ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

LA NOZIONE DI MORFISMO ÉTALE

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Marco Trozzo

Terza Sessione
Anno Accademico 2009-2010

Avrei redatto tutto ciò con ordine matematico,
se non avessi giudicato che la prolissità richiesta per farlo
avrebbe impedito di intendere debitamente tutte queste cose,
che devono essere viste con un solo sguardo, come in un quadro.

B. Spinoza, 'Principi della filosofia di Cartesio'.

Introduzione

In geometria algebrica, la nozione di morfismo étale nasce storicamente per dei motivi ben precisi. Per una varietà affine X su un campo algebricamente chiuso, infatti, la topologia comunemente adottata, cioè quella di Zariski, risulta per alcuni scopi troppo grossolana. Ad esempio, come viene illustrato nel primo capitolo di questa tesi, il teorema della funzione implicita, valido nel caso di varietà differenziabili, non risulta vero se si prendono in analisi varietà algebriche affini con la topologia di Zariski. Nel caso di varietà differenziabili, infatti, se una mappa differenziabile $\phi : \; M \to N$ induce sugli spazi tangenti degli isomorfismi, risulta essere un isomorfismo locale.
Analogamente, la nozione di rivestimento, cruciale in topologia algebrica per la sua connessione con il gruppo fondamentale, non ha un analogo sensato per la topologia di Zariski. Ad esempio, se C è una curva ellittica definita su un campo K, il morfismo

$$\begin{array}{rcccc} [m] & : & C & \to & C \\ & & x & \to & mx \end{array}$$

di moltiplicazione per m, con $m|charK$, che dovrebbe essere considerato un morfismo di rivestimento, non è "banale" rispetto alla topologia di Zariski.
Per questi motivi si introduce una classe particolare di morfismi, detti *morfismi étale*, che, come vedremo, nel caso di varietà non singolari risultano essere proprio quei morfismi che inducono isomorfismi sugli spazi tangenti.
Il problema che si presenta nel lavorare con la topologia di Zariski è che i suoi aperti sono "troppo grandi": ad esempio, nel caso della retta affine, la topologia di Zariski coincide con la topologia cofinita.

L'inadeguatezza di tale topologia si può vedere anche in altri modi: si dimostra, ad esempio, che se uno spazio X è irriducibile rispetto alla topologia di Zariski, allora $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni fascio costante $\mathcal{F}$ e per ogni $r > 0$.
Negli anni Quaranta del secolo scorso A. Weil notò che alcuni risultati da lui ottenuti riguardo al numero dei punti di una varietà su campi finiti potevano essere spiegati dall'esistenza di una teoria coomologica che permettesse di ottenere gruppi di coomologia con la struttura di spazi vettoriali su un campo di caratteristica zero. Tale teoria avrebbe permesso la generalizzazione di tali risultati a una qualsiasi varietà proiettiva non singolare.
Nel 1958 Grothendieck introdusse quella che chiamò *topologia étale* di uno schema e una teoria coomologica, la *coomologia étale*, che si basava su tale topologia venne studiata negli anni seguenti da lui, M. Artin e J-L. Verdier.
La dimostrazione delle congetture di Weil venne ultimata nei primi anni Settanta da P. Deligne, mediante un impiego sistematico della coomologia étale.
Nella mia tesi approfondirò la nozione di morfismo étale, sia dal punto di vista geometrico che da quello algebrico; nel primo capitolo, come già detto, accennerò al teorema della funzione inversa, osservando come esso non sia vero nel caso di varietà affini.
Nel secondo capitolo, dopo aver dato qualche nozione basilare di geometria algebrica, mi concentrerò sui morfismi di schemi e sulle loro proprietà; essendo i morfismi di schemi affini strettamente collegati agli omomorfismi di anelli (tramite un funtore controvariante tra la categoria degli schemi affini e quella degli anelli), cercherò di analizzare a quali proprietà sugli anelli esse corrispondono. Nella prima parte del secondo capitolo introdurrò le nozioni di morfismo *piatto* e quella di morfismo *non ramificato*, per poi arrivare ad introdurre i morfismi *étale*, definiti proprio come quei morfismi che sono piatti e non ramificati. Nella seconda parte mi limiterò a considerare i morfismi di varietà non singolari e dimostrerò che, in questo caso, la classe dei morfismi étale coincide esattamente con quei morfismi che inducono isomorfismi sugli spazi tangenti.
Nel terzo capitolo approfondirò la nozione di morfismo étale da un punto di

vista algebrico: come vedremo essi sono in qualche modo l'analogo in geometria algebrica delle estensioni separabili in teoria dei campi e delle estensioni non ramificate in teoria dei numeri.
Nell'ultimo capitolo introdurrò brevemente la topologia étale, prima per le varietà non singolari, poi, più in generale, per gli schemi, enunciando il teorema della funzione inversa: ogni morfismo étale di varietà non singolari risulta localmente, rispetto alla topologia étale, un isomorfismo.

Indice

Introduzione **i**

1 Invertibilità locale in geometria algebrica **1**

1.1 Varietà affini 1

1.2 Il teorema della funzione implicita 3

2 Morfismi **5**

2.1 Morfismi di varietà 5

2.2 Morfismi di schemi 7

2.3 Morfismi piatti 9

2.4 Morfismi non ramificati 11

2.5 Morfismi étale 15

2.5.1 Morfismi étale tra varietà 20

3 Un po' di algebra **29**

3.1 Algebre separabili 29

3.1.1 Algebre separabili e morfismi étale 32

3.2 Ramificazione 36

3.2.1 Domini di Dedekind 37

3.3 Completamento 40

4 Topologia étale **45**

Bibliografia **49**

Capitolo 1

Invertibilità locale in geometria algebrica

1.1 Varietà affini

Sia K un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0 e $\mathbb{A}^n(K)$ lo spazio affine n-dimensionale su K. Allora ad ogni sottoinsieme $T \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ possiamo associare il sottoinsieme di $\mathbb{A}^n(K)$

$$V(T) = \{P \in \mathbb{A}^n | f(P) = 0 \;\; \forall f \in T\}.$$

Si vede subito che, se $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato da T, allora $V(\mathfrak{a}) = V(T)$.

Definizione 1.1. Un sottoinsieme X di $\mathbb{A}^n(K)$ si dice *insieme algebrico* se esiste un sottoinsieme $T \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $Y = V(T)$.
Si dice *ideale di X in* $K[x_1, \ldots, x_n]$ l'ideale

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] | f(P) = 0 \;\; \forall \; P \in X\}.$$

Quindi un sottoinsieme algebrico è definito come luogo degli zeri di un insieme di polinomi. Si verifica facilmente che l'unione di due insiemi algebrici è ancora un insieme algebrico, come anche l'intersezione di di una famiglia di insiemi algebrici.

Definizione 1.2. La *topologia di Zariski* su $\mathbb{A}^n(K)$ è definita prendendo come aperti i complementari degli insiemi algebrici.

La topologia appena definita è diversa dalla topologia euclidea su $\mathbb{C}^n$. Naturalmente gli insiemi algebrici di $\mathbb{C}^n$ sono chiusi nella topologia euclidea, poiché i polinomi sono funzioni continue. Ma la topologia di Zariski è meno fine: una palla aperta, infatti, non è un aperto nella topologia di Zariski, poiché il suo complementare non è un insieme algebrico.

Esempio 1.1. Se prendiamo il caso $n = 1$, poiché $K[x]$ è un PID, ogni insieme algebrico è il luogo degli zeri di un polinomio, cioè un insieme finito di punti. La topologia di Zariski coincide, dunque, con la *topologia cofinita* su K, cioè gli aperti sono i complementari di insiemi finiti.

Definizione 1.3. Dato uno spazio topologico Y e un suo sottospazio X non vuoto, diciamo che X è *irriducibile* se non può essere decomposto come somma di due suoi sottoinsiemi propri chiusi.

A questo punto possiamo introdurre il concetto di *varietà algebrica*, che rappresenta l'oggetto base di studio per la geometria algebrica.

Definizione 1.4. Una *varietà algebrica affine*, o semplicemente *varietà affine*, è un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso e irriducibile (con la topologia indotta). Un sottoinsieme aperto di una varietà affine è una *varietà quasi-affine*.

Abbiamo visto prima che esiste una corrispondenza tra insiemi algebrici di $\mathbb{A}^n(K)$ e ideali di $K[x_1, \ldots, x_n]$; possiamo, infatti associare ad ogni insieme algebrico V l'ideale I(V) dei polinomi che si annullano in tutti i punti di V, e ad ogni ideale $\mathfrak{a}$ l'insieme $V(\mathfrak{a})$ dei punti in cui tutti i polinomi di $\mathfrak{a}$ si annullano.

Osservazione 1. L'ideale I(V) coincide con il proprio radicale definito come $\sqrt{I(V)} = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] | f^r \in I(V) \text{ } per \text{ } qualche \text{ } r > 0\}$. Infatti $f^r \in I(V)$ significa $f^r(P) = 0$ per ogni $P \in V$ quindi $f(P) = 0$, cioè $f \in I(V)$.

In particolare, studiando meglio questa corrispondenza, si dimostra che la corrispondenza tra ideali radicali di $K[x_1, \dots, x_n]$ e sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^n(K)$ è biunivoca e un insieme algebrico X è una varietà se e solo se l'ideale I(X) è un ideale primo.
Su una varietà affine X, inoltre, possiamo considerare la topologia indotta dalla topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n$: in questo modo i chiusi di X sono esattamente gli insiemi $V(\mathfrak{a})$, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale che contiene $I(X)$.

1.2 Il teorema della funzione implicita

In generale, il concetto di varietà affine rappresenta l'equivalente algebrico di ciò che in geometria differenziale sono le varietà differenziali e in geometria analitica le varietà analitiche. Così alcune tecniche e risultati riguardanti le varietà differenziali ed analitiche possono essere trasportati, con alcune accortezze e limitazioni, alle varietà affini. Per quanto riguarda un teorema fondamentale nel caso analitico e differenziale, cioè il teorema della funzione implicita, vediamo ora che esso non vale nel caso algebrico.

Teorema 1.2.1 (della funzione implicita)**.** *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^{n+k}$; dato un punto P in $\mathbb{R}^{n+k}$ per indicare le sue coordinate usiamo la notazione $P = (x, y)$, dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_k)$. Sia $F : A \to \mathbb{R}^k$ una funzione liscia, le cui componenti chiamiamo $f_1, \dots, f_k$. Chiamiamo $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k} | f(x, y) = 0\}$. Sia, poi, $(x_0, y_0) \in Z$ tale che*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{1 \le i,j \le k} (x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono un intorno aperto U di x_0 in $\mathbb{R}^n$, un intorno aperto V di y_0 in $\mathbb{R}^k$ ed una funzione liscia $y : U \to V$ tale che

$$\{(x, y) \in U \times V | F(x, y) = 0\} = \{(x, y(x)) | x \in U\}.$$

Osservazione 2. Osserviamo che il teorema vale, senza alcuna modifica, anche in ambito olomorfo, cioè passando dal campo $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ e sostituendo la nozione di funzione liscia con quella di funzione olomorfa.

Ora vediamo subito, con un esempio, che questo teorema nel caso algebrico non funziona. Prendiamo, ad esempio, il polinomio

$$f(x, y) = y - x^2$$

e consideriamo $Z = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | f(x, y) = 0\}$. Si vede subito che questo è un insieme algebrico irriducibile, quindi una varietà affine. Scegliamo il punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$; in questo caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

ma non possiamo trovare due intorni U e V di x_0 e y_0 rispettivamente che soddisfino il teorema; infatti, per come sono definiti gli aperti della topologia di Zariski, presi due qualsiasi intorni aperti U e V di x_0 e y_0 rispettivamente, per tutti i valori di y in V, tranne un numero finito, si ha che sia $(-\sqrt{y}, y)$ che $(+\sqrt{y}, y)$ appartengono a $Z \cap (U \times V)$.

Il problema, dunque, sta nel fatto che gli aperti della topologia di Zariski sono "troppo grandi" per garantire una proprietà locale come quella di essere localmente il grafico di una funzione. Nell'ambito della geometria algebrica possiamo, quindi, individuare una classe non banale di morfismi, che corrispondono agli isomorfismi locali nel caso differenziale e analitico; è per questo motivo che nasce la nozione di morfismo étale.

Capitolo 2

Morfismi

2.1 Morfismi di varietà

Consideriamo ora un insieme algebrico X di $\mathbb{A}^n(K)$; ogni polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ può essere considerato come una funzione su $\mathbb{A}^n$ e possiamo, dunque, considerarne la restrizione al nostro sottoinsieme X.
Ci possiamo allora chiedere quando due polinomi $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ definiscono la stessa funzione su X: questo succede quando $f - g$ si annulla su tutti i punti di X, quindi quando $f - g \in I(X)$.

