Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Rettificabilità in gruppi di Carnot

Tesi di Laurea in Istituzioni di Analisi Superiore II

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Marco Marchi

Terza Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Introduzione

Questa tesi si occupa del problema della rettificabilità degli insiemi di codimensione 1 nei gruppi di Carnot.

Un gruppo di Carnot è un gruppo di Lie nilpotente, connesso, semplicemente connesso, la cui algebra di Lie ammette una stratificazione

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \,,$$

cioè una graduazione di spazi vettoriali compatibile con le parentesi di Lie e tale che la sottoalgebra generata da V_1 è tutta $\mathfrak{g}$.

L'intero $r \geq 1$ viene detto passo del gruppo di Carnot.

Osserviamo che nel caso particolare $r = 1$, il gruppo di Carnot è isomorfo a $(\mathbb{R}^n, +)$, cioè è uno spazio euclideo. Per questo, quando si parla di gruppi di Carnot, spesso si sottointende che il passo è maggiore di 1. Tali gruppi di Carnot sono isomorfi a $(\mathbb{R}^n, *)$ con $*$ operazione di gruppo non commutativa data dalla formula di Campbell-Hausdorff. Per una introduzione esaustiva alla teoria dei gruppi di Carnot, rinviamo a [11].

Una proprietà cruciale è che, come gli spazi euclidei, i gruppi di Carnot hanno una struttura di dilatazioni e traslazioni, che permette di trasferire dagli spazi euclidei molte nozioni di analisi.

Per introdurre la questione della rettificabilità sui gruppi di Carnot, saranno definiti alcuni concetti basilari: la distanza di Carnot-Carathéodory, la differenziabilità secondo Pansu, le funzione a variazione limitata, gli insiemi di perimetro finito, la frontiera essenziale, la frontiera ridotta, le ipersuperfici regolari.

In particolare si cerca di estendere ai gruppi di Carnot il classico teorema di rettificabilità di De Giorgi, che qui enunciamo.

Teorema di rettificabilità di De Giorgi. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito in Ω, cioè tale che la funzione caratteristica $\mathbf{1}_E$ è a variazione limitata su Ω (aperto di $\mathbb{R}^n$). Allora la frontiera essenziale $\partial_* E$ di E

è rettificabile, cioè esiste una famiglia numerabile $\{\Gamma_i\}$ di grafici di funzioni $\mathbf{C}^1$ di $n-1$ variabili tali che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) = 0\,,$$

dove $\mathcal{H}^{n-1}$ è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale.

Inoltre il perimetro di E in $\Omega' \subset \Omega$ è dato da $|\partial E|(\Omega') = \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap \Omega')$.

Il teorema permette di dare una caratterizzazione geometrica agli insiemi di perimetro finito, la cui definizione è puramente funzionale.

Richiamiamo un importante lemma al centro della teoria di De Giorgi sulla rettificabilità.

Lemma. Se C è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ sufficientemente regolare e invariante per dilatazioni (cioè C è un cono con vertice nell'origine) e se il campo vettoriale normale ν a ∂C è un campo vettoriale costante allora il cono C è un semispazio.

Questo lemma porta all'esistenza di un piano tangente approssimato in ogni punto della frontiera ridotta di un insieme di perimetro finito, che insieme a stime di densità è la chiave di molte dimostrazioni di rettificabilità. Ha senso anche nei gruppi di Carnot sostituendo le dilatazioni euclidee con quelle intrinseche del gruppo e la normale euclidea con la normale orizzontale.

In [23] questo lemma è dimostrato per i gruppi di Carnot di passo 2 ed è un punto fondamentale che porta alla dimostrazione dell'analogo del teorema di De Giorgi nei gruppi di Carnot di passo 2. Inoltre è mostrato un controesempio al lemma nel caso del gruppo di Engel (particolare gruppo di Carnot di passo 3).

Una parziale estensione di questo risultato a gruppi di Carnot di passo arbitrario è contenuta in [6], dove viene mostrato che se E è un insieme di perimetro (localmente) finito in un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{G}$ rispetto alla misura perimetro di E, qualche tangente di E in x è un semispazio verticale.

In questa tesi si dimostra che il lemma è valido per una particolare classe di gruppi di Carnot di passo arbitrario, qui detti di tipo $\star$. La loro algebra di Lie stratificata è tale che esiste una base $(X_1, \ldots, X_m)$ del primo strato V_1 per cui

$$[X_j, [X_j, X_i]] = 0 \;\text{ per }\; i, j = 1, \ldots, m\,.$$

In particolare, quindi, non sono di tipo $\star$ i gruppi di Carnot liberi di passo maggiore di 2, tutti i gruppi filiformi di passo maggiore di 2, mentre lo sono i gruppi di matrici triangolari superiori che compaiono nella decomposizione di Iwasawa del gruppo lineare.

Grazie al lemma, il teorema di rettificabilità risulta esteso a tutti i gruppi di Carnot di tipo $\star$.

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo si definiscono alcune nozioni fondamentali sui gruppi di Carnot, la differenziabilità secondo Pansu, le funzioni a variazione limitata, gli insiemi di perimetro finito, le ipersuperfici regolari e gli insiemi rettificabili.

Si suppongono noti i concetti di base sulle varietà differenziabili e i gruppi di Lie; comunque si possono trovare dei richiami rispettivamente nell'Appendice A e nell'Appendice B.

1.1 Gruppi di Carnot

Richiamiamo qualche definizione ed enunciamo i risultati preliminari sui gruppi di Carnot. Rinviamo a [11] per una presentazione generale.

Definizione 1.1 (**Gruppo di Carnot**). Un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ di passo k è un gruppo di Lie nilpotente connesso e semplicemente connesso, la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione di passo k, cioè esistono sottospazi vettoriali $V_1, \ldots, V_k$ tali che

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k, \quad [V_1, V_i] = V_{i+1}, \quad V_k \neq \{0\}, \quad V_i = \{0\} \text{ se } i > k, \quad (1.1)$$

dove $[V_1, V_i]$ è il sottospazio di $\mathfrak{g}$ generato dai commutatori $[X, Y]$ con $X \in V_1$ e $Y \in V_i$.

Osservazione 1.2. Un'algebra di Lie stratificata può ammettere più di una stratificazione. Tuttavia, date due stratificazioni $(V_1, \ldots, V_k)$ e $(W_1, \ldots, W_l)$, si verifica che $k = l$ e $\dim V_j = \dim W_j$ per $j = 1, \ldots, k$ (si veda [11] per la dimostrazione). Alcune nozioni sui gruppi di Carnot, come le traslazioni intrinseche e la dimensione omogenea, non dipendono dalla scelta della stratificazione; invece il fibrato orizzontale e le dilatazioni intrinseche dipendono da essa. Perciò, quando parleremo di gruppi di Carnot, intenderemo fissata una stratificazione dell'algebra.

Definizione 1.3 (**Base adattata alla stratificazione**). Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie con stratificazione $(V_1, \ldots, V_k)$, poniamo $m_i = \dim(V_i)$ per $i = 1, \ldots, k$ e $h_i = m_1 + \cdots + m_i$ con $h_0 = 0$ e $h_k = n$, dove n è la dimensione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale. Una base $(e_1, \ldots, e_n)$ di $\mathfrak{g}$ si dice adattata alla stratificazione se

$$e_{h_{j-1}+1}, \ldots, e_{h_j} \text{ è una base di } V_j \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, k.$$

Definizione 1.4 (**Campi vettoriali generatori**). Pensiamo a $\mathfrak{g}$ come spazio tangente a $\mathbb{G}$ nell'elemento neutro denotato con 0, e consideriamo i vettori $e_1, \ldots, e_n$ della base adattata alla stratificazione. I campi vettoriali invarianti a sinistra $X_1, \ldots, X_n$ tali che $X_i(0) = e_i$ sono detti campi vettoriali canonici.

Per (1.1), i campi $X_1, \ldots, X_{m_1}$ generano tutti i campi vettoriali invarianti a sinistra; chiamiamo $X_1, \ldots, X_{m_1}$ i *campi vettoriali generatori* del gruppo.

Definizione 1.5 (**Coordinate esponenziali**). Poichè i gruppi di Carnot sono connessi, semplicemente connessi e nilpotenti, la mappa esponenziale è un diffeomorfismo da $\mathfrak{g}$ a $\mathbb{G}$, cioè ogni $p \in \mathbb{G}$ può essere scritto in modo unico come $p = \exp(p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n)$. Usando queste *coordinate esponenziali*, identifichiamo p con la n-upla $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e identifichiamo $\mathbb{G}$ con $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ dove l'espressione esplicita dell'operazione di gruppo $\cdot$ è determinata dalla formula di Campbell-Hausdorff (si veda l'Appendice B e [21]) e alcune sue proprietà sono descritte nella Proposizione 1.9.

In termini più rigorosi, si dice che il gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è isomorfo al gruppo di Lie $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

Se $p \in \mathbb{G}$ e $i = 1, \ldots, k$, poniamo $p^i = (p_{h_{i-1}+1}, \ldots, p_{h_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}$, così possiamo identificare p anche con $[p^1, \ldots, p^k] \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} = \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.6 (**Fibrato orizzonatale**). Il sottofibrato del fibrato tangente $T\mathbb{G}$ che è generato dai campi vettoriali $X_1, \ldots, X_{m_1}$ gioca un ruolo importante nella teoria ed è chiamato il *fibrato orizzontale* $H\mathbb{G}$; le fibre di $H\mathbb{G}$ sono

$$H\mathbb{G}_x = \text{span}\,\{X_1(x), \ldots, X_{m_1}(x)\}, \qquad x \in \mathbb{G}.$$

Definizione 1.7 (**Struttura sub-riemanniana**). Su $\mathbb{G}$ è definita una struttura sub-riemanniana, dotando ogni fibra di $H\mathbb{G}$ con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ e con una norma $|\cdot|_x$ che rende ortonormale la base $X_1(x), \ldots, X_{m_1}(x)$; cioè se $v = \sum_{i=1}^{m_1} v_i X_i(x) = (v_1, \ldots, v_{m_1})$ e $w = \sum_{i=1}^{m_1} w_i X_i(x) = (w_1, \ldots, w_{m_1})$ sono in $H\mathbb{G}_x$, allora $\langle v, w \rangle_x := \sum_{j=1}^{m_1} v_j w_j$ e $|v|_x^2 := \langle v, v \rangle_x$.

Le sezioni di $H\mathbb{G}$ sono dette *sezioni orizzontali*, i vettori di $H\mathbb{G}_x$ sono detti *orizzontali*, mentre ogni vettore di $T\mathbb{G}_x$ non orizzontale è detto verticale. Ogni sezione orizzontale è identificata tramite le sue coordinate rispetto al moving frame $X_1(x), \ldots, X_{m_1}(x)$. In questo modo, una sezione orizzontale ϕ è identificata con una funzione $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{m_1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}$. Lavorando con due sezioni orizzontali ϕ e ψ, a volte tralasceremo l'indice x nel prodotto scalare scrivendo $\langle \psi, \phi \rangle$ per $\langle \psi(x), \phi(x) \rangle_x$.

Definizione 1.8 (**Traslazioni e dilatazioni intrinseche**). Per ogni $x \in \mathbb{G}$, definiamo l'applicazione $\tau_x : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ come

$$z \mapsto \tau_x z := x \cdot z.$$

La famiglia $\{\tau_x\}_{x \in \mathbb{G}}$ è detta famiglia delle traslazioni a sinistra.

Per ogni $\lambda > 0$, definiamo l'applicazione $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ come

$$\delta_\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, ..., \lambda^{\alpha_n} x_n), \tag{1.2}$$

dove $\alpha_i \in \mathbb{N}$ è l'*omogeneità della variabile* x_i in $\mathbb{G}$ (si veda [22] Capitolo 1) ed è definita come

$$\alpha_j = i \quad \text{quando } h_{i-1} + 1 \leq j \leq h_i, \tag{1.3}$$

cioè $1 = \alpha_1 = ... = \alpha_{m_1} < \alpha_{m_1+1} = 2 \leq ... \leq \alpha_n = k$.

La famiglia $\{\delta_\lambda\}_{\lambda > 0}$ è detta famiglia di dilatazioni.

Si verifica che le traslazioni e le dilatazioni appena definite sono automorfismi di $\mathbb{G}$. La dimostrazione di questo fatto per le dilatazioni segue dalla Proposizione 1.9.

Enunciamo ora alcune proprietà dell'operazione di gruppo e dei campi vettoriali canonici.

Proposizione 1.9. *L'operazione di gruppo ha la forma*

$$x \cdot y = x + y + \mathcal{Q}(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

dove $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e ogni* $\mathcal{Q}_i$ *è un polinomio omogeneo di grado* α_i *rispetto alle dilatazioni intrinseche di* $\mathbb{G}$ *definite in (1.2), cioè*

$$\mathcal{Q}_i(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^{\alpha_i} \mathcal{Q}_i(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}.$$

Inoltre, $\forall x, y \in \mathbb{G}$

$$\mathcal{Q}_1(x, y) = ... = \mathcal{Q}_{m_1}(x, y) = 0,$$

$$\mathcal{Q}_j(x, 0) = \mathcal{Q}_j(0, y) = 0 \quad e \quad \mathcal{Q}_j(x, x) = Q_j(x, -x) = 0, \quad per\, m_1 < j \leq n, \tag{1.5}$$

$$\mathcal{Q}_j(x, y) = \mathcal{Q}_j(x_1, \ldots, x_{h_{i-1}}, y_1, \ldots, y_{h_{i-1}}), \quad se \quad 1 < i \leq k \quad e \quad j \leq h_i. \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Si veda [49], Capitolo 12, Sezione 5 e [11], Osservazioni 1.4.4 e 2.2.19 e Proposizione 2.2.22. □

Notiamo che dalla Proposizione 1.9 segue che l'inverso x^{-1} di un elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, \cdot)$ ha la forma

$$x^{-1} = (-x_1, \ldots, -x_n)$$

.

Proposizione 1.10. *I campi vettoriali* X_j *hanno coefficienti polinomiali e hanno la forma*

$$X_j(x) = \partial_j + \sum_{i>h_l}^{n} q_{i,j}(x)\partial_i, \quad per\, j = 1, \ldots, n \ e\ j \leq h_l, \tag{1.7}$$

dove $q_{i,j}(x) = \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(x,y)\Big|_{y=0}$ *così se* $j \leq h_l$ *allora* $q_{i,j}(x) = q_{i,j}(x_1, ..., x_{h_{l-1}})$ *e* $q_{i,j}(0) = 0$.

Dimostrazione. Sappiamo che per $j = 1, \ldots, n$, X_j è invariante a sinistra.

$$(X_j f)(x) = \frac{\partial f(x \cdot y)}{\partial y_j}\Big|_{y=0}$$

ricordiamo la forma dell'operazione di gruppo

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i>h_l} \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(x,y)|_{y=0}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i>h_l} q_{i,j}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Infine per (1.6), $q_{i,j}(0) = \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(x,y)\Big|_{x,y=0} = 0$.

□

Definizione 1.11 (**Curva sub-unitaria**)**.** Una curva assolutamente continua $\gamma : [0,T] \to \mathbb{G}$ è una *curva sub-unitaria* rispetto a $X_1, \ldots, X_{m_1}$ se è una *curva orizzontale*, cioè se esistono funzioni reali misurabili $c_1(s), \ldots, c_{m_1}(s)$, $s \in [0,T]$ tali che

$$\dot\gamma(s) = \sum_{j=1}^{m_1} c_j(s) X_j(\gamma(s)), \quad \text{per quasi ogni } s \in [0,T],$$

e se

$$\sum_j c_j^2 \leq 1.$$

Definizione 1.12 (**Distanza di Carnot-Carathéodory**)**.** Se $p, q \in \mathbb{G}$, la loro distanza $d_c(p,q)$ è

$$d_c(p,q) = \inf\{T > 0 :\ \text{c'è una curva sub-unitaria } \gamma \text{ con } \gamma(0) = p,\ \gamma(T) = q\}.$$

L'insieme delle curve sub-unitarie che collegano p e q è non vuoto, per il teorema di Chow (Teorema 1.6.2 di [41]), poiché da (1.1), il rango dell'algebra di Lie generata da $X_1, \ldots, X_{m_1}$ è n; inoltre d_c è una distanza su $\mathbb{G}$ che induce la stessa topologia di quella indotta dalla distanza euclidea standard (si veda [43]). Denotiamo con $U_c(p,r)$ and $B_c(p,r)$ rispettivamente le palle aperte e chiuse associate a d_c.

Definizione 1.13. Più avanti, useremo un'altra distanza equivalente a quella di Carnot-Carathéodory, definita come

$$d_\infty(x,y) = d_\infty(y^{-1}\cdot x, 0),$$

dove, se $p = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} = \mathbb{R}^n$, allora

$$d_\infty(p,0) = \max\{\varepsilon_j \|p^j\|_{\mathbb{R}^{m_j}}^{1/j}, j = 1, \ldots, k\}. \tag{1.8}$$

Qui $\varepsilon_1 = 1$, e $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k \in (0,1)$ opportune costanti positive che dipendono dalla struttura del gruppo (si veda [23], Teorema 5.1).

Come sopra, denotiamo con $U_\infty(p,r)$ e $B_\infty(p,r)$ rispettivamente le palle aperte e chiuse associate a d_∞.

Proposizione 1.14. *Entrambe le metriche d_c e d_∞ si comportano bene rispetto alle traslazioni (a sinistra) e alle dilatazioni, cioè*

$$\begin{aligned} d_c(z\cdot x, z\cdot y) = d_c(x,y)\,, \quad & d_c(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda d_c(x,y) \\ d_\infty(z\cdot x, z\cdot y) = d_\infty(x,y)\,, \quad & d_\infty(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda d_\infty(x,y) \end{aligned} \tag{1.9}$$

per $x, y, z \in \mathbb{G}$ e $\lambda > 0$.

