

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

LAPLACIANO E CONVOLUZIONE
SU GRAFI

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Mattia Dell'Onte

Sessione Unica
Anno Accademico 2017/2018

*Le cose sono unite da legami invisibili:
non puoi cogliere un fiore senza turbare una stella.*

GALILEO GALILEI

Introduzione

Con la pubblicazione del testo scritto da Leonhard Euler riguardante il noto problema dei sette ponti di Königsberg, nel lontano 1736 la teoria dei grafi muove le sue prime e tenere radici. Oggigiorno, a distanza di più di duecento anni, questa disciplina riveste un ruolo centrale nella Ricerca Operativa, e, in generale, è uno strumento chiave per la maggior parte dei problemi in cui si vogliono minimizzare i costi massimizzando i risultati, i cosiddetti problemi di ottimizzazione. Poichè per loro natura riescono a modellizzare perfettamente una rete, i grafi sono ampiamente utilizzati nello studio dei social network, dei neural network e, in particolare, sono la leva su cui fanno perno la teoria dell'apprendimento e il machine learning. Lo scopo di questa tesi è fornire una diversa chiave di lettura nello studio di un grafo; come già dal titolo infatti, si può notare che "Laplaciano" e "Convoluzione", tipicamente riferite a funzioni che prendono valori in spazi euclidei, sono giustapposte alla parola grafo. In effetti, mimando il comportamento e le proprietà di operatori quali derivata e integrale su \mathbb{R}^n , si può lo stesso dare una definizione di derivata direzionale e integrale su di un grafo che sia coerente con i classici risultati di analisi, come per esempio la formula di Green e il teorema di convoluzione. Nelle ultime due sezioni del Capitolo 3 si utilizzeranno i risultati delle sezioni precedenti per risolvere l'analogo su grafo del problema di Dirichet e di Diffusione. Il Capitolo 2 invece sarà dedicato allo studio degli autovalori e autovettori del Laplaciano associato a un grafo; in particolare, verrà posta l'attenzione sulla relazione che intercorre tra la connessione del grafo stesso e la molteplicità algebrica dell'autovalore nullo. Lo spettro di un grafo è un valido alleato nello studio delle sue caratteristiche peculiari; poichè grafi equivalenti posseggono lo stesso spettro, esso, insieme al suo polinomio caratteristico, risulta essere un importante invariante algebrico che ne rileva la struttura topologica. Vengono utilizzati i risultati della teoria spettrale su grafi in numerosi studi, alcuni recentissimi, come per esempio in quelli del matematico giapponese Toshikazu Sunada relativi all'analisi in geometria discreta, oppure in quelli riguardanti, in generale, l'analisi delle forme geometriche. Concluderò il Capitolo 2 definendo convoluzione e trasformata di Fourier su grafi, mostrando come questi abbiano proprietà analoghe alla trasformata di Fourier e alla convoluzione in \mathbb{R}^n .

Indice

Introduzione	i
Notazioni	3
1 Prerequisiti	5
1.1 Spazi topologici e funzioni continue	5
1.2 Grafo	8
2 Spettro e Laplaciano	13
2.1 A spasso sul grafo	13
2.2 I Laplaciani di un grafo	14
2.3 Proprietà dello spettro	18
2.4 Trasformata di Fourier e Convoluzione	22
3 Equazioni differenziali su di un grafo	25
3.1 Derivata e integrale	25
3.2 Derivata esterna	26
3.3 Formula di Green	27
3.4 Il problema di Dirichlet	31
3.5 Equazione di diffusione	36
Bibliografia	41

Notazioni

In questa trattazione utilizzeremo la seguente terminologia:

- \mathbb{N} è l'insieme dei numeri naturali, zero escluso;
- $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- Definiamo $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ e $\mathbb{N}_n^0 := \mathbb{N}_n \cup \{0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- Sia X un insieme non vuoto. Indicheremo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X ;
- Se d è una metrica su uno spazio X , definiamo per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$

$$\mathcal{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

la **palla aperta** di centro x e raggio r ;

- Definiamo $\bigcup_{\emptyset} := \emptyset$;
- Dati un insieme non vuoto A e $n \in \mathbb{N}$, indicheremo con

$$A^{[n]} := \{N \subseteq A \mid |N| = n\}.$$

$A^{[n]}$ è la collezione di tutti i possibili sottoinsiemi di A di cardinalità n ;

- Dati un insieme non vuoto A e $n \in \mathbb{N}$, indicheremo con $A^{(n)} := \bigcup_{k=1}^n A^{[k]}$;
- Indicheremo con $\mathbf{1}$ il vettore in cui tutte le componenti sono uguali a 1;
- Dati a_1, \dots, a_n , $n \in \mathbb{N}$, definiamo $A := \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale tale che $A_{ii} = a_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono due vettori di \mathbb{R}^n allora definiamo il prodotto scalare tra x e y come

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Indicheremo con $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, l'insieme delle funzioni misurabili f tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

- Dati $p \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$ poniamo $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\int_K |f(x)|^p dx < +\infty$ per ogni K compatto di \mathbb{R}^n
- Date due matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, si definisce $A \odot B$ la matrice avente come componenti il prodotto delle componenti di A e quelle di B ; quindi $A \odot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è tale che $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $j = 1, \dots, m$. L'operazione binaria $\odot : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ prende il nome di moltiplicazione punto per punto.

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Spazi topologici e funzioni continue

Definizione 1.1.1. Siano X un insieme non vuoto e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremo che τ è una **topologia** su X se valgono le seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in \tau$;
- Per una qualsiasi famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, si ha che $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$;
- Se $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \tau, n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

In questo caso la coppia (X, τ) è detta **spazio topologico**.

Dato uno spazio topologico (X, τ) , i sottoinsiemi di X contenuti in τ si dicono **aperti**. Di contro, i complementari di aperti si dicono **chiusi**.

Esempio 1.1.2. Dato un insieme non vuoto X sono spazi topologici le coppie $(X, \mathcal{P}(X))$ e $(X, \{\emptyset, X\})$. Le topologie $\mathcal{P}(X)$ e $\{\emptyset, X\}$ sono dette rispettivamente **topologia discreta** e **topologia banale** di X .

Esempio 1.1.3 (Topologia indotta). Se (X, τ) è uno spazio topologico e $V \subseteq X$ è non vuoto allora $\tau_V := \{A \cap V \mid A \in \tau\}$ è una topologia su V , detta **topologia indotta da τ** .

Esempio 1.1.4 (Topologia cofinita). Sia X un insieme non vuoto. La **topologia cofinita** su X è quella in cui $C \subseteq X$ è un chiuso se e solo se $C = X$ oppure C è finito.

Esprimere una topologia mediante un elenco di aperti può risultare difficile, e talvolta anche superfluo ai fini pratici. Per questo sarà utile definire il concetto di base.

Definizione 1.1.5 (Base di una topologia). Sia data τ una topologia su $X \neq \emptyset$. Diremo che \mathcal{B} è una **base** di τ se $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \tau$ e se ogni aperto di X è esprimibile come unione di aperti in \mathcal{B} . In altre parole, se dato $A \in \tau, \exists \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tale che $\bigcup_{i \in I} B_i = A$.

Teorema 1.1.6. Siano dati un insieme $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X . Esiste una topologia su X avente \mathcal{B} come base se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $\bigcup_{i \in I} B_i = X$;
2. Se $A, B \in \mathcal{B}$ sono tali che $A \cap B \neq \emptyset$, allora

$$\forall x \in A \cap B \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B.$$

Dimostrazione. Se \mathcal{B} fosse base della topologia τ , poichè $X \in \tau$, per definizione di base $\exists J \subseteq I$ tale che $\bigcup_{j \in J} B_j = X$. A maggior ragione, quindi, $\bigcup_{i \in I} B_i = X$. Dati $A, B \in \mathcal{B}$, poichè $A \cap B \in \tau$, $\exists \{B_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}$ tale che $\bigcup_{j \in J} B_j = A \cap B$. In particolare se $x \in A \cap B \exists j \in J$ per cui $x \in B_j \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j = A \cap B$.

Viceversa, supponiamo che siano soddisfatte le condizioni suddette. Definiamo $\tau := \{\bigcup_{j \in J} B_j \mid J \subseteq I\}$, mostriamo che essa è una topologia. Per definizione \emptyset , esprimibile come un'unione vuota, appartiene a τ . Poichè è soddisfatta la condizione 1 anche $X \in \tau$, e, ovviamente, si ha che unione di insiemi in τ è ancora un insieme di τ . Non ci resta che dimostrare che τ è chiuso per intersezioni finite.

Dati $A, B \in \tau$ esistono $\Psi, \Phi \subseteq I$ tali che $\bigcup_{\psi \in \Psi} B_\psi = A$ e $\bigcup_{\phi \in \Phi} B_\phi = B$. Perciò

$$A \cap B = \bigcup_{\psi \in \Psi} B_\psi \cap \bigcup_{\phi \in \Phi} B_\phi = \bigcup_{\phi \in \Phi, \psi \in \Psi} B_\phi \cap B_\psi.$$

Siano $\phi \in \Phi$ e $\psi \in \Psi$; mostriamo che $B_\phi \cap B_\psi$ è esprimibile come unione di insiemi in \mathcal{B} . Se $B_\phi \cap B_\psi = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, sappiamo dalla condizione 2 che $\forall x \in B_\phi \cap B_\psi \exists C_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C_x \subseteq B_\phi \cap B_\psi$. Perciò $B_\phi \cap B_\psi = \bigcup_{x \in B_\phi \cap B_\psi} C_x$. Segue che $A \cap B \in \tau$.

Avendo dimostrato che l'intersezione di due elementi di τ sta in τ si conclude per induzione. τ è dunque una topologia che, per come è stata definita, ammette \mathcal{B} come base. □

Definizione 1.1.7 (Spazio metrico). Sia X un insieme non vuoto. Una **metrica** su X è una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

Se d è una metrica su X , la coppia (X, d) è detto spazio metrico.

Teorema 1.1.8. Sia dato uno spazio metrico (X, d) . Definendo $\mathcal{B}_d := \{B_r(x) \mid r > 0, x \in X\}$ l'insieme delle palle metriche di X , si ha che \mathcal{B}_d è una base.

La topologia di cui \mathcal{B}_d è base si indica con τ_d e porta il nome di **topologia generata dalla metrica d** .

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ vale che $x \in \mathcal{B}_1(x) \subseteq X$. Dunque $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_1(x) = X$.

Supponiamo che $x_0 \in \mathcal{B}_{r_1}(x_1) \cap \mathcal{B}_{r_2}(x_2)$. Ponendo

$$r := \min(r_1 - d(x_0, x_1), r_2 - d(x_0, x_2))$$

si ha che se $x \in X$ è tale per cui $d(x, x_0) < r$ allora, per il punto 3 della Definizione 1.1.7, si ha che

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_1) < r_1 - d(x_0, x_1) + d(x_0, x_1) = r_1$$

quindi $x \in \mathcal{B}_{r_1}(x_1)$, e che

$$d(x, x_2) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_2) < r_2 - d(x_0, x_2) + d(x_0, x_2) = r_2$$

quindi $x \in \mathcal{B}_{r_2}(x_2)$. Perciò $\mathcal{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{B}_{r_1}(x_1) \cap \mathcal{B}_{r_2}(x_2)$. Si conclude grazie al Teorema 1.1.6. \square

Esempio 1.1.9. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ la metrica definita da

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A.$$

Allora d si definisce **metrica euclidea** su A , mentre τ_d **topologia euclidea** su A . Si è soliti indicare quest'ultima con \mathcal{E}^n , o con \mathcal{E} se $n = 1$.

