

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in analisi complessa

**SULLA  
MAPPA DI RIEMANN  
PER I POLIGONI**

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
SERGIO VENTURINI

Presentata da:  
GRAZIA SIBILIO

---

---

Sessione Unica  
Anno Accademico 2017/2018



*Alla mia famiglia*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Premesse</b>	<b>1</b>
1.1 Curve e curvatura nel piano . . . . .	1
1.2 Funzioni olomorfe . . . . .	4
1.3 Trasformazioni di Möbius . . . . .	13
<b>2 Alcune considerazioni sulla formula di Schwarz-Christoffel per il disco unitario</b>	<b>17</b>
2.1 Formula di Schwarz-Christoffel per il disco unitario . . . . .	17
2.2 Continuità sul bordo del disco unitario . . . . .	21
2.3 Dal bordo del disco unitario alla poligonale . . . . .	22
2.4 Dal disco unitario alla parte interna del poligono . . . . .	26
<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>



# Introduzione

Nella presente dissertazione saranno trattate delle osservazioni sulle trasformazioni di Schwarz-Christoffel, mappanti il disco unitario nel poligono. La teoria delle curve e le proprietà delle funzioni olomorfe ne costituiranno principale fondamento.

Nel primo capitolo saranno richiamate alcune nozioni basilari di geometria e analisi complessa, che rappresenteranno strumento utile nello sviluppo dell'elaborato; nello specifico, la prima parte si soffermerà sull'interpretazione matematica delle curve, col fine principale della caratterizzazione delle rette quali curve a curvatura nulla, aspetto che giocherà un ruolo fondamentale nel prosieguo della trattazione. Nella seconda parte saranno definite, invece, le funzioni olomorfe e ne saranno dimostrate diverse proprietà. Infine, saranno studiate le trasformazioni di Möbius, notevole classe di trasformazioni conformi. In particolare, sarà utilizzato il birapporto per descrivere rette e circonferenze, per poi mostrare che questi, tramite le trasformazioni di Möbius, vengono mandati in rette o circonferenze.

Nel secondo capitolo, saranno analizzati alcuni aspetti di un altro tipo di mappe conformi: le trasformazioni di Schwarz-Christoffel per il disco unitario.

In primo luogo, sarà enunciato il teorema della mappa di Riemann, il quale consente di affermare l'esistenza di un biolomorfismo tra una regione aperta semplicemente connessa  $\Omega$  del piano complesso  $\mathbb{C}$ , distinto da  $\mathbb{C}$  e il disco aperto di raggio unitario.

Questo teorema si riferisce solo a regioni aperte di  $\mathbb{C}$ ; ragion per cui,

sarà presentato anche un teorema attribuito a Caratheodory, che raffina il risultato precedente e fornisce le ipotesi da imporre ai bordi delle regioni aperte  $\Omega$ , necessarie ad estendere il risultato precedente alle chiusure.

Saranno fatte delle considerazioni che porteranno alla dimostrazione del fatto che, dati  $a_1, \dots, a_n$  sul bordo del disco unitario e posto

$$L_{a_i} = \{ta_i; t \geq 1\},$$

la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \cup_{i=1}^n L_{a_i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

così definita

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{-\lambda_i}$$

con  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , è ben posta e la funzione

$$F(z) = A \int_0^z \frac{dt}{(t - a_1)^{\lambda_1} \dots (t - a_n)^{\lambda_n}} + B$$

si dice trasformazione di Schwarz-Christoffel per il disco unitario, dove l'integrale (di Cauchy) altro non rappresenta che una primitiva della funzione  $f(z)$ .

Inizialmente si mostrerà che  $F$  si estende con continuità nei punti di singolarità  $a_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Successivamente, si evidenzierà che gli archi di circonferenza delimitati dai punti  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , vengono trasformati in segmenti rettilinei, facendo delle osservazioni sulle curvature.

Infine, si utilizzerà la definizione di indice di una curva rispetto ad un punto e il principio dell'argomento, per dimostrare che se  $F$  manda il disco unitario in un poligono con bordo una poligonale semplice, essa è un biolomorfismo tra il disco unitario e la parte interna del poligono in questione.



# Capitolo 1

## Premesse

Questo capitolo si propone di illustrare alcune nozioni basilari necessarie alla trattazione della tesi.

### 1.1 Curve e curvatura nel piano

In questa sezione verranno date le definizioni fondamentali riguardanti le curve in  $\mathbb{R}^n$ , con particolare attenzione allo studio della curvatura in  $\mathbb{R}^2$ .

$(a, b)$  sarà un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 1.1.** Una curva  $\gamma$  parametrizzata nel piano è una funzione

$$\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$$

L'immagine di  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^n$  si chiama traiettoria della curva. Se gli estremi della curva  $\gamma(a), \gamma(b)$  coincidono,  $\gamma$  è chiusa.  $\gamma$  si dice semplice se è iniettiva.

**Definizione 1.2.** Sia  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$  e  $\varphi : (c, d) \mapsto (a, b)$  diffeomorfismo allora  $\gamma \circ \varphi : (c, d) \mapsto \mathbb{R}^n$  è una nuova curva che si dice ottenuta per riparametrizzazione.

**Definizione 1.3.** Due curve  $\gamma, \varphi$  si dicono equivalenti se  $\varphi$  si ottiene riparametrizzando  $\gamma$ .

**Definizione 1.4.** Sia  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$  e  $t \in (a, b)$

$\gamma'(t)$  si dice vettore velocità di  $\gamma$  all'istante  $t$ : al variare di  $t$ ,  $\gamma'(t)$  è un vettore parallelo alla retta tangente alla curva nel punto  $\gamma(t)$ , con verso concorde al verso di percorrenza della curva.