Definizione 1.15 (Misure di Hausdorff). A partire da queste distanze, si ottengono diverse misure di Hausdorff, tramite la costruzione di Carathéodory come in [20] Sezione 2.10.2; denotiamo con $\mathcal{H}^m$ la misura di Hausdorff m-dimensionale ottenuta dalla distanza euclidea in $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{G}$, con $\mathcal{H}_c^m$ la misura di Hausdorff m-dimensionale ottenuta dalla distanza d_c in $\mathbb{G}$, e con $\mathcal{H}_\infty^m$ la misura di Hausdorff m-dimensionale ottenuta dalla distanza d_∞ in $\mathbb{G}$. Analogamente, $\mathcal{S}^m$, $\mathcal{S}_c^m$, e $\mathcal{S}_\infty^m$ denotano le corrispondenti misure di Hausdorff sferiche.

Definizione 1.16 (Dimensione omogenea). L'intero

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{i=1}^{k} i \dim V_i \tag{1.10}$$

è la *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$. È anche la dimensione di Hausdorff di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla distanza d_c (si veda [40]).

Proposizione 1.17 (**Misura di Haar**). *La misura di Lebesgue n-dimensionale $\mathcal{L}^n$, è la misura di Haar del gruppo $\mathbb{G}$ (si veda [52]). Quindi se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora $\mathcal{L}^n(x \cdot E) = \mathcal{L}^n(E)$ per ogni $x \in \mathbb{G}$. Inoltre, se $\lambda > 0$ allora $\mathcal{L}^n(\delta_\lambda(E)) = \lambda^Q \mathcal{L}^n(E)$. Osserviamo che*

$$\mathcal{L}^n(U_c(p,r)) = r^Q \mathcal{L}^n(U_c(p,1)) = r^Q \mathcal{L}^n(U_c(0,1)). \tag{1.11}$$

Tutti gli spazi $L^p(\mathbb{G})$ che useremo sono definiti rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$.

La seguente proprietà di regolarità vale non solo per d_c e d_∞, ma per tutte le distanze in $\mathbb{G}$ che sono invarianti per traslazione e omogenee di grado 1 rispetto alle dilatazioni di $\mathbb{G}$ nel senso di (1.9).

Proposizione 1.18. *Sia d una distanza in $\mathbb{G}$ tale che*

$$d(z \cdot x, z \cdot y) = d(x,y) \quad , \quad d(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda d(x,y)$$

per $x, y, z \in \mathbb{G}$ e $\lambda > 0$, e denotiamo con B_d le palle chiuse relative alla distanza d. Allora

$$\operatorname{diam}_d(B_d(x,r)) = 2r, \quad \textit{per}\, r > 0; \tag{i}$$

inoltre, se μ è una misura di Radon s-omogenea per qualche $s > 0$, allora

$$\mu(\partial B_d(0,r)) = 0, \quad \textit{per}\, r > 0. \tag{ii}$$

Dimostrazione. Mostriamo il punto (i). Poiché la distanza d è invariante per traslazione e omogenea di grado 1, possiamo assumere $x = 0$ e $r = 1$. Per qualunque distanza d, $\operatorname{diam}_d\ B_d(0,1) \leq 2$. Sia $\xi = (t, 0, \dots, 0)$ tale che $d(\xi, 0) = 1$, allora per l'invarianza per traslazione, $d(0, -\xi) = 1$; quindi $\pm\xi \in B_d(0,1)$. Osserviamo che $\xi \cdot \xi = \delta_2(\xi)$ per come abbiamo definito ξ. Per l'invarianza per traslazione $d(-\xi, \xi) = d(0, \xi \cdot \xi) = d(0, \delta_2(\xi)) = 2d(0,\xi) = 2$.

Per provare (ii), è sufficiente mostrare che l'affermazione vale per almeno un $r_0 > 0$, poi si conclude la dimostrazione usando l'omogeneità. Supponiamo per assurdo che $\mu(\partial B_d(0,r)) > 0$ per ogni $r > 0$, allora l'applicazione monotona $r \to \mu(B_d(0,r))$ è discontinua in ogni punto $r > 0$, il che contraddice la proprietà delle funzioni monotone da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ di avere al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità. $\square$

1.2 Analisi in gruppi di Carnot

Vediamo ora alcuni teoremi di analisi validi nei gruppi di Carnot.

Definizione 1.19 (**$\mathbb{G}$-linearità**). Un'applicazione $L:\ \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{G}$-*lineare* se è un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{G} \equiv (\mathbb{R}^n, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$ e se è positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle dilatazioni di $\mathbb{G}$, cioè $L(\delta_\lambda x) = \lambda L x$ per $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{G}$. L'insieme $\mathbb{R}$-lineare delle applicazioni $\mathbb{G}$-*lineari* $\mathbb{G} \to \mathbb{R}$ è indicato con $\mathcal{L}_\mathbb{G}$ ed è dotato della norma

$$\|L\|_{\mathcal{L}_\mathbb{G}} := \sup\{|L(p)|:\ d_c(p,0) \le 1\}.$$

Data una base $X_1, \dots, X_n$, tutte le applicazioni $\mathbb{G}$-lineari sono rappresentate come segue.

Proposizione 1.20. *Una applicazione $L:\mathbb{G} \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{G}$-lineare se e solo se esiste $a = (a_1, \dots, a_{m_1}) \in \mathbb{R}^{m_1}$ tale che $L(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i x_i$ per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{G}$.*

Dimostrazione. Si verifica direttamente che ogni funzione L della forma $L(v) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i v_i$ è $\mathbb{G}$-lineare.

Mostriamo ora l'implicazione inversa. Ricordiamo la notazione

$$x = (x_1, \dots, x_n) = [x^1, \dots, x^k] \in \mathbb{R}^n$$

dove

$$x^j = (x_{h_{j-1}+1}, \dots, x_{h_j}) \in \mathbb{R}^{m_j}, \qquad \text{per } 1 \le j \le k.$$

Sia L $\mathbb{G}$-lineare, prima proviamo che $x = [0, x^2, \dots, x^k] \implies Lx = 0$. Osserviamo che se $1 < j \le k$

$$x = [0, \dots, 0, x^j, 0, \dots, 0] \implies Lx = 0\,, \tag{1.12}$$

perché

$$2Lx = L(x \cdot x) = L(\delta_{2^{1/\alpha_j}} x) = 2^{1/\alpha_j} Lx$$

$$\text{dove } x \cdot x = [0, \dots, 0, 2x^j, 0, \dots, 0] = \delta_{2^{1/\alpha_j}} x\,.$$

Sia ora $x = [0, x^2, \ldots, x^k]$, per (1.6) esistono $y^4, \ldots, y^k$ reali tali che

$$x = [0, x^2, \ldots, x^k] = [0, x^2, 0, \ldots, 0] \cdot [0, 0, x^3, y^4, \ldots, y^k]\,.$$

Quindi, da (1.12) otteniamo

$$L[0, x^2, \ldots, x^k] = L[0, x^2, 0, \ldots, 0] + L[0, 0, x^3, y^4, \ldots, y^k] = L[0, 0, x^3, y^4, \ldots, y^k].$$

Si riesce a provare, iterando il procedimento e sfruttando l'implicazione (1.12), che

$$L[0, x^2, \ldots, x^k] = L[0, \ldots, 0, \tilde{y}^k] = 0\,. \tag{1.13}$$

Infine consideriamo il caso $x = [x^1, \ldots, x^k]$. In modo analogo a quanto osservato precedentemente, esistono $y^3, \ldots, y^k$ reali tali che $x = [x^1, 0, \ldots, 0] \cdot [0, x^2, y^3, \ldots, y^k]$ e da (1.13) si ottiene

$$Lx = L[x^1, 0, \ldots, 0]. \tag{1.14}$$

$\mathbb{G} \cap \{x^2 = 0, \ldots, x^k = 0\} \equiv \mathbb{R}^{m_1}$ e $L|_{\mathbb{G}\cap\{x^2=0,\ldots,x^k=0\}} : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$-lineare, quindi, ricordando la rappresentazione delle funzioni lineari sugli spazi euclidei e (1.14), concludiamo che esiste $a = (a_1, \ldots, a_{m_1}) \in \mathbb{R}^{m_1}$ tale che $L(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i x_i$ per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}$. □

Definizione 1.21 (**Differenziabilità secondo Pansu**). Sia Ω un aperto in $\mathbb{G}$, allora $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è *Pansu-differenziabile* (differenziabile secondo Pansu: si veda [44] e [34]) in x_0 se esiste un'applicazione $\mathbb{G}$-lineare L tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x_0^{-1} \cdot x)}{d_c(x, x_0)} = 0.$$

Osservazione 1.22. La definizione di sopra è equivalente alla seguente: esiste un omomorfismo di gruppi L da $\mathbb{G}$ a $(\mathbb{R}, +)$ tale che

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{f(\tau_{x_0}(\delta_\lambda v)) - f(x_0)}{\lambda} = L(v)$$

uniformemente rispetto a v appartenente a compatti di $\mathbb{G}$. In particulare, L è unico e scriviamo $L = d_{\mathbb{G}} f(x_0)$. Osserviamo che questa definizione di differenziale dipende solo da $\mathbb{G}$ e non da una particolare scelta dei campi vettoriali generatori canonici. Infatti qualsiasi due distanze d_c indotte da diverse scelte di prodotti scalari (equivalenti) in $H\mathbb{G}$ cono equivalenti come distanze.

Definizione 1.23. Se Ω è un aperto in $\mathbb{G}$, denotiamo con $\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni reali continue in Ω tali che $d_{\mathbb{G}}f : \Omega \to \mathcal{L}_{\mathbb{G}}$ è continuo in Ω. Inoltre, denotiamo con $\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega, H\mathbb{G})$ l'insieme di tutte le sezioni ϕ di $H\mathbb{G}$ le cui coordinate canoniche $\phi_j \in \mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ per $j = 1, \ldots, m_1$.

Osservazione 1.24. Richiamiamo il fatto che $\mathbf{C}^1(\Omega) \subset \mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ e che l'inclusione può essere stretta, per esempio si veda l'Osservazione 6 in [26].

Definizione 1.25. Diciamo che f è *derivabile lungo* X_j, $j = 1, \ldots, m_1$, in x_0 se l'applicazione $\lambda \mapsto f(\tau_{x_0}(\delta_\lambda e_j))$ è derivabile in $\lambda = 0$, dove e_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. In tal caso scriviamo $X_j f(x_0) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_0 f(\tau_{x_0}(\delta_\lambda e_j))$ per $j = 1, \ldots, m_1$.

Definizione 1.26 (Gradiente orizzontale). Una volta che una famiglia di campi vettoriali generatori $X_1, \ldots, X_{m_1}$ è fissata, definiamo, per ogni $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ per cui le derivate parziali $X_j f$ esistono, il gradiente orizzontale di f, denotato con $\nabla_{\mathbb{G}} f$, come la sezione orizzontale

$$\nabla_{\mathbb{G}} f := \sum_{i=1}^{m_1} (X_i f) X_i$$

le cui coordinate sono $(X_1 f, ..., X_{m_1} f)$.

Definizione 1.27 (Divergenza orizzontale). Se $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{m_1})$ è una sezione orizzontale tale che $X_j \phi_j \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ per $j = 1, \ldots, m_1$, definiamo $\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\, \phi$ come la funzione a valori reali

$$\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\,(\phi) := \sum_{j=1}^{m_1} X_j \phi_j.$$

Osservazione 1.28. La notazione che abbiamo usato per il gradiente in un gruppo è parzialmente imprecisa, infatti $\nabla_{\mathbb{G}} f$ dipende veramente dalla scelta della base $X_1, ..., X_{m_1}$. Se scegliamo una base diversa, diciamo $Y_1, ..., Y_{m_1}$, allora in generale $\sum_i (X_i f) X_i \neq \sum_i (Y_i f) Y_i$. Solo se le due basi sono l'una ortonormale rispetto al prodotto scalare indotto dall'altra, abbiamo che

$$\sum_i (X_i f) X_i = \sum_i (Y_i f) Y_i.$$

Invece, la notazione $\mathrm{div}_{\mathbb{G}}$ usata per la divergenza è corretta. Infatti $\mathrm{div}_{\mathbb{G}}$ è una nozione intrinseca e può essere calcolata usando la formula precedente per qualsiasi scelta della base.

Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{G}$ e $x_0 \in \mathbb{G}$ sono dati, definiamo

$$\pi_{x_0}(x) = \sum_{j=1}^{m_1} x_j X_j(x_0).$$

L'applicazione $x_0 \to \pi_{x_0}(x)$ è una sezione liscia di $H\mathbb{G}$.

Vale la seguente proposizione dimostrata in [42] Osservazione 3.3.

Proposizione 1.29. *Se f è Pansu-differenziabile in x_0, allora è differenziabile lungo X_j in x_0 per $j = 1, \ldots, m_1$, e*

$$d_{\mathbb{G}} f(x_0)(v) = \langle \nabla_{\mathbb{G}} f, \pi_{x_0}(v) \rangle_{x_0}. \tag{1.15}$$

Proposizione 1.30. *Una funzione continua appartiene a $\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ se e solo se le sue derivate distribuzionali $X_j f$ sono continue in Ω per $j = 1, \ldots, m_1$.*

Si dimostra tramite un argomento di approssimazione, come nella Proposizione 5.8 di [26].

Osservazione 1.31. Come abbiamo osservato sopra, $\nabla_{\mathbb{G}}$ e la distanza d_c dipendono dalla scelta della famiglia generatrice canonica X_j. Ma l'*equazione eiconale* che collega le due nozioni

$$|\nabla_{\mathbb{G}} d_c(0, x)| = 1 \tag{1.16}$$

vale per quasi ogni $x \in \mathbb{G}$ rispetto a $\mathcal{L}^n$ e per tutte le famiglie generatrici (si veda il Teorema 3.1 di [42]).

Vale un teorema di estensione di Whitney, dimostrato nell'Appendice di [23].

Teorema 1.32 (Teorema di estensione di Whitney). *Sia* $F \subset \mathbb{G}$ *un chiuso, e siano* $f : F \to \mathbb{R}$, $k : F \to H\mathbb{G}$, *rispettivamente, una funzione reale continua e una sezione orizzontale continua. Poniamo*

$$R(x,y) := \frac{f(x) - f(y) - \langle k(y), \pi_y(y^{-1} \cdot x)\rangle_y}{d_c(y,x)},$$

e, se $K \subset F$ *è un compatto,*

$$\rho_K(\delta) := \sup\{|R(x,y)| : \ x, y \in K,\ 0 < d_c(x,y) < \delta\}.$$

Assumiamo

$$\rho_K(\delta) \to 0 \textit{ per } \delta \to 0 \textit{ per ogni compatto } K \subset F,$$

allora esiste $\tilde{f} : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} \in \mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$ *tale che*

$$\tilde{f}_{|F} = f, \quad \nabla_{\mathbb{G}} \tilde{f}_{|F} = k.$$

1.3 Funzioni BV e insiemi di perimetro finito

Per la teoria euclidea delle funzioni BV (funzioni a variazione limitata) e gli insiemi di perimetro finito, rinviamo a [3], [18],[31], e [53]. Per più dettagli sulla teoria nei gruppi di Carnot, si vedano [30] e [24].

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto, lo spazio delle sezioni lisce a supporto compatto di $H\mathbb{G}$ è denotato con $\mathbf{C}^\infty_0(\Omega, H\mathbb{G})$. Se $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C}^k_0(\Omega, H\mathbb{G})$ è definito in modo analogo.

Definizione 1.33. Lo spazio $BV_{\mathbb{G}}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $f \in L^1(\Omega)$ tali che

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(\Omega) := \sup\left\{\int_\Omega f(x) \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\, \phi(x)\, dx : \phi \in \mathbf{C}^1_0(\Omega, H\mathbb{G}),\ |\phi(x)|_x \le 1\right\} < \infty. \tag{1.17}$$

Lo spazio $BV_{\mathbb{G},\mathrm{loc}}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni appartenenti a $BV_{\mathbb{G}}(\mathcal{U})$ per ogni aperto $\mathcal{U} \subset\subset \Omega$.

Teorema 1.34 (**Struttura delle funzioni** $BV_{\mathbb{G}}$)**.** *Se $f \in BV_{\mathbb{G},\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$ è una misura di Radon su Ω. Inoltre, esiste una sezione orizzontale $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$-misurabile $\sigma_f : \Omega \to H\mathbb{G}$ tale che $|\sigma_f(x)|_x = 1$ per quasi tutti gli $x \in \Omega$ rispetto a $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$, e*

$$\int_\Omega f(x) \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\, \phi(x)\, dx = \int_\Omega \langle \phi, \sigma_f \rangle \, d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|,$$

per ogni $\phi \in \mathbf{C}^1_0(\Omega, H\mathbb{G})$. Infine la nozione di gradiente $\nabla_{\mathbb{G}}$ può essere estesa dalle funzioni regolari alle funzioni $f \in BV_{\mathbb{G}}$ definendo $\nabla_{\mathbb{G}} f$ come la misura vettoriale

$$\nabla_{\mathbb{G}} f := -\sigma_f \llcorner \|\nabla_{\mathbb{G}} f\| = \left(-(\sigma_f)_1 \llcorner \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|, \ldots, -(\sigma_f)_{m_1} \llcorner \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|\right),$$

dove $(\sigma_f)_j$ sono le componenti di σ_f rispetto alla base movente X_j.

L'utilità di queste definizioni per il calcolo delle variazioni è dovuta principalmente alla validità dei due teoremi seguenti. Nel contesto delle geometrie sub-riemanniane sono dimostrati rispettivamente in [30] and [24].