Definizione 1.1.10 (Aderenza). Siano (X, τ) , $A \subseteq X$ e $x \in X$. Diremo che x è **aderente** ad A se, per ogni aperto B contenente x si ha che $A \cap B \neq \emptyset$.

Definizione 1.1.11 (Chiusura). Siano dati (X, τ) uno spazio topologico e $A \subseteq X$. Chiameremo **chiusura** di A in X l'insieme \overline{A} , dato dall'intersezione di tutti i chiusi di X contenenti A .

Osservando che \overline{A} è chiuso poichè intersezione di chiusi, dalla definizione segue che A è chiuso se e solo se $\overline{A} = A$. Si ha il seguente

Teorema 1.1.12. Siano dati (X, τ) uno spazio topologico, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Allora x è aderente ad A se e solo se $x \in \overline{A}$.

Dimostrazione. Siano x aderente ad A e C un chiuso di X contenente A . Poichè C^c è aperto non può contenere x . Se così fosse infatti, per definizione di aderenza, si avrebbe che $A \cap C^c \neq \emptyset$; il che è assurdo poichè $A \subseteq C$. Per il tertium non datur, $x \in C$.

Viceversa, supponiamo che $x \in \overline{A}$. Se B è un aperto che contiene x deve necessariamente essere che $A \cap B \neq \emptyset$. Infatti $A \cap B = \emptyset$ implicherebbe $A \subseteq B^c$, quindi, essendo B^c un chiuso di X , $\overline{A} \subseteq B^c$. Il che contraddirebbe l'ipotesi $x \in B$. \square

Tra spazi topologici le funzioni di principale interesse sono le cosiddette funzioni continue, funzioni che preservano la relazione di aderenza.

Definizione 1.1.13 (Funzione continua). Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$.

Diremo che f è continua se, ogni volta che $x \in X$ è aderente ad $A \subseteq X$, anche $f(x) \in Y$ è aderente a $f(A) \subseteq Y$.

Equivalentemente, per il Teorema 1.1.12, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni $A \subseteq X$.

Una funzione continua si dice **omeomorfismo** se è invertibile e ha inversa continua. Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo che manda uno nell'altro.

Teorema 1.1.14. Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$. Le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è continua;
2. Per ogni C chiuso in Y si ha che $f^{-1}(C)$ è chiuso in X ;
3. Per ogni A aperto in Y si ha che $f^{-1}(A)$ è aperto in X .

Dimostrazione. Poichè i chiusi sono complementari di aperti e $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$, per ogni $A \subseteq Y$ si dimostra banalmente che $2 \Leftrightarrow 3$.

Mostriamo che $1 \Rightarrow 2$. Sia C un chiuso di Y . Per continuità di f si ha che

$$f(f^{-1}(\overline{C})) \subseteq \overline{f(f^{-1}(\overline{C}))} \subseteq \overline{C} = C.$$

Perciò

$$f^{-1}(C) \supseteq f^{-1}(f(f^{-1}(\overline{C}))) \supseteq \overline{f^{-1}(C)} \supseteq f^{-1}(C).$$

Poichè $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$ si conclude che $f^{-1}(C)$ è chiuso.

Mostriamo che $2 \Rightarrow 1$. Sia $A \subseteq X$. Allora

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Per ipotesi $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso di X , dunque $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Da ciò si conclude che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. \square

1.2 Grafo

L'oggetto matematico protagonista di questa trattazione è il grafo. Grazie ad esso è possibile modellizzare un numero enorme di problemi di tipo applicativo. Basti pensare infatti che ogni network è esprimibile attraverso un grafo, un social network per esempio, oppure un neural network, strumento chiave nella teoria dell'apprendimento.

Grazie alla sua versatilità è ampiamente utilizzato in ogni ambito della scienza, soprattutto nell'informatica, ma anche in biologia, nello studio delle connessioni neurali, o in chimica, essendo le molecole e molti processi chimici rappresentabili mediante grafi.

Esistono sostanzialmente due tipi di grafo: quello combinatorio e quello topologico. Qui di seguito saranno definiti entrambi.

Definizione 1.2.1 (Grafo combinatorio). Un multigrafo combinatorio è una coppia $G = (V, E)$, dove V è un insieme non vuoto ed $E \subseteq V^{(2)}$. Gli elementi di V ed E si dicono rispettivamente vertici e archi di G .

Un **grafo combinatorio** è un multigrafo che non contiene cappi, cioè archi di cardinalità 1, e tale per cui ogni vertice è contenuto in almeno un arco (non ci sono vertici isolati).

Già dai nomi, archi e vertici, è suggerita una rappresentazione grafica. In effetti un multigrafo combinatorio può essere pensato come un insieme di punti e linee continue: i punti corrispondono ai vertici, mentre gli archi alle linee continue che li connettono.

Per esempio il multigrafo combinatorio $G = (\{A, B, C, D\}, \{\{A\}, \{A, C\}, \{B, D\}\})$ può essere espresso graficamente in questo modo:

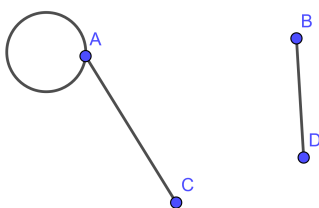


Figura 1.1: Esempio di multigrafo

Si noti che quest'ultimo non è un grafo combinatorio perché in A è presente un cappio.

Per poter definire un grafo topologico è necessaria una breve premessa.

Definizione 1.2.2 (Topologia dell'unione disgiunta). Sia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici. Lo **spazio unione disgiunta** è lo spazio topologico (X, τ) , dove X è l'unione disgiunta degli insiemi X_i e τ è l'unione disgiunta delle topologie τ_i .

Definizione 1.2.3 (Topologia quoziente). Sia (X, τ) uno spazio topologico e \sim una relazione di equivalenza su X . Per ogni $A \subseteq X$ chiameremo **saturato** di A l'insieme $sat(A) := \bigcup_{a \in A} [a]$. Si definisce dunque **topologia quoziente** su X/\sim la topologia data da

$$\tau/\sim := \{\pi(A) \mid A \in \tau \text{ e } sat(A) = A\}$$

dove $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione al quoziente.

Lo spazio topologico $(X/\sim, \tau/\sim)$ è detto spazio quoziente di X rispetto a \sim .

Siamo ora in grado di definire un multigrafo topologico.

Definizione 1.2.4 (Multigrafo topologico). Sia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici omeomorfi all'intervallo $[0, 1]$ dotato della topologia euclidea, tramite le funzioni $f_i : [0, 1] \rightarrow X_i$, $i \in I$. Posto X l'unione disgiunta degli X_i e τ l'unione disgiunta delle τ_i , un **multigrafo topologico** è lo spazio quoziente di (X, τ) rispetto ad una qualsiasi relazione di equivalenza \sim su X soddisfacente le seguenti condizioni:

1. Se $x \in X$ è tale che $[x]$ contiene almeno due elementi, allora $\exists H, K \subseteq I$ tali che $[x] = \bigcup_{h \in H} \{f_h(0)\} \cup \bigcup_{k \in K} \{f_k(1)\}$. ("Appiccichiamo" solo vertici);
2. Esiste al più un $i \in I$ tale che $f_i(0) \sim f_i(1)$. (Niente "multicappi");
3. $f_i(0) \sim f_j(0)$ (o $f_j(1)$) e $f_i(1) \sim f_j(1)$ (o $f_j(0)$) implica che $i = j$. (Niente "multiarchi").

Un **grafo topologico** è un multigrafo che non ammette cappi, nel quale cioè $\nexists i \in I : f_i(0) \sim f_i(1)$.

Usando le notazioni della Definizione 1.2.4, si chiameranno archi le classi di equivalenza degli insiemi X_i e vertici le classi di equivalenza delle immagini, rispetto alle f_i , dei punti 0 e 1.

Per quanto la prima definizione, quella di grafo combinatorio, sia in un certo senso più "pulita" e di più facile comprensione, essa non coglie affatto la struttura topologica degli archi. In effetti spesso, per comprendere meglio di cosa stiamo parlando, ci è utile esprimere il grafo combinatorio attraverso un diagramma composto da punti e linee. In alcuni casi quest'ultimo equivale esattamente al corrispondente grafo topologico.

Definizione 1.2.5 (Equivalenza tra grafi combinatori). Siano dati $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi combinatori. Essi si dicono equivalenti se esiste una biiezione $\alpha : V \rightarrow V'$ per cui, per ogni $v, w \in V$, si ha che

$$\{v, w\} \in E \iff \{\alpha(v), \alpha(w)\} \in E'.$$

Definizione 1.2.6 (Equivalenza tra grafi topologici). Siano dati $\mathcal{C} = (X, \tau)$ e $\mathcal{C}' = (X', \tau')$ due grafi topologici. Essi si dicono equivalenti se esiste un omeomorfismo $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ che manda vertici in vertici e archi in archi.

Usando la stessa terminologia della Definizione 1.2.4 consideriamo il grafo topologico $\mathcal{C} = (X/\sim, \tau/\sim)$. Definendo V come l'insieme dei vertici di \mathcal{C} ed

$$E := \{ \{[f_i(0)], [f_i(1)]\} \subseteq V^{[2]} \mid i \in I \}$$

a \mathcal{C} è associato il grafo combinatorio $G := (V, E)$. Abbiamo così costruito la funzione $f : \{\text{Grafi topologici}\} \rightarrow \{\text{Grafi combinatori}\}$.

Teorema 1.2.7 (Grafo topologico vs Grafo combinatorio). Si verifica che:

1. Per ogni grafo combinatorio G esiste un grafo topologico \mathcal{C} tale che $f(\mathcal{C})$ è equivalente a G ;
2. Dati \mathcal{C} e \mathcal{D} due grafi topologici si ha che $f(\mathcal{C})$ è equivalente a $f(\mathcal{D})$ se e solo se \mathcal{C} è equivalente a \mathcal{D} .

Traccia di dimostrazione. Dimostriamo il primo punto. Sia $G = (V, E)$ un grafo combinatorio. Si può dimostrare che esistono un insieme totalmente ordinato I e una funzione biunivoca da I a V . Perciò $V = \{v_i\}_{i \in I}$.

Ora, se $\{v_i, v_j\} \in E$ e $i \leq j$ definiamo lo spazio topologico (X_{ij}, τ_{ij}) , nel quale $X_{ij} = [0, 1] \times \{(v_i, v_j)\}$ e $\tau_{ij} := \{A \times (v_i, v_j) \mid A \text{ è un aperto di } [0, 1]\}$.

Allora $f_{ij} : [0, 1] \rightarrow X_{ij}$ definita da $f_{ij}(x) = (x, v_i, v_j)$ è un omeomorfismo. Considerando la relazione di equivalenza data da

$$(x, v_i, v_j) \sim (y, v_\alpha, v_\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} v_i = v_\alpha, x = y = 0 \\ \text{oppure} \\ v_i = v_\beta, x = 0, y = 1 \\ \text{oppure} \\ v_j = v_\alpha, x = 1, y = 0 \\ \text{oppure} \\ v_j = v_\beta, x = y = 1 \\ \text{oppure} \\ v_i = v_\alpha, v_j = v_\beta, x = y \end{cases}$$

si avrà che $\mathcal{C} = (\bigsqcup X_{i,j}/\sim, \bigsqcup \tau_{i,j}/\sim)$ è un grafo topologico tale che $f(\mathcal{C})$ è equivalente a G .

Dimostriamo il secondo punto. Siano dati $\mathcal{C} = (\bigsqcup_{i \in I} X_i/\sim_X, \bigsqcup_{i \in I} \tau_i/\sim_X)$ con le funzioni $f_i, i \in I$, e $\mathcal{D} = (\bigsqcup_{j \in J} Y_j/\sim_Y, \bigsqcup_{j \in J} \tau_j/\sim_Y)$ con le funzioni $g_j, j \in J$, due grafi topologici tali che $f(\mathcal{C}) = (V, E)$ e $f(\mathcal{D}) = (V', E')$. Se \mathcal{C} è equivalente a \mathcal{D} tramite l'omeomorfismo $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, definiamo la funzione $\alpha : V \rightarrow V'$ in modo tale che $\alpha(v) = [h(v)]$.