*Osservazione 1.* I vettori velocità per curve equivalenti sono paralleli e hanno lo stesso verso se la parametrizzazione ha derivata positiva; il loro modulo dipende dalla parametrizzazione.

**Definizione 1.5.**  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$  si dice regolare in  $t_0 \in (a, b)$  se  $\gamma'(t_0) \neq 0$ .  $\gamma$  si dice regolare se lo è per ogni  $t \in (a, b)$

**Definizione 1.6.** Se  $\gamma$  è regolare, allora il versore tangente  $t(t_0) := \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$  è ben definito.

*Osservazione 2.*  $t$  è invariante per riparametrizzazioni che conservano l'orientazione della curva.

**Definizione 1.7** (Lunghezza di un arco di curva). Sia  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$  una curva e  $\alpha, \omega \in (a, b)$  con  $\alpha < \omega$ .

Si consideri una suddivisione  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \omega$  dell'intervallo  $[\alpha, \omega]$ .

Ogni suddivisione definisce una poligonale

$$P : [\alpha, \omega] \mapsto \mathbb{R}^n$$

di vertici  $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_N)$ .

La lunghezza di  $P$  è data da

$$L(P) = \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Tale lunghezza è crescente per raffinamento (disuguaglianza triangolare).

$$L(\gamma) = \sup L(P)$$

**Teorema 1.1.1.** Sia  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$  una curva e  $\alpha, \omega \in (a, b)$  con  $\alpha < \omega$ .

$$L(\gamma, \alpha, \omega) = \int_{\alpha}^{\omega} \|\gamma'(t)\| dt$$

*Osservazione 3.*  $L$  non varia per curve equivalenti.

**Definizione 1.8.** Ogni curva regolare  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$  ammette una parametrizzazione  $\tilde{\gamma}$  a velocità unitaria equivalente a  $\gamma$ . Fissato  $t_0 \in (a, b)$ , sia

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt.$$

Si osserva che  $s(t)$  è un diffeomorfismo con derivata positiva; sia  $s^{-1}(s)$  il diffeomorfismo inverso. Si definisce

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s^{-1}(s)).$$

La curva  $\tilde{\gamma}$  si dice parametrizzata in lunghezza d'arco e si dimostra facilmente che ha velocità unitaria.

**Definizione 1.9** (curvatura di una curva nel piano). Si consideri  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^2$  una curva regolare parametrizzata in lunghezza d'arco.

Sia

$$t(s) = \gamma'(s)$$

il versore tangente alla curva.

Il versore normale alla curva è dato da

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|};$$

$t$  e  $n$  costituiscono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  orientata positivamente, detta sistema di riferimento di Frenet.

Si definisce curvatura della curva  $\gamma$  la funzione

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \|t'(s)\|.$$

Se  $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ ,

dove  $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$  sono le componenti della curva, vale la formula che segue

$$k(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ \gamma_1''(s) & \gamma_2''(s) \end{pmatrix}}{\|\gamma'(s)\|^3}.$$

In generale, la curvatura indica quanto  $\gamma$  si discosta da una retta.

**Proposizione 1.1.2.** *Sia  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^2$  una curva regolare. Allora valgono le equazioni di Frenet*

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

Si caratterizzino, ora, le rette come curve a curvatura costante.

**Proposizione 1.1.3.** *Sia  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^2$  una curva regolare parametrizzata in lunghezza d'arco.*

*Allora  $k \equiv 0$  se e solo se  $\gamma$  è una retta.*

*Dimostrazione.* Per le equazioni di Frenet,  $t' \equiv 0$ . Questo implica che  $t$  è costante.

Ma  $\gamma'(s) = t(s)$ , allora, essendo  $t$  costante, le componenti di  $\gamma$  sono polinomi di primo grado, ovvero il supporto di  $\gamma$  è una retta.

Viceversa, se  $\gamma$  giace su una retta, esiste un vettore  $v \in \mathbb{R}^2$  tale che, preso  $t_0 \in (a, b)$

$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v \rangle \equiv 0$$

Derivando una volta, si ottiene

$$\langle \gamma'(t), v \rangle \equiv 0$$

Derivando ancora

$$\langle \gamma''(t), v \rangle \equiv 0$$

Dunque, sia  $\gamma'(t)$  che  $\gamma''(t)$  sono ortogonali a  $v$ , quindi  $\gamma'(t)$  e  $\gamma''(t)$  sono paralleli e allora  $\det \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) & \gamma'_2(s) \\ \gamma''_1(s) & \gamma''_2(s) \end{pmatrix} = 0$  allora  $k \equiv 0$ .

□

## 1.2 Funzioni olomorfe

Nella seguente sezione saranno prese in esame le principali proprietà delle funzioni olomorfe e ne saranno mostrati alcuni esempi.

**Definizione 1.10.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$

Si dice che  $f$  è derivabile su  $A$  in  $z_0 \in A$  se esiste il limite

$$f'(z) = \lim_{x \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

$f'(z_0)$  si dice derivata complessa di  $f$  in  $z_0 \in A$ .

**Definizione 1.11.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto.

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  si dice olomorfa se è derivabile in senso complesso in ogni punto di  $A$  e se la derivata complessa  $f' : A \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua in  $A$ .

**Proposizione 1.2.1.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora  $f$  è  $\mathbb{C}$ -derivabile su  $A$  in  $z_0$  se e solo se esiste  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua in  $z_0$  tale che

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$$

per ogni  $z \in A$ .

In tal caso  $f'(z_0) = g(z_0)$

**Proposizione 1.2.2.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe

Allora la somma  $f + g$  ed il prodotto  $fg$  sono olomorfe e  $(f + g)' = f' + g'$  e  $fg$  olomorfa e  $(fg)' = f'g + fg'$ .