Teorema 1.35 (**Compattezza**)**.** *$BV_{\mathbb{G},\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ è immerso in modo compatto in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ per $1 \le p < \frac{Q}{Q-1}$ dove Q è la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$, definita in (1.10).*

Teorema 1.36 (**Semicontinuità inferiore**)**.** *Siano $f, f_k \in L^1(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, tali che $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$; allora*

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla_{\mathbb{G}} f_k\|(\Omega) \ge \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(\Omega).$$

Definizione 1.37 (**Insiemi di perimetro finito**)**.** Un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ è di $\mathbb{G}$-*perimetro (localmente) finito* in Ω (o è un *insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli*) se la funzione caratteristica $\mathbf{1}_E \in BV_{\mathbb{G},\mathrm{loc}}(\Omega)$. In questo caso chiamiamo *perimetro di E* la misura

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} := \|\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_E\| \tag{1.18}$$

e chiamiamo $\mathbb{G}$-*normale interna generalizzata* rispetto a ∂E in Ω il vettore

$$\nu_E(x) := -\sigma_{\mathbf{1}_E}(x). \tag{1.19}$$

Osservazione 1.38. Questa osservazione è analoga a quella 1.28. Il simbolo $|\partial E|_{\mathbb{G}}$ è impreciso, infatti il valore del $\mathbb{G}$-perimetro dipende dalla scelta dei campi vettoriali generatori $X_1, \dots, X_{m_1}$, precisamente nel vincolo $|\phi| \leq 1$ in (1.17). I valori dei perimetri indotti da due diverse famiglie di campo vettoriali generatori coincidono solo se le due famiglie sono mutualmente ortonormali; comunque i perimetri indotti da diverse famiglie sono equivalenti come misure, per cui la nozione di essere un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli è intrinseca (dipende solo dal gruppo $\mathbb{G}$).

Osservazione 1.39. Il $\mathbb{G}$-perimetro è invariante per le traslazioni del gruppo, cioè

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(A) = |\partial(\tau_p E)|_{\mathbb{G}}(\tau_p A), \qquad \forall p \in \mathbb{G}, \quad \text{e per ogni boreliano } A \subset \mathbb{G};$$

infatti $\mathrm{div}_{\mathbb{G}}$ è invariante per le traslazioni del gruppo e il determinante jacobiano di $\tau_p : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ è uguale a 1. Inoltre il $\mathbb{G}$-perimetro è omogeneo di grado $Q-1$ rispetto alle dilatazioni del gruppo, cioè

$$|\partial(\delta_\lambda E)|_{\mathbb{G}}(A) = \lambda^{1-Q} |\partial E|_{\mathbb{G}}(\delta_\lambda A), \quad \text{per ogni boreliano } A \subset \mathbb{G}; \tag{1.20}$$

questo fatto può essere provato cambiando variabili nella formula (1.17).

Lemma 1.40 (Localizzazione). *Siano E un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli, $x \in \mathbb{G}$ e*

$$m(\rho) := \mathcal{L}^n(E \cap U_c(x,\rho)).$$

Allora, per $\mathcal{L}^1$-q.o. $\rho > 0$, $E \cap U_c(x,\rho)$ è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli,

$$|\partial(E \cap U_c(x,\rho))|_{\mathbb{G}}(\mathbb{R}^n) \leq |\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,\rho)) + m'(\rho), \tag{1.21}$$

e

$$|\partial(E \cap U_c(x,\rho))|_{\mathbb{G}}(\partial U_c(x,\rho)) \leq m'(\rho). \tag{1.22}$$

Dimostrazione. Per $\mathcal{L}^1$-q.o. $\rho > 0$

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(\partial U_c(x,\rho)) = 0. \tag{1.23}$$

Fissiamo quindi $\rho > 0$ per cui vale (1.23). Proviamo la stima (1.21). Supponiamo di aver dimostrato che per $\sigma \in (0, +\infty)$ esistono $u_\sigma \in BV_{\mathbb{G}}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$
\begin{aligned}
&u_\sigma \to \mathbf{1}_{E \cap U_c(0,R)} \text{ in } L^1(\mathbb{R}^n), \text{ per } \sigma \to 0 \\
&u_\sigma \text{ ha supporto in } \overline{U_c(x, \rho + \sigma)} \\
&u_\sigma = \mathbf{1}_E \text{ su } U_c(x, \rho)
\end{aligned}
$$

e

$$
\|\nabla_{\mathbb{G}} u_\sigma\|(\mathbb{R}^n) \leq |\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x, \rho + \sigma)) + \frac{1}{\sigma} \int_{U_c(x,\rho+\sigma) \setminus U_c(x,\rho)} \mathbf{1}_E d\mathcal{L}^n. \qquad (1.24)
$$

Facciamo il limite per $\sigma \to 0$, applichiamo il teorema di semicontinuità inferiore alla variazione $\|\nabla_{\mathbb{G}} u_\sigma\|$ e otteniamo

$$
|\partial(E \cap U_c(x, \rho))|_{\mathbb{G}}(\mathbb{R}^n) \leq |\partial E|_{\mathbb{G}}(\overline{U_c(x, \rho)}) + m'(\rho).
$$

La stima (1.21) segue grazie a (1.23). Notiamo che qui abbiamo usato $\partial B_c(x, R) = \{y : d_c(x, y) = R\}$ come dimostrato nella Proposizione 1.18.

La costruzione di u_σ può essere ottenuta seguendo con poche modifiche quella presente nella Proposizione 3.56 di [3], sfruttando il fatto che $|\nabla_{\mathbb{G}} d_c(x, y)|_y = 1$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. $y \in \mathbb{G}$ (si veda l'equazione (1.16)).

La seconda stima (1.22) segue da (1.21), per l'additività delle misure e per la seguente proprietà generale dei perimetri

$$
|\partial(E \cap U)|_{\mathbb{G}}(U) = |\partial E|_{\mathbb{G}}(U), \qquad \text{per ogni } U \text{ aperto}, U \subset \mathbb{R}^n. \qquad (1.25)
$$

□

I due teoremi seguenti sono stati provati rispettivamente in [12] e [30].

Proposizione 1.41. *Se E è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli con frontiera $\mathbf{C}^1$ in senso euclideo, allora esiste una rappresentazione esplicita del $\mathbb{G}$-perimetro in termini della misura di Hausdorff euclidea $(n-1)$-dimensionale $\mathcal{H}^{n-1}$*

$$
|\partial E|_{\mathbb{G}}(\Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} \left(\sum_{j=1}^{m_1} \langle X_j, n \rangle_{\mathbb{R}^n}^2 \right)^{1/2} d\mathcal{H}^{n-1},
$$

dove $n = n(x)$ è la normale (euclidea) esterna rispetto a ∂E.

Le palle metriche in $\mathbb{G}$ soddisfano la seguente disuguaglianza isoperimetrica.

Proposizione 1.42 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Esiste una costante positiva $c_I > 0$ tale che per qualunque insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli E, per ogni $x \in \mathbb{G}$ e $r > 0$,*

$$\min\{\mathcal{L}^n(E \cap U_c(x,r)), \mathcal{L}^n(E^c \cap U_c(x,r))\}^{\frac{Q-1}{Q}} \leq c_I |\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,r)) \quad (1.26)$$

e

$$\min\{\mathcal{L}^n(E), \mathcal{L}^n(E^c)\}^{\frac{Q-1}{Q}} \leq c_I |\partial E|_{\mathbb{G}}(\mathbb{R}^n). \quad (1.27)$$

Se $E \subset \mathbb{G}$ definiamo la *frontiera essenziale* $\partial_{*,\mathbb{G}} E$ e la *frontiera ridotta* $\partial^*_{\mathbb{G}} E$.

Definizione 1.43 (Frontiera essenziale). Sia $E \subset \mathbb{G}$ un insieme misurabile, diciamo che $x \in \partial_{*,\mathbb{G}} E$ se

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap U_c(x,r))}{\mathcal{L}^n(U_c(x,r))} > 0 \qquad \text{e} \qquad \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(E^c \cap U_c(x,r))}{\mathcal{L}^n(U_c(x,r))} > 0.$$

Definizione 1.44 (Frontiera ridotta). Sia E un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli; diciamo che $x \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$ se

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,r)) > 0 \qquad \text{per ogni } r > 0; \quad (i)$$

$$\text{esiste} \quad \lim_{r \to 0} \fint_{U_c(x,r)} \nu_E \, d|\partial E|_{\mathbb{G}}; \quad (ii)$$

$$\left\| \lim_{r \to 0} \fint_{U_c(x,r)} \nu_E \, d|\partial E|_{\mathbb{G}} \right\|_{\mathbb{R}^{m_1}} = 1. \quad (iii)$$

Ora enunciamo il seguente lemma di differenziazione che gioca un ruolo importante nella teoria. Si osservi che questo lemma, in ambito euclideo, è una conseguenza immediata del Lemma di Lebesgue-Besicovitch, mentre nei gruppi di Carnot (dove Lebesgue-Besicovitch non vale, si veda [34] e [48]) è dovuto a una stima asintotica provata da Ambrosio in [1].

Lemma 1.45 (Lemma di differenziazione). *Sia E un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli, allora*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{U_c(x,r)} \nu_E \, d|\partial E|_{\mathbb{G}} = \nu_E(x), \qquad \textit{per } |\partial E|_{\mathbb{G}}\textit{-q.o. } x,$$

quindi $|\partial E|_{\mathbb{G}}$-q.o. $x \in \mathbb{G}$ appartiene alla frontiera ridotta $\partial^*_{\mathbb{G}} E$.

Dimostrazione. Dal Corollario 4.5 di [1]

$$\limsup_{r\to 0} \frac{|\partial E|_{\mathbb{G}}(B_c(x,2r))}{|\partial E|_{\mathbb{G}}(B_c(x,r))} < \infty \qquad \text{per } |\partial E|_{\mathbb{G}}\text{-q.o. } x \in \mathbb{G}\,. \tag{1.28}$$

Ora applichiamo 2.8.17 in [20] con $X := \mathbb{G}$, $V(X) := \{B_c(x,r) : x \in X,\, r>0\}$, $\delta(B_c(x,r)) := r/4$, $\tau := 2$, $\Phi := |\partial E|_{\mathbb{G}}$ e

$$\tilde{B}_c(x,r) := \bigcup \{B_c(y,\rho) : \rho < r,\ B_c(y,\rho) \cap B_c(x,r) \neq \emptyset\} \subseteq\ B_c(x,2r),$$

ottenendo che $V(\mathbb{G})$ è una relazione $|\partial E|_{\mathbb{G}}$-Vitali (si veda [20], 2.8.16). Allora, da 2.9.8 in [20] con $f = \nu_E$, otteniamo

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_c(x,r)} \nu_E \; d|\partial E|_{\mathbb{G}} = \nu_E(x), \qquad \text{per } |\partial E|_{\mathbb{G}}\text{-q.o. } x \in \mathbb{G}. \tag{1.29}$$

Tramite argomenti di teoria della misura, si possono sostituire le palle chiuse $B_c(x,r)$ in (1.29) con quelle aperte $U_c(x,r)$.

□

Osservazione 1.46. Proveremo più avanti che nel caso di gruppi di Carnot di tipo $\star$, come conseguenza dell'esistenza di un gruppo tangente generalizzato nei punti della frontiera ridotta (Teorema 2.5), $\partial_{*,\mathbb{G}}E \supset \partial^*_{\mathbb{G}}E$, come è vero in ambito euclideo.

Osservazione 1.47. Due distanze doubling diverse ma equivalenti su $\mathbb{G}$ danno la stessa frontiera essenziale di E mentre le rispettive frontiere ridotte indotte possono essere diverse. Ricordiamo che ci sono diverse distanze equivalenti a d_c su qualunque gruppo di Carnot; più avanti useremo anche la distanza d_∞ definita in (1.8).

Notiamo che il Lemma 1.45 vale anche se sostituiamo le palle di Carnot-Carathéodory con palle relative a una distanza equivalente. Quindi le frontiere ridotte associate a distanze equivalenti (e equivalenti a d_c) coincidono a meno di un insieme di $\mathbb{G}$-perimetro nullo.

Osservazione 1.48. La definizione di $\partial^*_{\mathbb{G}}E$ dipende solo da E e non dal particolare rappresentante ν_E visto che sono coinvolti solo dei suoi integrali. Inoltre, per il Lemma 1.45 la misura perimetro è concentrata sulla frontiera ridotta.

Osservazione 1.49. La frontiera ridotta di un insieme è invariante per le traslazioni del gruppo, cioè

$$x_0 \in \partial^*_{\mathbb{G}} E \quad \text{se e solo se} \quad \tau_x x_0 \in \partial^*_{\mathbb{G}}(\tau_x E)$$

e anche

$$\nu_E(x_0) = \nu_{\tau_x E}(\tau_x x_0).$$

Il seguente lemma fornisce informazioni preliminari sulla regolarità della frontiera di un insieme di perimetro finito vicino ai punti della sua frontiera ridotta.

Lemma 1.50 (Stime di densità). *Sia E un insieme di Caccioppoli in $\mathbb{G}$ e $x \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$. Allora esistono tre costanti positive $c_i = c_i(\mathbb{G}) > 0$, $i = 1, 2$ e $\rho_0 = \rho_0(x) > 0$ tali che*

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,\rho)) \leq c_1 \rho^{Q-1}, \qquad 0 < \rho < \rho_0 \tag{1.30}$$

$$\mathcal{L}^n(E \cap U_c(x,\rho)) \geq c_2 \rho^Q, \qquad 0 < \rho < \rho_0. \tag{1.31}$$

Dimostrazione. Poiché $x \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$, esiste $\rho_0 > 0$ tale che

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,\rho)) \leq 2\|\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_E(U_c(x,\rho))\|_{\mathbb{R}^{m_1}}, \qquad \text{per ogni } \rho \leq 2\rho_0. \tag{1.32}$$

Per q.o. $\rho \in (0, 2\rho_0)$ valgono sia $|\partial(E \cap U_c(x,\rho))|_{\mathbb{G}} < \infty$ sia (1.22). Per questi ρ abbiamo

$$\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{E \cap U_c(x,\rho)}(U_c(x,\rho)) = -\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{E \cap U_c(x,\rho)}(\partial U_c(x,\rho)), \tag{1.33}$$

perché $\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{E \cap U_c(x,\rho)}(\mathbb{R}^n) = 0$ e $\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{E \cap U_c(x,\rho)}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{U_c(x,\rho)}) = 0$. Allora, da (1.25), (1.33) e (1.22),

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_E(U_c(x,\rho))\|_{\mathbb{R}^{m_1}} &= \|\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{E \cap U_c(x,\rho)}(U_c(x,\rho))\|_{\mathbb{R}^{m_1}} \\ &= \|\nabla_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{E \cap U_c(x,\rho)}(\partial U_c(x,\rho))\|_{\mathbb{R}^{m_1}} \\ &= |\partial(E \cap U_c(x,\rho))|_{\mathbb{G}}(\partial U_c(x,\rho)) \\ &\leq m'(\rho). \end{aligned}$$

Da (1.32) segue

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,\rho)) \leq 2m'(\rho), \qquad \text{per q.o. } \rho \in (0, 2\rho_0). \tag{1.34}$$

Ora integriamo (1.34) da ρ a 2ρ, usiamo il fatto che $|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,\rho))$ è non decrescente e che $m'(\rho) > 0$, per ottenere

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,\rho)) \leq 2\frac{m(2\rho)}{\rho} \leq 2^{Q+1}\mathcal{L}^n(U_c(0,1))\rho^{Q-1}$$

da cui si ha (1.30) con $c_1 = 2^{Q+1}\mathcal{L}^n(U_c(0,1))$.

Dalla disuguaglianza (1.42) e dal precedente lemma di localizzazione otteniamo, per quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$,

$$\begin{aligned} m(\rho)^{\frac{Q-1}{Q}} &\leq c_I|\partial(E \cap U_c(x,\rho))|_{\mathbb{G}}(\mathbb{R}^n) \\ &\leq c_I\left(|\partial E|_{\mathbb{G}}((\cap U_c(x,\rho))) + m'(\rho)\right) \\ &\leq 3c_I m'(\rho), \end{aligned}$$

quindi

$$(m(\rho)^{\frac{1}{Q}})' \geq \frac{1}{3c_I Q}, \quad \text{per q.o. } \rho \in (0, 2\rho_0)$$

e allora

$$m(\rho) \geq c_2\rho^Q \qquad \forall \rho \in (0, 2\rho_0).$$

□

1.4 Ipersuperfici regolari, insiemi rettificabili e teorema della funzione implicita

Definiamo le ipersuperfici $\mathbb{G}$-regulari in un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$.

Definizione 1.51. $S \subset \mathbb{G}$ è una *ipersuperficie* $\mathbb{G}$*-regulare* se per ogni $x \in S$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x e una funzione $f \in \mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\mathcal{U})$ tale che

$$S \cap \mathcal{U} = \{y \in \mathcal{U} : f(y) = 0\}; \tag{i}$$

$$\nabla_{\mathbb{G}} f(y) \neq 0 \quad \text{per } y \in \mathcal{U}. \tag{ii}$$

Definizione 1.52. $\Gamma \subset \mathbb{G}$ è detto ((*$Q-1$)-dimensionale*) *$\mathbb{G}$-rettificabile* se esiste una successione di ipersuperfici $\mathbb{G}$-regolari $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\mathcal{H}_c^{Q-1}\left(\Gamma \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j\right) = 0. \tag{1.35}$$

Definizione 1.53. Se $S = \{x : f(x) = 0\} \subset \mathbb{G}$ è una ipersuperficie $\mathbb{G}$-regolare, il *gruppo tangente* $T^g_{\mathbb{G}}S(x)$ a S in x è

$$T^g_{\mathbb{G}}S(x) := \{v \in \mathbb{G} : \langle \nabla_{\mathbb{G}} f(x), \pi_x v\rangle_x = 0\}.$$

$T^g_{\mathbb{G}}S(x)$ è un sottogruppo proprio di $\mathbb{G}$. Possiamo definire il *piano tangente* a S in x come

$$T_{\mathbb{G}}S(x) := x \cdot T^g_{\mathbb{G}}S(x).$$

Notiamo che questa è una buona definizione. Infatti il piano tangente non dipende dalla particolare funzione f che definisce la superficie S, per il punto (*iii*) del teorema della funzione implicita che enunciamo sotto e permette di scrivere il gruppo tangente come

$$T^g_{\mathbb{G}}S(x) = \{v \in \mathbb{G} : \langle \nu_E(x), \pi_x v\rangle_x = 0\}$$

dove ν_E è la normale interna generalizzata definita in (1.19). Notiamo anche che, ancora dal punto (*iii*) del Teorema 1.56, segue che ν_E è una funzione continua.