Definizione 2.1. Sia X un insieme algebrico di $\mathbb{A}^n$. Allora chiamiamo *anello delle coordinate* di X l'anello

$$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

Osservazione 3. Se X è una varietà affine, allora $K[X]$ è un dominio d'integrità ed una K-algebra finitamente generata. Viceversa, ogni K-algebra finitamente generata che è anche un dominio di integrità è l'anello di una qualche varietà affine.

Possiamo ora cominciare a discutere di morfismi: sia X una varietà quasi affine in $\mathbb{A}^n(K)$ e consideriamo le funzioni da X a K.

Definizione 2.2. Una funzione $f : X \to K$ è *regolare nel punto* $P \in X$ se esiste un intorno aperto U di P in X e dei polinomi $g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$, tali

che $f = g/h$ su U e $h(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$.
Diciamo che f è *regolare in* X se è regolare in ogni punto di Y.

Definizione 2.3. Sia X un insieme algebrico di $\mathbb{A}^n$. Per ogni aperto $U \subseteq X$ denotiamo $\mathcal{O}_X(U)$ l'anello delle funzioni regolari da U a K e per ogni aperto $V \subseteq U$ sia $\rho_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ la mappa di restrizione.
Se P è un punto di X, definiamo l'*anello locale di P su X*, denotato $\mathcal{O}_{P,X}$ o semplicemente $\mathcal{O}_P$, l'anello dei germi di funzioni regolari su X in un intorno di P:

$$\mathcal{O}_P := \varinjlim \mathcal{O}_P(U)$$

dove il limite è sull'insieme di aperti contenenti P rispetto alla relazione di inclusione.

Si vede che, così definito, $\mathcal{O}_X$ risulta essere un *fascio di anelli* ed $\mathcal{O}_{P,X}$ la sua *spiga* nel punto P. L'anello $\mathcal{O}_{P,X}$ è, in effetti, un anello locale: il suo ideale massimale $\mathfrak{m}_P$ è costituito da tutti i germi di funzioni regolari che si annullano in P. Il quoziente $K(P) = \mathcal{O}_{P,X}/\mathfrak{m}_P$ è un campo, detto il *campo residuo* di P.

Definizione 2.4. Se X è una varietà affine definiamo in questo modo il *campo delle funzioni di X*, denotato K(X): i suoi elementi, detti *funzioni razionali su X*, sono classi di equivalenza di coppie (U, f), dove U è un aperto non vuoto di X, f una funzione regolare su U e due coppie (U, f) e (V, g) sono equivalenti se $f = g$ su $U \cap V$.

Proposizione 2.1.1. *Sia X una varietà affine di* $\mathbb{A}^n$. *Allora l'anello delle coordinate* $K[X]$ *è isomorfo all'anello* $\mathcal{O}_X(X)$ *delle funzioni regolari su X. Inoltre il campo* $K(X)$ *delle funzioni razionali su X è isomorfo al campo dei quozienti di* $K[X]$.

Definizione 2.5. Se X e Y sono due varietà affini, un *morfismo* $\phi : X \to Y$ è una mappa continua tale che per ogni aperto $V \subseteq Y$ e per ogni funzione regolare $f : V \to K$, la funzione $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to K$ è regolare.

2.2 Morfismi di schemi

Abbiamo visto nel capitolo precedente che esiste una relazione tra insiemi algebrici di $\mathbb{A}^n(K)$ e ideali radicali di $K[x_1, \ldots, x_n]$, in cui le varietà affini corrispondono agli ideali primi. È per questo che si introduce il concetto di *spettro* di un anello.
Nel seguito, quando parleremo di anelli, intenderemo sempre anelli commutativi unitari noetheriani.
Se A è un anello si definisce *Spec A* come l'insieme dei suoi ideali primi. Possiamo, a questo punto, dotare *Spec A*, analogamente a quanto fatto con $\mathbb{A}^n$, di una topologia.

Definizione 2.6. La *topologia di Zariski* su *Spec A* è definita prendendo come chiusi gli insiemi della forma

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec\ A | \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$$

per qualche ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Anche in questo caso possiamo costruire, in modo analogo a quanto fatto prima con le varietà affini, un fascio di anelli $\mathcal{O}$ su *Spec A*. Lo facciamo in questo modo: per ogni aperto $U \subseteq Spec\ A$ definiamo $\mathcal{O}(U)$ l'insieme delle funzioni

$$s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

tali che $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p}$ che siano localmente un quoziente di elementi di A. Così definito $\mathcal{O}$ risulta essere un fascio di anelli.

Definizione 2.7. Se A è un anello, definiamo lo *spettro di A* come lo spazio localmente anellato (*Spec A*, $\mathcal{O}$).

Proposizione 2.2.1.

(i) Se A è un anello, allora (Spec A, $\mathcal{O}$) è uno spazio localmente anellato.

(ii) Se $\phi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, allora ϕ induce in modo naturale un morfismo di spazi localmente anellati

$$(f, f^*) : (Spec\ B, \mathcal{O}_{Spec\ B}) \to (Spec\ A, \mathcal{O}_{Spec\ A}).$$

(iii) Se A e B sono anelli, allora ogni morfismo di spazi localmente anellati da Spec B a Spec A è indotto da un omomorfismo di anelli $\phi : A \to B$.

Definizione 2.8. Uno *schema affine* è uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ che è isomorfo, come spazio localmente anellato, allo spettro di un anello.
Uno *schema* è uno spazio localmente anellato in cui ogni punto ha un intorno aperto U tale che lo spazio topologico U, con il fascio ristretto $\mathcal{O}_X|_U$, sia uno schema affine. Chiamiamo $\mathcal{O}$ il *fascio strutturale* di X e denotiamo $sp(X)$, detto *spazio sottostante a* X, lo spazio topologico X.
Un *morfismo di schemi* è un morfismo di spazi localmente anellati.
Un *isomorfismo* è un morfismo che ammette un inverso da entrambi i lati.

Esempio 2.1. Sia K un campo qualsiasi. Lo spettro di K, *Spec* K, è uno schema affine che, come spazio topologico, è costituito da un solo punto, che corrisponde all'unico ideale proprio (0) di K. Il suo fascio strutturale è identificato con il campo stesso: ciò corrisponde al fatto che le uniche funzioni definite su uno spazio che consiste in un solo punto sono le costanti.

Esempio 2.2. Se consideriamo l'anello $\mathbb{Z}$ abbiamo due tipi di punti: i punti corrispondenti agli ideali (p), con p primo, sono punti chiusi (poiché sono massimali), il cui campo residuo è $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; il punto che corrisponde all'ideale (0), detto *punto generico*, non è chiuso: il suo campo residuo è $\mathbb{Q}$ e la sua chiusura è tutto *Spec* $\mathbb{Z}$.

Esempio 2.3. Sia K un campo algebricamente chiuso. Vediamo ora come è fatto *Spec* $K[x_1, \ldots, x_n]$. I punti chiusi corrispondono agli ideali massimali, che sono tutti del tipo $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, con $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$: sono in corrispondenza biunivoca con i punti dello spazio affine $\mathbb{A}^n(K)$.
I punti non chiusi sono quelli che corrispondono agli ideali primi non massimali e sono quindi in corrispondenza biunivoca con le varietà irriducibili di $\mathbb{A}^n(K)$ che non sono punti. L'ideale (0), corrispondente alla varietà $\mathbb{A}^n(K)$, corrisponde al punto generico, denso. Il suo campo residuo è $K(x_1, \ldots, x_n)$.

Definizione 2.9. Un *sottoschema aperto* $(U, \mathcal{O}_U)$ di uno schema $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno schema tale che

- $sp(U)$ è un aperto di $sp(X)$;
- $\mathcal{O}_U \cong \mathcal{O}_X|_U$.

Un' *immersione aperta* è un morfismo di schemi $f : X \to Y$ che induce un isomorfismo di X con un sottoschema aperto di Y.

Definizione 2.10. Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi. Diciamo che f è *localmente di tipo finito* se esiste un ricoprimento di Y di sottoinsiemi aperti affini $V_i = Spec\ B_i$ tali che, per ogni i, $f^{-1}(V_i)$ può essere ricoperto con sottoinsiemi aperti affini $U_{ij} = Spec\ A_{ij}$ dove ogni A_{ij} è una B_i-algebra finitamente generata.
Diciamo che f è *di tipo finito* se inoltre ogni $f^{-1}(V_i)$ può essere ricoperto con un numero finito di U_{ij}.
Diciamo, inoltre, che il morfismo f è *quasi-finito* se è di tipo finito e per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è un insieme finito.
Infine f è un morfismo *finito* se esiste un ricoprimento di Y di sottoinsiemi aperti affini $V_i = Spec\ B_i$ tali che per ogni i $f^{-1}(V_i) = Spec\ A_i$ dove A_{ij} è una B_i-algebra finitamente generata come B_i-modulo.

Si verifica facilmente che, in particolare, un morfismo finito è anche quasi-finito. Per tornare al rapporto con gli omomorfismi di anelli, se $f : Spec\ B \to Spec\ A$ è indotto dall'omomorfismo $\phi : A \to B$, allora f è finito se B è integralmente dipendente da $\phi(A)$.

Nel seguito supporremo che tutti i morfismi presi in considerazione, dove non espressamente detto, siano localmente di tipo finito.

2.3 Morfismi piatti

Introduciamo in questa sezione la nozione di morfismo piatto di schemi; in termini intuitivi, se consideriamo un morfismo di schemi $f : X \to Y$ e

pensiamo alle fibre $f^{-1}(y)$ al variare di y in Y come una famiglia di schemi, i morfismi piatti corrispondono a una famiglia di schemi che varia “in modo continuo”.
Partiamo, per una definizione formale, dal definire la piattezza per gli omomorfismi di anelli. Nel seguito quando si parlerà di anelli si intenderanno sempre anelli commutativi unitari noetheriani.

Definizione 2.11. Sia A un anello e B un A-modulo. Diciamo che B è *piatto* se il funtore $(B \otimes_A -)$ è esatto.

Esempio 2.4. In particolare ogni A-modulo libero è piatto e se A è un campo allora ogni A-modulo è piatto. Se A è un anello locale, allora un A-modulo finitamente generato B è piatto se e solo se è libero. Se A è un PID, o più in generale un dominio di Dedekind, allora un A-modulo è piatto se e solo se è libero da torsione (si veda [Lang, XVI §3]).

Esempio 2.5. $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo piatto ma non libero.

Esempio 2.6. Vediamo ora un esempio che utilizzeremo spesso nel seguito. Sia A un anello e $f \in A[T]$ un polinomio monico; se consideriamo $B = A[T]/(f)$ come A-modulo, esso è libero di rango finito uguale al grado di f, quindi è piatto.

Definizione 2.12. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Dunque, tramite f, B ha una struttura di A-modulo. Diciamo che f è *piatto* se B è un A-modulo piatto.

Osservazione 4. Per verificare se $f : A \to B$ è piatto, è sufficiente verificare se l'omomorfismo locale $f : A_{f^{-1}(\mathfrak{m})} \to B_{\mathfrak{m}}$ è piatto per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di B (si veda [EC, I 2.2].

Definizione 2.13. Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi e sia $x \in X$. Diciamo che f è *piatto in x* se l'omomorfismo locale $f^*_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è un omomorfismo di anelli piatto.
Diciamo che f è *piatto* se è piatto in x $\forall x \in X$.

Osservazione 5. Dall' osservazione 4 segue immediatamente che per verificare se $f : X \to Y$ è piatto, è sufficiente verificare la condizione per tutti i punti chiusi $y \in Y$.

2.4 Morfismi non ramificati

Definizione 2.14. Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi $x \in X$ ed $y = f(x)$. Diciamo che f è *non ramificato in* x se $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ e

$$k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \subseteq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$$

è un' estensione di campi finita e separabile.
Diciamo che f è *non ramificato* se è non ramificato in x per ogni $x \in X$.

Osservazione 6. In termini di anelli, analogamente, si dice che un morfismo di anelli $f : A \to B$ è non ramificato in $\mathfrak{q} \in Spec\ B$ se e solo se $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ genera l'ideale massimale in $B_\mathfrak{q}$ e $k(\mathfrak{p}) \subseteq k(\mathfrak{q})$ è un'estensione di campi finita e separabile. Si vede subito che questa nozione è analoga alla nozione appena data di ramificazione per gli schemi.