*Dimostrazione.* Esistono  $h, k : A \rightarrow \mathbb{C}$  continue in  $z_0$  t.c.

$$h(z_0) = f'(z_0) \text{ e } f(z) = f(z_0) + (z - z_0)h(z) \forall z \in A$$

$$k(z_0) = g'(z_0) \text{ e } g(z) = g(z_0) + (z - z_0)k(z) \forall z \in A$$

Allora  $f + g$  derivabile e  $(f + g)' = h(z_0) + k(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ .

$$f(z)g(z) = f(z_0)g(z_0) + (z - z_0)(f(z_0)k(z) + h(z)g(z_0) + (z - z_0)h(z)k(z))$$

$$\text{Ossia } fg(z) = fg(z_0) + (z - z_0)(f(z_0)k(z) + h(z)g(z_0) + (z - z_0)h(z)k(z))$$

Allora  $fg$  derivabile su  $A$  in  $z_0$  e  $(fg)'(z_0) = h(z_0)g(z_0) + f(z_0)k(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ .

□

**Proposizione 1.2.3.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa e  $f \neq 0$

per ogni  $z \in A$

Allora  $g = \frac{1}{f}$  olomorfa e  $g'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$  per ogni  $z \in A$

*Dimostrazione.* Sia  $z_0 \in A$

esiste  $h : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua in  $z_0$  tale che

per ogni  $z \in A$   $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)h(z)$  e  $f'(z_0) = h(z_0)$

Allora  $g(z) - g(z_0) = \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = -(z - z_0) \frac{h(z)}{f(z)f(z_0)}$

Allora  $g$  derivabile in  $z_0$  e  $g'(z_0) = \frac{-h(z_0)}{f(z_0)f(z_0)} = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$

□

**Proposizione 1.2.4.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe e

$g(z) \neq z_0 \forall z \in A$

Allora  $h = \frac{f}{g}$  è olomorfa e  $h'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

*Dimostrazione.*  $h'(z) = \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(z) = f'(z) \frac{1}{g(z)} + f(z) \left(\frac{1}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)}{g(z)} - \frac{f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

□

**Proposizione 1.2.5.** Siano  $A, B \subseteq \mathbb{C}$  aperti e siano  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e

$g : B \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe tali che  $f(A) \subseteq B$

Allora la funzione composta  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa e  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$

*Dimostrazione.* Siano  $h : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $k : B \rightarrow \mathbb{C}$  continue in  $z_0$  e  $w_0$  tali che per ogni  $z \in A$   $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)h(z)$

e per ogni  $w \in B$   $g(w) - g(w_0) = (w - w_0)k(w)$

Allora  $(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0) = g(f(z)) - g(f(z_0)) = (f(z) - f(z_0))k(f(z)) = (z - z_0)h(z)k(f(z))$

$h(z)k(f(z))$  è continua  $\Rightarrow g \circ f$  derivabile in  $z_0$

$(g \circ f)'(z_0) = k(z_0)h(f(z_0)) = g'(f(z_0))f'(z_0)$

□

**Teorema 1.2.6.** Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa.

Allora  $f' : A \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa.

**Teorema 1.2.7.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ .

$f$  olomorfa su  $A$  se e solo se  $f$  di classe  $C^1$  su  $A$  in senso reale

e valgono le equazioni di Cauchy Riemann

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = i \frac{\partial}{\partial x} f(x, y).$$

Alla dimostrazione si premette il seguente lemma

**Lemma 1.2.8.** *Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa*

*Allora  $f$  di classe  $C^1$  su  $A$  in senso reale e valgono*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f' \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = if' \end{cases} .$$

*Dimostrazione.*  $z_0 = (x_0 + iy_0) \in A$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = f'(z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t} = if'(z) \end{aligned}$$

□

*Dimostrazione.* 1.2.7 Sia  $f$  olomorfa, per il lemma precedente,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f' \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = if' \end{cases}$$

allora

$$i \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = if' = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

Viceversa, si supponga che  $f$  sia di classe  $C^1$  su  $A$  e che sia verificata

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = i \frac{\partial}{\partial x} f(x, y).$$

Inoltre, sia  $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$  arbitrario.

Posto  $z = x + iy$ , si ha il seguente sviluppo di Taylor per  $f$  centrato in  $z_0$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(z_0)(y - y_0) + g(z),$$

dove  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = 0$ .

Per ipotesi, vale

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z_0) = i \frac{\partial}{\partial x} f(z_0).$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } f(z) &= f(z_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)(x - x_0) + i \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)(y - y_0) + g(z) = \\ &= f(z_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)((x - x_0) + i(y - y_0)) + g(z) = \\ &= f(z_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)(z - z_0) + g(z). \text{ Allora } \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial}{\partial x} f(z_0) + \frac{g(z)}{z - z_0} \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial}{\partial x} f(z_0).$$

□

**Definizione 1.12** (Funzione esponenziale complessa).

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Proposizione 1.2.9.** Siano  $z, w \in \mathbb{C}$

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

*Dimostrazione.*  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.2.10.** La funzione  $z \mapsto e^z$  è olomorfa e  $(e^z)' = e^z$

**Lemma 1.2.11.** Per ogni  $t \in \mathbb{R}$   $e^{it} = \cos t + i \sin t$

*Dimostrazione.* Sia  $f(t) = e^{it} = u(t) + iv(t)$ , con  $u, v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$



Allora  $u(t) = \cos t, v(t) = \sin t$  è soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases} .$$

Infatti le condizioni iniziali sono soddisfatte e, poiché

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t) = if(t) = iu(t) - v(t), \text{ si ha}$$

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases} .$$

Si conclude per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy.

□

**Proposizione 1.2.12.** *Sia  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$*

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

*Dimostrazione.*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

□

Per poter definire il logaritmo complesso, è necessario restringere il dominio di  $e^z$ , affinché se ne possa fare l'inversa.