Osservazione 1.54. Notiamo che la classe delle ipersuperci $\mathbb{G}$-regulari è diversa dalla classe delle superfici C^1 euclidee immerse in $\mathbb{R}^n$. Da un lato superfici $\mathbb{G}$-regolari possono avere degli "spigoli" perchè la continuità delle derivate della funzione f (che definisce la superficie) è richiesta solo nelle direzioni orizzontali; dall'altro lato una superficie C^1 euclidea può avere i cosiddetti punti caratteristici, cioè punti $p \in S$ dove il piano tangente euclideo T_pS contiene la fibra orizzontale $H\mathbb{G}_p$.

Definizione 1.55. Se S è una ipersuperficie $\mathbf{C}^1$ euclidea in $\mathbb{G}$, definiamo l'insieme caratteristico di S come

$$\mathcal{C}(S) := \{x \in S : H\mathbb{G}_x \subseteq T_xS\}. \tag{1.36}$$

I punti di $\mathcal{C}(S)$ sono punti irregolari di S; infatti il gruppo tangente non esiste in questi punti.

A questo proposito, citiamo alcuni risultati noti sull'insieme caratteristico:

- in [17] si prova che, per una frontiera regolare S, $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{C}(S)) = 0$;
- in [29] si prova che, per una frontiera S di classe $\mathbf{C}^\infty$, $\mathcal{C}(S)$ è contenuto localmente in una unione finita di sottovarietà di dimensione $n-2$ e, in particolare, $\mathcal{H}^{n-2}(\mathcal{C}(S)) < \infty$;
- in [8] si prova che, per le ipersuperfici S di classe $\mathbf{C}^1$ dei gruppi di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, $\mathcal{H}_c^{Q-1}(\mathcal{C}(S)) = 0$;
- in [23] si estende il risultato precedente ai gruppi di passo 2;
- in [37] si prova lo stesso risultato per gruppi di Carnot qualunque.

Quest'ultimo risultato sarà utile, alla fine del Capitolo 2, per dimostrare il Corollario 2.19.

Enunciamo il seguente teorema della funzione implicita, dimostrato in [27].

Teorema 1.56 (**Teorema della funzione implicita**). *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, e sia $f \in \mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ tale che $f(0) = 0$ e $X_1 f(0) > 0$. Definiamo*

$$E = \{x \in \Omega : f(x) < 0\}, \quad S = \{x \in \Omega : f(x) = 0\},$$

e, per $\delta > 0$, $h > 0$

$$I_\delta = \{\xi = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, |\xi_j| \leq \delta\}, \qquad J_h = [-h, h].$$

Se $\xi = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t \in J_h$, denotiamo con $\gamma(t, \xi)$ la curva integrale del campo vettoriale X_1 al tempo t di punto iniziale $(0, \xi) = (0, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, cioè

$$\gamma(t, \xi) = \exp(tX_1)(0, \xi).$$

Allora esistono $\delta, h > 0$ tali che l'applicazione $(t, \xi) \to \gamma(t, \xi)$ è un omemorfismo da un intorno di $J_h \times I_\delta$ a un aperto di $\mathbb{R}^n$, e, se denotiamo con $\mathcal{U} \subset\subset \Omega$

l'immagine di $\mathrm{Int}(J_h \times I_\delta)$ *attraverso questa applicazione, abbiamo*

$$E \text{ ha } \mathbb{G}\text{-perimetro finito in } \mathcal{U}; \qquad (i)$$

$$\partial E \cap \mathcal{U} = S \cap \mathcal{U}; \qquad (ii)$$

$$\nu_E(x) = -\frac{\nabla_{\mathbb{G}} f(x)}{|\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|_x} \text{ per ogni } x \in S \cap \mathcal{U}, \qquad (iii)$$

dove ν_E *è la normale interna generalizzata definita in (1.19). Inoltre, esiste un'unica funzione*

$$\phi = \phi(\xi) : I_\delta \to J_h$$

per cui valga la seguente parametrizzazione: se $\xi \in I_\delta$ *e poniamo* $\Phi(\xi) = \gamma\,(\phi(\xi), \xi)$, *allora*

$$S \cap \widetilde{\mathcal{U}} = \{x \in \widetilde{\mathcal{U}} : x = \Phi(\xi), \xi \in I_\delta\}; \qquad (iv)$$

$$\phi \text{ è continua}; \qquad (v)$$

il $\mathbb{G}$*-perimetro ha una rappresentazione integrale*

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \int_{I_\delta} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |X_j f(\Phi(\xi))|^2}}{X_1 f(\Phi(\xi))}\, d\xi. \qquad (vi)$$

Capitolo 2

Struttura degli insiemi di perimetro finito

Nello studio dell'argomento di questo capitolo è fondamentale il *Teorema di Blow-up* enunciato più avanti, che è stato dimostrato per gruppi di Carnot di passo 2 in [23], ma non è vero in generale per gruppi di Carnot qualunque di passo maggiore di 2, come si può vedere dall'esempio 2.6. Tuttavia, in questa tesi si estende la validità del *Teorema di Blow-up* ad una classe più ampia di gruppi di Carnot, caratterizzati dalla proprietà enunciata nella Definizione 2.1. Il fatto interessante è che, per ogni scelta di passo, si trovano sempre gruppi di Carnot che stanno nella classe, la quale contiene in particolare tutti i gruppi di passo 2.

Definizione 2.1 (Gruppi di Carnot di tipo $\star$). Diciamo che un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è di tipo $\star$ se la sua algebra di Lie stratificata $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ è tale che esiste una base $(X_1, \dots, X_m)$ di V_1 per cui

$$[X_j, [X_j, X_i]] = 0 \;\text{ per }\; i, j = 1, \dots, m \tag{2.1}$$

In tal caso diciamo anche che $\mathfrak{g}$ è di tipo $\star$.

Osservazione 2.2. La definizione appena data è ben posta, cioè è invariante per isomorfismi di algebre di Lie che mantengono la stratificazione.

Risulta chiaro che ogni gruppo di Carnot di passo 2 è di tipo $\star$ e che ogni gruppo di Carnot libero di passo maggiore di 2 non è di tipo $\star$. Inoltre, se un gruppo di Carnot di passo maggiore di 2 è di tipo $\star$, allora ha una famiglia di almeno 3 campi vettoriali generatori; quindi il gruppo di Engel (per la cui definizione si veda l'Esempio 2.6) non è di tipo $\star$.

Definizione 2.3 (**Algebra di Lie libera**)**.** Siano $m \geq 2$ e $r \geq 1$ interi fissati. Diciamo che $\mathfrak{f}_{m,r}$ è l'algebra di Lie libera con m generatori $x_1, \ldots, x_m$ e nilpotente di passo r se:

(i) $\mathfrak{f}_{m,r}$ è un'algebra di Lie generata dai suoi elementi $x_1, \ldots, x_m$, cioè

$$\mathfrak{f}_{m,r} = \mathrm{Lie}\{x_1, \ldots, x_m\};$$

(ii) $\mathfrak{f}_{m,r}$ è nilpotente di passo r;

(iii) per ogni algebra di Lie $\mathfrak{n}$ nilpotente di passo r e per ogni applicazione $\varphi : \{x_1, \ldots, x_m\} \to \mathfrak{n}$, esiste un unico omomorfismo di algebre di Lie $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{f}_{m,r} \to \mathfrak{n}$ che estende φ.

Fissati m e r, $\mathfrak{f}_{m,r}$ è unica a meno di isomorfismi; inoltre se $\mathfrak{f}_{m,r}$ è isomorfa a $\mathfrak{f}_{m',r'}$ allora $m = m'$ e $r = r'$. L'esistenza di $\mathfrak{f}_{m,r}$ è provata in [50].

Un gruppo di Carnot si dice libero se la sua algebra di Lie è libera.

Osservazione 2.4. Si potrebbe pensare che l'algebra di Lie di un gruppo di tipo $\star$ non contenga sottoalgebre filiformi di passo maggiore di 2 (si veda la Sottosezione 4.3.6 di [11] per la definizione di algebra di Lie filiforme); invece ne può contenere. Ad esempio, prendiamo l'algebra libera di passo 3 con 3 generatori e la quozientiamo con l'ideale generato da $[X_j, [X_j, X_i]]$ con $i, j = 1, 2, 3$. Ovviamente l'algebra quoziente ottenuta è di tipo $\star$. Consideriamo la sottoalgebra $\mathrm{Lie}\{X_1 + X_2, X_3\}$ di tale algebra quoziente e verifichiamo che è filiforme di passo 3.

$$\begin{aligned}
[X_1 + X_2, X_3] &= [X_1, X_3] + [X_2, X_3] \\
[X_1 + X_2, [X_1 + X_2, X_3]] &= [X_2, [X_1, X_3]] + [X_1, [X_2, X_3]] \\
[X_3, [X_1 + X_2, X_3]] &= 0.
\end{aligned}$$

Fissiamo ora alcune notazioni. Per ogni insieme $E \subset \mathbb{G}$, $x_0 \in \mathbb{G}$ e $r > 0$ consideriamo gli insiemi traslati e dilati E_{r,x_0} definiti come

$$E_{r,x_0} = \{x : x_0 \cdot \delta_r(x) \in E\} = \delta_{\frac{1}{r}} \tau_{x_0^{-1}} E.$$

Se x_0 è fissato e non c'è ambiguità, scriveremo semplicemente E_r, e in aggiunta poniamo $E_{x_0} = E_{1,x_0}$. Inoltre se $v \in H\mathbb{G}_{x_0}$ definiamo i semispazi $S^+_{\mathbb{G}}(v)$ e $S^-_{\mathbb{G}}(v)$ come

$$\begin{aligned} S^+_{\mathbb{G}}(v) &:= \{x : \langle \pi_{x_0} x, v\rangle_{x_0} \geq 0\} \\ S^-_{\mathbb{G}}(v) &:= \{x : \langle \pi_{x_0} x, v\rangle_{x_0} \leq 0\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La comune frontiera topologica $T^g_{\mathbb{G}}(v)$ di $S^+_{\mathbb{G}}(v)$ e di $S^-_{\mathbb{G}}(v)$ è il sottogruppo di $\mathbb{G}$

$$T^g_{\mathbb{G}}(v) := \{x : \langle \pi_{x_0} x, v\rangle_{x_0} = 0\}.$$

Teorema 2.5 (**Teorema di Blow-up**). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di tipo $\star$. Se E è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli, $x_0 \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$ e $\nu_E(x_0) \in H\mathbb{G}_{x_0}$ è la normale interna definita in (1.19) allora*

$$\lim_{r\to 0} \mathbf{1}_{E_{r,x_0}} = \mathbf{1}_{S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(x_0))} \qquad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G}) \tag{2.3}$$

e per ogni $R > 0$

$$\lim_{r\to 0} |\partial E_{r,x_0}|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)) = |\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(x_0))|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)). \tag{2.4}$$

Notiamo che, per la Proposizione 1.41,

$$|\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(x_0))|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)) = \mathcal{H}^{n-1}(T^g_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)) \cap U_c(0,R)).$$

Prima della dimostrazione del Teorema 2.5, diamo un esempio che mostra la sua perdita di validità nel gruppo di Engel (particolare gruppo di Carnot di passo 3).

Mostriamo che nel suddetto gruppo possono esistere coni (cioè insiemi invarianti per dilatazione) che non sono piatti (non sono della forma $S^{\pm}_{\mathbb{G}}(v)$ per qualche vettore orizzontale v) pur avendo il vertice appartenente alla frontiera ridotta.

Esempio 2.6. Richiamiamo la definizione dell'algebra e del gruppo di Engel. Sia $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^4, \cdot)$ il gruppo di Carnot la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$

con $V_1 = \text{span}\,\{X_1, X_2\}$, $V_2 = \text{span}\,\{X_3\}$, and $V_3 = \text{span}\,\{X_4\}$, i loro unici commutatori non nulli sono

$$[X_1, X_2] = -X_3 \quad , \quad [X_1, X_3] = -X_4.$$

In coordinate esponenziali l'operazione di gruppo ha la forma

$$x \cdot y = H(\sum_{i=1}^{4} x_i X_i, \sum_{i=1}^{4} y_i X_i),$$

dove H è data dalla formula di Campbell-Hausdorff

$$H(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}\left([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]\right). \tag{2.5}$$

In coordinate esponenziali una rappresentazione esplicita dei campi vettoriali è

$$X_1 = \partial_1 + \frac{x_2}{2}\partial_3 + (\frac{x_3}{2} - \frac{x_1 x_2}{12})\partial_4 \quad , \quad X_2 = \partial_2 - \frac{x_1}{2}\partial_3 + \frac{x_1^2}{12}\partial_4$$
$$X_3 = \partial_3 - \frac{x_1}{2}\partial_4 \quad , \quad X_4 = \partial_4.$$

Sia $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, f(x) \geq 0\}$, dove

$$f(x) = \frac{1}{6}x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}x_1 x_3 + x_4.$$

Poiché $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, f(x) = 0\}$ è una varietà euclidea liscia, E è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli (si veda la Proposizione 1.41). Inoltre,

$$\nabla_{\mathbb{E}} f(x) = \big(0, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\big),$$

e, per il teorema della funzione implicita (Teorema 1.56),

$$\nu_E(x) = -\frac{\nabla_{\mathbb{E}} f(x)}{|\nabla_{\mathbb{E}} f(x)|} = (0, -1)$$

per ogni $x \in \partial E \setminus N$, dove $N = \{x \in \mathbb{E} \,:\, x_1 = x_2 = 0\}$. Visto che $|\partial E|_{\mathbb{E}}(N) = 0$, l'origine appartiene alla frontiera ridotta di E. D'altra parte, visto che $f(\delta_\lambda x) = \lambda^3 f(x)$ for $\lambda > 0$, $E_{\lambda,0} = \delta_\lambda E = E$, così l'uguaglianza (2.3) è falsa poiché E non è un semispazio verticale.

La dimostrazione del *Teorema di Blow-up* è la stessa che si trova in [23], a parte il Lemma 3.2, qui esteso al caso di gruppi di Carnot di tipo $\star$ e chiamato Proposizione 2.12. Per provarla è necessario il Lemma 2.10, che mostra un'importante proprietà delle algebre di Lie di tipo $\star$. Ripercorriamo tutti i punti della dimostrazione del Teorema di Blow-up, provando in particolare la Proposizione 2.12.

Dimostrazione del Teorema di Blow-up 2.5.

Senza perdita di generalità, è possibile assumere $x_0 = 0 \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$.
È sufficiente provare che, data ogni successione $\{r_k\}_k$ con $r_k \to 0$, esiste una sottosuccessione $\{s_j\}_j \subset \{r_k\}_k$ tale che

$$\lim_{j \to +\infty} \mathbf{1}_{E_{s_j}} = \mathbf{1}_{S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))}$$

in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$ e che $\forall R > 0$

$$\lim_{j \to +\infty} |\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}(U_c(0, R)) = \mathcal{H}^{n-1}(T^g_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)) \cap U_c(0, R));$$

notiamo l'uso della misura di Hausdorff euclidea nella precedente formula.

La dimostrazione di questi fatti è divisa in alcuni passi.

Affermazione 2.7. *Esiste un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli F tale che*

$$\lim_{j \to +\infty} \mathbf{1}_{E_{s_j}} = \mathbf{1}_F, \quad \textit{in } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G}). \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Fissiamo $R > 0$, allora l'omogeneità del perimetro (si veda (1.20)) dà

$$|\partial E_r|_{\mathbb{G}}(U_c(0, R)) = \frac{|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(0, rR))}{r^{Q-1}}, \qquad \forall r > 0. \tag{2.7}$$

Per il Lemma 1.50 il secondo membro è limitato da una costante indipendente da r quando $0 < r < \rho_0/R$. Segue che per ogni $R > 0$ e $0 < r < \rho_0/R$

$$|\partial E_r|_{\mathbb{G}}(U_c(0, R)) \leq c_1.$$

Inoltre

$$\|\mathbf{1}_{E_r}\|_{L^1(U_c(0,R))} = \mathcal{L}^n(E_r \cap U_c(0, R)) \leq \mathcal{L}^n(U_c(0, R)),$$

quindi per il Teorema di compattezza 1.35, esistono una successione $s_j \to 0$ e una funzione $f \in BV_{\mathbb{G},\text{loc}}(\mathbb{G})$ tale che

$$\mathbf{1}_{E_{s_j}} \to f, \qquad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G}).$$

Passando ad una sottosuccessione, possiamo assumere che la successione precedente converga puntualmente $\mathcal{L}^n$-q.o. a f, così esiste un insieme misurabile $F \subset \mathbb{G}$ tale che $f = \mathbf{1}_F$. Per la semicontinuità della variazione (si veda il Teorema 1.36),

$$|\partial F|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)) \leq \liminf_{j\to\infty} |\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)) \leq c_1 < \infty$$

per ogni $R > 0$. Quindi F è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli, cioè $\mathbf{1}_F \in BV_{\mathbb{G},\text{loc}}(\mathbb{G})$. In particolare, per il Teorema 1.34, per ogni $\phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{G}, H\mathbb{G})$

$$-\int_F \operatorname{div}_{\mathbb{G}} \phi \, dx = \int_{\mathbb{G}} \langle \nu_F, \phi \rangle \, d|\partial F|_{\mathbb{G}}. \tag{2.8}$$

Questo conclude la dimostrazione dell'affermazione.