Introduciamo ora una nozione che più tardi vedremo essere strettamente legata alla ramificazione: definiamo per ogni morfismo di schemi $f : X \to Y$ un fascio $\Omega_{X/Y}$, detto *fascio dei differenziali relativi.*
Facciamo, però, prima un passo indietro e partiamo dall'algebra sottesa a questa nozione.
Sia A un anello, B una A-algebra e sia M un B-modulo.

Definizione 2.15. Una A-derivazione di B in M è una mappa $d : B \to M$ tale che:

1. d è additiva;
2. $d(bb')bdb' + b'db$;
3. $da = 0$ per ogni $a \in A$.

Definizione 2.16. Definiamo il *modulo dei differenziali relativi* di B su A il B-modulo $\Omega_{B/A}$, insieme con una A-derivazione $d: B \to \Omega_{B/A}$, che soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni B-modulo M e per ogni A-derivazione $d': B \to M$ esiste un unico omomorfismo di B-moduli $f: \Omega_{B/A} \to M$ tale che $d' = f \circ d$.

Si vede che il modulo $\Omega_{B/A}$ è unico a meno di isomorfismi; il modo più elementare di costruirlo è considerare il B-modulo libero sui simboli $\{d\beta | \beta \in B\}$ e quozientarlo con le relazioni

1. $d(\beta_1 + \beta_2) = d\beta_1 + d\beta_2$;

2. $\forall\ \beta_1, \beta_2 \in B,\ d(\beta_1\beta_2) = \beta_1 d\beta_2 + \beta_2 d\beta_1$;

3. $d\alpha = 0$ per ogni $\alpha \in A$.

La derivazione $d: B \to \Omega_{B/A}$ è definita mandando b in db.

Proposizione 2.4.1. *Sia B una A-algebra, $f : B \otimes_A B \to B$ l'omomorfismo "diagonale" definito da $f(b \otimes b') = bb'$ e sia $I = ker\ f$. Consideriamo $B \otimes_A B$ come B-modulo mediante la moltiplicazione a sinistra. Allora I/I^2 eredita una struttura di B-modulo. Definiamo una mappa*

$$\begin{array}{rcl} d: B & \to & I/I^2 \\ b & \to & db = [1 \otimes b - b \otimes 1] \end{array}$$

Allora $(I/I^2, d)$ è il modulo dei differenziali relativi $\Omega_{B/A}$.

Dimostrazione. Si veda [Mumford, III §1 Th. 4]. □

Trasportando in teoria degli schemi la definizione del modulo dei differenziali, otteniamo il fascio che vogliamo definire. Sia $f: X \to Y$ un morfismo di schemi e consideriamo il morfismo "diagonale" $\Delta: X \to X \times_Y X$, ossia l'unico morfismo la cui composizione con entrambe le proiezioni $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ è l'identità su X.
Allora Δ dà un isomorfismo tra X e la sua immagine $\Delta(X)$, che è un sottoschema localmente chiuso di $X \times_Y X$, cioè un sottoschema chiuso di un aperto W di $X \times_Y X$.

Definizione 2.17. Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali di $\Delta(X)$ in W. Allora definiamo il *fascio dei differenziali relativi* di X su Y, denotato $\Omega_{X/Y}$, il fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli quasi-coerente ottenuto dal pullback di $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ tramite l'isomorfismo $X \to \Delta(X)$.

Osservazione 7. Chiaramente se $U = Spec\ A$ è un sottoinsieme aperto affine di Y e $V = Spec\ B$ è un sottoinsieme aperto affine di X tale che $f(V) \subseteq U$, allora $V \times_U V$ è un sottoinsieme aperto affine di $X \times_Y X$ isomorfo a $Spec\ (B \otimes_A B)$ e $\Delta(X) \cap (V \times_U V)$ è il sottoschema chiuso definito dal nucleo dell'omomorfismo diagonale $f :\ B \otimes_A B \to B$. Così $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ è il fascio associato al modulo I/I^2 e dunque la restrizione di $\Omega_{X/Y}$ a U, denotata $\Omega_{X/Y}|_U$, è esattamente il B-modulo $\Omega_{B/A}$. Quindi, in questo modo, non abbiamo fatto altro che rendere globale la costruzione affine.

Esempio 2.7. Sia $A = K$ un campo e sia $B = K[x_1, \dots, x_n]$. Allora $\Omega_{B/A}$ è un B-modulo libero con generatori $dx_1, \dots, dx_n$, poiché $d\beta = 0\ \forall\ \beta \in K$ per la terza relazione. Inoltre per ogni $f \in B$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i.$$

Più in generale, se $B = K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$, allora $\Omega_{B/A}$ è il B-modulo generato da $dx_1, \dots, dx_n$, con le relazioni

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0 \qquad i = 1, \dots, m.$$

Esempio 2.8. Sia $A = K$ un campo e sia $B = L$ un'estensione di campi di K. Allora lo spazio duale $(\Omega_{L/K})^*$ è lo spazio vettoriale delle K-derivazioni da L a L. In particolare, se L è un'estensione finitamente generata e separabile di K, la sua dimensione è uguale al grado di trascendenza di L su K.

Quindi se $K \subseteq L$ è un'estensione di campi algebrica finita, si vede che vale $\Omega_{L/K} = (0)$ se e solo se l'estensione è separabile.

Vediamo ora in che modo la nozione di ramificazione si intreccia con le caratteristiche del fascio dei differenziali $\Omega_{X/Y}$.

Proposizione 2.4.2. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi. Allora f è non ramificata se e solo se il fascio $\Omega_{X/Y} = 0$.*

Dimostrazione. Poiché la nozione che prendiamo in considerazione è di tipo locale e il fascio dei differenziali si comporta bene rispetto al cambiamento di base non è restrittivo supporre che $X = Spec\ B$ e $Y = Spec\ A$ siano affini, quindi restringersi al caso in cui $A \to B$ sia un omomorfismo locale di anelli locali. Usiamo ora un importante risultato algebrico conosciuto come lemma di Nakayama.

Lemma 2.4.3 (Lemma di Nakayama)**.** *Sia M un A-modulo finitamente generato e sia $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideale tale che $\mathfrak{a}M = M$. Allora esiste un elemento $f \in 1 + \mathfrak{a}$ che annulla M.*

Dimostrazione. Siano $m_1, \ldots, m_n$ generatori di M come A-modulo. Per l'ipotesi

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j$$

per determinati $a_{ij} \in A$. Allora:

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) m_j = 0.$$

Risolvendo direttamente questa equazione lineare troviamo che

$$det(\delta_{ij} - a_{ij}) m_k = 0 \quad \forall\ k.$$

Se chiamiamo $f = (\delta_{ij} - a_{ij})$, allora $1 - f \in \mathfrak{a}$. □

Questo risultato permette di limitarci al caso in cui A e B sono campi. In questo caso abbiamo già detto che B è un'estensione separabile di A se e solo se $\Omega_{B/A} = 0$.

□

Osservazione 8. Il lemma che abbiamo visto è molto utile in geometria algebrica e compare, a volte, sotto diverse formulazioni: ne vedremo ora qualcuna

che rende più evidente l'importanza di questo risultato.
All' ipotesi che M sia un A-modulo finitamente generato aggiungiamo che $\mathfrak{a}$ sia un ideale contenuto nel radicale di Jacobson di A, denotato $J(A)$, ossia contenuto in tutti gli ideali massimali di A (poiché spesso tratteremo anelli locali questa condizione sarà facilmente verificabile). Ne segue che, continuando ad usare la stessa notazione, $r - 1 \in J(A)$ e quindi r è invertibile. Concludiamo che M deve necessariamente essere l'A-modulo nullo.
Se $M = N + \mathfrak{a}M$, dove N è un sottoA-modulo di M, un ragionamento analogo applicato a M/N dà $M = N$.
Se poi $m_1, \ldots, m_n$ sono elementi di M tali che le loro immagini $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n$ in $M/\mathfrak{a}M$ generano l'A-modulo $M/\mathfrak{a}M$, allora, applicando il risultato a $M/\sum A\mathfrak{m}_i$, si trova che gli m_i generano M su A.

2.5 Morfismi étale

Definizione 2.18. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ si dice *étale* se è piatto e non ramificato.
Si dice inoltre che f è *finite étale* se è finito ed étale.

Esempio 2.9. Consideriamo il morfismo di schemi

$$f : \ Spec\ \mathbb{Z}[T]/(T^2 - 2) \to Spec\ \mathbb{Z}$$

e chiediamoci se è étale. Consideriamo, dunque, $\mathbb{Z}[T]/(T^2-2)$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Esso è libero di rango 2 su $\mathbb{Z}$, quindi in particolare è piatto. Controlliamo ora se è non ramificato. Per farlo dobbiamo considerare, per ogni p primo, l'estensione di campi

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \subseteq \quad \mathbb{Z}[T]/(T^2 - 2, p) = \mathbb{F}_p[T]/(T^2 - 2).$$

Si vede subito che per $p \neq 2$ questa è un'estensione di campi separabile, quindi f è étale.
Per $p = 2$, invece, l'estensione non è separabile; quindi il morfismo f è étale su $Spec\ \mathbb{Z} \setminus (2)$.

Esempio 2.10. Sia K un campo ed $f(T)$ un polinomio monico su K. Allora l'estensione

$$K \subseteq K[T]/(f(T))$$

è separabile se e solo se il polinomio f è separabile, cioè non ha radici multiple in $\overline{K}$.
Più in generale, se A è un anello, diciamo che un polinomio monico $f \in A[T]$ è *separabile* se $(f, f') = A[T]$, cioè se f' è invertibile in $A[T]/(f)$. Se consideriamo $B = A[T]/(f)$ come A-modulo, come abbiamo già osservato nell'esempio 2.6, esso è libero di rango finito uguale al grado di f, quindi è piatto. Inoltre per ogni $\mathfrak{p} \in Spec\ A$ vale, analogamente all'esempio visto sopra, che $B \otimes_A K(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{p})[T]/(\overline{f})$, dove $\overline{f}$ è l'immagine di f in $K(\mathfrak{p})[T]$, e B è non ramificato su A se e solo se f è separabile.
Più in generale per ogni $b \in B$, $B_b = B[b^{-1}]$ è non ramificato su A se e solo se f' è invertibile in B_b.

Abbiamo visto, quindi, che dato un polinomio monico $f(T)$ su un anello A, è possibile costruire un morfismo étale $Spec\ C \to Spec\ A$ prendendo $C = B_b$, dove $B = A[T]/(f)$ e $b \in B$ tale che $f'(T)$ è invertibile in B_b. Chiamiamo un morfismo di questo tipo *standard étale.*
Il fatto interessante è che localmente ogni morfismo di schemi étale $X \to Y$ è standard. Geometricamente, ciò significa che in un intorno di ogni punto $y \in Y$ ci sono funzioni $a_1, \ldots, a_r$ tali che X è localmente descritto dall'equazione $T^r + a_1 T^{r-1} + \ldots + a_r = 0$, e le radici dell'equazione sono tutte semplici.

Teorema 2.5.1. *Se il morfismo di schemi $f : X \to Y$ è étale in qualche intorno aperto di $x \in X$, allora esistono due intorni aperti affini V e U, di x e $f(x)$ rispettivamente, tali che*

$$f|_V : V \to U$$

è un morfismo standard étale.