Per come è fatta h , α è iniettiva e suriettiva. Poichè un grafo non ha multiarchi $I \ni i \mapsto \{[f_i(0)], [f_i(1)]\} \in E$ è una biiezione. Da ciò, poichè h è biunivoca e manda archi in archi, si ha che

$$\{v, w\} \in E \iff \{\alpha(v), \alpha(w)\} \in E'.$$

Supponiamo ora che (V, E) sia equivalente a (V', E') tramite $\alpha : V \rightarrow V'$. Poichè, come già osservato sopra, le funzioni $I \ni i \xrightarrow{s} \{[f_i(0)], [f_i(1)]\} \in E$ e $J \ni j \xrightarrow{r} \{[g_j(0)], [g_j(1)]\} \in E'$ sono due biiezioni, si ha che α induce la biiezione $\sigma := r^{-1}\alpha s$. Definendo per ogni $i \in I$ e per ogni $t \in \{0, 1\}$

- $h_i(x) := x$ se $\alpha([f_i(t)]) = [g_{\sigma(i)}(t)]$;
- $h_i(x) = 1 - x$ se $\alpha([f_i(t)]) = [g_{\sigma(i)}(1 - t)]$.

le funzioni $h_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sono omeomorfismi. Inoltre definendo $h([f_i(t)]) = [g_{\sigma(i)}(h_i(t))]$ per ogni $i \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$ si ha che h è un omeomorfismo che manda vertici in vertici e archi in archi. \square

Capitolo 2

Spettro e Laplaciano

Grazie al Teorema 1.2.7 possiamo parlare indistintamente di **grafo** sottointendendo, a seconda di cosa ci sia più utile considerare, un grafo topologico o combinatorio. Ogni grafo sarà indicato con la coppia $G = (V, E)$ (o semplicemente G), dove V rappresenta l'insieme dei vertici ed E quello degli archi.

Ad ogni grafo, come vedremo in questo capitolo, corrisponde un insieme di numeri maggiori o uguali a zero chiamati autovalori del grafo. Questi ultimi, poichè ne racchiudono gran parte delle informazioni rilevanti, sono la "carta d'identità" del grafo stesso.

2.1 A spasso sul grafo

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Diremo che $x, y \in V$ sono **adiacenti**, e scriveremo $x \asymp y$, se essi sono vertici di uno stesso arco. Si chiamerà passeggiata sul grafo G una qualsiasi successione finita di vertici $\alpha = x_0 x_1 \dots x_m$ tali che $x_i = x_{i-1}$ o $x_i \asymp x_{i-1}$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Definizione 2.1.1 (Connessione). Sia (X, τ) uno spazio topologico. Diremo che esso è **connesso** se gli unici due aperti disgiunti la cui unione è X sono l'insieme vuoto e X stesso. In altre parole se, ogni volta che $A, B \in \tau$ soddisfano $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$, deve essere $A = X$ o $A = \emptyset$.

Definizione 2.1.2 (Connessione per archi). Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si dice **cammino** su X una qualsiasi funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow X$, dove $[0, 1]$ è munito della topologia euclidea. Diremo che (X, τ) è connesso per archi se dati due punti $x, y \in X$ esiste almeno un cammino che li congiunge.

Teorema 2.1.3. Uno spazio topologico (X, τ) connesso per archi è anche connesso.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $A, B \in \tau$ disgiunti e non vuoti tali che $A \cup B = X$. Scegliamo ora $a \in A$ e $b \in B$. Siccome (X, τ) è connesso per archi esiste $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua tale che $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

Ma se così fosse $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sarebbero due aperti disgiunti e non vuoti di $[0, 1]$ la cui unione è $[0, 1]$. Questo è assurdo poichè $[0, 1]$ è connesso. \square

Con qualche ipotesi in più si dimostra che anche la connessione implica la connessione per archi.

Teorema 2.1.4. Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso e tale che per ogni $x \in X$ esiste $V \subseteq X$ aperto e connesso per archi contenente x , V si intende dotato della topologia indotta da τ come nell'Esempio 1.1.3. Allora (X, τ) è anche connesso per archi.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$. Definiamo

$$A := \{x \in X \mid \exists f : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua tale che } f(0) = x_0 \text{ e } f(1) = x\}.$$

A contiene ovviamente x_0 , dunque non è vuoto. Scelto $y \in X$ per ipotesi esiste $V \subseteq X$ aperto e connesso per archi che lo contiene. Se $y \in A$ esiste $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = y$, dunque, per ogni $v \in V$, la funzione $F_v : [0, 1] \rightarrow X$ definita da

$$F_v(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

dove g è un qualsiasi cammino in V da y a v , è un cammino da x_0 a v . Perciò $v \in V \subseteq A$. Se al contrario $y \notin A$ allora, ripetendo lo stesso ragionamento, dato $v \in V$ non può esistere un cammino da x_0 a v , altrimenti esisterebbe anche da x_0 a y . Perciò $y \in V \subseteq A^c$.

Siamo giunti alla conclusione che A e A^c si possono scrivere come unione di aperti, dunque sono aperti. Siccome $A \cup A^c = X$ e $A \neq \emptyset$, per connessione di X deve essere necessariamente $A = X$. \square

Il teorema precedente ci assicura che un grafo con un numero finito di vertici che sia connesso è anche connesso per archi. In effetti, per come è stato topologicamente costruito, per ogni punto esiste sempre un aperto connesso per archi che lo contiene.

Si può dimostrare in questo caso, quindi, che se esiste una passeggiata tra due vertici esiste anche un cammino che li congiunge, e, viceversa, ad ogni cammino con estremi nei vertici corrisponde una passeggiata avente stessi estremi. Si può dunque dedurre il seguente teorema.

Teorema 2.1.5. Sia $G = (V, E)$ un grafo finito (avente cioè un numero finito di vertici). Esso è connesso se e solo se per ogni coppia di vertici in V esiste una passeggiata che li congiunge.

2.2 I Laplaciani di un grafo

Definizione 2.2.1 (Grafo pesato). Sia dato un grafo $G = (V, E)$. Un **peso** su G è una qualsiasi funzione $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi:

1. $w(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in V$;
2. $w(x, y) = w(y, x)$ per ogni $x, y \in V$;
3. $w(x, y) > 0$ se e solo se $\{x, y\} \in E$.

Un grafo a cui è stato associato un peso si dice pesato.

Il peso w su $G = (V, E)$ definito da

$$w(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{x, y\} \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

porta il nome di **peso standard**.

D'ora in avanti, se non specificato, tutti i grafi saranno considerati pesati.

Definizione 2.2.2. Sia dato $G = (V, E)$ un grafo pesato. Per ogni $x \in V$ si definisce **grado** di x la quantità $d_w x := \sum_{y \in V} w(x, y)$.

Si chiameremo **volume** di G , invece, la quantità $\text{vol } G := \sum_{x, y \in V} w(x, y)$.

Notazione 2.2.3. Sia dato un grafo finito $G = (V, E)$ con $|V| = n \in \mathbb{N}$. Ogni volta che scriveremo $x \in G$ sarà sottointeso $x \in V$. Perciò quando scriveremo $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ intenderò una funzione a valori nei vertici di G . Similmente per una funzione $F : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$.

Dove non vi è ambiguità le funzioni del primo tipo saranno identificate con il vettore di \mathbb{R}^n corrispondente, mentre quelle del secondo tipo con la matrice di $\mathbb{R}^{n \times n}$ corrispondente.

Definizione 2.2.4. Sia $G = (V, E)$. Ad esso saranno associate le matrici D e W , dette rispettivamente matrice dei gradi e matrice dei pesi, definite in questo modo:

- $D : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è la matrice diagonale tale che $D(x, x) = d_w x$ per ogni $x \in V$;
- $W : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $W(x, y) = w(x, y)$ per ogni $x, y \in V$.

Se w è il peso standard la matrice dei pesi si indica con A , e porta il nome di matrice di adiacenza.

Definizione 2.2.5. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Definiamo

- **Laplaciano combinatorio:** $L_w := D - W$;
- **Laplaciano:** $\Delta_w := D^{-1} L_w$;
- **Laplaciano normalizzato:** $\mathcal{L}_w := D^{-1/2} L_w D^{-1/2} = D^{1/2} \Delta_w D^{-1/2}$.

Poichè un grafo non ammette vertici isolati, $d_w x > 0$ per ogni $x \in V$. Da ciò segue che D è invertibile, dunque la buona posizione della definizione.

Poichè un grafo non ammette cappi la diagonale di W è nulla, dunque per la Definizione 2.2.5 si ha che $L_w(x, y) = \begin{cases} d_w x & \text{se } x = y \\ -w(x, y) & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Quindi

$$\Delta_w(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ -\frac{w(x, y)}{d_w x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\mathcal{L}_w(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ -\frac{w(x, y)}{\sqrt{d_w x} \sqrt{d_w y}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Teorema 2.2.6. Sia dato un grafo $G = (V, E)$. Per ogni $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che

$$1. \Delta_w f(x) = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{w(x, y)}{d_w x}, \quad x \in V;$$

$$2. f^T L_w f = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x, y);$$

$$3. f^T \mathcal{L}_w f = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \left(\frac{f(x)}{\sqrt{d_w x}} - \frac{f(y)}{\sqrt{d_w y}} \right)^2 w(x, y).$$

Dimostrazione. Dimostriamo 1.

$$\begin{aligned} \Delta_w f(x) &= \sum_{y \in V} \Delta_w(x, y) f(y) \\ &= f(x) - \sum_{y \in V} f(y) \frac{w(x, y)}{d_w x} \\ &= \sum_{y \in V} f(x) \frac{w(x, y)}{d_w x} - \sum_{y \in V} f(y) \frac{w(x, y)}{d_w x} \\ &= \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{w(x, y)}{d_w x}. \end{aligned}$$

Dimostriamo 2.

$$\begin{aligned} f^T L_w f &= \sum_{x, y \in V} L_w(x, y) f(x) f(y) \\ &= \sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x - \sum_{x, y \in V} f(x) f(y) w(x, y) \\ &= \sum_{x, y \in V} f(x)^2 w(x, y) - \sum_{x, y \in V} f(x) f(y) w(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x, y \in V} f(x)^2 w(x, y) - \sum_{x, y \in V} 2f(x) f(y) w(x, y) + \sum_{x, y \in V} f(y)^2 w(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (f(x)^2 - 2f(x) f(y) + f(y)^2) w(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x, y). \end{aligned}$$

La dimostrazione del punto 3 è analoga a quella del punto 2. Infatti si ha che

$$\begin{aligned}
f^T \mathcal{L}_w f &= \sum_{x,y \in V} \mathcal{L}_w(x,y) f(x) f(y) \\
&= \sum_{x \in V} f(x)^2 - \sum_{x,y \in V} f(x) f(y) \frac{w(x,y)}{\sqrt{d_w x} \sqrt{d_w y}} \\
&= \sum_{x,y \in V} f(x)^2 \frac{w(x,y)}{d_w x} - \sum_{x,y \in V} f(x) f(y) \frac{w(x,y)}{\sqrt{d_w x} \sqrt{d_w y}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{x,y \in V} \frac{f(x)^2}{d_w x} w(x,y) - \sum_{x,y \in V} 2 \frac{f(x)}{\sqrt{d_w x}} \frac{f(y)}{\sqrt{d_w y}} w(x,y) + \sum_{x,y \in V} \frac{f(y)^2}{d_w y} w(x,y) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \left(\left(\frac{f(x)}{\sqrt{d_w x}} \right)^2 - 2 \frac{f(x)}{\sqrt{d_w x}} \frac{f(y)}{\sqrt{d_w y}} + \left(\frac{f(y)}{\sqrt{d_w y}} \right)^2 \right) w(x,y) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \left(\frac{f(x)}{\sqrt{d_w x}} - \frac{f(y)}{\sqrt{d_w y}} \right)^2 w(x,y).
\end{aligned}$$

