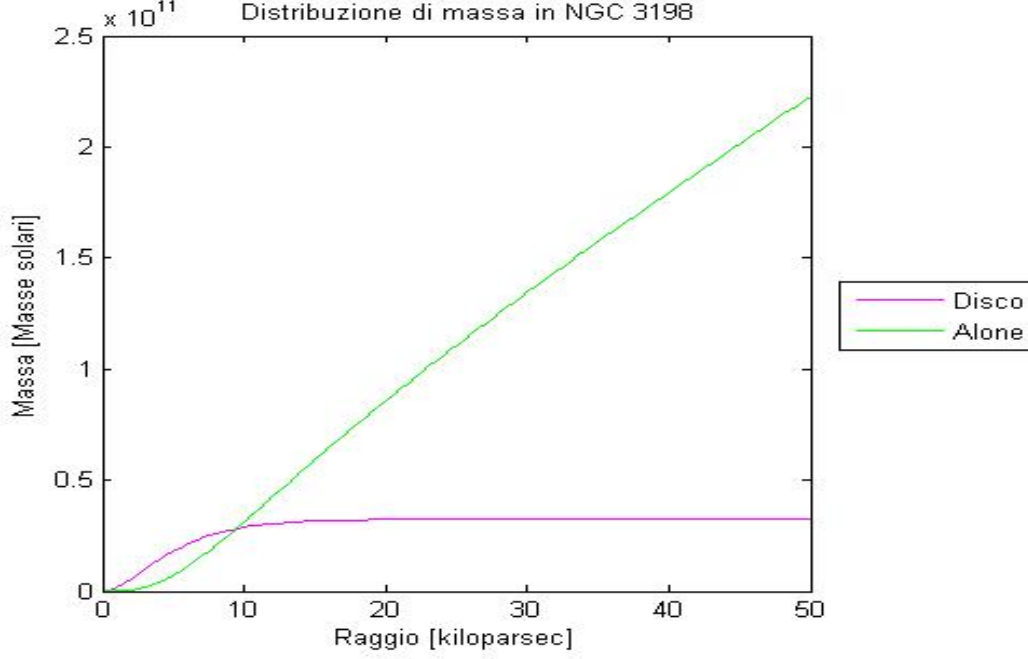


Figura 3.7: Distribuzioni di massa per le componenti del disco e dell'alone; la componente dell'alone è basata sull'equazione (2.32) con gli stessi parametri riportati nella didascalia della Figura (3.2).

oscura e materia visibile, a tale distanza, è circa 3.9. Un'altra proprietà interessante è il rapporto Massa/Luminosità del disco: si osserva che $\frac{M}{L}(disk) \leq 3.6 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$.

Da questi risultati è possibile porre un limite massimo per la massa della componente del bulge. Come affermato precedentemente, sapendo che esiste una relazione tra le dimensioni del bulge e la luminosità della galassia, osservando che NGC 3198 è poco luminosa si deduce che il raggio effettivo del suo bulge sia molto piccolo: $R_{bulge} \approx 3kpc$ è un limite superiore più che abbondante. Da questo si ottiene un limite superiore per la massa del bulge:

$$\frac{M_{bulge}(30kpc)}{M_{tot}(30kpc)} < 0.026, \quad (3.3)$$

e

$$\frac{M_{bulge}(30kpc)}{M_{disk}^{max}(30kpc)} < 0.12. \quad (3.4)$$

In realtà la massa del bulge è probabilmente molto inferiore, poichè i dati ottici non rilevano una rapida crescita della rotazione nelle regioni più interne.

Anche se i limiti posti sopra sono piuttosto conservativi, indicano che le conclusioni raggiunte non presentano incertezze per quanto riguarda le proprietà del bulge.

Anche alterare la densità di massa dell'alone permette di ottenere nuovi modelli per la curva di rotazione. Per ottenere una stima della minima quantità di materia oscura

a larghe distanze dal centro galattico, possiamo realizzare un modello con bassa densità dell'alone, in cui l'equazione (2.32) diventa:

$$\rho_{halo}(R) \propto \left[\left(\frac{a}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + 0.08 \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 \right]^{-1}, \quad (3.5)$$

dove $\rho_{halo}(R_0) = 0.0042 \frac{M_{sun}}{pc^3}$, $a = 10kpc$ e $R_0 = 8kpc$.