Dimostrazione. Poiché la nozione che stiamo trattando è di tipo locale, possiamo assumere che sia $X = Spec\ C$ e $Y = Spec\ A$. Inoltre , per il Main Theorem di Zariski (vedi [Hartshorne, III 11.4] o [Mumford, III §9]), possiamo assumere che C sia una A-algebra finita.
Chiamiamo $\mathfrak{q}$ l'ideale primo di C corrispondente al punto x e sia $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q}) \in Spec\ A$. Vogliamo dimostrare che per qualche $c \notin \mathfrak{q}$ vale $C_c \cong B_b$, dove $SpecB_b \to Spec\ A$ è un morfismo standard étale. Restringiamoci a verificarlo sulla localizzazione $A_\mathfrak{p}$; consideriamo l'omomorfismo di anelli

$$\begin{array}{ccc} C & \to & C/\mathfrak{p}C \\ t & \to & \bar{t} \end{array}$$

e prendiamo un elemento $t \in C$ tale che $\bar{t}$ genera il campo residuo $K(\mathfrak{q})$ su $K(\mathfrak{p})$, cioè tale che $K(\mathfrak{p})[\bar{t}] = K(\mathfrak{q})$. Un tale elemento esiste perché $C/\mathfrak{p}C$ è un prodotto $K(\mathfrak{q}) \times D$ e l'estensione $K(\mathfrak{p}) \subseteq K(\mathfrak{q})$ è separabile.
Chiamiamo ora $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} \cap A[t]$ e vogliamo dimostrare che $A[t]_{\mathfrak{q}'} \cong C_\mathfrak{q}$. Notiamo intanto che $\mathfrak{q}$ è l'unico ideale primo di C che giace sopra $\mathfrak{q}'$. Quindi l'anello $C \otimes_{A[t]} A[t]_{\mathfrak{q}'}$ è locale ed il suo unico ideale massimale è $\mathfrak{q}$., dunque è uguale a $C_\mathfrak{q}$. Resta dunque da dimostrare che $C \otimes_{A[t]} A[t]_{\mathfrak{q}'} \cong A[t]_\mathfrak{q}$. Poiché l'omomorfismo $A[t] \to C$ è iniettivo e finito (abbiamo supposto che C sia una A-algebra finita) allora anche l'omomorfismo

$$A[t]_{\mathfrak{q}'} \to C \otimes_{A[t]} A[t]_{\mathfrak{q}'} = C_\mathfrak{q}$$

sarà iniettivo e finito. È anche suriettiva e ciò segue per il lemma di Nakayama (vedi osservazione 8) dal fatto che la mappa $K(\mathfrak{q}') \to K(\mathfrak{q})$ è suriettiva. Abbiamo perciò mostrato che $A[t]_{\mathfrak{q}'} \cong C_\mathfrak{q}$.
Ora, poiché $A[t]$ è un A-modulo finito, l'isomorfismo $A[t]_{\mathfrak{q}'} \to C_\mathfrak{q}$ si estende ad un isomorfismo $A[t]_{c'} \to C_c$ per qualche $c \notin \mathfrak{q}$ e $c' \notin \mathfrak{q}'$. Quindi possimo assumere che t generi C su A.
Sia ora n il grado dell'estensione $K(\mathfrak{p}) \subseteq K(\mathfrak{q})$; allora $1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{n-1}$ saranno generatori dell'estensione. Quindi per il lemma di Nakayama (vedi osservazione 8) $1, t, \dots, t^{n-1}$ generano C su A . Allora esiste un polinomio monico

$f \in A[X]$ di grado n ed un omomorfismo suriettivo

$$g: \ B = A[X]/(f) \to C$$

Se chiamiamo $\overline{f}$ l'immagine di f in $K(\mathfrak{p})$, allora chiaramente $\overline{f}$ è il polinomio caratteristico di $\bar{t}$ in $K(\mathfrak{q})$ su $K(\mathfrak{p})$ e dunque è separabile. Quindi B_b è una A-algebra standard étale per qualche $b \notin g^{-1}(\mathfrak{q})$. Scegliendo opportunamente b e c troviamo un omomorfismo suriettivo $g': \ B_b \to C_c$, dove C_c e B_b sono A-algebre étale, cioè piatte e non ramificate. Utilizziamo ora i seguenti due risultati, di cui non diamo qui una dimostrazione, per la quale si può vedere [EC, I 3.6, 3.10].

Lemma 2.5.2. *Siano dati due morfismi di schemi $g: \ Y \to X$ e $f: \ X \to S$. Se vale che $f \circ g$ è étale e f è non ramificato, allora g è étale.*

Lemma 2.5.3. *Se un'immersione chiusa é piatta (quindi étale), allora è un'immersione aperta.*

Dunque in questo caso, per il risultato 2.5.2, l'omomorfismo suriettivo g' è étale e il morfismo di schemi indotto da g', cioè $\psi: \ Spec\ C_c \to Spec\ B_b$ è un'immersione chiusa. Allora, per il lemma 2.5.3, si ha che il morfismo ψ è un'immersione aperta, dunque il teorema è provato.

$\square$

Corollario 2.5.4. *Un morfismo di schemi $f: \ X \to Y$ è étale se e solo se per ogni $x \in X$ esistono due intorni aperti affini $V = Spec\ C$ di x e $U = Spec\ A$ di $f(x)$ tali che*

$$C = A[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_n)$$

e $det(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ è invertibile in C.

Dimostrazione. Partiamo dimostrando la sufficienza. Abbiamo visto che in questo caso il fascio dei differenziali relativi $\Omega_{C/A}$ ha generatori $dT_1, \ldots, dT_n$ con le relazioni

$$\sum_j (\frac{\partial f_i}{\partial T_j}) dT_j = 0$$

ed è nullo se e solo se vale che il determinante della matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial T_j})$ è invertibile in C. Questo, per il teorema 2.4.2 equivale a dire che C è una A-algebra non ramificata.
Per vedere la piattezza utilizziamo il seguente risultato.

Lemma 2.5.5. *Sia B una A-algebra piatta e consideriamo $b \in B$. Se l'immagine di b in $B/\mathfrak{m}B$ non è uno zero-divisore per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A, allora $B/(b)$ è una A-algebra piatta.*

Dimostrazione. Milne [EC, I 2.5]. □

Applicando più volte il lemma si dimostra che C è una A- algebra piatta. Dimostriamo ora la necessità. Per il teorema precedente possiamo assumere che il morfismo f sia standard étale, quindi che $Y = Spec\ A$, $X = Spec\ B_b$, dove $B = A[T]/(g)$ e $b \in B$. Dunque $B_b = A[T,U]/(g, bU - 1)$ ed il determinante corrispondente è $g'(T)b$, che è invertibile in B_b.

□

Osservazione 9. La condizione sulle derivate parziali ∂f_i significa esattamente che $\Omega_{C/A} = 0$; infatti abbiamo visto nell'esempio 2.7 che $\Omega_{C/A}$ è il B-modulo generato da $dT_1, \ldots, dT_n$ quozientato con le relazioni

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_j} \cdot dT_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

e questo B-modulo è nullo esattamente quando $det(\frac{\partial f_i}{\partial T_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ è invertibile in C.

Osservazione 10. Notiamo che se $X = Spec\ C$ e $Y = Spec\ A$ fossero varietà analitiche, questo criterio indicherebbe che le mappe indotte sugli spazi tangenti sono tutti isomorfismi e dunque $f : X \to Y$ sarebbe un isomorfismo locale in ogni punto di X per il teorema della funzione inversa.

Anche nel caso algebrico è possibile parlare di spazio tangente e questa nozione è in qualche modo legata a quella di applicazione étale.

2.5.1 Morfismi étale tra varietà

Prendiamo una varietà affine $V = Spec\ K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ su un campo K algebricamente chiuso. Per ogni $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ denotiamo f_* la parte omogenea di f di grado minimo e definiamo l'ideale $\mathfrak{a}_* = \{f_* \mid f \in \mathfrak{a}\}$. Allora definiamo il *cono tangente* a V nell'origine, denotato $C(V)$, come lo schema $Spec\ K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}_*$: geometricamente, dunque, è l'insieme $V(\mathfrak{a}_*)$. Diamo ora una definizione più intrinseca del cono tangente; ricordiamo che ad ogni anello locale $(A, \mathfrak{m})$, possiamo associare l'anello graduato

$$gr(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}.$$

Se $K = A/\mathfrak{m}$, allora $gr(A)$ è una K-algebra graduata, generata da $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, gli elementi di grado 1.

Definizione 2.19. Se X è uno schema di tipo finito su un campo K algebricamente chiuso e $x \in X$ un punto chiuso, allora il *cono tangente a X in x* è *Spec* $(gr(\mathcal{O}_x))$.

Verifichiamo che le due definizioni coincidono.

Proposizione 2.5.6. *La mappa*

$$\begin{array}{rcl} K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}_* & \to & gr(\mathcal{O}_P) \\ X_i & \to & X_i \end{array}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale in $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ corrispondente al punto P. Allora

$$\begin{array}{rcl} gr(\mathcal{O}_P) & = & \sum \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} = \\ & = & \sum (x_1, \ldots, x_n)^k/(x_1, \ldots, x_n)^{k+1} + \mathfrak{a} \cap (x_1, \ldots, x_n)^k = \\ & = & \sum (x_1, \ldots, x_n)^k/(x_1, \ldots, x_n)^{k+1} + \mathfrak{a}_k \end{array}$$

dove $\mathfrak{a}_k$ è la parte omogenea di grado k di $\mathfrak{a}_*$, cioè il sottospazio di $\mathfrak{a}_*$ dei polinomi omogenei di grado k.
La tesi segue direttamente dal fatto che $(x_1, \ldots, x_n)^k/(x_1, \ldots, x_n)^{k+1} + \mathfrak{a}_k$ è esattamente la parte omogenea di grado k della K-algebra graduata $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}_*$.
□

Osservazione 11. Ricordiamo che $dim\ A = dim\ (gr(A))$, dunque il cono tangente ha sempre la stessa dimensione della varietà. Un omomorfismo locale di anelli $A \to B$ induce un omomorfismo di anelli graduati $gr(A) \to gr(B)$; inoltre se $gr(A) \to gr(B)$ è un isomorfismo, anche la mappa indotta sui completamenti $\hat{f} : \hat{A} \to \hat{B}$ è un isomorfismo e, poiché $gr(A) = gr(\hat{A})$, vale anche il viceversa.

Esempio 2.11. Il cono tangente nell'origine P alla curva

$$V \ : \ y^2 - x^3 - x^2 = 0$$

è definito dall'equazione

$$y^2 - x^2 = 0$$

ed è dunque l'unione delle due rette distinte $x = y$ e $x = -y$ (in questo caso si dice che la curva ha un *nodo* nell'origine).

Esempio 2.12. Consideriamo la curva

$$W \ : \ y^2 - x^3 = 0.$$

Allora il cono tangente a W nell'origine P è definito dall'equazione

$$y^2 = 0$$

ed è la retta $y = 0$ con molteplicità 2 (in questo caso si dice che la curva ha una *cuspide* nell'origine).

Definizione 2.20. Consideriamo una mappa regolare $\phi\ : X \to Y$ di varietà su un campo K algebricamente chiuso. Allora ϕ è detta *étale* nel punto $x \in X$ se induce un isomorfismo di K-algebre $C_{\phi(x)}(Y) \to C_x(X)$ sui coni tangenti.

Proposizione 2.5.7. *Sia $\phi : X \to Y$ una mappa regolare di varietà su un campo algebricamente chiuso. Allora la definizione appena data di mappa étale coincide con la definizione di morfismo étale data precedentemente.*

Dimostrazione. Osserviamo inizialmente che ogni mappa regolare di varietà è di tipo finito; quindi, per l'osservazione 11 basta dimostrare che per ogni omomorfismo locale di K-algebre $f : A \to B$ indotto da una mappa regolare di varietà su K, l'omomorfismo $\hat{f} : \hat{A} \to \hat{B}$ è un isomorfismo se e solo se f è piatta e non ramificata.
Se $\hat{f}$ è un isomorfismo, allora è anche piatta e non ramificata, per dimostrare la prima implicazione è sufficiente dimostrare che se $\hat{f}$ è piatta e non ramificata, allora lo è anche f. Vediamo la piattezza: se $\hat{f}$ è piatto, allora, poiché $\hat{A}$ è piatto su A, una successione esatta di A-moduli $M' \to M \to M''$ dà origine ad una successione esatta di $\hat{B}$-moduli

$$\hat{B} \otimes_A M' \to \hat{B} \otimes_A M \to \hat{B} \otimes_A M''$$

e poiché $\hat{B}$ è una B-algebra *fedelmente piatta*, da ciò segue che la successione

$$B \otimes_A M' \to B \otimes_A M \to B \otimes_A M''$$

è esatta.
Vediamo ora la ramificazione: se $\hat{f}$ è non ramificato allora gli ideali $\mathfrak{m}_B$ e $\mathfrak{m}_A B$ generano entrambi l'ideale massimale in $\hat{B}$; poiché vale che $\mathfrak{a}S \cap R = \mathfrak{a}$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di un anello R e per ogni omomorfismo fedelmente piatto $R \to S$, otteniamo che $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$.
Dimostriamo ora il viceversa: per il Main Theorem di Zariski non è restrittivo assumere che B sia la localizzazione di una A-algebra finita C in un suo ideale massimale e che sia $C = A[T]/(f)$ per qualche polinomio monico $f \in A[T]$. Quindi $\hat{B}$ è il completamento di $\hat{A}[T]/(f)$ in un certo ideale massimale che giace sopra $\mathfrak{m}_{\hat{A}}$. Se chiamiamo $K = A/\mathfrak{m}_A$, $\overline{f}$ l'immagine di f in $K[T]$ e prendiamo una fattorizzazione $\overline{f} = g_1^{e_1} \dots g_n^{e_n}$ in $K[T]$, dove gli g_i sono distinti e irriducibili, per il lemma di Hensel questa si solleva ad una fattorizzazione

$f = f_1 \dots f_n$ in $\hat{A}[T]$. Dunque

$$\hat{A}[T]/(f) = \prod_{i=1}^{n} \hat{A}[T]/(f_i)$$

quindi necessariamente $\hat{B} = \hat{A}[T]/(f_i)$ per qualche i. Dunque $\hat{f} : \hat{A} \to \hat{B}$ è finita e iniettiva. Vediamo che è anche suriettiva: poiché $\hat{f}$ è non ramificata e la mappa sui campi residui $\hat{A}/\mathfrak{m}_{\hat{A}} \to \hat{B}/\mathfrak{m}_{\hat{B}}$ è un isomorfismo vale che

$$\hat{B} = \phi(\hat{A}) + \mathfrak{m}_{\hat{B}} = \phi(\hat{A}) + \mathfrak{m}_{\hat{A}}\hat{B}.$$

Inoltre, poiché $\hat{B}$ è una $\hat{A}$-algebra finita, possiamo usare il lemma di Nakayama (vedi osservazione 8) ed otteniamo che $\hat{B} = \phi(\hat{A})$. $\square$

Quindi, considerando che, come abbiamo visto nella proposizione 2.5.6, per ogni punto su una varietà algebrica X su un campo algebricamente chiuso il cono $C_P(X)$ coincide con *Spec* $gr(\mathcal{O}_P)$ e tenendo conto di quanto detto nell'osservazione 11, ottieniamo il seguente criterio per i morfismi étale tra varietà.