**Definizione 1.13** (Determinazione principale del logaritmo). Sia  $D = \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \text{Im}z \leq \pi\}$

La restrizione di  $e^z$  a  $D$  è iniettiva ed è una corrispondenza biunivoca tra  $D$  e  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

La funzione inversa di  $e^z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto D$  si dice determinazione principale del logaritmo e si indica con  $\text{Log}$

$$w = \text{Log}z \iff \begin{cases} z = e^w \\ -\pi < \text{Im}w \leq \pi \end{cases} .$$

**Proposizione 1.2.13.**  $\mathring{D} = \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \text{Im}z < \pi\}$

$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) \mapsto \mathring{D}$  è olomorfa e  $(\text{Log}z)' = \frac{1}{z}$

**Definizione 1.14** (Determinazione principale della potenza). Sia  $z \in \mathbb{C}^*$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Log}z}$$

**Definizione 1.15.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e sia  $\gamma : \mathbb{R} \supset [a, b] \mapsto A$  una curva in  $A$  di classe  $C^1$  a tratti.

Si definisce integrale di Cauchy di  $f$  lungo  $\gamma$

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

**Proposizione 1.2.14.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un dominio e sia  $f : A \mapsto \mathbb{C}$  olomorfa

Se  $f$  ammette una primitiva  $F : A \mapsto \mathbb{C}$ , allora per ogni cammino

$\gamma : [a, b] \mapsto A$  di classe  $C^1$  a tratti

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

In particolare, se  $\gamma$  è un cammino chiuso,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

**Definizione 1.16.**  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $z_0 \in A$

Se  $f$  è olomorfa su  $A \setminus \{z_0\}$  allora si dice che  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$ .

**Teorema 1.2.15** (Sviluppo di Laurent). Sia  $f$  olomorfa su  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

dove  $B_r(z_0)$  è la palla centrata in  $z_0$  di raggio  $r$ ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

con  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$  dove  $0 < \rho < r$

**Definizione 1.17** (Residuo). Sia  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f$  olomorfa su  $D \setminus \{z_0\}$  si definisce residuo di  $f$  in  $z_0$  il termine di grado  $-1$  nello sviluppo di Laurant di  $f$  in  $z_0$ .

**Teorema 1.2.16** (Teorema dei residui). Sia  $D$  un dominio limitato con frontiera  $C^1$  a tratti e  $\{z_1, \dots, z_N\} \in D$

Se  $f$  è olomorfa su  $\overline{D} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$  Allora

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N Res[f, z_i].$$

*Dimostrazione.* Siano  $r_1, \dots, r_N > 0$  tali che  $\overline{B_{r_i}(z_i)} \subseteq D$  e  $\overline{B_{r_i}(z_i)} \cap \overline{B_{r_j}(z_j)} = \emptyset$  per ogni  $i \neq j$

$$\tilde{D} := \overline{D} \setminus \cup B_{r_i}(z_i).$$

$f$  risulta, quindi, essere olomorfa su  $\tilde{D}$ . Allora

$$\int_{\partial \tilde{D}} f(z)dz = 0.$$

Dato che

$$\partial \tilde{D} = \partial D \cup (\cup_{i=1}^n \gamma_i),$$

dove  $\gamma_i$  è la circonferenza

$$\gamma_i(t) = z_i + r_i e^{-it},$$

$t \in [0, 2\pi]$ .

$$0 = \int_{\partial \tilde{D}} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz - 2\pi i \sum_{i=1}^N Res[f, z_i].$$

□

**Definizione 1.18.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva chiusa di classe  $C^1$  a tratti.

Dato  $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ , si dice indice di  $\gamma$  rispetto a  $w$

$$Ind_{\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}.$$

*Osservazione 4.* L'indice di una curva  $\gamma$  intorno a  $w$  indica quante volte la curva gira intorno a  $w$ .

Un'importante conseguenza del teorema dei residui è il seguente teorema.

**Definizione 1.19.** Una funzione olomorfa con un numero finito di poli si chiama meromorfa.

**Teorema 1.2.17** (Principio dell'argomento). *Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $D \subset \Omega$  aperto limitato con  $\bar{D} \subset \Omega$  e con bordo  $\partial D$   $C^1$  a tratti.*

*Sia  $f$  una funzione meromorfa su  $\bar{D}$  senza zeri o poli su  $\partial D$ , allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

*deve  $Z$  indica la somma delle molteplicità degli zeri di  $f$  in  $D$  e  $P$  indica la somma degli ordini dei poli di  $f$  in  $D$ .*

*Dimostrazione.* Per il teorema dei residui, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_i} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_i\right),$$

con  $z_i$  poli di  $\frac{f'(z)}{f(z)}$ .

Si osserva che i poli di  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  sono gli zeri e i poli di  $f$ .

Se ne calcolino quindi i residui.

Se  $z_0$  è uno zero di  $f$  con molteplicità  $n$ , si dimostra che

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z)$$

con  $h(z)$  olomorfa in un intorno di  $z_0$  e  $h(z_0) \neq 0$ .

Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - z_0)^{n-1} h(z) + (z - z_0)^n h'(z)}{(z - z_0)^n h(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Allora

$$n = \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right).$$

Analogamente, se  $z_p$  è un polo di  $f$  di ordine  $n$ , si ha

$$-n = \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_p\right).$$

□

Per ulteriori approfondimenti sull'argomento si rimanda a [3].

## 1.3 Trasformazioni di Möbius

In quest'ultima parte verranno presentate le trasformazioni conformi, prestando particolare attenzione a quelle di Möbius.

**Definizione 1.20** (trasformazione conforme).  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  
 $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$F$  si dice conforme se, per ogni  $z \in \Omega$ , preserva l'angolo tra qualunque coppia di curve che passano per il punto  $z$ .