Affermazione 2.8. *ν_F è un campo vettoriale invariante a sinistra, precisamente*

$$\nu_F(x) = \nu_E(0) \qquad \textit{per } |\partial F|_{\mathbb{G}}\textit{-q.o. } x,$$

dove l'identità significa uguaglianza delle coordinate rispetto al moving frame X_j. In particolare questo implica che F è indipendente dalla successione $\{s_j\}_j$.

Dimostrazione.

Visto che $\mathbf{1}_{E_{s_j}} \to \mathbf{1}_F$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$ per $j \to +\infty$, abbiamo

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{E_{s_j}} \operatorname{div}_{\mathbb{G}} \phi \, dx = \int_F \operatorname{div}_{\mathbb{G}} \phi \, dx$$

per ogni $\phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{G}, H\mathbb{G})$ e, poiché sia E_{s_j} sia F sono insiemi $\mathbb{G}$-Caccioppoli,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{G}} \langle \phi, \nu_{E_{s_j}} \rangle \, d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = \int_{\mathbb{G}} \langle \phi, \nu_F \rangle \, d|\partial F|_{\mathbb{G}}$$

cioè

$$\nu_{E_{s_j}} |\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} \rightharpoonup \nu_F |\partial F|_{\mathbb{G}}, \qquad \text{per } j \to +\infty,$$

debolmente come misure di Radon vettoriali. Segue che per ogni boreliano $B \subset \mathbb{G}$ per il quale $|\partial F|_{\mathbb{G}}(\partial B) = 0$

$$\lim_{j\to+\infty} \int_B \nu_{E_{s_j}} \, d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = \int_B \nu_F \, d|\partial F|_{\mathbb{G}}. \tag{2.9}$$

Inoltre, ancora da (2.7),

$$|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)) = \frac{1}{s_j^{Q-1}}\,|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(0,s_jR)) \tag{2.10}$$

e, ancora per ogni $\phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{G}, H\mathbb{G})$,

$$\int\limits_{U_c(0,R)} \langle \phi, \nu_{E_{s_j}}\rangle \; d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = \frac{1}{s_j^{Q-1}} \int\limits_{U_c(0,s_jR)} \langle \phi\circ\delta_{\frac{1}{s_j}}, \nu_E\rangle \; d|\partial E|_{\mathbb{G}}$$

da cui otteniamo, tramite una procedura di limite in ϕ,

$$\int\limits_{U_c(0,R)} \nu_{E_{s_j}} \; d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = \frac{1}{s_j^{Q-1}} \int\limits_{U_c(0,s_jR)} \nu_E \; d|\partial E|_{\mathbb{G}}. \tag{2.11}$$

Da (2.10) e (2.11) ricaviamo

$$\fint_{U_c(0,R)} \nu_{E_{s_j}} \; d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = \fint_{U_c(0,s_jR)} \nu_E \; d|\partial E|_{\mathbb{G}}.$$

Per $j \to +\infty$, il secondo membro ha limite $\nu_E(0)$, perché $0 \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$; quindi

$$\int\limits_{U_c(0,R)} \nu_{E_{s_j}} \; d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = (1+o(1))\; \nu_E(0)|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R))$$

e

$$\int\limits_{U_c(0,R)} \langle \nu_E(0), \nu_{E_{s_j}}\rangle \; d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}} = (1+o(1))\; |\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)). \tag{2.12}$$

Infine, per la semicontinuità del perimetro,

$$|\partial F|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R)) \le \liminf_{j\to+\infty} |\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}(U_c(0,R))$$

e da (2.12)

$$= \liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{U_c(0,R)} \langle \nu_E(0), \nu_{E_{s_j}}\rangle_{\mathbb{R}^{m_1}} \; d|\partial E_{s_j}|_{\mathbb{G}}$$

da (2.9) e per ogni $R > 0$ tale che $|\partial F|_{\mathbb{G}}(\partial U_c(0,R)) = 0$,

$$= \int\limits_{U_c(0,R)} \langle \nu_E(0), \nu_F\rangle_{\mathbb{R}^{m_1}} \; d|\partial F|_{\mathbb{G}};$$

si noti che $|\partial F|_{\mathbb{G}}(\partial U_c(0,R)) = 0$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $R > 0$. Questo conclude la dimostrazione perché $|\langle \nu_E(0), \nu_F(x)\rangle| \le 1$, mentre $|\langle \nu_E(0), \nu_F(x)\rangle| = 1$ precisamente quando $\nu_F(x) = \nu_E(0)$.

Affermazione 2.9. *Esiste $q \in \mathbb{G}$ tale che*

$$F = \tau_q(S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)))$$

Dimostrazione. Sia $\zeta \in \mathbb{R}^{m_1}$, consideriamo il campo vettoriale invariante a sinistra

$$L_\zeta := \sum_{j=1}^{m_1} \zeta_j X_j$$

e la funzione test $\phi \in \mathbf{C}^1_0(\mathbb{G}, H\mathbb{G})$ le cui coordinate canoniche sono $\psi\ \zeta$ con $\psi \in \mathbf{C}^1_0(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ arbitraria. Allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_F L_\zeta \psi \, dx &= \int_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_F \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\, \phi \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{G}} \langle \phi, \nu_F \rangle \, d|\partial F|_{\mathbb{G}} = -\int_{\mathbb{G}} \psi \langle \zeta, \nu_F \rangle \, d|\partial F|_{\mathbb{G}}\end{aligned}$$

Poiché $\nu_F(x) = \nu_E(0)$ per ogni x, deduciamo che (nel senso delle distribuzioni)

$$\begin{cases} L_\zeta \mathbf{1}_F = 0 & \text{se} \quad \langle \zeta, \nu_E(0) \rangle_{\mathbb{R}^{m_1}} = 0 \\ L_\zeta \mathbf{1}_F \geq 0 & \text{se} \quad \zeta = \nu_E(0). \end{cases} \tag{2.13}$$

Quindi per terminare la dimostrazione ci resta da mostrare che (2.13) implica: $\mathbf{1}_F$ è costante lungo le curve integrali di L_ζ quando ζ è ortogonale a ν_F, mentre è crescente lungo le curve integrali di L_ζ quando $\zeta = \nu_F$. Questo è dimostrato nella Proposizione 2.12. Osserviamo che è proprio questa che non vale per qualunque gruppo di Carnot; ad esempio non vale né per il gruppo di Engel (come si vede all'interno dell'Esempio 2.6) né per i gruppi di Carnot liberi di passo maggiore di 2 (Esempio 2.13).

Lemma 2.10. *Sia $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ l'algebra di Lie stratificata di un gruppo di Carnot di tipo $\star$, allora data una qualunque base $(Y_1, \ldots, Y_m)$ di V_1 si ha:*

$$[Y_1, [Y_1, Y_p]] = \sum_{j>1} \alpha_{pij} [Y_j, [Y_j, Y_i]] + \sum_{k \neq j, k \neq i} \beta_{pijk} [Y_k, [Y_j, Y_i]]$$

per $p = 2, \ldots, m$. ($\alpha_{pij}, \beta_{pijk} \in \mathbb{R}$)

Osservazione 2.11. La prima somma contiene i commutatori "con ripetizione", mentre la seconda i commutatori "senza ripetizione". Il lemma asserisce che un commutatore in cui è ripetuto un indice (ad esempio il primo) si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti commutatori con ripetizione e dei commutatori senza ripetizione.

Dimostrazione.

Sia $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ una base qualunque di V_1. Ricordiamo che

$$V_3 = \text{span}\{[Y_k, [Y_j, Y_i]] \mid i, j, k = 1, \ldots, m\}.$$

Sia ora $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ una base di V_1 per cui vale (2.1) e sia

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Y_j \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.14}$$

la relazione tra le due basi. Indichiamo con A la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $i \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $a_{i1} \neq 0$, perché $\det A \neq 0$. Quindi possiamo riordinare la base $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, in modo tale che $a_{11} \neq 0$. Ovviamente vale ancora (2.1). In particolare, ricordiamo le relazioni

$$\begin{cases} [X_1, [X_1, X_2]] = 0 \\ \ldots \\ [X_1, [X_1, X_m]] = 0 \end{cases}$$

Effettuando le sostituzioni date da (2.14) si ha

$$\begin{cases} \sum_{i,j,k} a_{1k} a_{1j} a_{2i} [Y_k, [Y_j, Y_i]] = 0 \\ \ldots \\ \sum_{i,j,k} a_{1k} a_{1j} a_{mi} [Y_k, [Y_j, Y_i]] = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto delle relazioni di antisimmetria, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=2}^{m} (a_{11} a_{11} a_{2i} - a_{11} a_{21} a_{1i}) [Y_1, [Y_1, Y_i]] + \sum_k \alpha_{2k} Z_k = 0 \\ \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{m} (a_{11} a_{11} a_{mi} - a_{11} a_{m1} a_{1i}) [Y_1, [Y_1, Y_i]] + \sum_k \alpha_{mk} Z_k = 0 \end{cases}$$

dove Z_k sono tutti i restanti commutatori di lunghezza 3.

Consideriamo la sottomatrice dei coefficienti $(m-1) \times (m-1)$ che si ottiene considerando tutte le righe e le prime $m-1$ colonne e denotiamola con M.

$$M = (a_{11} m_{ij})_{i,j=1,\dots,m-1} \quad m_{ij} = a_{i+1,j+1} a_{1,1} - a_{i+1,1} a_{1,j+1}$$

Osserviamo che m_{ij} sono i minori di ordine 2 che si ottengono orlando a_{11}. Mostriamo che M è invertibile.

$$\det M = (a_{11})^{m-1} \det (m_{ij})_{i,j=1,\dots,m-1}$$

Per il Teorema 3.6.1 *Chio's pivotal condensation* di [19]

$$\det (m_{ij})_{i,j=1,\dots,m-1} = (a_{11})^{m-2} \det A$$

Quindi sostituendo sopra si ottiene

$$\det M = (a_{11})^{2m-3} \det A \neq 0$$

Riscriviamo ora il sistema precedente portando al secondo membro tutti i termini contenti i commutatori Z_k.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=2}^{m} a_{11}(a_{11}a_{2j} - a_{21}a_{1j})[Y_1, [Y_1, Y_j]] = -\sum_k \alpha_{2k} Z_k \\ \dots \\ \displaystyle\sum_{j=2}^{m} a_{11}(a_{11}a_{mj} - a_{m1}a_{1j})[Y_1, [Y_1, Y_j]] = -\sum_k \alpha_{mk} Z_k \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare a coefficienti reali e variabili vettoriali appartenenti a V_3, spazio vettoriale di dimensione finita. Possiamo ragionare sulle componenti delle variabili rispetto a una base qualunque di V_3 ottenendo un sistema lineare a coefficienti reali e variabili reali.

Denotiamo con U_i la i-ma componente di un vettore U. Otteniamo allora

$$M \begin{pmatrix} ([Y_1, [Y_1, Y_2]])_i \\ \dots \\ ([Y_1, [Y_1, Y_m]])_i \end{pmatrix} = -\sum_k (Z_k)_i \begin{pmatrix} \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ([Y_1, [Y_1, Y_2]])_i \\ \dots \\ ([Y_1, [Y_1, Y_m]])_i \end{pmatrix} = -\sum_k (Z_k)_i \; M^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}$$

Da qui segue immediatamente la tesi del lemma.

Proposizione 2.12. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di tipo $\star$ e siano $Y_1, \ldots, Y_{m_1}$ sezioni ortonormali invarianti a sinistra di $H\mathbb{G}$. Supponiamo che $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ soddisfi*

$$Y_1 g \geq 0 \quad e \quad Y_j(g) = 0 \quad se \quad j = 2, \ldots, m_1. \tag{2.15}$$

Allora le linee di livello di g sono "iperpiani verticali ortogonali a Y_1" cioè insiemi che sono traslazioni (intrinseche) di

$$S(Y_1) := \{p : \langle \pi_0 p, Y_1(0) \rangle = 0\}.$$

Prima di dimostrarlo, vediamo che non vale per i gruppi di Carnot liberi di passo maggiore di 2.

Esempio 2.13. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di carnot libero di passo $r > 2$, allora la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è libera con un numero di generatori $m \geq 2$ e passo r. C'è un metodo generale descritto nella Sezione 14.1 di [11] che permette di costruire una base di $\mathfrak{g}$ detta base di Hall e poi, interpretando gli elementi di tale base come campi vettoriali di $\mathbb{G}$, permette di scriverli in coordinate (che in generale non saranno coordinate esponenziali). Denotiamo con n la dimensione di $\mathfrak{g}$ e indichiamo con $X_1, X_2, \ldots, X_m$ i primi m elementi della base di Hall, che sono generatori di $\mathfrak{g}$. Per il metodo di costruzione della base di Hall, in essa compare anche $[[X_2, X_1], X_1]$ che chiamiamo X_k. Per il Teorema 14.1.10 di [11], risulta che i campi vettoriali X_j per $j = 1, \ldots, n$ hanno coefficienti polinomiali e in particolare

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{(x_1)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} + \ldots + a_{2,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Inoltre in X_3,. . .,X_m non compare $\frac{\partial}{\partial x_k}$, mentre

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \ldots + a_{k,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Consideriamo l'applicazione da $\mathbb{G}$ a $\mathbb{R}$ definita come $g(x_1, \ldots, x_n) := x_k$. Si ha che

$$X_1 g = 0, \quad (X_2 g)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(x_1)^2}{2} \geq 0, \quad X_3 g = \ldots = X_m g = 0$$

ma $X_k g = 1$. Quindi, non vale la Proposizione 2.12 per i gruppi di Carnot liberi di passo maggiore di 2.

Dimostrazione della Proposizione 2.12. Proviamo la proposizione assumendo che g sia liscia e poi recuperiamo il caso generale approssimando g tramite la convoluzione del gruppo. Si veda in proposito [22].

Denotiamo con $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ l'algebra di Lie stratificata di $\mathbb{G}$. Omettiamo l'indice 1 da m_1 per semplicità. Osserviamo che $Y_1, \ldots, Y_m$ formano una base di V_1.

$$Y_1 = \sum a_{1i} X_i \, , \ \ldots \ , \ Y_m = \sum a_{mi} X_i \tag{2.16}$$

con $(X_1, \ldots, X_m)$ base di V_1 che rispetta (2.1) e denotiamo con A la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0 \tag{2.17}$$

Ricordiamo che, per ipotesi, $Y_1 g \geq 0$, $Y_2 g = 0$, $\ldots$, $Y_m g = 0$. Se applichiamo i campi vettoriali del sistema (2.16) alla funzione g otteniamo

$$\begin{pmatrix} Y_1 g(x) \\ \ldots \\ Y_m g(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 g(x) \\ \ldots \\ X_m g(x) \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{G}$$

Da (2.17) A è invertibile, quindi la controimmagine di $\{(t, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ rispetto ad A è una retta di $\mathbb{R}^m$.

$$A^{-1}\{(t, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{\lambda k \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}^m, k \neq 0\}$$

Poiché $k = (k_1, \ldots, k_m) \neq 0$, almeno una delle sue componenti è non nulla e supponiamo per semplicità che sia $k_m \neq 0$. Inoltre, inglobando una costante moltiplicativa in λ, si può assumere $k_m = 1$. Osserviamo che la natura geometrica del problema è indipendente da $x \in \mathbb{G}$, quindi il vettore k è costante.

Se indichiamo con A_j la j-esima riga di A, risulta che

$$\langle A_1, k \rangle \neq 0 \, ; \tag{2.18}$$

infatti, per come abbiamo definito k, $\langle A_j, k \rangle = 0$ per $j = 2, \ldots, m$ e non può succedere che $\langle A_1, k \rangle$ sia 0 perché il prodotto tra la matrice invertibile A e il vettore non nullo k è un vettore non nullo.

Per le considerazioni fatte, risulta che $X_i g(x) = \lambda k_i$ per $i = 1, \ldots, m$. Per $i = m$ diventa $\lambda = X_m g(x)$, da cui $X_i g(x) = k_i X_m g(x)$ per $i = 1, \ldots, m$.

Ora $Y_1 g(x) = \langle A_1, k\rangle X_m g(x)$. Ricordando che $Y_1 g(x) \geq 0$ e che vale (2.18), possiamo concludere che $X_m g(x) \geq 0$ oppure $X_m g(x) \leq 0$.

Per terminare la dimostrazione è sufficiente provare che $Zg = 0$ per ogni $Z \in V_l$ con $l = 2, \ldots, r$; infatti, ricordando la scrittura in coordinate dei campi vettoriali canonici che si trova nella Proposizione 1.10, si può concludere che $g = g(x_1, \ldots, x_m)$ e da (2.15) segue la tesi.

Sia dunque $Z \in V_2$. Allora

$$Z = \sum_{i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}} \alpha_{i_1, i_2} [X_{i_1}, X_{i_2}] \qquad (\alpha_{i_1, i_2} \in \mathbb{R})$$

dove $X_{i_1} g = k_{i_1} X_m g$, $X_{i_2} g = k_{i_2} X_m g$ e $X_m g \geq 0$ (oppure $X_m g \leq 0$).