Proposizione 2.5.8. *Una mappa regolare $\phi \ : X \to Y$ di varietà su un campo K algebricamente chiuso. Allora ϕ è* étale *nel punto $x \in X$ se e solo se la mappa indotta sui completamenti $\hat{\mathcal{O}}_{Y,\phi(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ è un isomorfismo.*

In particolare, una condizione necessaria affinché la mappa ϕ sia étale in x è che la varietà Y abbia in $\phi(x)$ lo stesso tipo di singolarità di X in x.

Esempio 2.13. Consideriamo la cubica V dell'esempio 2.11 ed il morfismo

$$\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{A}^1 & \to & V \\ T & \to & (T^2-1, T(T^2-1)) \end{array}$$

che corrisponde al morfismo di k-algebre

$$\begin{array}{rcl} \phi: \ K[x,y]/(y^2-x^3-x^2) & \longrightarrow & K[t] \\ x & \longrightarrow & t^2-1 \\ y & \longrightarrow & t(t^2-1) \end{array}$$

Chiamiamo ora X e Y le classi in $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ di x e y rispettivamente, allora abbiamo visto che $C_P(V) = K[X,Y]/(Y^2 - X^2)$. Il cono tangente di $\mathbb{A}^1$ in $Q = 1$, invece, è $K[S]$, dove S è la classe di $t-1$ in $\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 = (t-1)/(t^2-2t+1)$. Dunque la mappa $C_P(V) \to C_Q(\mathbb{A}^1)$ indotta sui coni tangenti è la mappa di K-algebre

$$\begin{aligned} K[X,Y]/(Y^2 - X^2) &\longrightarrow K[S] \\ X &\longrightarrow 2S \\ Y &\longrightarrow 2S \end{aligned}$$

che non è un isomorfismo, dunque f non è étale in Q.

Esempio 2.14. Prendiamo, ora, la cubica W dell'esempio 2.12 e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{A}^1 &\to W \\ T &\to (T^2, T^3) \end{aligned}$$

Il cono tangente di $\mathbb{A}^1$ in $Q = 0$ è $K[S]$, dove S è la classe di t in $\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 = (t)/(t^2)$. Dunque la mappa $C_P(V) \to C_Q(\mathbb{A}^1)$ indotta sui coni tangenti è la mappa di K-algebre

$$\begin{aligned} K[X,Y]/(Y^2) &\longrightarrow K[S] \\ X &\longrightarrow 0 \\ Y &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

che non è un isomorfismo, dunque nemmeno in questo caso f è étale in Q.

Esempio 2.15. Consideriamo la cubica nodale V dell'esempio 2.11; il morfismo

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{A}^1 &\to V \\ T &\to (T^2 - 1, T(T^2 - 1)) \end{aligned}$$

che abbiamo appena visto si dice *normalizzazione* di V e si può pensare come una "parametrizzazione" della cubica; se, infatti, intersechiamo la generica retta per l'origine con V otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2(t^2 - x - 1) = 0 \\ y = tx \end{cases}$$

che ha sempre due soluzioni: una è l'origine, con molteplicità 2; l'altra è proprio il punto

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

Possiamo costruire un morfismo étale su V in questo modo: prendiamo due copie di $\mathbb{A}^1$ e su ciascuna consideriamo il morfismo di normalizzazione appena visto. Allora la retroimmagine del punto singolare di V, cioè l'origine, su ciascuna copia di $\mathbb{A}^1$ sarà $f^{-1}((0,0)) = \{1, -1\}$. Possiamo allora quozientare l'unione disgiunta delle due copie di $\mathbb{A}^1$ con la relazione d'equivalenza che identifica il punto $t = 1$ della prima retta affine con il punto $u = -1$ della seconda e viceversa: il morfismo f passa al quoziente ed otteniamo un morfismo étale (vedi fig. 2.1).

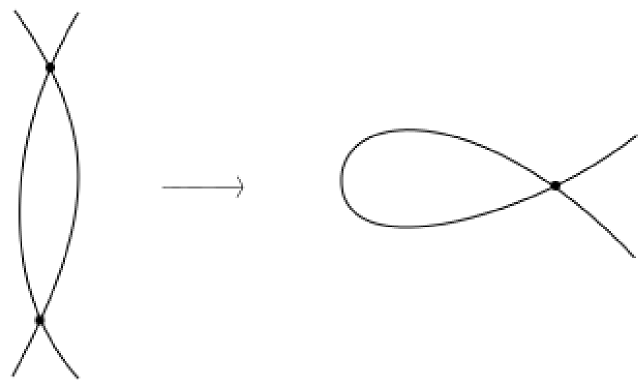

Figura 2.1: Morfismo étale di grado 2.

Possiamo ritrovare una corrispondenza più stretta con il caso differenziale se ci limitiamo a considerare quelle che sono definite “varietà non singolari”. Cominciamo introducendo la nozione di spazio tangente; come abbiamo appena visto, il cono tangente in generale non risulta essere lineare, ma ci si può limitare a studiare la sua parte lineare: consideriamo il sottoschema chiuso $X = Spec\ K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ di $\mathbb{A}^n$ intorno a un suo punto x. Modificando opportunamente le x_i possiamo ricondurci al caso in cui $i(x) = 0$, dove $i : X \to \mathbb{A}^n$.
Con un procedimento simile a quello seguito per il cono tangente, per ogni $f \in \mathfrak{a}$ denotiamo f^l la parte lineare di f e chiamiamo $\mathfrak{a}^l$ l'ideale generato da tutte le forme lineari f^l. con $f \in \mathfrak{a}$. Chiamiamo $Spec\ K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}_l$ lo spazio tangente ad X in x.
Da questa definizione è facile vedere che, poiché $\mathfrak{a}_l \subseteq \mathfrak{a}^*$, lo spazio tangente contiene sempre il cono tangente come sottoschema.
In particolare vale che se $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_m)$, allora $\mathfrak{a}^l = (f_1^l, \dots, f_m^l)$; è importante osservare che questo risultato non vale in generale anche nel caso del cono tangente, cioè non è vero in generale che $\mathfrak{a}^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$.

Proposizione 2.5.9. *Sia $X = Spec\ K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{A}^n$ e sia $x \in X$ un suo punto chiuso di coordinate $(a_1, \dots, a_n)$. Allora lo spazio tangente a X in x è isomorfo in modo naturale al sottospazio lineale di $\mathbb{A}^n$ definito da*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Traslando X in modo da spostare x nell'origine troviamo lo spazio X' definito dalle equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_m(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n) = 0 \end{cases}$$

Lo spazio tangente di X in $(a_1, \dots, a_n)$ sarà isomorfo allo spazio tangente di X' nell'origine, quindi, come abbiamo visto, sarà il luogo degli zeri delle parti lineari degli $f_i(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$, che sono esattamente

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) \cdot x_j$$

□

Diamo ora una definizione più formale dello spazio tangente.

Definizione 2.21. Sia X uno schema di tipo finito su un campo K algebricamente chiuso e sia $x \in X$ un suo punto chiuso. Allora chiamiamo *spazio tangente* a X in x lo spazio vettoriale

$$T_{x,X} = hom_K(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, K)$$

e lo schema ad esso associato.

Vediamo che la definizione appena data è coerente con quella precedente. Sia $R = K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ e $U \subseteq X$ isomorfo a *Spec R*. Se poniamo $M = (x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{a}$ allora $R_M = \mathcal{O}_x$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 &\cong M/M^2 \\ &\cong (x_1, \dots, x_n)/(x_1, \dots, x_n)^2 + \mathfrak{a} \\ &\cong (x_1, \dots, x_n)/(x_1, \dots, x_n)^2 + \mathfrak{a}^l. \end{aligned}$$

Allora, poiché $\mathfrak{a}^l$ è generata da forme lineari, l'algebra simmetrica su $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ sarà isomorfa a $K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}^l$.

Definizione 2.22. Un punto chiuso $x \in X$ è *non singolare*, o X è *non singolare in x*, se lo spazio tangente a X in x è uguale al cono tangente a X in x. Diciamo che X è *non singolare* se è non singolare in x per ogni $x \in X$.

Quindi la nozione di morfismo étale nel caso di varietà non singolari si riduce ad una condizione sul morfismo indotto sugli spazi tangenti, analogamente al caso differenziale.

Proposizione 2.5.10. *Siano X e Y varietà affini non singolari su un campo K algebricamente chiuso. Una mappa regolare $\phi: X \to Y$ è étale in $x \in X$ se la mappa indotta sugli spazi tangenti $d\phi : T_{x,X} \to T_{\phi(x),Y}$ è un isomorfismo.*

Esempio 2.16. Consideriamo la mappa regolare $\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ data da

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \quad\vdots \\ y_n = \phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

e l'omomorfismo di anelli corrispondente

$$\begin{aligned} \psi: \ K[y_1, \dots, y_n] &\to K[x_1, \dots, x_n]. \\ y_i &\to \phi_i(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ora fissiamo $a = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ e sia $b = \phi(a) \in \mathbb{A}^n$. Il differenziale di ϕ in a è la mappa lineare

$$\begin{aligned} (d\phi)_a : \ T_a\mathbb{A}^n &\to T_b\mathbb{A}^n. \\ (dx_1, \dots, dx_n) &\to (\sum \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}|_a dx_j, \dots, \sum \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j}|_a dx_j) \end{aligned}$$

che possiamo rappresentare mediante la matrice

$$J(\phi)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

quindi vediamo che ϕ è étale nel punto a se e solo se il determinante della matrice $J(\phi)(a)$ è non nullo.

Capitolo 3

Un po' di algebra

3.1 Algebre separabili

Sia A un anello, M un A-modulo libero di rango n e sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una sua base. Allora se $f: M \to M$ è una mappa A-lineare, possiamo sempre scrivere

$$f(w_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_j \quad i = 1, \ldots, n \quad a_{ij} \in A$$

e la *traccia* di f è definita da

$$Tr(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

La traccia di f è un elemento di A e non dipende dalla scelta della base. Si ottiene dunque una mappa A-lineare

$$Tr: Hom_A(M, M) \to A.$$

Analogamente, se A è un anello e B una A-algebra che è finitamente generata e libera come A-modulo, possiamo associare ad ogni elemento $b \in B$ la mappa A-lineare

$$\begin{aligned} m_b : B &\to B \\ b &\to bx \end{aligned}$$

e definiamo la *traccia* di b, denotata $Tr_{B/A}(b)$ o semplicemente $Tr(b)$, come la traccia del morfismo m_b. Si verifica facilmente che la mappa $Tr : B \to A$ è A-lineare e che vale $Tr(a) = rank_A(B) \cdot a \ \ \forall \ a \in A$.
Definiamo infine la mappa A-lineare

$$\begin{aligned} \phi: \ B &\to Hom_A(B, A) &(3.1)\\ x &\to (\phi(x))(y) = Tr(xy) \ \forall \ y \in B. &(3.2) \end{aligned}$$

Definizione 3.1. Sia A un anello e B una A-algebra che è finitamente generata e libera come A-modulo. Diciamo che B è *separabile* su A, o che B è una A-algebra *libera separabile*, se la mappa ϕ appena definita è un isomorfismo.