Dall'analisi appena effettuata, un'importante questione rimane irrisolta: quale sia il valore del rapporto $\frac{M}{L}$ nel disco. In altre parole, è necessario capire quale tra le curve di rotazione proposte si avvicini maggiormente alla realtà. Vi sono alcune ragioni (tuttavia non definitive) che ci permettono di propendere verso il caso con disco massimo rappresentato in Figura (3.5), ricordando comunque che alterando i parametri liberi dell'alone se ne possono ottenere ulteriori varianti più o meno valide nell'approssimazione della curva di rotazione osservata:

- Da misurazioni della densità di massa e luminosità nei dintorni del Sole risulta $\frac{M}{L} = (3.1 \pm 0.6) \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$. Questo valore include la materia oscura presente nel disco. Per NGC 3198 si ha:

$$\frac{M}{L}(disk) \leq 4.4 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}. \quad (3.6)$$

dunque l'equazione (3.6) rappresenta una caratteristica che la galassia NGC 3198 ha in comune con la Via Lattea.

- La forma della parte crescente della curva di rotazione rispetta le previsioni per un disco con raggio di scala dato dalla distribuzione della luce. Se la curva di rotazione fosse determinata dall'alone oscuro (ovvero se il disco avesse massa trascurabile rispetto all'alone stesso), questa corrispondenza sarebbe una coincidenza.
- La stretta connessione tra la luminosità delle galassie a spirale e la velocità circolare massima implica che sia la materia visibile a determinare il massimo della velocità di rotazione in una galassia. In altre parole, visto che il massimo della curva di rotazione viene raggiunto vicino alle regioni interne (e più luminose) della galassia, in cui il contributo dell'alone oscuro non può dominare quello del disco, si deduce che tale picco debba essere determinato dalla componente di materia visibile.

Osserviamo infine che i risultati ottenuti per NGC 3198 sono molto simili a quelli riscontrati studiando altre galassie. La galassia NGC 3198 presenta infatti caratteristiche del tutto normali per una galassia a spirale, come il rapporto massa/luminosità totale, che

risulta essere:

$$\frac{M}{L} = 18 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \quad (3.7)$$

entro i 30 kpc, e si stima che sia:

$$\frac{M}{L} \geq 25 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \quad (3.8)$$

entro i 50 kpc, rientrando pienamente negli standard delle galassie caratterizzate dalla stessa morfologia.

La forma *piatta* della curva di rotazione sembra implicare una relazione tra la materia oscura e la materia visibile. In generale risulta che le curve di rotazione delle galassie a spirale siano approssimativamente piatte, o leggermente crescenti, oltre il raggio di rotazione del disco. Non è ancora chiaro se questo implichi che le distribuzioni di materia oscura e materia visibile siano strettamente legate.

Conclusione

Lo studio delle curve di rotazione delle galassie a spirale rappresenta un passo importante nel percorso di sviluppo della scienza astronomica.

Esso ha infatti permesso non solo di approfondire la conoscenza della Via Lattea e delle altre galassie a spirale, di spiegarne la formazione, la struttura e i moti, ma anche di cogliere la presenza di una nuova fondamentale componente dell'Universo, la materia oscura, della quale, fino a prima di tale studio, l'esistenza era stata solo vagamente ipotizzata.

Questa intuizione ha rivoluzionato il mondo dell'astrofisica e può essere utilizzata come argomentazione contro le proposte secondo le quali la dinamica Newtoniana debba essere modificata.

Ad oggi la composizione della materia oscura è ignota, ma tentare di scoprire di cosa sia costituita è divenuto il fulcro di alcune tra le principali strutture di ricerca nel mondo dell'astrofisica. Una strada che è stata aperta proprio dagli studi sulle curve di rotazione delle galassie a spirale.

Bibliografia

- [1] Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J.; *Fundamental Astronomy*; Springer Verlag (2014).
- [2] Van Albada T.S., Bahcall J.N., Begeman K., Sancisi R.; *Distribution of Dark Matter in the Spiral Galaxy NGC 3198*; *The Astrophysical Journal*, 295 (1985).
- [3] Freedman R.A., Kauffman III W.J.; *Universe*; Eight Edition, Freedman and Company (2008).
- [4] Slides utilizzate dal Professor Marconi A. nel corso di Fisica delle Galassie presso l'Università degli Studi di Firenze (2014-2015).
- [5] Slides utilizzate dalla Professoressa Brusa Marcella nel corso di Fondamenti di Astronomia (2017-2018).

Ringraziamenti

Ringrazio la Professoressa Marcella Brusa per la disponibilità, la mia famiglia, gli amici e i compagni di studio.