**Definizione 1.21.** Si dice che  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mantiene l'orientamento se  $\det F'(x) > 0$ , dove  $F'$  indica la matrice iacobiana di  $F$ .

**Teorema 1.3.1.**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$  olomorfa e  $f' \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$   
 Allora  $f$  è conforme e mantiene l'orientamento.

*Dimostrazione.*  $f = u + iv$

Si scriva  $f'$  in coordinate polari:  $f' = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f' \sim \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Ma per le equazioni di Cauchy Riemann vale

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}.$$

e quindi esistono  $\rho$  e  $\theta$  che verificano

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ovvero  $f'(z)$  è la composizione di un'omotetia di fattore  $\rho$  e una rotazione di angolo  $\theta$ , che sono entrambe trasformazioni conformi.  $\square$

Sarà studiata ora un'importante classe di trasformazioni conformi.

**Definizione 1.22.** Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  con  $ad \neq bc$

L'applicazione  $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mapsto \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  data da

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

è una trasformazione di Möbius. Ovviamente è ben definita perché  $c$  e  $d$  non possono essere entrambi nulli.

Inversioni ( $f(z) = \frac{1}{z}$ ), traslazioni ( $f(z) = z + b$ ) e omotetie ( $f(z) = az$ ) sono dette trasformazioni di Möbius elementari.

Ogni trasformazione di Möbius è la composizione di un numero finito di trasformazioni elementari.

Le trasformazioni di Möbius non preservano lunghezze o aree, tuttavia, si dimostra che preservano il birapporto (si rimanda a [2]), che ora si va a definire.

**Definizione 1.23.** Siano  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  si definisce birapporto

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}{\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}}.$$

Tramite il birapporto è possibile fornire una caratterizzazione di rette e circonferenze.

Presi tre punti allineati  $z_1, z_2, z_3$ , la retta passante per  $z_1, z_2, z_3$  risulta essere il luogo di punti  $\{z; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = 0\}$ .

Presi tre punti non allineati  $z_1, z_2, z_3$ , la circonferenza passante per i tre punti è  $\{z; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = 0\}$ .

Per mostrare quanto appena affermato, si scriva  $\frac{(z_3 - z_1)}{(z_3 - z_2)}$  in coordinate polari:

$$\frac{(z_3 - z_1)}{(z_3 - z_2)} = re^{i\theta}, \text{ dove } r = \left| \frac{(z_3 - z_1)}{(z_3 - z_2)} \right| \text{ e } \theta \text{ l'angolo compreso tra } z_3 \vec{z}_1 \text{ e } z_3 \vec{z}_2.$$

Si studi l'insieme dei punti  $z$  tali che  $\text{Im}\{z, z_1, z_2, z_3\} = 0$

Sia  $\phi$  l'angolo compreso tra  $z \vec{z}_1$  e  $z \vec{z}_2$ , allora  $\text{Im}\{z, z_1, z_2, z_3\} = 0$  se e solo se  $\theta \equiv \phi \text{ modulo } \pi$  (siano  $u, v \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\frac{u}{v}) = 0$  se e solo se

$\arg\left(\frac{u}{v}\right) \equiv 0 \text{ modulo } \pi$  se e solo se  $u$  e  $v$  sono  $\mathbb{R}$ -linearmente dipendenti).

Quindi chiaramente l'insieme di tali  $z$ , quando  $z_1, z_2, z_3$  sono allineati, costituisce la retta passante per questi punti.

Se, invece,  $z_1, z_2, z_3$  non sono allineati, per le ben note proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza, gli unici punti per cui vale  $\theta \equiv \phi \text{ modulo } \pi$  sono i punti sulla circonferenza passante per  $z_1, z_2, z_3$ .

**Proposizione 1.3.2.** *L'immagine tramite una trasformazione di Möbius di una retta o di una circonferenza è una retta o una circonferenza.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma = \{z; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = 0\}$  una retta o una circonferenza, applicando una trasformazione di Möbius  $f$  a  $\Sigma$ , si ottiene una retta o una circonferenza perché  $f$  preserva il birapporto e dunque se  $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = 0$  allora  $\text{Im}(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = 0$ .

□





## Capitolo 2

# Alcune considerazioni sulla formula di Schwarz-Christoffel per il disco unitario

### 2.1 Formula di Schwarz-Christoffel per il disco unitario

Cominciamo con enunciare due importanti teoremi, utili a presentare la trasformazione di Schwarz-Christoffel. Per le dimostrazioni e ulteriori dettagli a riguardo si rimanda a [1].

**Definizione 2.1** (Insieme semplicemente connesso). Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa  $\gamma$  con sostegno contenuto in  $\Omega$  è omotopa ad un cammino costante, ovvero se può essere deformata con continuità ad un singolo punto senza uscire da  $\Omega$ .

**Teorema 2.1.1** (Teorema della mappa di Riemann). *Ogni insieme aperto  $\Omega$  semplicemente connesso  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  è biolomorfo al disco unitario  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .*

Inoltre, Caratheodory dimostrò che, imponendo delle condizioni di regolarità al bordo dell'aperto  $\Omega$ , è possibile estendere il biolomorfismo tra il

disco unitario e  $\Omega$ , esistente per il teorema della mappa di Riemann, ad un omeomorfismo tra le chiusure.

Al teorema premettiamo la definizione di curva di Jordan.

**Definizione 2.2.** Una curva di Jordan in  $\mathbb{C}$  è una curva semplice chiusa  $\gamma \subset \mathbb{C}$  omeomorfa alla circonferenza unitaria.

**Teorema 2.1.2.** Siano  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto limitato semplicemente connesso e  $D$  il disco unitario.