□

Per ogni grafo finito $G = (V, E)$ le matrici L_w e \mathcal{L}_w sono simmetriche, dunque, come conseguenza del teorema spettrale, posseggono $n = |V|$ autovalori reali contati con molteplicità e una base ortonormale di autovettori. Si noti che per come sono state definite le matrici \mathcal{L}_w e Δ_w sono simili, perciò posseggono gli stessi autovalori. Dai punti 2 e 3 del Teorema 2.2.6 si deduce che le matrici L_w e \mathcal{L}_w sono semidefinite positive, dunque i loro autovalori sono tutti maggiori o uguali a zero. Poniamo quindi

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

gli autovalori contati con molteplicità di \mathcal{L}_w , (quindi di Δ_w), e

$$\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$$

una sua possibile base ortonormale di autovettori, intendendo che

$$\mathcal{L}_w \Phi_i(x) = \lambda_i \Phi_i(x) \quad \forall x \in V$$

e

$$\sum_{x \in V} \Phi_i(x) \Phi_j(x) = \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle_V = \delta_{ij}$$

per ogni $i, j \in \mathbb{N}_{n-1}^0$. Ricordiamo, per la Notazione 2.2.3, che

$$\mathcal{L}_w \Phi_k(x) := \sum_{y \in V} \mathcal{L}_w(x,y) \Phi_k(y)$$

per ogni $k = 0, \dots, n-1$ e per ogni $x \in V$.

L'insieme $\Lambda(G) := \{\lambda_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ è chiamato **spettro del grafo**.

2.3 Proprietà dello spettro

Per prima cosa enunciamo e dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 2.3.1. Sia A una matrice simmetrica a valori reali di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Se $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ sono i suoi autovalori reali contati con molteplicità, definendo per $k = 1, \dots, n$ $P_k := \bigoplus_{\lambda < \lambda_k} V_\lambda$, e intendendo la somma vuota come l'insieme $\{0\}$, si ha che:

1. $\lambda_k = \inf_{0 \neq x \perp P_k} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$ per ogni $k = 1, \dots, n$;
2. $\lambda_1 = \inf_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$;
3. $\lambda_n = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$.

Inoltre gli inf e i sup dei punti precedenti sono in realtà massimi e minimi, ed essi sono raggiunti soltanto dai rispettivi autovettori.

Dimostrazione. Grazie al teorema spettrale è possibile scegliere $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ una base ortonormale di autovettori.

Mostriamo il punto 1. Per ogni $x \perp P_k$ esistono $\alpha_k, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $x = \sum_{j=k}^n \alpha_j \Phi_j$. Perciò

$$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle \sum_{j=k}^n \alpha_j A\Phi_j, \sum_{j=k}^n \alpha_j \Phi_j \rangle}{\langle \sum_{j=k}^n \alpha_j \Phi_j, \sum_{j=k}^n \alpha_j \Phi_j \rangle}$$

che, per linearità del prodotto scalare e per ortonormalità della base scelta, è uguale a

$$\frac{\sum_{j=k}^n \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j=k}^n \alpha_j^2} \geq \lambda_k \frac{\sum_{j=k}^n \alpha_j^2}{\sum_{j=k}^n \alpha_j^2} = \lambda_k.$$

Dunque $\lambda_k \leq \inf_{0 \neq x \perp P_k} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$. L'uguaglianza si ottiene osservando che

$0 \neq \Phi_k \perp P_k$ soddisfa $\frac{\langle A\Phi_k, \Phi_k \rangle}{\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle} = \lambda_k$, raggiungendo perciò l'estremo inferiore. Essendo 2 conseguenza immediata di 1, passiamo a dimostrare 3.

Per le proprietà di base esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi_j$. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \frac{\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j A\Phi_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi_j \rangle}{\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi_j \rangle} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \\ &\leq \lambda_n \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \\ &= \lambda_n. \end{aligned}$$

Si conclude come dal punto 1 osservando che $\frac{\langle A\Phi_n, \Phi_n \rangle}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle} = \lambda_n$.

Abbiamo già mostrato che in realtà quei sup e inf sono dei massimi e dei minimi. Supponendo che $0 \neq \sum_{j=k}^n \alpha_j \Phi_j = x \perp P_k$ sia un argomento del minimo di cui sopra, mostriamo che se $\lambda_i > \lambda_k$ allora $\alpha_i = 0$. Infatti se per assurdo così non fosse, avremmo che

$$\lambda_k = \frac{\sum_{j=k}^n \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j=k}^n \alpha_j^2} < \lambda_k \frac{\sum_{j=k}^n \alpha_j^2}{\sum_{j=k}^n \alpha_j^2} = \lambda_k$$

il che ovviamente porterebbe ad una contraddizione. Abbiamo così dimostrato che x può essere espresso soltanto mediante combinazioni lineari di autovettori di λ_k , equivalentemente $x \in V_{\lambda_k}$.

Osservando in modo analogo che se $0 \neq \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi_j = x \in \mathbb{R}^n$ raggiunge il massimo del punto 3 allora $\alpha_i = 0$ ogni volta che $\lambda_i < \lambda_n$, si conclude anche in questo caso che $x \in V_{\lambda_n}$. \square

Osservazione 2.3.2. Sono soddisfatti ugualmente i punti 1, 2 e 3 del Teorema 2.3.1 se definissimo $P_k := \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$, ($P_1 := \{0\}$), con $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base qualsiasi di autovettori tali che $Av_k = \lambda_k v_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Si ripetono gli stessi ragionamenti della precedente dimostrazione. \square

Combinando il Teorema 2.3.1 al Teorema 2.2.6 si riesce a dare un'espressione per gli autovalori del Laplaciano. In effetti, poichè anche \mathcal{L}_w è simmetrica, segue che per $k = 0, \dots, n-1$ vale

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf_{0 \neq f \perp P_k} \frac{\langle \mathcal{L}_w f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \\ &= \inf_{0 \neq D^{1/2} f \perp P_k} \frac{\langle \mathcal{L}_w D^{1/2} f, D^{1/2} f \rangle}{\langle D^{1/2} f, D^{1/2} f \rangle} \\ &= \inf_{0 \neq D^{1/2} f \perp P_k} \frac{\langle D^{1/2} \Delta_w f, D^{1/2} f \rangle}{\langle D^{1/2} f, D^{1/2} f \rangle} \\ &= \inf_{0 \neq D^{1/2} f \perp P_k} \frac{\langle D \Delta_w f, f \rangle}{\langle D f, f \rangle} \\ &= \inf_{0 \neq D^{1/2} f \perp P_k} \frac{\langle L f, f \rangle}{\langle D f, f \rangle} \\ &= \inf_{0 \neq D^{1/2} f \perp P_k} \frac{1}{2} \frac{\sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x,y)}{\sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x} \\ &= \inf_{0 \neq f \perp D^{1/2} P_k} \frac{1}{2} \frac{\sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x,y)}{\sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dal Teorema 2.2.6 si noti che $D^{1/2}\mathbf{1}$ è autovettore di \mathcal{L}_w per $\lambda_0 = 0$, perciò vale che:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \inf_{\{f \neq 0 : \sum_{x \in V} f(x) d_w x\}} \frac{1 \sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x,y)}{2 \sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x} \\ \lambda_{n-1} &= \sup_{f \neq 0} \frac{1 \sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x,y)}{2 \sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

λ_1 è l'autovalore più significativo in un grafo, e spesso è indicato con λ_G .

Lemma 2.3.3. Siano $G = (V, E)$ un grafo e $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. $\Delta_w f = 0$ se e solo se f è costante sulle componenti connesse di G .

Dimostrazione. Siano C_1, \dots, C_m , $m \geq 1$, le componenti connesse di G . Osservando che per $x \in C_i$

$$\Delta_w f(x) = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{w(x,y)}{d_w x} = \sum_{y \in C_i} (f(x) - f(y)) \frac{w(x,y)}{d_w x},$$

si ha ovviamente che se f è costante sulle componenti connesse allora $\Delta_w f = 0$.

Supponiamo ora che $\Delta_w f = 0$, equivalentemente che $f(x) = \sum_{y \in V} f(y) \frac{w(x,y)}{d_w x}$

per ogni $x \in V$. Poniamo $M \in C_i$ tale che $f(M) \geq f(x)$ per ogni $x \in C_i$ e scegliamo un vertice $z \in C_i$ tale che $z \asymp M$. Allora deve necessariamente essere $f(M) = f(z)$ poichè, se così non fosse, essendo $w(z, M) > 0$ si avrebbe

$$f(M) = \sum_{y \in V} f(y) \frac{w(M,y)}{d_w M} < f(M) \sum_{y \in V} \frac{w(M,y)}{d_w M} = f(M).$$

Il che è ovviamente assurdo.

Si noti come il valore $f(M)$ si "propaghi" in tutta la componente connessa C_i . Infatti, osservando che per ogni $x \in C_i$ esiste una successione di vertici $M \asymp x_1 \asymp \dots \asymp x_t \asymp x$, si conclude che f assume il valore $f(M)$ su tutta la componente connessa C_i . Si dimostra la tesi ragionando allo stesso modo sulle altre componenti connesse. \square

Teorema 2.3.4. Sia G un grafo finito. Allora $\lambda_G > 0$ se e solo se G è connesso. In particolare, la molteplicità di λ_0 è uguale al numero delle sue componenti connesse.

Dimostrazione. Se G ha come componenti connesse C_1, \dots, C_m , $m \geq 1$, allora, per $i = 1, \dots, m$, le funzioni $f_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sono sicuramente linearmente indipendenti, e, grazie al Lemma 2.3.3, sono anche un sistema di generatori di $\ker(\Delta_w)$. Osservando che la molteplicità di λ_0 è uguale alla dimensione di $\ker(\Delta_w)$, dimostrata essere m , si conclude la seconda parte del teorema. Da ciò segue anche che $\lambda_G > 0$ se e solo se G è connesso. Perciò è dimostrata anche la prima parte. \square

Il seguente teorema ci fornisce una stima degli autovalori.

Teorema 2.3.5. Sia G un grafo con n vertici. Allora valgono le seguenti affermazioni

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = n$;
2. $\lambda_G \leq \frac{n}{n-1} \leq \lambda_{n-1}$;
3. $\lambda_k \leq 2$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n-1$;
4. Se G non è completo, cioè esistono due vertici distinti non adiacenti, allora $\lambda_G \leq 1$;
5. Lo spettro di G è l'unione degli spettri delle sue componenti connesse.

Dimostrazione. Dimostriamo 1. \mathcal{L}_w è simile alla matrice $\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$, perciò hanno la stessa traccia. Si conclude osservando che $\text{tr}(\mathcal{L}_w) = n$ e $\text{tr}(\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$.

Dimostriamo 2. Poiché $\lambda_0 = 0$, grazie al primo punto si ha che

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \geq \lambda_1(n-1).$$

Perciò $\lambda_G \leq \frac{n}{n-1}$. Per lo stesso motivo

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \leq \lambda_{n-1}(n-1)$$

quindi $\lambda_{n-1} \geq \frac{n}{n-1}$.