Nel caso $k_{i_1} = k_{i_2} = 0$ si conclude banalmente $[X_{i_1}, X_{i_2}] g = 0$, invece se almeno uno dei due è diverso da zero, ad esempio $k_{i_1} \neq 0$, si ha $X_m g = (k_{i_1})^{-1} X_{i_1} g$ da cui

$$X_{i_2} g = k_{i_2} (k_{i_1})^{-1} X_{i_1} g \qquad \text{con } X_{i_1} g \geq 0 \text{ oppure } X_{i_1} g \leq 0. \tag{2.19}$$

Per ipotesi $[X_j, [X_j, X_i]] = 0$ con $i, j = 1, \ldots, m$, quindi

$$\operatorname{span}\{X_{i_1}, X_{i_2} - k_2 (k_1)^{-1} X_{i_1}, [X_{i_1}, X_{i_2}]\}$$

è chiuso rispetto alle parentesi di Lie ed è un'algebra isomorfa a quella del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ (supponendo che $[X_{i_1}, X_{i_2}]$ non sia identicamente nullo, ma in caso contrario non ci sarebbe nulla da dimostrare). Indichiamo con $\mathfrak{h}$ l'algebra di $\mathbb{H}^1$. Vale il seguente fatto, dimostrato all'interno della prova del Lemma 3.6 di [23]:

> se $\tilde{X}_1$,$\tilde{X}_2 \in \mathfrak{g}$ sono tali che $\tilde{X}_1 g \geq 0$, $\tilde{X}_2 g = 0$ e
> $\tilde{\mathfrak{g}} := \operatorname{span}\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]\}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ isomorfa ad $\mathfrak{h}$,
> allora $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] g = 0$.

Quindi, ricordando (2.19) e quanto appena detto, possiamo concludere che $[X_{i_1}, X_{i_2}] g = 0$. Quindi abbiamo dimostrato che $Zg = 0$ per ogni $Z \in V_2$.

Ora, per ragionare sui campi vettoriali del terzo strato, usiamo la base $(Y_1, \ldots, Y_m)$ di V_1. Poiché è una base, per ogni $W \in V_3$ esistono $Z_j \in V_2$ tali che $W = \sum_{i,j} \beta_{ij} [Y_i, Z_j]$.

Se $i = 2, \ldots, m$ allora $[Y_i, Z_j] g = 0$, in quanto $Z_j g = 0$ e $Y_i g = 0$.

Analizziamo il caso $i = 1$. Z_j può essere scritto come combinazione lineare di due tipi di commutatori: $[Y_1, Y_k]$ e $[Y_l, Y_i]$, con $l \neq 1$ e $i \neq 1$. Quindi otteniamo, omettendo per semplicità l'indice j da Z_j,

$$[Y_1, Z] = \sum_k \gamma_k [Y_1, [Y_1, Y_k]] + \sum_{l \neq 1,\, i \neq 1} \lambda_{li} [Y_1, [Y_l, Y_i]].$$

Inoltre, per il Lemma 2.10,

$$[Y_1, [Y_1, Y_k]] = \sum_{j>1} \kappa_{kij} [Y_j, [Y_j, Y_i]] + \sum_{l \neq j, l \neq i} \theta_{kijl} [Y_l, [Y_j, Y_i]].$$

$[Y_j, [Y_j, Y_i]]$ (con $j > 1$) rientra nel caso $[Y_j, Z]$ con $j > 1$ e $Z \in V_2$, mentre i commutatori $[Y_l, [Y_j, Y_i]]$ ($l \neq j, l \neq i$) e $[Y_1, [Y_l, Y_i]]$ ($l \neq 1$, $i \neq 1$) si riconducono allo stesso caso tramite l'identità di Jacobi.

Cioè abbiamo dimostrato che per ogni $W \in V_3$ esistono $Z_j \in V_2$ tali che W è combinazione lineari dei commutatori $[Y_l, Z_j]$ (con $l > 1$). Da questo segue subito che, per ogni $W \in V_3$, $Wg = 0$.

Per completare la dimostrazione per gli altri strati, proviamo che per ogni $k \geq 3$ vale la seguente affermazione:

$$\begin{aligned}&\text{per ogni } W \in V_k \text{ esistono } Z_j \in V_{k-1},\ \tilde{Z}_{i_1} \in V_h \text{ e } \hat{Z}_{i_2} \in V_{k-h}\ (2 \leq h \leq k-2)\\ &\text{tali che } W \text{ è combinazione lineare dei commutatori } [Y_l, Z_j]\ (l > 1) \text{ e}\\ &[\tilde{Z}_{i_1}, \hat{Z}_{i_2}].\end{aligned} \tag{2.20}$$

Applichiamo l'induzione su k. Abbiamo appena visto il caso $k = 3$. Supponiamo che l'affermazione valga per $k \leq n - 1$ ($n \geq 4$), mostriamo che vale per $k = n$.

Per ogni $W \in V_n$, esistono $Z_i \in V_{n-1}$ tali che W è combinazione lineare dei commutatori $[Y_j, Z_i]$ con $j = 1, \ldots, m$. Gli unici commutatori su cui lavorare per dimostrare (2.20) sono quelli con $j = 1$.

Ma ogni $Z_i \in V_{n-1}$ è combinazione lineare di commutatori della forma $[Y_l, \tilde{Z}]$ (con $\tilde{Z} \in V_{n-2}$ e $l > 1$) e $[Z_1, Z_2]$ (con $Z_1 \in V_h$, $Z_2 \in V_{n-1-h}$, $2 \leq h \leq n - 3$), quindi possiamo ricondurre $[Y_1, Z_i]$ a combinazioni lineare di commutatori della forma

$$[Y_1, [Y_l, \tilde{Z}]] = -[\tilde{Z}, [Y_j, Y_l]] - [Y_l, [\tilde{Z}, Y_j]]$$

e

$$[Y_1, [Z_1, Z_2]] = -[Z_1, [Z_2, Y_1]] - [Z_2, [Y_1, Z_1]]$$

Quindi (2.20) vale per ogni $k \geq 3$.

Da esso segue che $Zg = 0$ per ogni $Z \in V_k$, con $k \geq 3$.

Questo conclude la dimostrazione della proposizione e quindi dell'Affermazione 2.9.

Affermazione 2.14. *Il punto q dell'Affermazione 2.9 può essere scelto uguale all'origine, cioè*

$$F = S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))$$

Dimostrazione.

Basta provare che $\langle \pi_0 q, \nu_E(0)\rangle_0 = 0$, da cui segue che $\tau_q S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)) = S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))$.

Da (1.31), poiché $0 \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$, esiste $k = k(\mathbb{G}) > 0$ tale che

$$\liminf_{r\to 0}\ \min\left\{\frac{\mathcal{L}^n(E\cap U_c(0,r))}{\mathcal{L}^n(U_c(0,r))}, \frac{\mathcal{L}^n(E^c\cap U_c(0,r))}{\mathcal{L}^n(U_c(0,r))}\right\} = k. \tag{2.21}$$

Suponiamo per assurdo che $\langle \pi_0 q, \nu_E(0)\rangle_0 > 0$ allora, se $0 < \bar{r} < \langle \pi_0 q, \nu_E(0)\rangle_0$, chiaramente $U_c(0,\bar{r}) \cap \tau_q(S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))) = \emptyset$. Invece, dalle Affermazioni 2.8, 2.9 e da (2.21) segue che

$$\mathcal{L}^n(U_c(0,\bar{r})\cap\tau_q(S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)))) = \lim_{j\to+\infty}\mathcal{L}^n(U_c(0,\bar{r})\cap E_{s_j}) \geq k\ \mathcal{L}^n(U_c(0,\bar{r})) > 0.$$

Se assumiamo $\langle \pi_0 q, \nu_E(0)\rangle_0 < 0$ si giunge a contraddizione lavorando con E^c. Questo conclude la dimostrazione dell'affermazione, cioè del punto (2.3) del Teorema di Blow-up.

La seconda parte del Teorema di Blow-up è il punto (iii) del lemma seguente.

Lemma 2.15. *Sia $p \in \partial^*_{\mathbb{G}} E$, allora*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(p,r)\cap E\cap\tau_p S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(p))\right)}{\mathcal{L}^n(U_c(p,r))} = 0 \tag{i}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(p,r)\cap E^c\cap\tau_p S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(p))\right)}{\mathcal{L}^n(U_c(p,r))} = 0 \tag{ii}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(p,r))}{r^{Q-1}} = |\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(p))|_{\mathbb{G}}(U_c(0,1)). \tag{iii}$$

Osserviamo che le palle aperte $U_c(p,r)$ possono essere sostituite da quelle chiuse $B_c(p,r)$.
In aggiunta, (i), (ii), (iii) valgono ancora quando sostituiamo le palle della metrica d_c con quelle relative a d_∞, se p appartiene alla frontiera ridotta costruita con la distanza d_∞ (si veda l'osservazione 1.47).

Dimostrazione. Possiamo assumere $p = 0$, poiché ci si riconduce al caso generale per traslazione. Vale che

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(U_c(0,r)\cap E\cap S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)))}{\mathcal{L}^n(U_c(0,r))} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathcal{L}^n(U_c(0,1))}\int_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{U_c(0,1)}\mathbf{1}_{E_r}\mathbf{1}_{S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))}\, d\mathcal{L}^n$$
$$= \frac{1}{\mathcal{L}^n(U_c(0,1))}\int_{\mathbb{G}} \mathbf{1}_{U_c(0,1)}\mathbf{1}_{S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))}\mathbf{1}_{S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))}\, d\mathcal{L}^n = 0.$$

Questo prova (i) e anche (ii) sostituendo E con E^c. Per dimostrare (iii) osserviamo che dall'omogeneità del perimetro otteniamo

$$\lim_{r\to 0}\frac{|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(0,r))}{r^{Q-1}} = \lim_{r\to 0}|\partial E_r|_{\mathbb{G}}(U_c(0,1)).$$

Seguendo gli stessi calcoli visti per l'affermazione 2.8

$$\nu_{E_r}\,|\partial E_r|_{\mathbb{G}} \rightharpoonup \nu_E(0)\,|\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))|_{\mathbb{G}} = \nu_E(0)\,(\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial S^+_{\mathbb{G}}). \tag{2.22}$$

L'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione 1.41. Ora, dal punto (ii) della Proposizione 1.18, con $d = d_c$ e $\mu = |\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))|_{\mathbb{G}} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)))$, abbiamo

$$|\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))|_{\mathbb{G}}(\partial U_c(0,1)) = 0.$$

Segue che

$$\lim_{r\to 0}\int_{U_c(0,1)}\nu_{E_r}\, d|\partial E_r|_{\mathbb{G}} = \nu_E(0)\int_{U_c(0,1)} d|\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))|_{\mathbb{G}}. \tag{2.23}$$

Infine, da $0\in\partial^*_{\mathbb{G}}E$, otteniamo che per $r\to 0$

$$\int_{U_c(0,1)}\nu_{E_r}\, d|\partial E_r|_{\mathbb{G}} = (1+o(1))\,\nu_E(0)\,|\partial E_r|_{\mathbb{G}}(U_c(0,1))$$

che insieme a (2.23) dà

$$\lim_{r\to 0}|\partial E_r|_{\mathbb{G}}(U_c(0,1)) = |\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))|_{\mathbb{G}}(U_c(0,1))$$
$$= \mathcal{H}^{n-1}(\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0))\cap U_c(0,1)).$$

Assumiamo ora che p appartenga alla frontiera ridotta associata alla distanza d_∞ (come evidenziato nell'osservazione 1.47, questo è vero per $|\partial E|_{\mathbb{G}}$-q.o. punto p). Se sostituiamo ora le palle relative a d_c con quelle della metrica d_∞, allora (i) e (ii) seguono direttamente da quello che abbiamo appena dimostrato, visto che d_c e d_∞ sono distanze doubling equivalenti rispetto a $\mathcal{L}^n$. L'ultima uguaglianza segue per le palle di d_∞ ripetendo le argomentazioni precedenti, poiché, dal punto *(ii)* della Proposizione 1.18, con $d = d_\infty$ e $\mu = |\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(p))|_{\mathbb{G}} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(p)))$, abbiamo

$$|\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(p))|_{\mathbb{G}}(\partial U_\infty(0,1)) = 0.$$

Questo conclude la dimostrazione del lemma e del Teorema di Blow-up.

□

Teorema 2.16 (**Struttura degli insiemi $\mathbb{G}$-Caccioppoli**). *Se $E \subseteq \mathbb{G}$ è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli, allora*

$$\partial^*_{\mathbb{G}} E \text{ è } (Q-1)\text{-dimensionale } \mathbb{G}\text{-rettificabile,} \tag{i}$$

cioè $\partial^*_{\mathbb{G}} E = N \cup \bigcup_{h=1}^\infty K_h$, dove $\mathcal{H}^{Q-1}_c(N) = 0$ e K_h è un sottoinsieme compatto di una ipersuperficie $\mathbb{G}$-regulare S_h;

$$\nu_E(p) \text{ è la } \mathbb{G}\text{-normale a } S_h \text{ in } p, \text{ per ogni } p \in K_h; \tag{ii}$$

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} = \theta_c \mathcal{S}^{Q-1}_c \llcorner \partial^*_{\mathbb{G}} E, \tag{iii}$$

dove

$$\theta_c(x) = \frac{1}{\omega_{Q-1}} \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(x)) \cap U_c(0,1)\right).$$

ω_k è la misura k-dimensionale della palla k-dimensionale in $\mathbb{R}^k$. Se sostituiamo la misura $\mathcal{S}_c$ con la misura $\mathcal{S}_\infty$, la corrispondente densità θ_∞ risulta essere una costante. Più precisamente

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} = \theta_\infty\, \mathcal{S}^{Q-1}_\infty \llcorner \partial^*_{\mathbb{G}} E, \tag{iv}$$

dove

$$\theta_\infty = \frac{\omega_{m_1-1}\omega_{m_2}\varepsilon_2^{m_2} \dots \omega_{m_k}\varepsilon_k^{m_k}}{\omega_{Q-1}} = \frac{1}{\omega_{Q-1}} \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(0)) \cap U_\infty(0,1)\right).$$

Qui ε_i sono le costanti che compaiono in (1.8) e k è il passo di $\mathbb{G}$.

Dimostrazione. Dati i nostri risultati precedenti, la dimostrazione segue un noto schema che può essere trovato in [3], [31], [18]. Qui accenniamo il procedimento seguendo il Teorema 2, Sezione 5.7.3 di [18].

Grazie ai teoremi di Lusin e Egoroff, possiamo partizionare $\partial^*_{\mathbb{G}} E$ come

$$\partial^*_{\mathbb{G}} E = N \cup \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h.$$

Qui $|\partial E|_{\mathbb{G}}(N) = 0$ e ogni K_h è un compatto su cui ν_E è continuo e tale che i limiti nel Lemma 2.15 valgono uniformemente. Abbiamo i seguenti limiti uniformi per $q \in K_h$:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(q,r) \cap E \cap \tau_q S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(q))\right)}{\mathcal{L}^n(U_c(q,r))} \to 0, \quad \text{per } r \to 0; \\ &\frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(q,r) \cap E^c \cap \tau_q S^+_{\mathbb{G}}(\nu_E(q))\right)}{\mathcal{L}^n(U_c(q,r))} \to 0, \quad \text{per } r \to 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Quindi le prime due parti del teorema sono dimostrate mostrando che ogni K_h è contenuto in una superficie $\mathbb{G}$-regolare S_h la cui $\mathbb{G}$-normale coincide, su K_h, con ν_E. Questo è una conseguenza del teorema di estensione di Whitney. Definiamo

$$k_c = \inf \left\{ \frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(0,r) \cap S^+_{\mathbb{G}}(v)\right)}{\mathcal{L}^n\left(U_c(0,r)\right)} : \quad v \in H\mathbb{G}_0 \right\}.$$

Grazie all'invarianza per traslazione, se $p \in \mathbb{G}$, allora

$$k_c = \inf \left\{ \frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(p,r) \cap \tau_p S^+_{\mathbb{G}}(v)\right)}{\mathcal{L}^n\left(U_c(p,r)\right)} : \quad v \in H\mathbb{G}_p \right\}.$$

Osserviamo che se usiamo invece le palle U_∞, che sono invarianti per rotazioni dello spazio orizzontale $\mathbb{R}^{m_1}$, la costante corrispondente k_∞ è $k_\infty = 1/2$ (come negli spazi euclidei). Qui possiamo solo dire che

$$0 < k_c \leq 1/2.$$

La positività di k_c è essenziale per le nostre considerazioni e segue banalmente dalla comparabilità di d_c e d_∞. Allora da (2.24), otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$

esiste $\overline{r}(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $r \in (0, \overline{r}(\varepsilon))$, e per ogni $q \in K_h$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n\left(U_c(q,r) \cap E \cap \tau_q S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(q))\right) < \varepsilon \mathcal{L}^n\left(U_c(q,r)\right) \\ \mathcal{L}^n\left(U_c(q,r) \cap E^c \cap \tau_q S^-_{\mathbb{G}}(\nu_E(q))\right) > (k_c - \varepsilon)\mathcal{L}^n\left(U_c(q,r)\right).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Affermazione 2.17. *Definiamo* $\varrho_h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *come*

$$\varrho_h(t) := \sup\left\{\frac{|\langle \nu_E(p), \pi_p(p^{-1}\cdot q)\rangle_p|}{d_c(p,q)} : \quad p,q \in K_h,\ 0 < d_c(p,q) < t\right\};$$

allora

$$\varrho_h(t) \to 0 \quad \textit{per}\ t \to 0.$$

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esistano $\sigma \in (0,1)$ e $p, q \in K_h$ tali che

$$\langle \nu_E(p), \pi_p(p^{-1}\cdot q)\rangle_p > \sigma d_c(p,q), \tag{2.26}$$

oppure $\langle \nu_E(p), \pi_p(p^{-1}\cdot q)\rangle_p < -\sigma d_c(p,q)$. In entrambi i casi è facile vedere che

$$U_c(q_i, \frac{\sigma}{2} d_c(p,q_i)) \subset U_c(p, 2d_c(p,q_i)) \cap \tau_p S^-(\nu_E(p)). \tag{2.27}$$

Quindi, da (2.25) e (2.27), se $d_c(p,q_i) < \overline{r}(\varepsilon)$ segue che

$$\begin{aligned}\varepsilon\mathcal{L}^n\left(U_c(p, 2d_c(p,q_i))\right) &> \mathcal{L}^n\left(E \cap U_c(p, 2d_c(p,q_i)) \cap \tau_p S^-(\nu_E(p))\right) \\ &> \mathcal{L}^n\left(E \cap U_c(q_i, \frac{\sigma}{2} d_c(p,q_i))\right) \\ &> (k_c - \varepsilon)\mathcal{L}^n\left(U_c(q_i, \frac{\sigma}{2} d_c(p,q_i))\right).\end{aligned}$$

Questo porta ad una contraddizione se ε è così piccolo che

$$\frac{k_c - \varepsilon}{\varepsilon} > \frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(p, 2d_c(p,q_i))\right)}{\mathcal{L}^n\left(U_c(q_i, \frac{\sigma}{2} d_c(p,q_i))\right)} = \frac{\mathcal{L}^n\left(U_c(0,2)\right)}{\mathcal{L}^n\left(U_c(0,\frac{\sigma}{2})\right)}.$$

Questo conclude la dimostrazione dell'affermazione.