Osservazione 12. Si può dare una definizione di separabilità che estende quella precedente ad una classe più grande di algebre in questo modo: una A-algebra B è detta *separabile* se l'omomorfismo di anelli $B \otimes_A B \to B$ che manda $x \otimes y$ in xy rende B un $B \otimes_A B \to B$-modulo proiettivo.

Se $w_1, \dots, w_n$ è una base di B su A allora per ogni $i = 1, \dots, n$ la mappa

$$\begin{aligned} \phi(w_i) : B &\to A\\ w_j &\to Tr(w_i w_j) \end{aligned}$$

è A-lineare e si vede subito che la matrice associata al morfismo ϕ è la matrice

$$(Tr(w_i w_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

dunque ϕ è un isomorfismo se e solo se il determinante di questa matrice è invertibile in A.

Esempio 3.1. Sia A un anello e $a \in A$.Consideriamo l'A-algebra $A[\sqrt{a}] = A[x]/(x^2 - a)$: è una A-algebra libera di rango 2 su A e scegliamo come base $\{1, \sqrt{a}\}$.
Ricordiamo che per ogni $a \in A$ vale che $Tr(a) = rank_A(A[\sqrt{a}]) \cdot a$, dunque $Tr(1) = 2$ e $Tr(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}) = Tr(a) = 2a$.

Calcoliamo ora $Tr(\sqrt{a})$: consideriamo il morfismo

$$\begin{array}{rccc} m_{\sqrt{a}}: & B & \to & B \\ & 1 & \to & \sqrt{a} \\ & \sqrt{a} & \to & a \end{array}$$

e si calcola facilmente che la sua traccia è 0. La matrice associata a ϕ è quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

perciò $A[\sqrt{a}]$ è una A-algebra separabile se e solo se $4a \in A^*$.

Si noti che in questo caso il discriminante del polinomio $x^2 - a$ vale esattamente $4a$. Più in generale, infatti, vale che se A è un anello e $f \in A[x]$ è un polinomio monico, allora $A[x]/(f)$ è una A-algebra separabile se e solo se $\Delta(f) \in A^*$.

Esempio 3.2. Consideriamo ora un caso particolare, cioè quello dell'anello A degli interi algebrici di un campo di numeri K.
Ricordiamo che un campo di numeri K è un'estensione finita, quindi algebrica, di $\mathbb{Q}$, cioè un campo $K \subseteq \mathbb{Q}$ tale che $dim_{\mathbb{Q}}K < +\infty$. L'anello degli interi algebrici di K è il sottoanello di K

$$A = \{x_0 \in K \mid \exists\ f \in \mathbb{Z}[x]\ monico\ t.c.\ f(x_0) = 0\}$$

che ovviamente è un dominio. In particolare vale che $Frac(A) = K$ ed A risulta essere un *dominio di Dedekind*.
Un insieme $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_t\}$ di elementi di A si dice *base integrale per K* se ogni $a \in A$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare $a = \sum_{i=1}^{t} m_i b_i$, dove $m_i \in \mathbb{Z}$ (allora vale che ogni $x \in K$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$ e $x \in A$ se e solo se i coefficienti sono tutti interi).
Possiamo associare, dunque, ad ogni $x \in K$ la matrice $A_x = (a_{ij})$ tale che

$x \cdot b_i = \sum_{j=!}^{n} a_{ij} e_j$ e definiamo, analogamente a quanto fatto in precedenza, la *traccia* di x come la traccia della matrice A_x.
Si definisce, poi, il *discriminante* di K come il determinante della matrice $(Tr(b_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, che non dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}$. Allora in questo caso $A[\frac{1}{\Delta}]$ è separabile su $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. Infatti se $\mathcal{B}$ è una base base di A su $\mathbb{Z}$ è anche una base di $A[\frac{1}{\Delta}]$ su $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. La separabilità, dunque, segue immediatamente dal fatto che Δ è invertibile in $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$.

3.1.1 Algebre separabili e morfismi étale

In questa sezione studieremo il rapporto che esiste tra le algebre separabili, che abbiamo appena introdotto, ad i morfismi étale. Partiamo con una definizione.

Definizione 3.2. Un morfismo di schemi $f: X \to Y$ è detto *finite étale* se esiste un ricoprimento di Y di sottoinsiemi aperti affini $V_i = Spec\ A_i$ tali che, per ogni i, $f^{-1}(V_i)$ è affine ed è uguale a $Spec\ B_i$ dove B_i è una A_i-algebra libera separabile.

Vedremo ora che questa definizione è coerente con quella data precedentemente (vedi 2.18). In realtà ciò è vero solo perché ci siamo limitati a considerare schemi localmente Notheriani: senza questa restrizione la condizione di essere un morfismo finito deve essere sostituita con quella di essere *finitamente presentato*, in generale più stringente ma del tutto equivalente nel caso di schemi localmente Noetheriani.
Notiamo dalla definizione che un morfismo finite étale è finito, dunque per ogni sottoinsieme aperto affine $V = Spec\ A$ di Y, il sottoschema aperto $f^{-1}(V)$ di X è affine , $f^{-1}(V) = Spec\ B$, dove B è un A-modulo finitamente generato. In questo caso, però, B non è necessariamente un A-modulo libero, ma vale una proprietà un po' più debole, ossia quella di essere un A-modulo *proiettivo*.

Iniziamo enunciando due risultati che saranno utili nel seguito e ci permettono di caratterizzare in maniera più esplicita le algebre separabili su un campo.

Teorema 3.1.1. *Sia B un'algebra di dimensione finita su un campo K. Allora $B \cong \prod_{i=1}^{t} B_i$ per qualche $t \in \mathbb{N}$, dove B_i sono K-algebre locali con ideali massimali nilpotenti per ogni i.*

Dimostrazione. Se B è un dominio allora per ogni $b \in B \setminus 0$, la mappa $m_b : B \to B$ che manda x in bx è iniettiva, quindi, per ragioni di dimensione, è anche suriettiva e dunque $b \in B^*$. Abbiamo così dimostrato che se b è un dominio allora è un campo. Applicando lo stesso regionamento a $B/\mathfrak{p}$ per ogni $\mathfrak{p} \in Spec\ B$ si vede che ogni ideale primo di B è massimale.
Se $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ sono ideali massimali distinti di B allora per il teorema cinese del resto la mappa naturale $B \to \prod_{i=1}^{n} B/\mathfrak{m}_i$ è suriettiva, dunque $n \leq dim_K B$; dunque B ha solo un numero finito di ideali massimali, diciamo $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t$. La loro intersezione è l'intersezione di tutti gli ideali primi di B, dunque è il nilradicale $\sqrt{0}$ di B, che , poiché B è noetheriano, è chiaramente nilpotente; dunque sarà $\prod_{i=1}^{t} \mathfrak{m}_i^N = 0$ per N abbastanza grande. Gli $\mathfrak{m}_i$ sono a due a due relativamente primi, dunque ciò vale anche per gli $\mathfrak{m}_i^N$; quindi il teorema cinese del resto dà un isomorfismo $B \cong \prod_{i=1}^{t} B/\mathfrak{m}_i^N$. Qui $B_i = B/\mathfrak{m}_i^N$ è locale, poiché $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^N$ è il suo unico ideale massimale; inoltre è chiaramente nilpotente e ciò prova il teorema. □

Teorema 3.1.2. *Sia K un campo con chiusura algebrica $\overline{K}$ e sia B una K-algebra di dimensione finita su K. Denotiamo $\overline{B}$ la $\overline{K}$-algebra $B \otimes_K \overline{K}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) B è separabile su K;

(ii) $\overline{B}$ è separabile su $\overline{K}$;

(iii) $\overline{B} \cong \overline{K}^n$ come $\overline{K}$-algebra, per qualche $n \geq 0$;

(iv) $B \cong \prod_{i=1}^{t} B_i$ come K-algebra, dove ogni B_i è una estensione finita separabile di K.

Dimostrazione. (i)$\Leftrightarrow$ (ii) Sia $w_1, \dots, w_n$ una base di B su K. Allora $w_1 \otimes 1, \dots, w_n \otimes 1$ è una base di $\overline{B}$ su $\overline{K}$. Quindi il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & B & \hookrightarrow & \overline{B} & \\ Tr_{B/K} & \downarrow & & \downarrow & Tr_{\overline{B}/\overline{K}} \\ & K & \hookrightarrow & \overline{K} & \end{array}$$

è commutativo e $Tr_{B/K}(w_i w_j) = Tr_{\overline{B}/\overline{K}}((w_i \otimes 1)(w_j \otimes 1))$.
(iii)$\Rightarrow$ (ii) è ovvio.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Applicando il risultato 3.1.1 a $\overline{B}$ e $\overline{K}$ otteniamo che $\overline{B} \cong \prod_{j=1}^{m} C_j$, dove C_j sono $\overline{K}$-algebre locali ideali massimali nilpotenti $\mathfrak{m}_j$. Poiché $\overline{B}$ è separabile su $\overline{K}$ segue che ogni C_j è separabile su $\overline{K}$. Fissiamo ora j e consideriamo una qualsiasi mappa $\overline{K}$-lineare $\phi: \ C_j \to \overline{K}$; allora dalla definizione di separabilità segue che esiste $c \in C_j$ tale che $\phi(x) = Tr(cx)$ per ogni $x \in C_j$. Prendendo $x \in \mathfrak{m}_j$ ed osservando che le mappe nilpotenti hanno traccia nulla su un campo, si vede che $\mathfrak{m}_j \subseteq ker\ \phi$. Ciò vale per qualsiasi ϕ, quindi $\mathfrak{m}_j = 0$ e C_j è un campo. Poiché C_j è finito su $\overline{K}$ e $\overline{K}$ è un campo algebricamente chiuso, deve essere $C_j = \overline{K}$.
(iv)$\Rightarrow$ (iii) Per il teorema dell'elemento primitivo si ha $B_i = K(\beta_i) \cong K[x]/(f_i)$ con $f_i \in K[x]$ separabile ed irriducibile. Quindi $\overline{B}_i = \overline{K}[x]/(\overline{f}_i)$, dove $\overline{f}_i$ è l'immagine di f_i in $\overline{K}[x]$ e dunque fattorizza in fattori lineari distinti $x - \alpha_{ij}$. Per il teorema cinese del resto, quindi, $\overline{B}_i \cong \prod_j \overline{K}[x]/(x - \alpha_{ij}) \cong \overline{K}^{deg\ f_i}$.
(iii)$\Rightarrow$ (iv) Possiamo scrivere $B = \prod_{i=1}^{t} B_i$ come nel risultato 3.1.1. Per ogni $b \in B$ la sottoalgebra $K[b]$ generata da b è isomorfa a $K[x]/(f_b)$ per qualche $f_b \in K[x] \setminus 0$. Tensorizzando con $\overline{K}$ l'isomorfismo $K[x]/(f_b) \to K[b] \subseteq B$ otteniamo una mappa iniettiva $\overline{K}[x]/(f_b) \to \overline{B}$; quindi dalla (iii) otteniamo che $\overline{K}[x]/(f_b)$ non ha nilpotenti non nulli, cioè f_b è un polinomio separabile. In particolare se b è nilpotente $x^n \in (f_b)$ per qualche n, ma allora $x \in (f_b)$ e dunque $b = 0$. Ciò implica che i B_i sono tutti campi. Se $b = (b_1, \dots, b_t) \in \prod_{i=1}^{t}$ è un elemento qualsiasi di B, allora f_b è il minimo comune multiplo dei polinomi irriducibili f_{b_i} dei b_i su K, dunque questi sono tutti separabili e tutti i B_i sono estensioni di campi sepabili di K. $\square$

Definizione 3.3. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ si dice *finito e localmente libero* se esiste un ricoprimento di sottoinsiemi aperti affini $V_i = Spec\ A_i$ di Y tali che $f^{-1}(V_i)$ sia affine per ogni i ed uguale a $Spec\ B_i$, dove B_i è una A_i-algebra che è finitamente generata e libera come A-modulo.

Siamo ora per dimostrare che le due nozioni viste di morfismo finite étale coincidono.