Dimostriamo 3. Osservando che $(a-b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che per l'equazione (2.1)

$$\begin{aligned} \lambda_k &\leq \inf_{0 \neq f \perp D^{-1/2} P_k} \frac{\sum_{x,y \in V} (f(x)^2 + f(y)^2) w(x,y)}{\sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x} \\ &= \inf_{0 \neq f \perp D^{-1/2} P_k} \frac{\sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x}{\sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Dimostriamo 4. Supponiamo che esistano due vertici distinti non adiacenti $a, b \in V$. Scegliendo la funzione $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(z) = \begin{cases} d_w b & \text{se } z = a \\ -d_w a & \text{se } z = b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

g è non nulla, e vale che $\sum_{x \in V} g(x) d_w x = 0$. Poiché

$$\lambda_G = \inf_{\{f \neq 0 : \sum_{x \in V} f(x) d_w x = 0\}} \frac{1}{2} \frac{\sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 w(x,y)}{\sum_{x \in V} f(x)^2 d_w x},$$

si ha che

$$\begin{aligned}\lambda_G &\leq \frac{1}{2} \frac{\sum_{x,y \in V} (g(x) - g(y))^2 w(x,y)}{\sum_{x \in V} g(x)^2 d_w x} \\ &= \frac{(d_w b)^2 d_w a + (d_w a)^2 d_w b}{(d_w b)^2 d_w a + (d_w a)^2 d_w b} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Dimostriamo 5. Segue dal fatto che, a meno di permutare i vertici del grafo, \mathcal{L}_w è diagonale a blocchi dove ogni blocco è la matrice Laplaciana normalizzata corrispondente a ciascuna componente connessa. \square

2.4 Trasformata di Fourier e Convoluzione

Notazione 2.4.1. Supponiamo d'ora in poi che $G = (V, E)$ sia un grafo finito avente n vertici, $n \in \mathbb{N}$. Dotiamo V di un ordinamento totale, cioè poniamo $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ordinando i vertici di G abbiamo anche fissato un ordine per le righe e le colonne delle matrici dei gradi e dei pesi D e W . In questo caso $D, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono tali che $D_{ii} = d_w x_i$ e $W_{ij} = w(x_i, x_j)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

In questo modo ogni funzione $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ è univocamente identificata dal vettore di \mathbb{R}^n dato da $f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Poniamo

$$\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$$

una base ortonormale di autovettori di L_w . Possiamo farlo poichè L_w è simmetrica e semidefinita positiva.

Notazione 2.4.2. Se, come sopra, $\{\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}\}$ è una base ortonormale di autovettori di L_w allora definiamo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ come segue:

$$U_{ij} = \Psi_{j-1}(x_i) \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

In altre parole U è la matrice avente Ψ_{j-1} come colonna j per ogni $j = 1 \dots n-1$, cioè la matrice $U = (\Psi_0 \ \Psi_1 \ \dots \ \Psi_{n-1})$.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che sia sommabile, definiamo trasformata di Fourier di f

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sapendo che, date due funzioni $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è ben definito il prodotto scalare $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$, si noti che la trasformata di Fourier della funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non è nient'altro che

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \langle e^{-i\langle \cdot, \xi \rangle}, f \rangle_{L^2} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

intendendo con $e^{-i\langle \cdot, \xi \rangle}$ la funzione che ad ogni $x \in \mathbb{R}^n$ associa $e^{-i\langle x, \xi \rangle}$.

Osservazione 2.4.3. Fissato $\xi \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle} \in \mathbb{C}$ è un'autofunzione del Laplaciano.

Dimostrazione. Osservando che $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{-i\langle x, \xi \rangle} = -e^{-i\langle x, \xi \rangle} \xi_i^2$ per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha che

$$\Delta e^{-i\langle x, \xi \rangle} = - \sum_{i=1}^n e^{-i\langle x, \xi \rangle} \xi_i^2 = -|\xi|^2 e^{-i\langle x, \xi \rangle} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Segue quindi la definizione di Trasformata di Fourier per funzioni a valori in un grafo.

Definizione 2.4.4 (Trasformata di Fourier). Sia dato un grafo G come dalla Notazione 2.4.1 e $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce **trasformata di Fourier** di f la funzione $Tf : G \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$Tf(x_i) = \sum_{x \in V} \Psi_{i-1}(x) f(x) = \langle \Psi_{i-1}, f \rangle$$

per ogni $i = 1, \dots, n$.

Si noti che, usando la terminologia della Definizione 2.4.4, ponendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ come dalla Notazione 2.4.2 osserviamo che $Tf = U^T f$ per ogni $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. In altre parole T trasforma il vettore f scritto in coordinate rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n nello stesso vettore, ma scritto in coordinate rispetto alla base $\{\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}\}$. Infatti, se $f = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Psi_k$, si ha che $Tf(x_i) = \alpha_{i-1}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Poichè U è una matrice ortogonale, essa è invertibile. Dunque anche $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lo è come funzione.

Osservazione 2.4.5. Se $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione su G , chiameremo **anti-trasformata di Fourier** di f l'inversa della trasformata e la indicheremo come $T^{-1}f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Si noti che essa è definita da

$$T^{-1}f(x) = Uf(x) = \sum_{j=1}^n \Psi_{j-1}(x) f(x_j) \quad x \in G.$$

U è la matrice definita nella Notazione 2.4.2.

Per definire la convoluzione su un grafo è necessaria una breve premessa. Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, è detta convoluzione di f con g la funzione data da

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Questa definizione, che ha perfettamente senso in \mathbb{R}^n , non può essere applicata direttamente se si vuole definire la convoluzione anche su di un grafo, poichè, essendo V un insieme non per forza munito di un'operazione binaria, non è ben definita la traslazione $f(x-y)$.

Abbiamo però un asso nella manica: il teorema di convoluzione. Per quest'ultimo infatti, date $f, g \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g). \quad (2.4)$$

Quindi, dove è possibile antitrasformare, si verifica che

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)).$$

Per questo motivo ci è suggerita la seguente definizione.

Definizione 2.4.6 (Convoluzione su grafi). Siano dati un grafo finito G e $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce **convoluzione** di f con g la funzione

$$f * g := T^{-1}(T(f) \odot T(g)),$$

dove T e T^{-1} sono rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata di Fourier, e \odot rappresenta la moltiplicazione punto per punto.

Osservazione 2.4.7. Per la Notazione 2.4.2, dati G un grafo finito e $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che

$$f * g = U(U^T f \odot U^T g).$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che $Tf = U^T f$ per ogni $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. □

Osservazione 2.4.8. Siano G un grafo finito e $f, g, h : G \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni su G . Valgono allora le seguenti affermazioni:

1. $f * g = g * f$;
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$;

Inoltre, anche nel caso discreto, vale il **teorema di convoluzione**. Cioè è soddisfatta l'equazione

$$T(f * g) = T(f) \odot T(g).$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue banalmente dalle proprietà del prodotto punto per punto e dalle definizioni di convoluzione e trasformata di Fourier. □

Capitolo 3

Equazioni differenziali su di un grafo

3.1 Derivata e integrale

D'ora in avanti, per snellire la notazione, faremo spesso a meno di indicare un grafo G con la coppia (V, E) . Per questo motivo ricordiamo la Notazione 2.2.3.

Definizione 3.1.1. Siano G un grafo e $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce **integrale** di f sopra G la quantità

$$\int_G f d_w \text{ (o semplicemente } \int_G f \text{)} := \sum_{x \in G} f(x) d_w x.$$

Per come è stato definito, anche l'integrale sopra un grafo, così come quello nello spazio euclideo, risulta essere lineare.

Definizione 3.1.2. Siano G un grafo, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ e $y \in G$. La **derivata direzionale** di f rispetto a y è la funzione definita da

$$G \ni x \mapsto D_{w,y} f(x) := (f(y) - f(x)) \sqrt{\frac{w(x,y)}{d_w x}}$$

Così come per una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 il gradiente è dato da $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ mentre il Laplaciano, se f è anche C^2 , da $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$, allo stesso modo si definiscono Laplaciano e gradiente su di un grafo.

Definizione 3.1.3. Dati G un grafo con n vertici e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ si definiscono:

- **Gradiente** di f , la funzione $G \ni x \mapsto \nabla_w f(x) := (D_{w,y} f(x))_{y \in G} \in \mathbb{R}^n$;
- **Laplaciano** di f , la funzione $G \ni x \mapsto \sum_{y \in G} D_{w,y} (D_{w,y} f)(x) \in \mathbb{R}$.

Si noti che la definizione è coerente con la terminologia introdotta nel capitolo precedente. Dal Teorema 2.2.6 si ha che, in effetti, per ogni x in G

$$\begin{aligned}\sum_{y \in G} D_{w,y}(D_{w,y}f)(x) &= \sum_{y \in G} D_{w,y} \left((f(y) - f(x)) \sqrt{\frac{w(x,y)}{d_w x}} \right) \\ &= \sum_{y \in G} (f(x) - f(y)) \frac{w(x,y)}{d_w x} \\ &= \Delta_w f(x).\end{aligned}$$

Data una funzione $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo **energia** di f su G la quantità

$$\Psi(f) := \int_G |\nabla_w f|^2.$$

Osserviamo che, sempre grazie al Teorema 2.2.6, si ha

$$\begin{aligned}\Psi(f) &= \int_G |\nabla_w f|^2 \\ &= \sum_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} (D_{w,y}f(x))^2 \right) d_w x \\ &= \sum_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} (f(x) - f(y))^2 \frac{w(x,y)}{d_w x} \right) d_w x \\ &= \sum_{x,y \in G} (f(x) - f(y))^2 w(x,y) \\ &= 2 f^T L_w f.\end{aligned}$$

Le osservazioni fatte, combinate all'equazione (2.2), ci permettono di scrivere λ_G nei seguenti termini:

$$\lambda_G = \inf_{\{f \neq 0 \mid \int_G f = 0\}} \frac{1}{2} \frac{\Psi(f)}{\int_G f^2}.$$

3.2 Derivata esterna

Definizione 3.2.1 (Sottografo). Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un grafo $S = (V', E')$ tale che $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ è detto **sottografo** di G . Scriveremo in questo caso $S \leq G$.

Definizione 3.2.2 (Sottografo indotto). Siano $G = (V, E)$ un grafo e $T \subseteq V$. Definendo $E' := \{\{x, y\} \subseteq T^{[2]} \mid \{x, y\} \in E\}$, se la coppia $S = (V', E')$ è un grafo quest'ultimo è chiamato sottografo di G **indotto** da V' . In questo caso scriveremo $S \leq G$.

Per definire la derivata normale esterna di un sottografo avremmo bisogno della nozione di bordo.

Definizione 3.2.3. Siano $G = (V, E)$ un grafo e $S = (V', E')$ un suo sottografo indotto.

Definiamo **bordo** di S il sottoinsieme di $V \setminus V'$ dato da

$$\partial S := \{x \in V \setminus V' \mid \text{esiste } y \in S \text{ per cui } x \asymp y\}.$$

Dato $S = (V', E')$ sottografo di $G = (V, E)$, indicheremo con \bar{S} il sottografo di G avente come vertici $V' \cup \partial S$, e come archi tutti gli archi in E' insieme a quelli in E che congiungono V' a ∂S .

Definizione 3.2.4 (Derivata normale esterna). Siano G un grafo, $S \trianglelefteq G$ e $f : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $\partial S \neq \emptyset$ definiamo **derivata normale esterna** di f in $z \in \partial S$ come

$$\frac{\partial f}{\partial_w n}(z) := \sum_{y \in S} (f(y) - f(z)) \frac{w(z, y)}{d'_w z},$$

dove $d'_w z := \sum_{y \in S} w(z, y)$.