Ora applichiamo il teorema di estensione di Whitney 1.32 con $f = 0$ e $k = \nu_E$, per ottenere l'esistenza di una funzione $\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}$ $\tilde{f}_h : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}_h = 0$ e $|\nabla_{\mathbb{G}} \tilde{f}_h| \neq 0$ su K_h. Poi definiamo

$$S_h := \left\{p \in \mathbb{G} : \tilde{f}_h(p) = 0 \text{ e } |\nabla_{\mathbb{G}} \tilde{f}_h(p)| \neq 0\right\}.$$

Questo conclude la prova dei punti (*i*) e (*ii*).

Dimostriamo (*iii*) e (*iv*).

Dal Lemma 1.45 otteniamo

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} = |\partial E|_{\mathbb{G}} \llcorner \partial^*_{\mathbb{G}} E. \tag{2.28}$$

Dal Lemma 2.15 (*iii*), segue

$$\Theta_c^{*\,Q-1}(|\partial E|_{\mathbb{G}}, p) := \limsup_{r\to 0} \frac{|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(p,r))}{\omega_{Q-1} r^{Q-1}} = \theta_c, \qquad \text{per ogni } p \in \partial^*_{\mathbb{G}} E, \tag{2.29}$$

e

$$\Theta_\infty^{*\,Q-1}(|\partial E|_{\mathbb{G}}, p) := \limsup_{r\to 0} \frac{|\partial E|_{\mathbb{G}}(U_\infty(p,r))}{\omega_{Q-1} r^{Q-1}} = \theta_\infty, \qquad \text{per ogni } p \in \partial^*_{\mathbb{G}} E. \tag{2.30}$$

Da risultati classici di teoria della misura (si vedano ad esempio i teoremi 2.10.17(2) e 2.10.19(3) nel libro di Federer [20]), (2.29) e (2.30) seguono (*iii*) e (*iv*).

□

Il seguente teorema di divergenza è conseguenza del Teorema 2.16, ma evidenziamo il fatto che la frontiera essenziale compare nell'identità (ii). Come negli spazi euclidei, vale direttamente il corrispondente enunciato per la frontiera ridotta. Comunque, lavoriamo nel caso della frontiera essenziale perché risulta più semplice ed è indipendente dalla scelta della metrica (si veda l'osservazione 1.47).

Teorema 2.18 (Teorema di divergenza). *Sia E un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli, allora*

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} = \theta_\infty\, \mathcal{S}_\infty^{Q-1} \llcorner \partial_{*,\mathbb{G}} E, \tag{i}$$

e vale la seguente versione del teorema di divergenza

$$-\int_E div_{\mathbb{G}}\phi \; d\mathcal{L}^n = \theta_\infty \int_{\partial_{*,\mathbb{G}} E} \langle \nu_E, \phi\rangle \; d\mathcal{S}_\infty^{Q-1}, \qquad \forall \phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{G}, H\mathbb{G}). \tag{ii}$$

Dimostrazione. Prima osserviamo che $\partial^*_{\mathbb{G}} E \subset \partial_{*,\mathbb{G}} E$, da (2.21), così basta provare che

$$\mathcal{S}_c^{Q-1}(\partial_{*,\mathbb{G}} E \setminus \partial^*_{\mathbb{G}} E) = 0 \tag{2.31}$$

Per provare (ii) definiamo per ogni $\epsilon > 0$

$$A_\epsilon := (\mathbb{G} \setminus \partial^*_{\mathbb{G}} E) \cap \left\{p \in \mathbb{G} :\ \Theta^{*\,Q-1}_c(|\partial E|_{\mathbb{G}}, p) > \epsilon\right\}.$$

Allora, usando ancora una volta il Teorema 2.10.19(3) di [20], segue che

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(A_\epsilon) \geq \epsilon\, \mathcal{S}^{Q-1}_c(A_\epsilon).$$

Per il Lemma 1.45 $|\partial E|_{\mathbb{G}}(\mathbb{G} \setminus \partial^*_{\mathbb{G}} E) = 0$ e allora

$$\mathcal{S}^{Q-1}_c(A_\epsilon) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Da cui si ha

$$\Theta^{*\,Q-1}_c(|\partial E|_{\mathbb{G}}, p) = 0 \tag{2.32}$$

per $\mathcal{S}^{Q-1}_c$-q.o. $p \in \mathbb{G} \setminus \partial^*_{\mathbb{G}} E$.

Per provare (i) grazie a (2.32), è sufficiente vedere che

$$\Theta^{*\,Q-1}_c(|\partial E|_{\mathbb{G}}, p) > 0 \qquad \forall p \in \partial_{*,\mathbb{G}} E. \tag{2.33}$$

Da $p \in \partial_{*,E}$, grazie a considerazioni elementari, si deduce l'esistenza di $\delta > 0$ e di una successione $\{r_i\}_i$, $r_i \to 0$ per $i \to +\infty$, tali che

$$\limsup_{i \to +\infty} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap U_c(p, r_i))}{\mathcal{L}^n(U_c(p, r_i))} > \delta \qquad \text{e} \qquad \limsup_{i \to +\infty} \frac{\mathcal{L}^n(E^c \cap U_c(p, r_i))}{\mathcal{L}^n(U_c(p, r_i))} > \delta.$$

Allora la relativa disuguaglianza isoperimetrica (1.26) implica che

$$\delta^{\frac{Q-1}{Q}} \mathcal{L}^n(U_c(p, r_i))^{\frac{Q-1}{Q}} \leq c\, |\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(p, r_i)), \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

e lo stesso per E^c. Segue (2.33).

$\square$

Nel caso la frontiera di E sia di classe $\mathbf{C}^1$ si può dire qualcosa di più. Infatti, vale il Corollario 3.11 di [23] nei gruppi di Carnot di passo 2, che qui estendiamo ai gruppi di tipo $\star$.

In qualsiasi gruppo di Carnot vale che, se S è una ipersuperficie $\mathbf{C}^1$, $\mathcal{H}^{Q-1}_c(\mathcal{C}(S)) = 0$, come provato in [37]. Segue che $\mathcal{S}^{Q-1}_c(\mathcal{C}(S)) = 0$. Visto che i punti non-caratteristici di una frontiera ∂E di classe $\mathbf{C}^1$ appartengono alla frontiera ridotta, concludiamo che $\mathcal{S}^{Q-1}_c(\partial E \setminus \partial^*_{\mathbb{G}} E) = 0$. Quanto appena detto, assieme alla Proposizione 1.41, dimostra il seguente corollario.

Corollario 2.19. *Se E ha la frontiera di classe $\mathbf{C}^1$ (e quindi E è un insieme $\mathbb{G}$-Caccioppoli), allora*

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} = \theta_\infty \, \mathcal{S}_\infty^{Q-1} \llcorner \partial E = \left(\sum_{j=1}^{m_1} \langle X_j, n \rangle_{\mathbb{R}^n}^2 \right)^{1/2} \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E. \qquad (i)$$

dove n denota la normale euclidea esterna relativa a ∂E. Vale la seguente versione del teorema di divergenza

$$-\int_E div_{\mathbb{G}} \phi \, dx = \theta_\infty \int_{\partial E} \langle \nu_E, \phi \rangle \, d\mathcal{S}_\infty^{Q-1} \qquad \forall \phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{G}, H\mathbb{G}). \qquad (ii)$$

Conclusioni

In questa tesi si è riusciti ad estendere il Teorema di Blow-up noto per i gruppi di Carnot di passo 2, ai gruppi di tipo $\star$. In tal modo si è potuto estendere a tali gruppi il teorema di rettificabilità degli insiemi di perimetro finito (Teorema 2.16).

Tuttavia, i controesempi presentati in questo lavoro, insieme a quello di [23] sono solo parziali, e non permettono di dimostrare se è vero o no che gli unici gruppi di Carnot per cui vale il Teorema di Blow-up in ogni punto sono quelli di tipo $\star$.

Inoltre, indipendentemente dai risultati ottenuti in questa tesi, alla luce di [6], non è ancora noto un teorema che possa caratterizzare la struttura degli insiemi di perimetro finito in un qualunque gruppo di Carnot.

Appendice A

Varietà differenziabili

Richiamiamo qui le nozioni di base sulle varietà differenziabili. Per maggiori dettagli si vedano [35] e [11].

Definizione A.1 (Varietà topologica). Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff, che verifica il secondo assioma di numerabilità e che è localmente euclideo di dimensione n.

L'ultima proprietà significa che, per ogni punto $p \in M$, esiste un aperto $U \subset M$ che contiene p e un omeomorfismo φ da U ad un aperto di $\mathbb{R}^n$. La coppia (U, φ) viene detta carta e le funzioni $x_i := \pi_i \circ \varphi$ da U a $\mathbb{R}$ (dove π_i è la proiezione sull'i-esima componente) sono dette funzioni coordinate.

Definizione A.2 (Varietà differenziabile). Una varietà differenziabile (di classe $\mathbf{C}^\infty$) è una coppia $(M, \mathcal{A})$, dove M è una varietà topologica e $\mathcal{A}$ è un atlante liscio massimale su M.

Per la precisione $\mathcal{A}$ è una collezione $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in I\}$ di carte con le seguenti proprietà:

- $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$;
- $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è liscia per ogni α, $\beta \in I$ (quando è definita);
- $\mathcal{A}$ è massimale nel senso che se (U, φ) è una carta tale che $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ sono liscie per ogni $\alpha \in I$, allora $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$

Per ogni α, $\beta \in I$, la funzione $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è detta funzione di transizione e per definizione è un diffeomorfismo (di classe $\mathbf{C}^\infty$). Si dicono carte di una varietà differenziabile quelle contenute nel suo atlante.

Definizione A.3. Siano M e N varietà differenziabili e sia $F : M \to N$. Diciamo che F è liscia in $m \in M$ se, per ogni carta (U, φ) di M e per ogni carta (V, ψ) di N tali che $m \in U$ e $F(m) \in V$, la funzione

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

è liscia in un intorno di $\varphi(m)$.

In realtà è sufficiente verificarlo per una sola scelta di carte, perché le funzioni di transizione sono diffeomorfismi.

Diciamo che F è liscia, se lo è in ogni punto di M.

Esempio A.4. Uno spazio vettoriale finito-dimensionale V ha una struttura naturale di varietà differenziabile. Diamo qui un cenno della dimostrazione. Per i dettagli si veda [35].

Innanzitutto, è uno spazio topologico con la topologia euclidea. Inoltre ogni base $(e_1, \ldots, e_n)$ di V definisce un isomorfismo $E : \mathbb{R}^n \to V$ dato da $E(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, che è anche un omeomorfismo. La struttura differenziabile è data dall'atlante liscio massimale che contiene la carta (V, E^{-1}) e tutte le altre carte compatibili (cioè tali che le funzioni di transizione sono diffeomorfismi). La definizione è ben posta, perché l'atlante che si ottiene è indipendente dalla scelta della base di V; infatti la mappa di transizione tra due carte ottenute da due basi diverse è lineare e invertibile, quindi è un diffeomorfismo.

Se M è una varietà differenziabile, denotiamo lo spazio delle funzioni lisce da M a $\mathbb{R}$ con $\mathbf{C}^\infty(M)$.

Definizione A.5 (Vettore tangente). Data una varietà differenziabile M e un suo punto p, un vettore tangente v in p è una derivazione in p, cioè un'applicazione lineare $v : \mathbf{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

per ogni $f, g \in \mathbf{C}^\infty(M)$.

L'insieme di tutti i vettori tangenti in p è detto spazio tangente ad M in p ed è denotato con T_pM.

La nozione di vettore tangente è locale; infatti dati un punto $p \in M$ e $v \in T_pM$, $v(f) = v(g)$ per ogni coppia di funzioni lisce f e g che coincidono su intorno di p.

Proposizione A.6. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Per ogni $p \in M$, T_pM è uno spazio vettoriale n-dimensionale.*

Se $(U, (x_1, \dots, x_n))$ è una carta che contiene p, allora $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right)$ è una base per T_pM detta base coordinata, dove $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM$ è definito come

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (f) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\bigg|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})(\xi)$$

per ogni funzione liscia f definita in un intorno di p.

Osservazione A.7. Per ogni spazio vettoriale finito dimensionale V e ogni punto $a \in V$, c'è un isomorfismo naturale $V \to T_aV$ dato da $v \mapsto Dv|_a$, dove

$$Dv|_a (f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a + tv) \quad \forall f \in \mathbf{C}^\infty(V).$$

Definizione A.8 (Differenziale). Siano M e N varietà lisce, $F : M \to N$ un'applicazione liscia e p un punto di M, si dice differenziale di F in p l'applicazione

$$\begin{aligned} &dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)} \\ &(dF_pv)(f) = v(f \circ F) \quad \forall\, f \in \mathbf{C}^\infty(N) \end{aligned}$$

Notiamo che $f \circ F \in \mathbf{C}^\infty(M)$, così $v(f \circ F)$ è ben definito; inoltre dF_pv appartiene a $T_{F(p)}N$.

Il vettore dF_pv tangente ad N in $F(p)$ viene anche indicato con $(F_*)_p v$ e chiamato il push-forward di v tramite F.

Definizione A.9 (**Vettore tangente a una curva**). Siano J un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\gamma : J \to M$ una curva liscia, definiamo il vettore tangente a γ in $t_0 \in J$ come

$$\gamma'(t_0) = d\gamma_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

dove $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}$ è la base coordinata standard per $T_{t_0}\mathbb{R}$. In pratica

$$\gamma'(t_0)(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f(\gamma(t))$$

Definizione A.10 (**Fibrato tangente**). Sia M una varietà differenziabile, definiamo il suo fibrato tangente come unione disgiunta degli spazi tangenti ai punti di M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

Scriveremo gli elementi di TM come coppie ordinate (p, v) con $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Il fibrato tangente è caratterizzato da una proiezione naturale $\pi : TM \to M$ definita come $\pi(p, X) = p$ ed è dotato di una struttura naturale di varietà differenziabile, che rende la proiezione π un'applicazione liscia; infatti un atlante liscio $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ su M induce un atlante liscio su TM. Siano $(x_1, \dots, x_n)$ le funzioni coordinate di φ_α, allora una carta di TM è $(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{\varphi}_\alpha)$ dove

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n} \\
&\widetilde{\varphi}_\alpha\left(v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n)
\end{aligned}$$

Per i dettagli della dimostrazione si veda [35].

Definizione A.11 (**Fibre e sezioni**). Ad ogni punto $p \in M$ è associata la fibra $\pi^{-1}(\{p\}) = \{p\} \times T_pM$. Se si identifica $\{p\} \times T_pM$ con T_pM tramite $(p, v) \mapsto v$, si può pensare alla fibra $\pi^{-1}(\{p\})$ come allo spazio tangente T_pM.

Una sezione del fibrato tangente è un'applicazione continua $Y : M \to TM$ tale che $\pi \circ Y = \mathrm{Id}_M$, cioè Y associa ad ogni punto p di M un vettore tangente a M in p. Queste sezioni sono comunemente dette campi vettoriali (continui).

In generale si possono considerare anche campi vettoriali non continui, ma non ci interessano particolarmente in questa tesi. Invece lavoreremo spesso con campi vettoriali lisci, cioè sezioni lisce.

Denotiamo con $\mathcal{X}(M)$ l'insieme dei campi vettoriali lisci su M.

Definiamo ora la nozione di derivazione, che è distinta da quella di derivazione in un punto (vista nella Definizione A.5).

Definizione A.12 (**Derivazione**)**.** Un'applicazione $Y : \mathbf{C}^\infty(M) \to \mathbf{C}^\infty(M)$ è detta derivazione se è lineare su $\mathbb{R}$ e soddisfa

$$Y(fg) = f\,Y(g) + g\,Y(f)$$

per ogni $f, g \in \mathbf{C}^\infty(M)$.

Proposizione A.13. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutte le derivazioni da $\mathbf{C}^\infty(M)$ a $\mathbf{C}^\infty(M)$ e $\mathcal{X}(M)$. In particolare la corrispondenza è data da*

$$\begin{array}{llll} & Y : \mathbf{C}^\infty(M) \to \mathbf{C}^\infty(M) & \longleftrightarrow & \widetilde{Y} : M \to TM \\ & & & \widetilde{Y}(p) = (p, \widetilde{Y}_p) \equiv \widetilde{Y}_p \\ \textit{con} \quad (Yf)(p) = \widetilde{Y}_p(f) & \forall\, p \in M & & \forall\, f \in \mathbf{C}^\infty(M) \end{array}$$

Per questo, i campi vettoriali lisci sono identificati con le derivazioni. Poiché l'insieme di tutte le derivazioni è uno spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione per scalare, anche $\mathcal{X}(M)$ è uno spazio vettoriale con le stesse operazioni pensate sui campi vettoriali.