Un biolomorfismo  $f : \Omega \rightarrow D$  si estende a un omeomorfismo  $\tilde{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  se e solo se  $\partial\Omega$  è una curva di Jordan.

In generale, trovare una formula per una mappa di Riemann, ovvero una funzione che trasforma una regione semplicemente connessa data nel disco unitario è molto difficile. Nel caso dei poligoni, tuttavia, si riesce a scrivere una formula esplicita, che risolve tale problema di mappatura.

**Definizione 2.3.** Sia  $D$  il disco unitario e  $a \in \partial D$ .

Si ponga

$$S_a = \{ta \mid t \geq 0\},$$

$$L_a = \{ta \mid t \geq 1\}.$$

Siano  $a_1, \dots, a_n \in \partial D$  distinti a due a due e siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

Per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si fissi una determinazione del logaritmo

$$l_{a_i} : \mathbb{C} \setminus S_{a_i} \rightarrow \mathbb{C}$$

ossia una funzione olomorfa tale che

$$e^{l_{a_i}(z)} = z.$$

Per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Siano date, ora, le funzioni

$$\mathbb{C} \setminus L_{a_i} \rightarrow \mathbb{C}$$

così definite

$$z \rightarrow (z - a_i)^{\alpha_i} := e^{\alpha_i l_{a_i}(z - a_i)}.$$

## 2.1. FORMULA DI SCHWARZ-CHRISTOFFEL PER IL DISCO UNITARIO 19

**Proposizione 2.1.3.** *Valgono le relazioni*

$$\begin{aligned}(z-a)^\alpha(z-a)^\beta &= (z-a)^{\alpha+\beta} \\ (z-a)^0 &= 1 \\ \frac{d}{dz}((z-a)^\alpha) &= \alpha(z-a)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Mostriamo la prima uguaglianza

$$(z-a)^\alpha(z-a)^\beta = e^{\alpha l((z-a))} e^{\beta l((z-a))} = e^{(\alpha+\beta)l((z-a))} = (z-a)^{\alpha+\beta}.$$

Mostriamo, ora, la seconda uguaglianza

$$(z-a)^0 = e^{0l((z-a))} = e^0 = 1.$$

Mostriamo, infine, la terza uguaglianza

$$\frac{d}{dz}((z-a)^\alpha) = \frac{d}{dz}(e^{\alpha l((z-a))}) = e^{\alpha l((z-a))} \frac{\alpha}{(z-a)} = \alpha(z-a)^{\alpha-1}.$$

□

**Definizione 2.4.**

$$0^\alpha = 0.$$

**Proposizione 2.1.4.**

$$|(z-a)^\alpha| = |(z-a)|^\alpha.$$

*Dimostrazione.*

$$|(z-a)^\alpha| = |e^{\alpha l((z-a))}| = e^{\alpha \operatorname{Re}(l((z-a)))} = e^{\alpha \log(|z-a|)} = |(z-a)|^\alpha.$$

□

**Proposizione 2.1.5.** *Se  $\alpha \geq 0$ , la funzione*

$$(\mathbb{C} \setminus S) \cup \{0\} \ni z \longrightarrow (z-a)^\alpha$$

*è continua.*

*Dimostrazione.* Essendo  $|(z - a)|^\alpha$  continua, si conclude per 2.1.4.

□

**Proposizione 2.1.6.**

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z)^\alpha = 0.$$

*Dimostrazione.* Per la continuità

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^\alpha = 0^\alpha = 0.$$

□

**Proposizione 2.1.7.** Siano  $a_i \in \partial D$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

La funzione definita sul dominio

$$f : \mathbb{C} \setminus \cup_{i=1}^n L_{a_i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mediante la formula

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{-\lambda_i} \quad (2.1)$$

è olomorfa e ammette su tale dominio una primitiva olomorfa.

*Dimostrazione.* La proposizione segue dal fatto che il dominio  $\mathbb{C} \setminus L_{a_i}$  è stellato rispetto all'origine.

□

Sia dato un poligono  $P$  nel piano complesso  $\mathbb{C}$ , con  $n$  vertici, che indichiamo con  $w_1, \dots, w_n$ .  $\pi\lambda_i$  e  $\pi\alpha_i$  misurino rispettivamente l'ampiezza dell'angolo esterno al vertice  $w_i$  e l'ampiezza dell'angolo interno a  $w_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Chiaramente  $0 < \alpha_i < 2$  e  $\alpha_i + \lambda_i = 1$ . Si supponga poi, che  $-1 < \lambda_i < 1$  e  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2$ .

È possibile dimostrare che esistono  $A \neq 0$  e  $B$ , due costanti complesse e  $a_1, \dots, a_n \in \partial D$ , chiamati prevertici, per cui la funzione

$$A \int_0^z \frac{dt}{(t - a_1)^{\lambda_1} \dots (t - a_n)^{\lambda_n}} + B \quad (2.2)$$

manda il disco unitario  $\bar{D}$  nel poligono  $P$ , con  $F(a_i) = w_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

La funzione appena descritta si chiama formula di Schwarz-Christoffel per il disco unitario.

## 2.2 Continuità sul bordo del disco unitario

L'intento di questa sezione è quello di mostrare che tutte le primitive di  $f(z)$  su  $\mathbb{C} \setminus \cup_{i=1}^n L_{a_i}$  si estendono con continuità nei punti  $a_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

**Proposizione 2.2.1.** *Sia*

$$f(z) = (z - z_0)^\alpha g(z),$$

con  $g(z)$  olomorfa in  $z_0$

Allora  $f(z)$  ammette una primitiva della forma

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha+1} G(z),$$

con  $G(z)$  olomorfa in  $z_0$ .