3.3 Formula di Green

Notazione 3.3.1. Nel seguito ogni volta che scriveremo \bar{S} sarà sottointeso, dove non specificato, $S = (V', E')$ sottografo connesso indotto del grafo $G = (V, E)$ tale che $\partial S \neq \emptyset$. In più supporremo che G sia connesso, che $|V| = n$ e $|V'| = m$.

Lemma 3.3.2. Siano $f, h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Vale che

$$2 \int_{\bar{S}} (\Delta_w f) h = \int_{\bar{S}} \langle \nabla_w f, \nabla_w h \rangle.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} 2 \int_{\bar{S}} (\Delta_w f) h &= 2 \sum_{x \in \bar{S}} (\Delta_w f(x)) h(x) d_w x \\ &= 2 \sum_{x \in \bar{S}} h(x) \left(\sum_{y \in \bar{S}} (f(x) - f(y)) \frac{w(x, y)}{d_w x} \right) d_w x \\ &= 2 \sum_{x, y \in \bar{S}} h(x) (f(x) - f(y)) w(x, y) \\ &= \sum_{x, y \in \bar{S}} h(x) (f(x) - f(y)) w(x, y) + \sum_{x, y \in \bar{S}} h(y) (f(y) - f(x)) w(x, y) \\ &= \sum_{x, y \in \bar{S}} \left((f(y) - f(x)) \sqrt{\frac{w(x, y)}{d_w x}} \right) \left((h(y) - h(x)) \sqrt{\frac{w(x, y)}{d_w x}} \right) d_w x \\ &= \sum_{x \in \bar{S}} \langle \nabla_w f(x), \nabla_w h(x) \rangle d_w x \\ &= \int_{\bar{S}} \langle \nabla_w f, \nabla_w h \rangle \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.3 (Formula di Green). Siano $f, h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Valgono le seguenti identità:

1. $2 \int_{\bar{S}} (\Delta_w f) f = \int_{\bar{S}} |\nabla_w f|^2;$

2. $\int_{\bar{S}} (\Delta_w f)h = \int_{\bar{S}} (\Delta_w h)f;$
3. $\int_S \left((\Delta_w f)h - (\Delta_w h)f \right) = \int_{\partial S} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial_w n} \right)h - \left(\frac{\partial h}{\partial_w n} \right)f \right).$

La terza identità è chiamata **formula di Green**.

Dimostrazione. Dal Lemma 3.3.2 seguono banalmente le prime due identità; la prima si ottiene sostituendo f ad h mentre la seconda vale per simmetria.

Dimostriamo la formula di Green. Dal punto 2, per linearità dell'integrale, si ha che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\bar{S}} \left((\Delta_w h)f - (\Delta_w f)h \right) \\ &= \int_S \left((\Delta_w h)f - (\Delta_w f)h \right) + \int_{\partial S} \left((\Delta_w h)f - (\Delta_w f)h \right). \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \int_S \left((\Delta_w h)f - (\Delta_w f)h \right) &= \int_{\partial S} \left((\Delta_w f)h - (\Delta_w h)f \right) \\ &= \sum_{z \in \partial S} \left(h(z)(\Delta_w f)(z) - f(z)(\Delta_w h)(z) \right) d_w z \\ &= \sum_{z \in \partial S} \sum_{y \in S} \left(h(z)(f(z) - f(y)) \frac{w(z, y)}{d_w z} - f(z)(h(z) - h(y)) \frac{w(z, y)}{d_w z} \right) d_w z \\ &= \sum_{z \in \partial S} \left(h(z) \left(- \frac{\partial f}{\partial_w n} \right)(z) + f(z) \left(\frac{\partial h}{\partial_w n} \right)(z) \right) d_w z \\ &= \int_{\partial S} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial_w n} \right) f - \left(\frac{\partial f}{\partial_w n} \right) h \right). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.4. Siano $f, h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Valgono le seguenti identità:

1. $\Delta_w(fh) = (\Delta_w h)f - \langle \nabla_w f, \nabla_w h \rangle + (\Delta_w f)h;$
2. $\int_S \left((\Delta_w h)f + (\Delta_w f)h \right) + \int_S \langle \nabla_w f, \nabla_w h \rangle = \int_{\partial S} \frac{\partial(fh)}{\partial_w n}.$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima identità.

$$\begin{aligned}
\Delta_w(fh)(x) &= \sum_{z \in \bar{S}} \left(f(x)h(x) - f(z)h(z) \right) \frac{w(z,x)}{d_w x} \\
&= \sum_{z \in \bar{S}} \left(f(x)h(x) - f(z)h(x) + f(z)h(x) - f(z)h(z) \right) \frac{w(z,x)}{d_w x} \\
&= \sum_{z \in \bar{S}} (h(x) - h(z))f(z) \frac{w(z,x)}{d_w x} + \sum_{z \in \bar{S}} (f(x) - f(z))h(x) \frac{w(z,x)}{d_w x} \\
&= \sum_{z \in \bar{S}} \left((h(z) - h(x)) \sqrt{\frac{w(z,x)}{d_w x}} \right) \left((f(x) - f(z)) \sqrt{\frac{w(z,x)}{d_w x}} \right) \\
&\quad + \sum_{z \in \bar{S}} (h(x) - h(z))f(x) \frac{w(z,x)}{d_w x} \\
&\quad + \sum_{z \in \bar{S}} (f(x) - f(z))h(x) \frac{w(z,x)}{d_w x} \\
&= - \langle \nabla_w h(x), \nabla_w f(x) \rangle + (\Delta_w h)(x)f(x) + (\Delta_w f)(x)h(x).
\end{aligned}$$

Il punto 2 segue banalmente dal punto 1 e dalla formula di Green, scegliendo come prima funzione fh e come seconda la funzione costantemente uguale a 1. \square

In riferimento alla Notazione 3.3.1 indicheremo con

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

gli autovalori di G , e con

$$\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$$

i corrispettivi autovettori, assumendo $\Phi_0(x) = \frac{\sqrt{d_w x}}{\sqrt{\text{vol } G}}$ per ogni $x \in G$.

Definizione 3.3.5 (Funzione di Green del Laplaciano). Dato un grafo G definiamo **funzione di Green del Laplaciano** la seguente applicazione:

$$\Gamma_w(x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right) \Phi_k(x) \Phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \quad x, y \in G.$$

Essendo G connesso per il teorema 2.3.4 $\lambda_1 > 0$, quindi Γ_w è ben definita.

Osservazione 3.3.6. Per ogni $x, y \in G$ si ha che

$$\Delta_w(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Phi_k(x) \Phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}},$$

dove Δ_w è il Laplaciano di G .

Dimostrazione. Per $k = 0, \dots, n-1$ si ha che

$$\begin{aligned}
\lambda_k \Phi_k(x) &= (\mathcal{L}_w \Phi_k)(x) \\
&= (D^{1/2} \Delta_w D^{-1/2} \Phi_k)(x) \\
&= \sqrt{d_w x} \sum_{y \in G} \left(\frac{\Phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} - \frac{\Phi_k(y)}{\sqrt{d_w y}} \right) \frac{w(x, y)}{d_w x} \\
&= \Phi_k(x) - \frac{1}{\sqrt{d_w x}} \sum_{y \in G} \Phi_k(y) \frac{w(x, y)}{\sqrt{d_w y}}.
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione seguente si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Phi_k(x) \Phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \left(\sqrt{d_w y} \Phi_k(y) - \sum_{z \in G} \Phi_k(z) \frac{w(y, z)}{\sqrt{d_w z}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(x) \Phi_k(y) \frac{\sqrt{d_w y}}{\sqrt{d_w x}} - \sum_{z \in G} \frac{w(y, z)}{\sqrt{d_w z} \sqrt{d_w x}} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(x) \Phi_k(z) \\
&= \delta_{xy} - \frac{w(x, y)}{d_w x} \\
&= \Delta_w(x, y).
\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.3.7. Per ogni $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ vale che

$$\Delta_w \Gamma_w f(x) = f(x) - \frac{1}{\text{vol } G} \int_G f.$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 3.3.6, ricordando che $\lambda_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\Delta_w \Gamma_w(x, y) &= \sum_{z \in G} \Delta_w(x, z) \Gamma_w(z, y) \\
&= \sum_{z \in G} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \Phi_i(x) \Phi_i(z) \sqrt{\frac{d_w z}{d_w x}} \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_j} \right) \Phi_j(z) \Phi_j(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w z}} \right) \\
&= \sum_{z \in G} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \Phi_i(x) \Phi_i(z) \Phi_j(z) \Phi_j(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \Phi_i(x) \Phi_j(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \sum_{z \in G} \Phi_i(z) \Phi_j(z) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(x) \Phi_i(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \\
&= \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} (\delta_{xy} - \Phi_0(x) \Phi_0(y)) \\
&= \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \left(\delta_{xy} - \frac{\sqrt{d_w x}}{\sqrt{\text{vol } G}} \frac{\sqrt{d_w y}}{\sqrt{\text{vol } G}} \right) \\
&= \delta_{xy} - \frac{d_w y}{\text{vol } G}.
\end{aligned}$$

Se ne deriva che

$$\begin{aligned}\Delta_w \Gamma_w f(x) &= \sum_{y \in G} \Delta_w \Gamma_w(x, y) f(y) \\ &= f(x) - \frac{1}{\text{vol } G} \sum_{y \in G} f(y) d_w y \\ &= f(x) - \frac{1}{\text{vol } G} \int_G f.\end{aligned}$$

□

Aver definito integrale, Laplaciano e derivata direzionale in questo modo non è casuale. Si pensi per esempio al seguente problema. Dato un grafo pesato $G = (V, E)$ supponiamo che ogni arco $\{x, y\} \in E$ sia in realtà un filo conduttore di resistenza $R(x, y) = \frac{1}{w(x, y)}$ ed $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ definisca un potenziale su ciascun vertice. Come si muovono le cariche elettriche sugli archi di G ? E con quale intensità?

Ora si comprende meglio il senso di dare un peso agli archi. In questo modello, per esempio, archi con pesi maggiori avranno una minore resistenza, dunque tenderanno a lasciar scorrere più agevolmente le cariche elettriche. Poichè per convenzione la corrente elettrica percorre un conduttore da punti di potenziale maggiore a quelli di potenziale minore, per la prima legge di Ohm, $I = \frac{\Delta V}{R}$, la quantità $(f(x) - f(y))w(x, y)$ rappresenta l'intensità con segno della corrente elettrica che percorre l'arco $\{x, y\}$. Essa è positiva se va da x a y , negativa altrimenti.

Grazie a queste considerazioni si deduce che l'intensità di corrente uscente da $x \in V$ è data proprio da

$$I = \sum_{y \succ x} (f(x) - f(y))w(x, y) = d_w x \Delta_w f(x).$$

Segue immediatamente l'interpretazione di $\Delta_w f(x)$ come l'intensità elettrica media uscente da x . Si noti come in questo modello l'equazione

$$\int_G \Delta_w f = 0$$

rispecchi il fatto che la somma algebrica delle correnti uscenti dai vertici è nulla, o, equivalentemente, non vi è dispersione di carica elettrica.

3.4 Il problema di Dirichlet

Avendo in mente l'interpretazione di cui sopra definiamo il problema di Dirichlet.

Definizione 3.4.1 (Problema di Dirichlet). Fissate $\sigma : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : S \rightarrow \mathbb{R}$, si dice problema di Dirichlet il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta_w f(x) = g(x) & x \in S \\ f|_{\partial S} = \sigma. \end{cases} \quad (3.1)$$

$f : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione se soddisfa le due equazioni del sistema. Il problema si dice omogeneo se $g \equiv 0$.