Teorema 3.1.3. *Un morfismo $f : X \to Y$ è finite étale nell'accezione della definizione 3.2 se e solo se è finito ed étale.*

Dimostrazione. Poiché per un morfismo di schemi la condizione di essere finito e localmente libero è equivalente a quella di essere finitamente presentato e piatto ([Lenstra, 6.6]) ed abbiamo già detto che nel caso di schemi localmente Noetheriani, cioè quello che ci limitiamo qui a trattare, la nozione di morfismo finitamente presentato coincide con quella di morfismo finito, ne segue che un morfismo è finito ed étale se e solo se è finito, localmente libero e non ramificato. Poiché un morfismo finite étale è finito e localmente libero e tutte le nozioni che stiamo trattando sono locali in Y, è sufficiente provare la seguente affermazione: se B è un'algebra su un anello A, fintamente generata e libera come A-modulo, allora B è una A-algebra libera separabile se e solo se il morfismo $Spec\ B \to Spec\ A$ è non ramificato. Per prima cosa possiamo ridurre il problema al caso di algebre su un campo, per cui conosciamo una caratterizzazione più esplicita delle algebre separabili. Infatti per definizione B è separabile su A se e solo se la mappa $\phi : B \to Hom_A(B, A)$ definita in 3.1 è un isomorfismo, e questo vale se e solo se per ogni $\mathfrak{p} \in Spec\ A$ la mappa analogamente definita $B \otimes_A K(\mathfrak{p}) \to Hom_{K(\mathfrak{p})}(B \otimes_A K(\mathfrak{p}), K(\mathfrak{p}))$ è un isomorfismo, dove $K(\mathfrak{p})$ denota il campo residuo di $\mathfrak{p}$ su A; in altre parole se e solo se $B \otimes_A K(\mathfrak{p})$ è separabile su $K(\mathfrak{p})$ per ogni $\mathfrak{p} \in Spec\ A$.
Analogamente è facile vedere dalla definizione di ramificazione che un morfismo $Spec\ B \to Spec\ A$ è non ramificato se e solo se $Spec\ B \otimes_A K(\mathfrak{p}) \to Spec\ K(\mathfrak{p})$ è non ramificato per ogni $\mathfrak{p} \in Spec\ A$. Quindi ci possiamo ricondurre al caso in cui A è un campo.

Abbiamo visto allora in 3.1.1 che possiamo scrivere $B = \prod_{i=1}^{t} B_i$, dove B_i è un anello locale con ideale massimale nilpotente. È facile vedere che i B_i sono le localizzazioni di B in tutti gli ideali $\mathfrak{q} \in Spec\ B$.
Dunque $Spec\ B \to Spec\ A$ è non ramificata se e solo se ogni B_i e una estensione finita separabile di A e per la 3.1.2 ciò equivale a dire che B è separabile su A. $\square$

3.2 Ramificazione

Sia K un campo di numeri quadratico e A l'anello degli interi algebrici in K. Vediamo come è fatto *Spec A*.
Prendiamo, ad esempio, il caso $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ e $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$; in questo caso il polinomio minimo di $\sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$ è $x^2 - 3$, quindi il discriminante Δ di K su $\mathbb{Q}$ è 12.
Come nel caso di $Spec\ \mathbb{Z}$ anche in *Spec A* ci sono due tipi di punti: i punti chiusi corrispondono agli ideali primi diversi dall'ideale nullo ed hanno campi residui finiti; il punto generico, invece, che corrisponde all'ideale (0) ha come campo residuo K.
Consideriamo, ora, la mappa di schemi indotta dall'inclusione $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$; per ogni punto chiuso (p) di $Spec\ \mathbb{Z}$ vediamo come è fatta la fibra sopra (p) in $Spec\ \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$: essa è l'insieme degli ideali primi di A che contengono l'ideale pA. Ci sono tre possibilità:

(i) se p divide Δ, in questo caso 12, ad esempio, l'ideale (p) è il quadrato di un ideale in A: ad esempio per $p = 2$

$$2A = (1 + \sqrt{3})^2.$$

Qui la fibra è un unico punto *non ridotto*; il punto sottostante ridotto, in questo caso $((1 + \sqrt{3})^2$, ha come campo residuo $\mathbb{F}_p$. Diciamo allora che *p ramifica* in A.

(ii) Se 3 è un quadrato modulo p, l'ideale (p) è il prodotto di due ideali distinti di A: ad esempio per $p = 11$

$$11A = (4 + 3\sqrt{3})(4 - 3\sqrt{3}).$$

Qui la fibra è l'unione disgiunta di due punti ridotti, in questo caso $(4 + 3\sqrt{3})$ e $(4 - 3\sqrt{3})$, ciascuno con campo residuo $\mathbb{F}_p$.

(iii) Se $p > 3$ e 3 non è un quadrato modulo p, ad esempio per $p = 5$ l'ideale pA resta primo in A: in questo caso la fibra è un solo punto ridotto, cioè (5), con campo residuo l'estensione quadratica di $\mathbb{F}_p$, cioè $\mathbb{F}_{p^2}$.

In ogni caso , poiché A è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 2, l'anello delle coordinate della fibra ha dimensione 2 come $\mathbb{F}_p$-algebra.

3.2.1 Domini di Dedekind

Definizione 3.4. Un anello A si dice *dominio di Dedekind* se è un dominio di integrità Noetheriano integralmente chiuso e di dimensione 1.

A questa classe particolare di anelli appartengono, ad esempio, gli anelli $\mathbb{Z}$ e $K[x]$. Nel caso dei domini di Dedekind valgono i seguenti fatti:

Proposizione 3.2.1. *Sia A un dominio di Dedekind.*

1. *ogni ideale $\mathfrak{p}$ di A non nullo si decompone in modo unico come prodotto*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{d_1} \dots \mathfrak{p}_r^{d_s}$$

di potenze di ideali primi.

2. *Per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A non nullo, la localizzazione $A_\mathfrak{p}$ è un dominio a ideali principali.*

Dimostrazione. Si veda [AM, 9.3, 9.4]. □

Vediamo ora come si può generalizzare il discorso appena fatto nel caso dell'estensione quadratica $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

Proposizione 3.2.2. *Sia A un dominio di Dedekind, K il campo dei quozienti di A e B la chiusura integrale di A in un'estensione finita e separabile L di K (B è ancora un dominio di Dedekind). Per ogni ideale $\mathfrak{p}$ di A non nullo consideriamo la decomposizione $\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1^{e_1} \dots \mathfrak{q}_r^{e_r}$. Allora*

$$\sum_{i=1}^{r} e_i[K(\mathfrak{q}_i) : K(\mathfrak{p})] = [L : K].$$

Gli e_i sono detti gli indici di ramificazione *degli ideali $\mathfrak{q}_i$ che giacciono sopra $\mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. Applicando il primo risultato della proposizione 3.2.1 ed utilizzando il teorema cinese del resto si ha un isomorfismo

$$B/\mathfrak{p}B \cong B/\mathfrak{q}_1^{e_1} \oplus \dots \oplus B/\mathfrak{q}_r^{e_r}.$$

Poiché ogni $\mathfrak{q}_i$, per il secondo risultato della proposizione 3.2.1, genera un ideale principale, che denotiamo (q_i) nella localizzazione $B_{\mathfrak{q}_i}$, la mappa che manda b in $q_i^j b$ induce isomorfismi

$$K(\mathfrak{q}_i) = B/\mathfrak{q}_i \to \mathfrak{q}_i^j/\mathfrak{q}_i^{j+1}$$

per ogni $j = 1, \dots, e_i - 1$.
Ne segue che $\sum_{i=1}^{r} e_i[K(\mathfrak{q}_i) : K(\mathfrak{p})]$ è uguale alla dimensione di $B/\mathfrak{p}B$ su $K(\mathfrak{p})$. Scegliamo ora degli elementi $t_1, \dots, t_n \in B$ le cui immagini $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$ in $B/\mathfrak{p}B$ costituiscono una base di $B/\mathfrak{p}B$ su $K(\mathfrak{p})$. Per il lemma di Nakayama (vedi osservazione 8) i t_i sono dei generatori di $B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ su $A_{\mathfrak{p}}$, quindi generano L su K.
Resta da vedere che sono tutti linearmente indipendenti, cioè che non sussistono relazioni non banali $\sum a_i t_i = 0$ con $a_i \in K$. Poniamo per assurdo che ne esista una. Moltiplicando per un opportuno generatore dell'ideale principale $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ possiamo assumere che gli a_i siano in A_p e che non tutti siano in $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Riducendo tutto modulo $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ otteniamo una relazione non banale a coefficienti in $K(\mathfrak{p})$, ma questo è assurdo. $\square$

Vediamo quando, in geometria algebrica, ci troviamo a lavorare con i domini di Dedekind. Se C è una curva algebrica affine integrale e non singolare su un campo K, allora il suo anello delle coordinate $K[C]$ è un dominio di Dedekind. Vediamo, infatti, in che modo si traducono algebricamente le proprietà di C: poiché C è una varietà affine il suo anello delle coordinate sarà una K-algebra finitamente generata, quindi Noetheriana; integrale, per definizione, significa che $K[C]$ è un dominio; inoltre, poiché C è una curva, $K[C]$ avrà dimensione 1 e non singolare è equivalente a normale, che, per definizione, significa che $K[C]$ è integralmente chiuso.
Consideriamo ora un morfismo $\phi : \ X \to Y$ di curve affini non singolari che corrisponde ad un'inclusione di anelli $A \hookrightarrow B$ e supponiamo che sia finito. Allora ϕ è étale su un punto chiuso $\mathfrak{p} \in Y$ se B/PB è un'algebra étale sul campo $K(\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$.
Abbiamo visto che in questo caso gli anelli A e B sono domini di Dedekind, quindi per la proposizione 3.2.1 abbiamo una decomposizione $\mathfrak{p}B = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$. Gli ideali massimali $\mathfrak{p}_i$ di B corrispondono agli addendi diretti dell'algebra $B/\mathfrak{p}B$ e, geometricamente, ai punti della fibra $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$. La condizione di essere étale su $\mathfrak{p}$ significa che $e_i = 1$ per ogni i e che le estensioni di campi $K(\mathfrak{p}) \subseteq K(\mathfrak{p}_i)$ sono tutte separabili, dove con $K(\mathfrak{p}_i)$ indichiamo $B/\mathfrak{p}_i$.

Osservazione 13. La $K(\mathfrak{p})$-algebra $B/\mathfrak{p}B$ può essere interpretata come l'anello delle funzioni regolari sulla fibra di ϕ sopra il punto $\mathfrak{p}$. Quindi se qualche e_i fosse maggiore di 1 significherebbe che ci sono funzioni nilpotenti sulla fibra.

Esempio 3.3. Sia $n > 0$ e consideriamo il morfismo

$$\begin{array}{rcl} \mu_n : \ \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \\ x & \to & x^n \end{array}$$

che corrisponde all'inclusione di anelli $\mathbb{C}[x^n] \hookrightarrow \mathbb{C}[x]$. Prendiamo un punto chiuso $\mathfrak{m} = (x - a)$ in $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$. Per verificare se μ_n è étale su $\mathfrak{m}$ denotiamo ζ una radice n-esima primitiva dell'unità e calcoliamo

$$\mathbb{C}[x]/(x^n - a)\mathbb{C}[x] \cong \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{C}[x]/(x - \zeta^i \sqrt[n]{a}) \cong \mathbb{C}^n & se\ a \neq 0 \\ \mathbb{C}[x]/(x^n) & se\ a = 0 \end{cases}$$

Vediamo che nel primo caso otteniamo un'algebra étale, nel secondo caso, invece, l'algebra è ramificata ed abbiamo, infatti, funzioni nilpotenti, come ad esempio la funzione x, sulla fibra.

Osservazione 14. È possibile tracciare un parallelo con la nozione di ramificazione per le funzioni olomorfe. Se, infatti, consideriamo un morfismo $\phi: X \to Y$ di curve affini integrali normali su $\mathbb{C}$ corrispondente ad un omomorfismo di anelli $A \to B$, si può dotare X e Y di una struttura complessa e vedere ϕ come una mappa olomorfa. Allora se $\mathfrak{p} \in Y$ è un punto chiuso ed utilizziamo la solita notazione, allora l'intero e_i equivale all'indice di ramificazione in $\mathfrak{p}_i$ di ϕ, considerata come mappa olomorfa. In particolare ϕ é étale su $\mathfrak{p}$ se e solo se come mappa olomorfa si riduce ad un ricoprimento su un intorno complesso di $\mathfrak{p}$.
Infatti per un dominio locale di dimensione 1 1a condizione di essere integralmente chiuso, e quindi un dominio di Dedekind, equivale ad essere un dominio di valutazione discreta, o equivalentemente alla condizone che il suo ideale massimale sia principale. Se prendiamo l'anello locale $\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}}$ esso è chiaramente un dominio locale di Dedekind e possiamo prendere un parametro locale t, cioè un generatore dell'ideale massimale. Allora in $\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}_i}$ chiamiamo t_i un parametro locale ed avremo $t = g_i t_i^{e_i}$, con $g_i(P_i) \neq 0$. Quindi in carte complesse ϕ risulta la mappa che manda t_i in $g_i t_i^{e_i}$ e si dimostra che ϕ può essere ricondotta localmente alla forma $z_i \to z_i^{e_i}$.