Definizione A.14. Siano $F : M \to N$ liscia e Y un campo vettoriale su M. Se esiste un campo vettoriale Z su N tale che

$$\forall\, p \in M \quad dF_p(Y_p) = Z_{F(p)}$$

si dice che Y e Z sono F-correlati.

Proposizione A.15. *Se $Y \in \mathcal{X}(M)$ e $Z \in \mathcal{X}(N)$, Y e Z sono F-correlati se e solo se*

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F$$

per ogni $f \in \mathbf{C}^\infty(N)$.

Proposizione A.16. *Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo. Per ogni Y campo vettoriale liscio su M, esiste un unico campo vettoriale liscio su N che è correlato a Y tramite F.*

In questo caso denotiamo con F_*Y l'unico campo vettoriale F-correlato a Y e lo chiamiamo push-forward di Y tramite F.

Definizione A.17. Dati due campi vettoriali lisci X e Y su M, si può definire un campo vettoriale $[X, Y]$ detto commutatore di X e Y come

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf) \quad \text{per ogni } m \in M \text{ e ogni } f \in \mathbf{C}^\infty(M)$$

La definizione è ben posta perché si dimostra che $[X, Y]$ è un campo vettoriale liscio su M (si vedano [11] e [35]).

Proposizione A.18. *Sia $F : M \to N$ un'applicazione liscia e siano $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$ campi vettoriali lisci tali che X_i è F-correlato con Y_i per $i = 1, 2$. Allora $[X_1, X_2]$ è F-correlato con $[Y_1, Y_2]$.*

Definizione A.19. Una sezione locale del fibrato tangente è un'applicazione continua Y da un sottoinsieme aperto U di M a TM, tale che $\pi(Y(x)) = x$ per ogni $x \in U$, cioè è un campo vettoriale (continuo) definito su un aperto U di M.

Sezioni locali $X_1, \ldots, X_n$ sono dette indipendenti se $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ sono linearmente indipendenti in T_pM per ogni $p \in U$. Si dice che generano TM se $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ generano T_pM per ogni $p \in U$.

Un frame locale per TM su U è una n-upla ordinata $(X_1, \ldots, X_n)$ di sezioni locali indipendenti su U che generano TM, cioè $(X_1(p), \ldots, X_n(p))$ è una base della fibra T_pM per ogni $p \in U$. Un frame è detto globale se $U = M$. Un frame è detto liscio se ogni sezione X_i è liscia.

Una varietà differenziabile è detta parallelizzabile se ammette un frame globale liscio per il suo fibrato tangente.

Definizione A.20 (Sottofibrato del fibrato tangente). Sia TM il fibrato tangente di M, prendiamo per ogni $p \in M$ un sottospazio vettoriale m-dimensionale $D_p \subset T_pM$. Allora diciamo che $D = \coprod_{p \in M} D_p \subset TM$ è un sottofibrato liscio se vale la seguente condizione: ogni punto $p \in M$ ha un intorno U in cui esistono sezioni locali lisce $X_1, \dots, X_m : U \to TM$ tali che $X_1(q), \dots, X_m(q)$ formano una base per D_q per ogni $q \in U$. In tal caso risulta che $(X_1, \dots, X_m)$ è un frame locale di D su U.

Definizione A.21. Se X è un campo vettoriale liscio su M, una curva integrale di X è una curva liscia $\gamma : J \to M$, con J intervallo aperto di $\mathbb{R}$, tale che $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \,\forall\, t \in J$.

Se $0 \in J$, si dice che la curva γ ha punto iniziale $\gamma(0)$. Se non esiste una curva integrale di X che estende γ su un intervallo di definizione più grande, si dice che γ è massimale.

Osservazione A.22. Dato un qualunque campo vettoriale liscio X su M, per ogni punto $m \in M$, esiste un'unica curva integrale massimale di X di punto iniziale m.

Definizione A.23. Un campo vettoriale liscio X su M si dice completo se, per ogni $m \in M$, la sua curva integrale massimale di punto iniziale m è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Appendice B

Gruppi di Lie

Si veda per maggiori dettagli [35] e [11].

Definizione B.1 (**Gruppo di Lie**)**.** Un gruppo di Lie è un gruppo $(G, \cdot)$, tale che G è una varietà differenziabile e le applicazioni

$$\begin{aligned} m &: G \times G \to G \qquad & i &: G \to G \\ m(g,h) &= g \cdot h \qquad & i(g) &= g^{-1} \end{aligned}$$

sono liscie.

Denotiamo con e l'elemento neutro di G.

Definizione B.2 (**Omomorfismi e isomorfismi**)**.** Se G e H sono gruppi di Lie, un omomorfismo di gruppi di Lie da G a H è un'applicazione liscia da G a H che è anche un omomorfismo di gruppi.

Un omomorfismo f di gruppi di Lie da G a H è detto isomorfismo di gruppi di Lie se è anche un diffeomorfismo, da cui segue che f è invertibile e la sua applicazione inversa è un omomorfismo di gruppi di Lie. In questo caso diciamo che G e H sono gruppi di Lie isomorfi.

Definizione B.3. Sia G un gruppo di Lie. Ogni $g \in G$ definisce un'applicazione $L_g : G \to G$ chiamata traslazione a sinistra per cui $L_g(h) = g \cdot h$.

Si verifica immediatamente che L_g è un diffeomorfismo di G.

Definizione B.4. Un campo vettoriale X su G si dice invariante a sinistra se è correlato con se stesso tramite L_g per ogni $g \in G$.

Si può dimostrare che ogni campo vettoriale invariante a sinistra è liscio (si veda [35]).

Proposizione B.5. *Se X e Y sono campi vettoriali invarianti a sinistra, allora $[X, Y]$ è invariante a sinistra.*

Definizione B.6. Un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale $\mathfrak{g}$, dotato di un'applicazione bilineare (chiamata *parentesi di Lie*)

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

tale che

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g} \\ &\text{(ii)} \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

La (ii) viene detta *identità di Jacobi*.

Definizione B.7. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, un suo sottospazio vettoriale $\mathfrak{h}$ chiuso rispetto alle parentesi di Lie è detto sottoalgebra di Lie. In particolare è a sua volta un'algebra di Lie con le stesse parentesi di Lie ristrette.

Definizione B.8. Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sono algebre di Lie, un'applicazione lineare $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tale che $A[X, Y] = [AX, AY]$ è detta omomorfismo di algebre di Lie. Se l'omomorfismo è invertibile si dice isomorfismo di algebre di Lie e in tal caso si dice che $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sono isomorfe.

Proposizione B.9. *$\mathcal{X}(M)$ è un'algebra di Lie con le parentesi di Lie date dalla definizione A.17. L'insieme di tutti i campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie G è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{X}(G)$. In particolare è chiamata l'algebra di Lie di G e viene denotata con $\mathfrak{g}$, cioè con la stessa lettera del gruppo di Lie però scritta in gotico minuscolo. Inoltre esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$, $\alpha(X) = X_e$. Perciò $\mathfrak{g}$, T_eG e G hanno la stessa dimensione. Si vedano in proposito [11] e [35].*

Proposizione B.10. *Sia $F : G \to H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, esiste un unico campo vettoriale in $\mathfrak{h}$ che è F-correlato con X. Se denotiamo questo campo vettoriale con F_*X, l'applicazione $F_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ così definita è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Si dice che F_* è l'omomorfismo di algebre di Lie indotto da F.

Ogni gruppo di Lie G è parallelizzabile; infatti un frame globale liscio è dato dalla scelta di una base (di campi vettoriali invarianti a sinistra) della sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Proposizione B.11. *Ogni campo invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo.*

Definizione B.12. Sia G un gruppo di Lie con algebra $\mathfrak{g}$, fissiamo $X \in \mathfrak{g}$. Denotiamo con $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ la curva integrale di X di punto iniziale $e \in G$.

Definizione B.13. Dato un gruppo di Lie G con algebra $\mathfrak{g}$, definiamo la mappa esponenziale come l'applicazione $\exp : \mathfrak{g} \to G$, $\exp X = \gamma_X(1)$.

Proposizione B.14. *Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, allora:*

(i) *la mappa esponenziale è liscia da $\mathfrak{g}$ a G;*

(ii) *per ogni $X \in \mathfrak{g}$, $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX) = \exp(tX) \cdot \exp(sX)$;*

(iii) *la mappa esponenziale si restringe ad un diffeomorfismo da un qualche intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ a un intorno di e in G;*

(iv) *se H è un gruppo di Lie e $\mathfrak{h}$ è la sua algebra, per ogni omomorfismo di gruppi di Lie $F : G \to H$ vale*

$$\exp(F_*X) = F(\exp X) \quad \forall\, X \in \mathfrak{g};$$

(v) *la curva integrale di un campo vettoriale invariante a sinistra X di punto iniziale $g \in G$ è data da $\gamma(t) = g \cdot \exp(tX)$.*

Definizione B.15. Un'algebra di Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ è detta nilpotente di passo r, $r \in \mathbb{N}$, se per ogni $X_1, \dots, X_{r+1} \in \mathfrak{g}$,

$$[X_1, [X_2, \dots [X_r, X_{r+1}] \dots]] = 0,$$

ed esistono $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{g}$ tali che

$$[Y_1, [Y_2, \dots [Y_{r-1}, y_r] \dots]] \neq 0.$$

Un gruppo di Lie si dice nilpotente di passo r, se lo è la sua algebra di Lie.

Sia G un gruppo di Lie connesso e sia $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la sua mappa esponenziale. Per la Proposizione B.14 exp si restringe ad un diffeomorfismo da un qualche intorno U_0 di 0 in $\mathfrak{g}$ a un intorno $\exp(U_0)$ di e in G, quindi è ben definita su $\exp(U_0)$ l'applicazione inversa della mappa esponenziale ristretta e la denotiamo con log.

Definizione B.16. Sia G un gruppo di Lie connesso con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, la funzione $Z(X,Y) := \log(\exp X \cdot \exp Y)$ è ben definita per X e Y in un qualche intorno di 0 in $\mathfrak{g}$.

Inoltre vale la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$Z(X,Y) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+s_i))^{-1}}{r_1! s_1! \cdots r_n! s_n!} [X^{r_1} Y^{s_1} X^{r_2} Y^{s_2} \dots X^{r_n} Y^{s_n}],$$

(per X, Y sufficientemente vicini a 0), dove si usa la notazione

$$[X^{r_1} Y^{s_1} \dots X^{r_n} Y^{s_n}] = [\underbrace{X, [X, \dots [X}_{r_1}, [\underbrace{Y, [Y, \dots [Y}_{s_1}, \dots [\underbrace{X, [X, \dots [X}_{r_n}, [\underbrace{Y, [Y, \dots Y}_{s_n}]] \dots]].$$

Questo termine è nullo se $s_n > 1$ o se $s_n = 0$ e $r_n > 1$.
Alcuni termini della serie sono

$$Z(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \dots$$

Osserviamo che se il gruppo di Lie è nilpotente, la serie di Baker-Campbell-Hausdorff diventa una somma di finiti termini; inoltre per i gruppi di Lie connessi, semplicemente connessi e nilpotenti vale un importante teorema, dimostrato in [13].

Teorema B.17. *Se G è un gruppo di Lie connesso, semplicemente connesso e nilpotente, allora:*

(i) la mappa esponenziale è un diffeomorfismo da $\mathfrak{g}$ a G;

(ii) la formula di Baker-Campbell-Hausdorff vale per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Infine enunciamo il seguente teorema fondamentale, di cui si trova una dimostrazione in [35].

Teorema B.18. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale, allora esiste un gruppo di Lie G connesso e semplicemente connesso, la cui algebra di Lie è isomorfa a $\mathfrak{g}$. Inoltre G è unico a meno di isomorfismi.*

Bibliografia

[1] L. Ambrosio, *Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces*, Adv. in Math., **159**, (2001), 51–67.

[2] L. Ambrosio, *Fine properties of sets of finite perimeter in doubling metric measure spaces*, Set-Valued Analysis, **10**, (2002), 111-128.

[3] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, (2000).

[4] L. Ambrosio & B. Kirchheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math. Ann. **318**, (2000), 527-555.

[5] L. Ambrosio & B. Kirchheim, *Currents in metric spaces*, Acta Math. **185**, (2000), 1-80.

[6] L. Ambrosio, B. Kleiner & E. Le Donne, *Rectifiability of Sets of Finite Perimeter in Carnot Groups: Existence of a Tangent Hyperplane*, The Journal of Geometric Analysis, **19**: 509-540 (2009).

[7] L. Ambrosio & V. Magnani, *Weak differentiability of BV functions on stratified groups*, Math. Z. vol. 245, (2003), 123-153.

[8] Z. Balogh, *Size of characteristic sets and functions with prescribed gradient*, J. Reine Angew. Math. 564 (2003), 63–83.

[9] Z. Balogh, M. Rickly & F. Serra Cassano, *Comparison of Hausdorff measures with respect to the Euclidean and the Heisenberg metric*, Publicacions Matemàtiques v. 47 n. 1, (2003), p. 237-259.

[10] A. Bellaïche, *The tangent space in subriemannian geometry*, in *Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, (1996).

[11] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli & F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*, Springer, (2007).

[12] L. Capogna, D. Danielli & N. Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. Anal. Geom. **12**, (1994), 203–215.

[13] L. J. Corwin & F. P. Greenleaf, *Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications (Part I: Basic Theory and Examples)*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **18**, Cambridge University Press, (1990).

[14] D. Danielli, N. Garofalo & D. M. Nhieu, *Traces inequalities for Carnot–Carathèodory spaces and applications*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 27, (1998), 195–252.

[15] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni* Ann.Mat.Pura Appl.(4), **36**, (1954), 191–213.

[16] E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio ad* r *dimensioni*, Ricerche Mat. **4**, (1955), 95–113.

[17] M. Derridj, *Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques*, Annales de l'institut Fourier, 21 no. 4 (1971), p. 99-148.

[18] L. C. Evans & R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, BocaRaton, (1992).

[19] H. W. Eves, *Elementary matrix theory*, Courier Dover Publications, (1980).

[20] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, (1969).

[21] G. B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., **13** (1975), 161–207.

[22] G. B. Folland & E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Princeton University Press, (1982).

[23] B. Franchi, R. Serapioni & F. Serra Cassano, *On the Structure of Finite Perimeter Sets in Step 2 Carnot Groups*, The Journal of Geometric Analysis, Volume 13, Number 3, (2003).

[24] B. Franchi, R. Serapioni & F. Serra Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, Houston Journal of Mathematics, **22**, 4, (1996), 859–889.

[25] B. Franchi, R. Serapioni & F. Serra Cassano, *Sur les ensembles des périmètre fini dans le groupe de Heisenberg*, C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I,Math. **329** (1999), 183–188.

[26] B. Franchi, R. Serapioni & F. Serra Cassano, *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math Ann **321**, (2001), 479–531.

[27] B. Franchi, R. Serapioni & F. Serra Cassano, *Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups*, Communications in Analysis and Geometry v. 11 n. 5, (2003), p. 909-944.

[28] B. Franchi, R. Serapioni & F. Serra Cassano, *Rectifiability and perimeter in step 2 groups*, Proceedings of Equadiff10, Prague Aug. 2001, Math. Bohemica, to appear.

[29] B. Franchi & R. L. Wheeden, *Compensation couples and isoperimetric estimates for vector fields*, Coll. Math. **74**, (1997), 1–27.

[30] N. Garofalo & D. M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 1081–1144.

[31] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhauser, Basel, (1984).

[32] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, (1996).

[33] J. Heinonen, *Calculus on Carnot groups*, Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst., **68**, (1995), 1–31.

[34] A. Korányi & H. M. Reimann, *Foundation for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Advances in Mathematics, **111**, (1995), 1–87.

[35] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2003).

[36] V. Magnani, *On a general coarea inequality and applications*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. vol. 27, (2002), 121-140.

[37] V. Magnani, *Characteristic points, rectifiability and perimeter measure on stratified groups*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 8 (2006), no. 4, 585–609.

[38] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[39] P. Mattila, *Hausdorff m-regular and rectifiable sets in n-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **205**, (1975), 263–274.

[40] J. Mitchell, *On Carnot-Carathèodory metrics*, J.Differ. Geom. **21**, (1985), 35–45.

[41] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, *Mathematical Surveys and Monographs* **91**, American Mathematical Society, Providence, RI (2002).

[42] R. Monti & F. Serra Cassano, *Surface measures in Carnot-Carathéodory spaces*, Calc. Var. Partial Diff. Eq. **13**, (2001), 339–376.

[43] A. Nagel, E. M. Stein & S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*, Acta Mathematica, Volume 155, Number 1, 103-147, (1985).

[44] P. Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math., **129**, (1989), 1–60.

[45] P. Pansu, *Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg*, C.R.Acad.Sci.Paris, **295 I**, (1982), 127–130.

[46] P. Pansu, *Geometrie du group d'Heisenberg*, These pour le titre de Docteur 3ème cycle, Universite Paris VII, (1982).

[47] S. D. Pauls, *A notion of rectifiability modelled on Carnot groups*, Preliminary announcement, (2000).

[48] E. Sawyer & R. L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, Amer.J.Math., **114**, (1992), 813–874.

[49] E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, (1993).

[50] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and Their Representations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1984).

[51] N. Th. Varopoulos, *Analysis on Lie Groups*, J.Funct. Anal., **76**, (1988), 346–410.

[52] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste & T. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).

[53] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, (1989).

Ringraziamenti

Ringrazio tutti coloro che mi sono stati accanto in questi cinque anni di università. In particolare ringrazio il professor Bruno Franchi per tutti i consigli che mi ha dato durante la stesura della tesi.