Teorema 3.4.2 (Equazione di Poisson). Sia $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione fissata. L'equazione, detta **equazione di Poisson**,

$$\Delta_w f = g \quad (3.2)$$

ha soluzione in f se e solo se $\int_G g = 0$. In questo caso al variare di $a_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_0 + \Gamma_w g(x) \text{ per } x \in G \quad (3.3)$$

sono tutte e sole le soluzioni.

Dimostrazione. Osserviamo la necessarietà della condizione $\int_G g = 0$. In effetti se f è soluzione dell'equazione di Poisson, per il punto 2 del teorema 3.3.3, si ha che

$$\int_G g = \int_G \Delta_w f = \int_G (\Delta_w f) \mathbb{1} = \int_G (\Delta_w \mathbb{1}) f = 0.$$

Per ogni f scritta come in (3.3) grazie all'Osservazione 3.3.7 si ha che

$$\Delta_w f(x) = \Delta_w \Gamma_w g(x) = g(x) - \frac{1}{\text{vol } G} \int_G g.$$

Dunque, per una tale scrittura, $\int_G g = 0$ implica che f è soluzione.

Supponiamo che f sia soluzione. Poichè $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}\}$ è una base di \mathbb{R}^n esistono $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in G$

$$D^{1/2} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Phi_k(x). \quad (3.4)$$

Per ortonormalità della base $a_k = \langle D^{1/2} f, \Phi_k \rangle$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Da ciò si deduce che

$$\begin{aligned} \lambda_k a_k &= \langle D^{1/2} f, \lambda_k \Phi_k \rangle \\ &= \langle D^{1/2} f, \mathcal{L}_w \Phi_k \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_w D^{1/2} f, \Phi_k \rangle \\ &= \langle D^{1/2} \Delta_w f, \Phi_k \rangle \\ &= \langle D^{1/2} g, \Phi_k \rangle, \end{aligned}$$

in particolare che $a_k = \frac{1}{\lambda_k} \langle D^{1/2} g, \Phi_k \rangle$ per $k = 1, \dots, n-1$. L'equazione (3.4) è dunque equivalente a

$$f(x) \sqrt{d_w x} = a_0 \frac{\sqrt{d_w x}}{\sqrt{\text{vol } G}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} \left(\sum_{y \in G} g(y) \Phi_k(y) \sqrt{d_w y} \right) \Phi_k(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{\text{vol } G}} + \sum_{y \in G} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} \Phi_k(x) \Phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \right) g(y) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{\text{vol } G}} + \Gamma_w g(x). \end{aligned}$$

□

Per trattare il problema di Dirichlet con dato al bordo è necessario introdurre la seguente terminologia.

Definizione 3.4.3. Siano G un grafo connesso e $S \trianglelefteq G$ un sottografo indotto di G avente bordo vuoto, come dalla Notazione 3.3.1. Si definiscono D_S e W_S le sottomatrici ottenute dalle righe e dalle colonne rispettivamente di D e W , la matrice dei gradi e dei pesi di G , indicizzate dai vertici in S . Di conseguenza, così come si è fatto nella Definizione 2.2.5, definiremo $L_{w,S}, \Delta_{w,S}$ e $\mathcal{L}_{w,S}$.

Si noti che $\mathcal{L}_{w,S}$ è ancora una matrice simmetrica, ma, a differenza di \mathcal{L}_w , è definita positiva. Infatti per ogni $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f^T L_{w,S} f &= \sum_{x,y \in S} L_{w,S}(x,y) f(x) f(y) \\ &= \sum_{x \in S} (f(x))^2 d_w x - \sum_{x,y \in S} f(x) f(y) w(x,y) \\ &= \sum_{x \in S} (f(x))^2 \sum_{y \in \bar{S}} w(x,y) - \sum_{x,y \in S} f(x) f(y) w(x,y) \\ &= \sum_{x,y \in S} (f(x))^2 w(x,y) - \sum_{x,y \in S} f(x) f(y) w(x,y) + \sum_{x \in S, y \in \partial S} (f(x))^2 w(x,y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in S} (f(x) - f(y))^2 w(x,y) + \sum_{x \in S, y \in \partial S} (f(x))^2 w(x,y) \geq 0. \end{aligned}$$

Per annullare quest'ultima espressione è necessario annullare entrambe le somme. Poichè $\partial S \neq \emptyset$ esistono $z \in \partial S$ e $y \in S$ tali che $w(z,y) > 0$. Per annullare la seconda somma dunque è necessario che almeno $f(y) = 0$. Ma, poichè S è connesso, per annullare la prima f deve essere costante. Da qui si deduce che f deve essere la funzione nulla in S . Abbiamo mostrato che $L_{w,S}$ è definita positiva, dunque anche $\mathcal{L}_{w,S}$ lo è.

Quindi poniamo

$$0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_m$$

i suoi m autovalori contati con molteplicità (ricordiamo che S ha m vertici). Questi ultimi portano il nome di **autovalori di Dirichlet**. Per completezza fissiamo anche

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$$

gli autovettori ortonormali corrispondenti.

Notiamo che, analogamente a quanto succede per Δ_w (si veda l'Osservazione 3.3.6), abbiamo $\Delta_{w,S}(x,y) = \sum_{k=1}^m \nu_k \phi_k(x) \phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}}$ per ogni x e y vertici di S .

Definizione 3.4.4. Siano G ed S come sopra. Definiamo **funzione di Green associata a S**

$$\gamma_{w,S}(x,y) := \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{\nu_k}\right) \phi_k(x) \phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \quad x, y \in S.$$

Teorema 3.4.5. Siano G ed S come dalla Notazione 3.3.1. Allora

$$\gamma_{w,S}\Delta_{w,S} = \Delta_{w,S}\gamma_{w,S} = I.$$

Notazione 3.4.6. D'ora in avanti se $x \in \partial S$ (o $y \in \partial S$) porremo $D_S(x, y) = W_S(x, y) = \mathcal{L}_{w,S}(x, y) = L_{w,S}(x, y) = \Delta_{w,S}(x, y) = \gamma_{w,S}(x, y) = 0$. Così come se $x \in \partial S$ porremo $\phi_k(x) = 0$, per $k = 1, \dots, m$.

Teorema 3.4.7. Sia $\sigma : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione fissata. L'unica soluzione $f : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \Delta_w f(x) = 0, & x \in S \\ f|_{\partial S} = \sigma \end{cases} \quad (3.5)$$

è data da

$$f(x) = \gamma_{w,S} B_\sigma(x) \quad x \in S.$$

Dove

$$B_\sigma(y) = \sum_{z \in \partial S} \frac{\sigma(z) w(y, z)}{d_w y}, \quad y \in S$$

e $\gamma_{w,S}$ è la funzione del Laplaciano associata a S inteso come sottografo indotto di \bar{S} .

Dimostrazione. Supponiamo che f sia soluzione di (3.5). Allora per ogni vertice x di S

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{y \in S} \gamma_{w,S}(x, y) \Delta_w f(y) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_k} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \left(\sum_{y \in S} \frac{\phi_k(y)}{\sqrt{d_w y}} \Delta_w f(y) d_w y \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_j} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w(x)}} \int_S (\Delta_w f)(D^{-1/2} \phi_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_j} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w(x)}} \left(\int_S f(\Delta_w D^{-1/2} \phi_k) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial S} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial_w n} \right) (D^{-1/2} \phi_k) - \left(\frac{\partial}{\partial_w n} (D^{-1/2} \phi_k) \right) f \right) \right). \end{aligned}$$

D'altra parte se $x \in S$ si ha

$$\Delta_w D^{-1/2} \phi_k(x) = \nu_k D^{-1/2} \phi_k(x).$$

Perciò

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_k} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \int_S f(\Delta_w D^{-1/2} \phi_k) &= \sum_{k=1}^m \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \left(\sum_{y \in S} f(y) \frac{\phi_k(y)}{\sqrt{d_w y}} d_w y \right) \\ &= \sum_{y \in S} f(y) \left(\sum_{k=1}^m \phi_k(x) \phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Insieme all'uguaglianza di cui sopra, poichè $D^{-1/2}\phi_k(x) = 0$ se $x \in \partial S$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_k} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \int_{\partial S} f \left(\frac{\partial}{\partial_w n} D^{-1/2} \phi_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_k} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \left(\sum_{z \in \partial S} f(z) \frac{\partial}{\partial_w n} (D^{-1/2} \phi_k)(z) d_w z \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_k} \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{d_w x}} \sum_{z \in \partial S} \sigma(z) d_w z \left(\sum_{y \in S} \left(\frac{\phi_k(y)}{\sqrt{d_w y}} - \frac{\phi_k(z)}{\sqrt{d_w z}} \right) \frac{w(z, y)}{d_w z} \right) \\
&= \sum_{y \in S} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu_k} \phi_k(x) \phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \sum_{z \in \partial S} \frac{\sigma(z) w(y, z)}{d_w y} \\
&= \gamma_{w, S} B_\sigma(x).
\end{aligned}$$

L'unicità è stata provata. Un semplice calcolo mostra che effettivamente quella è soluzione, e così si dimostra la tesi. \square

Lemma 3.4.8. Sia $f : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Vale che la funzione

$$h(x) := f(x) - \gamma_{w, S} \Delta_w f(x)$$

verifica $h|_{\partial S} = f|_{\partial S}$ e $\Delta_w h(x) = 0$ per ogni $x \in S$.

Dimostrazione. Per la Notazione 3.4.6, $f|_{\partial S} = h|_{\partial S}$. Inoltre si ha che se $x \in S$

$$\begin{aligned}
\Delta_w h(x) &= \Delta_w f(x) - \Delta_w \gamma_{w, S} \Delta_w f(x) \\
&= \Delta_w f(x) - \sum_{y \in \bar{S}} \sum_{z \in \bar{S}} \Delta_w(x, y) \gamma_{w, S}(y, z) (\Delta_w f)(z) \\
&= \Delta_w f(x) - \sum_{y \in S} \sum_{z \in S} \Delta_w(x, y) \gamma_{w, S}(y, z) (\Delta_w f)(z) \\
&= \Delta_w f(x) - \sum_{z \in S} \Delta_w f(z) \sum_{y \in S} \Delta_w(x, y) \gamma_{w, S}(y, z) \\
&= \Delta_w f(x) - \sum_{z \in S} \Delta_w f(z) \sum_{y \in S} \Delta_{w, S}(x, y) \gamma_{w, S}(y, z) \\
&= \Delta_w f(x) - \Delta_w f(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

\square

Teorema 3.4.9. Siano $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni fissate. L'unica soluzione del problema di Dirichlet non omogeneo

$$\begin{cases} \Delta_w f(x) = g(x) & x \in S \\ f|_{\partial S} = \sigma \end{cases}$$

è data da

$$f(x) = \gamma_{w, S} (B_\sigma + g)(x), \quad x \in S.$$

Come dal Teorema 3.4.7,

$$B_\sigma(y) = \sum_{z \in \partial S} \frac{\sigma(z)w(y,z)}{d_w y}, \quad y \in S.$$

Dimostrazione. Se f è soluzione allora può essere scritta come

$$f(x) = h(x) + \gamma_{w,S} \Delta_w f(x) = h(x) + \gamma_{w,S} g(x), \quad x \in S.$$

Per il Lemma 3.4.8, h risolve il problema di Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \Delta_w h(x) = 0 & x \in S \\ h|_{\partial S} = f|_{\partial S} = \sigma. \end{cases}$$

Dunque, per il Teorema 3.4.7, necessariamente

$$h(x) = \gamma_{w,S} B_\sigma(x), \quad x \in S.$$

Perciò deve essere

$$f(x) = \gamma_{w,S} (B_\sigma + g)(x), \quad x \in S.$$

Un semplice conto è sufficiente a mostrare che quella è soluzione. □

3.5 Equazione di diffusione

Una delle equazioni più importanti e con più risvolti applicativi è l'equazione di diffusione, meglio conosciuta come equazione del calore. Essa nello spazio euclideo si presenta come

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = f(x, t).$$

Dove $\alpha \in \mathbb{R}$, detto coefficiente di diffusione, e $f : \bar{\Omega} \times [0, T) \mapsto \mathbb{R}$ con Ω aperto di \mathbb{R}^n sono assegnati. Lo scopo è trovare una funzione u che risolva quell'equazione.