*Dimostrazione.* Si consideri lo sviluppo di  $g(z)$  in serie di potenze in  $z_0$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Abbiamo allora

$$f(z) = (z - z_0)^\alpha \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n+\alpha}.$$

Integrando termine a termine, si ottiene una primitiva di  $f(z)$  nella forma

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n + \alpha + 1} (z - z_0)^{n+\alpha+1} = (z - z_0)^{\alpha+1} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n + \alpha + 1} (z - z_0)^n.$$

La funzione

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n + \alpha + 1} (z - z_0)^n$$

è chiaramente olomorfa in  $z_0$  e verifica

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha+1} G(z)$$

come richiesto.

□

**Teorema 2.2.2.** *Siano  $a_1, \dots, a_n \in \partial D$  distinti a due a due, siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  e sia*

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\alpha_i}.$$

*Se  $\alpha_i > -1$  allora ogni primitiva di  $f(z)$  su  $\mathbb{C} \setminus \cup_{i=1}^n L_{a_i}$  si estende con continuità nei punti  $a_1, \dots, a_n$ .*

*Dimostrazione.* È possibile scrivere

$$f(z) = (z - a_j)^{\alpha_j} g_j(z)$$

con

$$g_j(z) = \prod_{h \neq j} (z - a_h)^{\alpha_h}$$

olomorfa in un intorno di  $a_h$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

Per la proposizione 2.2.1, la funzione  $f$  ammette in un intorno  $a_j$  una primitiva della forma

$$F_j(z) = (z - a_j)^{\alpha_j+1} G_j(z),$$

con  $G_j$  olomorfa in un intorno di  $a_j$ .

Si conclude che  $F$  è continua in  $a_j$ , perché prodotto di due funzioni continue per 2.1.5. □

Dato che  $-1 < \lambda_i < 1$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , per le considerazioni fatte fino ad ora, 2.1 ammette primitiva, che si estende con continuità nei punti  $a_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

## 2.3 Dal bordo del disco unitario alla poligonale

Si mostrerà, ora, che per ogni  $i = 1, \dots, n - 1$ , la formula di Schwarz-Christoffel 2.2 mappa gli intervalli  $(a_i, a_{i+1})$  in porzioni rettilinee.

Innanzitutto, si ricaveranno alcuni risultati utili a questo scopo.

**Proposizione 2.3.1.** *Siano  $z, w \in \mathbb{C}$  t.c.  $|z| = |w| \neq 0$ , allora*

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z}{z+w} \right) = \frac{1}{2}.$$

*Dimostrazione.* Utilizzando delle note proprietà dei numeri complessi, questa proposizione si dimostra tramite semplici passaggi algebrici:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z}{z+w} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z+w} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}+\bar{w}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{|z|^2 + z\bar{w} + |z|^2 + \bar{z}w}{|z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Si utilizzano, adesso, dei risultati a cui si è giunti nell'ultima sezione del capitolo precedente per mostrare anche geometricamente perché vale quanto appena visto.

Fissato  $w$  in  $\mathbb{C}$ , si considerino la retta passante per l'origine e  $w$ , e la circonferenza di centro l'origine passante per  $w$ .

Si vogliono studiare le immagini di tale retta e di tale circonferenza tramite la seguente trasformazione di Möbius

$$z \longrightarrow \frac{z}{z+w}.$$

È noto che l'immagine della retta data deve essere una retta o una circonferenza; si prendano tre punti su di essa  $w, -w$  e  $0$  e se ne trovi l'immagine.

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow \frac{1}{2} \\ -w &\longrightarrow \infty \\ 0 &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

È chiaro, quindi, che la retta viene mandata nell'asse  $x$ .

Anche l'immagine della circonferenza deve essere una retta o una circonferenza.

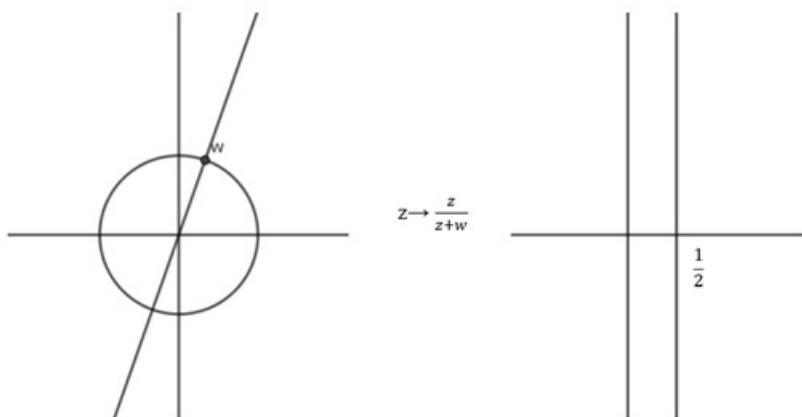
Si considerino i punti  $w$  e  $-w$  sul cerchio e calcolandone l'immagine, si ottiene

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow \frac{1}{2} \\ -w &\longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Quindi, si trova che la circonferenza viene mandata in una retta passante per  $\frac{1}{2}$ .

Dal momento che le trasformazioni di Möbius sono conformi, l'angolo tra la retta e la circonferenza, che in questo caso è di 90 gradi, deve essere preservato dalla trasformazione presa in esame.

Questo argomento porta alla conclusione che l'immagine della circonferenza non può che essere la retta passante per  $\frac{1}{2}$  e perpendicolare all'asse  $x$ .



□

**Lemma 2.3.2.** *Sia data una curva  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$*

*Allora*

$$k_\gamma = \frac{\text{Im}(\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

*Dimostrazione.*

$$\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t) = (\overline{\dot{x} + i\dot{y}})(\ddot{x} + i\ddot{y}) = (\dot{x} - i\dot{y})(\ddot{x} + i\ddot{y}) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + i(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})$$

Ma  $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \det \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{pmatrix}$

□



Conseguenza immediata di tale lemma è la seguente proposizione.