3.3 Completamento

Consideriamo una varietà affine X e sia $x \in X$ un punto non singolare con $dim_x X = n$.

Definizione 3.5. $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{O}_x$ sono detti *parametri locali* in x se ogni $u_i \in \mathfrak{m}_x$ e le immagini di $u_1, \ldots, u_n$ formano una base dello spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Utilizzando il lemma di Nakayama (vedi l'osservazione 8) si trova che i parametri locali in x sono generatori per l'ideale massimale $\mathfrak{m}_x$ di $\mathcal{O}_x$.

L'idea di associare delle serie di potenze agli elementi dell'anello locale $\mathcal{O}_x$ si basa su un'argomentazione ben precisa. Prendiamo $f \in \mathcal{O}_x$, siano $f(x) = a_o$ e $f_1 = f - a_0$, allora naturalmente $f_1 \in \mathfrak{m}_x$. Se $u_1, \ldots, u_n$ sono un sistema di parametri locali in x e sono dunque un sistema di generatori per $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, esisteranno $a_1, \ldots, a_n \in K$ tali che $f_1 - \sum_{i=1}^n a_i u_i \in \mathfrak{m}_x^2$. Poniamo $f_2 = f_1 - \sum a_1 u1$.
Poiché $f_2 \in \mathfrak{m}_x^2$ possiamo scrivere $f_2 = \sum h_j gj$ con $g_j, h_j \in \mathfrak{m}_x$ e di nuovo potremo scrivere

$$g_j - \sum b_{ji} u_i \in \mathfrak{m}_x^2$$
$$h_j - \sum c_{ji} u_i \in \mathfrak{m}_x^2.$$

Ora poniamo

$$\sum_j (\sum_i b_{ji} u_i)(\sum_i c_{ji} u_i) = \sum_{l,k=1}^n a_{lk} u_l u_k$$

e se chiamiamo $f_3 = f_2 - \sum a_{lk} u_l u_k$ avremo che $f_3 \in \mathfrak{m}_x^3$.
Continuando in questo modo troveremo delle forme $F_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$ con *deg* $F_i = i$ tali che

$$f - \sum_{i=0}^k F_i(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}.$$

Nel caso di un punto singolare $x \in X$, se prendiamo una funzione $f \in \mathcal{O}_x$ possiamo associare ad essa una sequenza di classi

$$\xi_k = f + \mathfrak{m}_x^k \in \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k.$$

Questa sequenza ha la proprietà che, se $p_{k+1} : \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{k+1} \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k$ è la mappa quoziente, allora $p_{k+1}(\xi_{k+1}) = \xi_k$ per ogni k. L'insieme di tutte le sequenze$\{\xi_k\}$ con tale proprietà forma un anello $\hat{\mathcal{O}}_x$, detto il *completamento* di $\mathcal{O}_x$. Abbiamo, dunque, appena definito un omomorfismo

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{O}_x &\to \hat{\mathcal{O}}_x \\ f &\to \{\xi_k\} \end{aligned}$$

che, nel caso il punto x sia non singolare, è un'inclusione. In questo caso vedremo che l'anello $\hat{\mathcal{O}}_x$ non è altro che l'anello delle serie di potenze formali.

Se, invece, x è singolare, l'anello $\hat{\mathcal{O}}_x$ ci dà importanti informazioni sul comportamento della varietà nel punto. Tornando al parallelo con la geometria differenziale e analitica, sappiamo che le varietà di dimensione n sono caratterizzate dal fatto che "localmente sono come $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$": in termini più precisi esiste un loro ricoprimento U_i tale che ogni U_i è isomorfo a una palla aperta in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Naturalmente non possiamo sperare in un risultato analogo in geometria algebrica, perché, come abbiamo già visto, nella topologia di Zariski gli aperti sono "troppo grandi": se trovassimo un aperto di Zariski U di una varietà affine X isomorfo ad un aperto di Zariski di $\mathbb{A}^n$, ciò implicherebbe che i campi delle funzioni sono isomorfi, cioè

$$K(X) \cong K(\mathbb{A}^n) = K(x_1, \ldots, x_n).$$

Ciò che possiamo fare, nel caso di una varietà affine non singolare X, è trovare n funzioni $f_1, \ldots, f_n$ definite in un aperto di Zariski U di X, tali che il morfismo

$$f_1 \times \ldots \times f_n : \; U \to \mathbb{A}^n$$

sia étale. Poiché, come abbiamo visto nella sezione 1.2, il teorema della funzione implicita è falso nel caso algebrico e non possiamo parlare di coordinate locali, queste funzioni possono essere considerate come il loro analogo algebrico e sono per questo dette *parametri uniformizzanti.*

Teorema 3.3.1. *Sia K un campo algebricamente chiuso e X una varietà affine non singolare di dimensione n su K. Siano $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(U)$ per qualche aperto di Zariski $U \subseteq X$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) La mappa $F = f_1 \times \ldots \times f_n : \; U \to \mathbb{A}^n$ è étale.

(ii) Per ogni punto chiuso $x \in U$ siano $t_1 = f_1 - f_1(x), \ldots, t_n = f_n - f_n(x)$; allora $t_1, \ldots, t_n$ generano m_x/m_x^2.

(iii) Per ogni punto chiuso $x \in U$ la mappa

$$\begin{aligned} K[[T_1, \ldots, T_n]] &\xrightarrow{\cong} \hat{\mathcal{O}}_x \\ T_i &\longmapsto t_i \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

(iv) $\Omega_{X/K}|_U \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X \cdot df_i$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto, vedi prop. 2.5.8, che nel caso di una mappa regolare di varietà su un campo algebricamente chiuso questa è étale se e solo se induce un isomorfismo sui completamenti. L'isomorfismo è proprio quello che manda T_i in t_i, dunque $(i) \Leftrightarrow (iii)$.
Per ogni punto chiuso $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, $\{x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\}$ genera l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di a in $\mathbb{A}^n$, quindi gli elementi $t_i = F^*(x_i - a_i)$ generano $F^*(\mathfrak{m})$. Quindi $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Infine prendiamo un punto chiuso $x \in U$; allora $\{t_1, \ldots, t_n\}$ generano $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ se e solo se $\{df_1, \ldots, df_n\}$ generano $\Omega_{X/K}$ vicino a x, cioè in qualche intorno aperto di x. Poiché $\Omega_{X/K}$ è localmente libero di rango n, deve essere necessariamente uguale a $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X \cdot df_i$. Quindi $(ii) \Leftrightarrow (iv)$. □

Definizione 3.6. Gli $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(U)$ con queste proprietà sono detti *parametri uniformizzanti* in U.

Esempio 3.4. Conderiamo in $\mathbb{A}^2(K)$, dove *char* $K \neq 2$, la curva X di equazione

$$f(x, y) = y^2(1 - x^2) - 1 = 0.$$

Allora $\Omega_{X/K}$ è generato da dx e dy con la relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

cioè $2y(1 - x^2)dy - 2y^2 x dx = 0$; poiché vale che $y \neq$ possiamo moltiplicare per $y/2$ e la relazione diventa $dy = xy^3 dx$, quindi dx da solo genera $\Omega_{X/K}$. Equivalentemente, allora, x è un parametro uniformizzante per X e la proiezione di X sull'asse x è étale.

Viceversa vale che dy genera $\Omega_{X/K}$ se e solo se $x \neq 0$, poiché allora $dx = (1/xy^3)dy$, quindi se chiamiamo $V = X \cap \{x = 0\} = \{(0,1),(0,-1)\}$ allora y è un parametro uniformizzante su $X \setminus V$ e la proiezione di X sull'asse y non è étale solo in V.

Capitolo 4

Topologia étale

Consideriamo una varietà non singolare X di dimensione n e sia $x \in X$ un punto della varietà. Sia $\{f_1, \ldots, f_n\}$ un sistema locale di parametri per X in x. Abbiamo visto che questo equivale a dire che esite un intorno aperto (per la topologia di Zariski) U tale che la mappa $(f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{A}^n$ è étale. Diamo allora la seguente definizione.

Definizione 4.1. Sia X una varietà non singolare e $x \in X$. Un *intorno étale* del punto x in X è una coppia (x', π) dove $\pi : U \to X$ è una mappa étale da una varietà non singolare U in X e x' è un punto di U tale che $\pi(x') = x$.

Nel seguito denoteremo un tale intorno anche (U, π) quando vogliamo mettere in evidenza la varietà U e la mappa π.
Dal teorema 3.3.1 si vede che se X è una varietà non singolare di dimensione n e $x \in X$, allora esiste un intorno aperto di Zariski U di x ed una mappa $\pi : U \to \mathbb{A}^n$ tale che la coppia (U, π) è un intorno étale di $(0, \ldots, 0)$ in $\mathbb{A}^n$.
Si vede subito l'analogia con la definizione delle varietà differenziabili: ogni punto di una varietà non singolare di dimensione n ha un intorno aperto che è anche un "intorno" dell'origine in $\mathbb{A}^n$. Relativamente a questa nuovi intorni, dunque, vale che due qualsiasi varietà non singolari della stessa dimensione sono localmente isomorfe (ciò ovviamente non è vero per la topologia di Zariski).
Abbiamo visto nel primo capitolo che con la topologia di Zariski il teorema

della funzione implicita non funziona. Vediamo ora un importante risultato che si trova utilizzando i nuovi intorni appena introdotti.

Teorema 4.0.2 (della funzione inversa)**.** *Sia $\phi : X \to Y$ una mappa regolare di varietà non singolari étale in $x \in X$. Allora esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccc} & U_x & \xrightarrow{i} & X & \\ \phi' & \downarrow & & \downarrow & \phi \\ & U_{\phi(x)} & \xrightarrow{j} & Y & \end{array}$$

dove U_x è un intorno aperto di U, $(U_{\phi(x)}, j)$ un intorno étale di $\phi(x)$ e ϕ' è un isomorfismo.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che se una mappa è étale in un punto, allora lo è anche in un intorno aperto del punto: ciò viene direttamente dal fatto che la condizone di non essere étale si esplicita localmente nell'annullarsi di un determinante ed è dunque una condizione "chiusa". Dunque si può certo trovare un intorno aperto U di x in X tale che la restrizione $\phi|_U$ di ϕ a U è étale.
Per ottenere, dunque, il diagramma possiamo prendere $U_x = U$, $U_{\phi(x)}$ l'intorno étale $\phi|_U : U \to Y$ di $\phi(x)$ e come ϕ' prendere l'identità. □

La nozione di intorno étale che abbiamo appena visto si può naturalmente generalizzare ad uno schema qualsiasi. Ricordiamo che un *punto geometrico* x di uno schema X è un morfismo $x : Spec\ \Omega \to X$, dove Ω è un campo algebricamente chiuso.

Definizione 4.2. Sia X uno schema e sia $x : Spec\ \Omega \to X$ un suo punto geometrico. Allora un *intorno étale* del punto x è una coppia (x', U), dove $\pi : U \to X$ è un morfismo étale e $x' : Spec\ \Omega \to U$ è un punto geometrico di U che giace sopra x, cioè tale che $\pi \circ x' = x$.

Quando X è una varietà non singolare e x un punto chiuso questa definizione coincide con quella precedente.

In modo analogo a quanto fatto con la topologia di Zariski si può definire l' *anello locale in* x' ponendo

$$\mathcal{O}_{X,x'} = \varinjlim_{(x',U)} \mathcal{O}_U(U)$$

dove il limite è calcolato sugli intorni étale affini connessi (x', U) di x'.

Bibliografia

[AM] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Westview press, Oxford, 1969.

[EH] D. Eisenbud, J. Harris *The geometry of schemes*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[Hartshorne] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[Lang] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lenstra] H. W. Lenstra. *Galois theory for schemes*, 2008. Available at http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra.

[AG] J. S. Milne. *Algebraic geometry*, 2009. Available at www.jmilne.org/math/. (v5.20)

[EC] J. S. Milne. *Etale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[LEC] J. S. Milne. *Lectures on Etale Cohomology*, 2009. Available at www.jmilne.org/math/. (v2.10)

[Matsumura] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, 1980.

[Mumford] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Springer-Verlag, Berlin, 1999 (second expanded edition).

[Reid] M. Reid, *Undergraduate commutative algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Shafarevich] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, vol. I and vol. II, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Szamuely] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.