In questa sezione ci occuperemo di risolvere l'analogo discreto dell'equazione del calore.

Definizione 3.5.1. Siano G un grafo, $H : G \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $T > 0$, una funzione assegnata e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si chiama **equazione di diffusione**

$$\partial_t F(x, t) - \alpha \Delta_w F(x, t) = H(x, t), \quad x \in G, \quad t \in [0, T). \quad (3.6)$$

$F : G \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione se $\forall x \in G$ si ha che $[0, T) \ni t \mapsto F(x, t)$ è derivabile e se risolve l'equazione di cui sopra. Se $H \equiv 0$ l'equazione si dice omogenea.

L'interpretazione è immediata. Ritornando al modello fisico precedente, questa volta il potenziale depositato sui vertici F è variabile nel tempo. I numerosi dati sperimentali evidenziano che la variazione di potenziale in un vertice $\partial_t F$ è proporzionale all'intensità di carica elettrica media uscente, rappresentata come

già abbiamo visto da $\Delta_w F(x, t)$. Per questo motivo si evince che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni vertice $x \in G$

$$\partial_t F(x, t) = \alpha \Delta_w F(x, t),$$

equivalentemente

$$\partial_t F(x, t) - \alpha \Delta_w F(x, t) = 0.$$

D'ora in avanti, dato un grafo G , se $f : G \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ scriveremo

- $f \in C^k(G \times [0, T))$ se, per ogni $x \in G$, si ha che $f(x, \cdot)$ è di classe C^k su $[0, T)$;
- $f \in L^1(G \times [0, T))$ se, per ogni $x \in G$, si ha che $f(x, \cdot)$ è sommabile su $[0, T)$.

Inoltre supporremo sempre $\alpha = 1$. Le dimostrazioni con α arbitrario sono analoghe.

Teorema 3.5.2. Sia G un grafo come nella Notazione 3.3.1 e $H : G \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione fissata. Se $H \in C^0(G \times [0, T)) \cap L^1(G \times [0, T))$ allora ogni soluzione dell'equazione

$$\partial_t F(x, t) - \Delta_w F(x, t) = H(x, t), \quad x \in G, \quad t \in [0, T)$$

si può scrivere come

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{d_w x}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(c_k + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \langle D^{1/2} H(\cdot, \tau), \Phi_k \rangle_G d\tau \right) e^{\lambda_k t} \Phi_k(x),$$

dove c_0, \dots, c_{n-1} sono delle costanti in \mathbb{R} .

Dimostrazione. Supponiamo che F sia una soluzione. Poichè $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ è una base di \mathbb{R}^n sappiamo che esistono $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t) \in \mathbb{R}$ tali che

$$(D^{1/2} F)(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \Phi_k(x), \quad x \in G.$$

Essendo la base ortonormale, sappiamo che $a_k(t) = \langle (D^{1/2} F)(\cdot, t), \Phi_k \rangle_G$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Dunque

$$\begin{aligned} \lambda_k a_k(t) &= \langle D^{1/2} F(\cdot, t), \mathcal{L}_w \Phi_k \rangle_G \\ &= \langle \mathcal{L}_w D^{1/2} F(\cdot, t), \Phi_k \rangle_G \\ &= \langle D^{1/2} \Delta_w F(\cdot, t), \Phi_k \rangle_G \\ &= \langle D^{1/2} (\partial_t F(\cdot, t) - H(\cdot, t)), \Phi_k \rangle_G \\ &= a'_k(t) - \langle D^{1/2} H(\cdot, t), \Phi_k \rangle_G, \end{aligned}$$

dove a'_j è la derivata rispetto al tempo di a_j . Quella di cui sopra è una equazione differenziale lineare. Sappiamo che essa è risolta unicamente da

$$a_k(t) = e^{\lambda_k t} \left(c_k + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \sum_{y \in G} H(y, \tau) \Phi_k(y) \sqrt{d_w y} d\tau \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

c_0, c_1, \dots, c_{n-1} sono costanti arbitrarie.

Poichè $(D^{1/2}F)(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\Phi_k(x)$ otteniamo che, per ogni $x \in G$,

$$\sqrt{d_w x} F(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(c_k + \int_0^t \sum_{y \in G} e^{-\lambda_k \tau} H(y, \tau) \Phi_k(y) \sqrt{d_w y} d\tau \right) e^{\lambda_k t} \Phi_k(x).$$

In altre parole

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{d_w x}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(c_k + \int_0^t \sum_{y \in V} e^{-\lambda_k \tau} H(y, \tau) \Phi_k(y) \sqrt{d_w y} d\tau \right) e^{\lambda_k t} \Phi_k(x).$$

Si verifica che una qualsiasi F scritta in quel modo soddisfa l'equazione di diffusione.

Abbiamo così dimostrato necessarietà e sufficienza. \square

Corollario 3.5.3. Tutte le soluzioni dell'equazione di diffusione omogenea

$$\partial_t F(x, t) - \Delta_w F(x, t) = 0$$

sono della forma

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{d_w x}} \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\lambda_k t} \Phi_k(x).$$

Dato S come nella Notazione 3.3.1, e

$$0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_m$$

gli autovalori contati con molteplicità di $\mathcal{L}_{w,S}$ (vedi Definizione 3.4.3) definiamo **nucleo di diffusione di Dirichlet** la seguente quantità

$$E_{w,S}(x, y, t) := \sum_{j=1}^m e^{\nu_j t} \phi_j(x) \phi_j(y) \sqrt{\frac{d_w(y)}{d_w(x)}}, \quad x, y \in S, \quad t \in [0, T).$$

Teorema 3.5.4. Se S è come nella Notazione 3.3.1, date $\sigma : \partial S \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ in $C^0(\partial S \times [0, T)) \cap L^1(\partial S \times [0, T))$, $H : \bar{S} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ in $C^0(\bar{S} \times [0, T)) \cap L^1(\bar{S} \times [0, T))$ e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni fissate, allora l'unica soluzione $F \in C^0(\bar{S} \times [0, T))$ dell'equazione di diffusione non omogenea

$$\begin{cases} \partial_t F(x, t) - \Delta_w F(x, t) = H(x, t) & x \in S, t \in (0, T) \\ F(z, t) = \sigma(z, t) & z \in \partial S, t \in [0, T) \\ F(x, 0) = f(x) & x \in S \end{cases}$$

è data, per ogni x in S , da

$$F(x, t) = \langle E_{w,S}(x, \cdot, t), f \rangle_S + \int_0^t \langle E_{w,S}(x, \cdot, t - \tau), H(\cdot, \tau) + B_\sigma(\cdot, \tau) \rangle_S d\tau,$$

dove

$$B_\sigma(y, t) := \sum_{z \in \partial S} \frac{\sigma(z, t) w(y, z)}{d_w y}, \quad y \in S, t \in [0, T),$$

e $E_{w,S}$ è il nucleo di diffusione di Dirichlet.

Dimostrazione. Supponiamo che $F \in C^0(\bar{S} \times [0, T])$ sia una soluzione. Allora esistono $a_1(t), \dots, a_m(t) \in \mathbb{R}$ tali che

$$D_S^{1/2} F|_S(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \phi_k(x), \quad x \in S, t \in [0, T].$$

Essendo la base ortonormale sappiamo che

$$a_k(t) = \langle D_S^{1/2} F|_S(\cdot, t), \phi_k \rangle_S = \langle D^{1/2} F(\cdot, t), \phi_k \rangle_{\bar{S}} \quad k = 1, \dots, m.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \nu_k a_k(t) &= \langle D_S^{1/2} F|_S(\cdot, t), \nu_k \phi_k \rangle_S \\ &= \langle D^{1/2} F(\cdot, t), \nu_k \phi_k \rangle_S \\ &= \langle D^{1/2} F(\cdot, t), \mathcal{L}_{w,S} \phi_k \rangle_S \\ &= \langle D^{1/2} F(\cdot, t), \mathcal{L}_w \phi_k \rangle_{\bar{S}} - \langle D^{1/2} F(\cdot, t), \mathcal{L}_w \phi_k \rangle_{\partial S} \\ &= \langle D^{1/2} \Delta_w F(\cdot, t), \phi_k \rangle_{\bar{S}} - \sum_{z \in \partial S} \sqrt{d_w z} \sigma(z, t) \sum_{y \in S} \frac{w(y, z)}{\sqrt{d_w y} \sqrt{d_w z}} \phi_k(y) \\ &= \langle D^{1/2} \partial_t F(\cdot, t), \phi_k \rangle_{\bar{S}} - \langle D^{1/2} H(\cdot, t), \phi_k \rangle_{\bar{S}} \\ &\quad - \sum_{y \in S} \sum_{z \in \partial S} \sigma(z, t) \frac{w(y, z)}{\sqrt{d_w y}} \phi_k(y) \\ &= a'_k(t) - \langle D^{1/2} H(\cdot, t), \phi_k \rangle_{\bar{S}} - \sum_{y \in S} \sum_{z \in \partial S} \sigma(z, t) \frac{w(y, z)}{\sqrt{d_w y}} \phi_k(y). \end{aligned}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare. Sappiamo che l'unica soluzione è

$$a_k(t) = e^{\nu_k t} \left(c_k + \int_0^t e^{-\nu_k \tau} \left(\langle D^{1/2} H(\cdot, \tau), \phi_k \rangle_{\bar{S}} + \sum_{y \in S} \sum_{z \in \partial S} \sigma(z, \tau) \frac{w(y, z)}{\sqrt{d_w y}} \phi_k(y) \right) d\tau \right)$$

dove $c_k = a_k(0) = \langle D_S^{1/2} f, \phi_k \rangle_S$.

Concludiamo che per ogni $x \in S$ e per ogni $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{d_w(x)}} \sum_{k=1}^m a_k(t) \phi_k(x) \\ &= \sum_{y \in S} \left(e^{\nu_k t} \phi_k(x) \phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \right) f(y) \\ &\quad + \int_0^t e^{\nu_k(t-\tau)} \left(\sum_{y \in S} \phi_k(x) \phi_k(y) \sqrt{\frac{d_w y}{d_w x}} \left(H(y, \tau) + \sum_{z \in \partial S} \frac{\sigma(z, \tau) w(y, z)}{d_w y} \right) \right) d\tau \\ &= \langle E_{w,S}(x, \cdot, t), f \rangle_S + \int_0^t \langle E_{w,S}(x, \cdot, t-\tau), H(\cdot, \tau) + B_\sigma(\cdot, \tau) \rangle_S d\tau. \end{aligned}$$

Un semplice calcolo mostra che effettivamente quest'ultima è soluzione. \square

Bibliografia

- [1] Stefano Francavaglia - *Topologia*
- [2] Marco Manetti - *Topologia* - Springer Verlag; 2 edizione (18 marzo 2014)
- [3] Carlo Casolo - *Corso di Teoria dei Grafi*
- [4] Fan R. K. Chung - *Lectures on Spectral Graph Theory* - University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania 19104
- [5] Soon-Yeong Chung and Carlos A. Berenstein - *ω -Harmonic Functions and Inverse Conductivity Problems on Networks* - SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 65, No. 4 (Apr., 2005), pp. 1200-1226
- [6] Soon-Yeong Chung, Yun-Sung Chun, and Jong-Ho Kim - *Diffusion and Elastic Equations on Networks*