**Proposizione 2.3.3.**  $k_\gamma \equiv 0$  se e solo se  $Im(\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t)) \equiv 0$ .

**Teorema 2.3.4.** Siano  $a_1, \dots, a_n \in \partial D$ , siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  e sia

$$F(z) : \mathbb{C} \setminus \cup_{i=1}^n L_{a_i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

una primitiva di

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\alpha_i}.$$

Se  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2$  allora  $F(z)$  trasforma ogni componente connessa di  $\partial D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  in una porzione di retta.

*Dimostrazione.* Per quanto osservato precedentemente, basta dimostrare che Se  $\gamma(t) = F(e^{it})$  allora  $Im(\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t)) \equiv 0$  ovvero  $k_\gamma \equiv 0$ .

Per prima cosa, si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di  $\gamma(t)$

$$\dot{\gamma}(t) = iF'(e^{it})e^{it}$$

$$\ddot{\gamma}(t) = i^2F''(e^{it})e^{2it} + i^2F'(e^{it})e^{it}.$$

Si denoti  $e^{it} = z$ .

Si scriva il coniugato di  $\dot{\gamma}(t)$

$$\overline{\dot{\gamma}(t)} = -i\overline{F'(z)}z.$$

Dunque risulta

$$\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t) = -i\overline{F'(z)}z[-F''(z)z^2 - F'(z)z].$$

Moltiplicando  $-\overline{F'(z)}z$  per  $-F''(z)z^2$ , si ottiene  $\overline{F'(z)}F''(z)z$ .

Moltiplicando  $-\overline{F'(z)}z$  per  $F'(z)z$ , si ottiene  $|F'(z)|^2$ .

Ne consegue che

$$\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t) = i(\overline{F'(z)}F''(z)z + |F'(z)|^2).$$

Si osserva, ora, che

$$Im(\overline{\dot{\gamma}(t)}\ddot{\gamma}(t)) = Re(\overline{F'(z)}F''(z)z + |F'(z)|^2).$$

Prima di procedere, si calcolino esplicitamente la derivata prima e la derivata seconda di  $F$ .

$$F'(z) = \frac{1}{(z-a_1)^{\lambda_1} \cdots (z-a_n)^{\lambda_n}} = \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{-\lambda_k}$$

$$F''(z) = \sum_{k=1}^n -\lambda_k (z-a_k)^{-\lambda_k-1} \prod_{h \neq k} (z-a_h)^{-\lambda_h} = \sum_{k=1}^n -\lambda_k (z-a_k)^{-1} F'(z) = -F'(z) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{z-a_k}.$$

Si torni al calcolo precedente e si sostituisca  $F''(z)$  con il risultato trovato

$$\operatorname{Re} \left( \overline{-F'(z)} F'(z) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{z-a_k} z + |F'(z)|^2 \right) = |F'(z)|^2 \operatorname{Re} \left( - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k z}{z-a_k} + 1 \right).$$

Ma

$$\operatorname{Re} \left( - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k z}{z-a_k} + 1 \right) = - \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z-a_k} \right) + 1.$$

Gli  $a_k$  appartengono alla circonferenza unitaria, quindi  $|a_k| = |z| = 1$  e per il lemma appena dimostrato,

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z}{z-a_k} \right) = \frac{1}{2}.$$

Inoltre

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 2.$$

Sostituendo, si conclude

$$\operatorname{Im}(\overline{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t)) = -\frac{1}{2} 2 + 1 = 0.$$

□

## 2.4 Dal disco unitario alla parte interna del poligono

Ci si concentrerà, infine, sul comportamento della mappa  $F$  tra il disco unitario e la parte interna del poligono.

## 2.4. DAL DISCO UNITARIO ALLA PARTE INTERNA DEL POLIGONO 27

**Teorema 2.4.1.** *Se la primitiva  $F$  della funzione  $f$  definita in 2.1 trasforma il bordo del disco in una poligonale semplice  $\partial P$ , allora  $F$  manda il disco unitario biolomorficamente nella parte interna del poligono.*

*Dimostrazione.* Si consideri la funzione  $F$  che manda il disco unitario in un poligono  $P$  che soddisfa le ipotesi del teorema e si fissi un punto  $w$  nella parte interna di  $P$ .

Dato che la poligonale gira intorno a  $w$  una sola volta, l'indice di  $\partial P$  rispetto al punto  $w$  è uguale a 1.

Quindi si ha

$$1 = \text{Ind}_w(\partial^+ P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial^+ P)} \frac{dj}{(j-w)} =$$

Compiendo un cambio di variabili

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial^+ P)} \frac{F'(z)}{F(z)-w} dz.$$

Si osserva che  $\frac{F'(z)}{F(z)-w}$  è la derivata logaritmica di  $F(z) - w$

Allora vale il principio dell'argomento 1.2.17

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial^+ P)} \frac{F'(z)}{F(z)-w} dz = Z - P,$$

dove  $Z$  indica la somma delle molteplicità degli zeri di  $F(z) - w$  e  $P$  indica la somma degli ordini dei poli di  $F(z) - w$ .

Ma dal momento che  $F(z) - w$  non ha poli, ne consegue che  $F(z) - w$  ha un unico zero di molteplicità 1.

Dunque esiste un unico punto  $z \in D$  tale che  $F(z) = w$ .

Si conclude, quindi, che  $F(z)$  è un biolomorfismo.

□



# Bibliografia

- [1] G. Sansone and J. Gerretsen. *Lectures on the theory of functions of a complex variable*. Wolters-Noordhoff Publishing, 1969.
- [2] John R. Silvester, *Geometry ancient and modern*. Oxford University Press, 2001.
- [3] Gamelin W. Theodore, *Complex Analysis*. Springer, 2001.