

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Gruppo di Grigorchuk e le sue presentazioni

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marta Morigi

Presentata da:
Ettore Marmo

Quarta Sessione
Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

Nella prima parte di questo elaborato si descrive il gruppo di Grigorchuk Γ , un particolare gruppo agente sull'albero binario infinito. Nella seconda parte si studiano le sue presentazioni, introducendo una generalizzazione del concetto di presentazione di un gruppo detto presentazione endomorfa.

Nel primo capitolo vengono definiti gli alberi d -ari infiniti \mathcal{T}_d per $d > 1$ e i loro gruppi di automorfismi G_d , i sottoinsiemi $L(k)$ di \mathcal{T}_d detti *livelli k -esimi* per $k \geq 1$ e i corrispondenti stabilizzatori $\text{St}_{G_d}(k)$ in G_d . Vengono dimostrate certe semplici proprietà dei gruppi G_d e viene definito un morfismo $\psi : L(1) \rightarrow G_d \times \cdots \times G_d$ (d volte) fondamentale nello studio di questi gruppi che riflette nella struttura di G_d la simmetria dell'albero su cui agisce.

Il capitolo successivo si concentra sul caso $d = 2$ definendo il gruppo di Grigorchuk come un particolare sottogruppo di G_2 generato da quattro elementi a, b, c, d . Sono poi studiate due sue caratteristiche: la cardinalità che si dimostra essere infinita e l'ordine di ogni suo elemento che risulta invece finito. Ciò rende il gruppo di Grigorchuk un controesempio al *problema di Burnside*.

Nel terzo capitolo viene trattato il problema della rappresentazione degli elementi di Γ mediante una presentazione in termini di generatori e relazioni, si dimostra tramite una procedura standard che questo gruppo non ammette una presentazione finita. Viene poi data una descrizione esplicita di una tale presentazione infinita di Γ che si fattorizza tramite un omomorfismo dal prodotto libero $C_2 * V$ di un gruppo ciclico di ordine due e di un gruppo di Klein.

Nella seconda parte dell'elaborato viene trattato l'argomento delle *presentazioni endomorfe o L -presentazioni*: una generalizzazione del noto concetto di presentazione di gruppo. La definizione di presentazione endomorfa è ispirata proprio ad una presentazione di Γ in cui ogni relatore, espresso come elemento del gruppo libero F generato da quattro elementi, è dato dalla ripetuta applicazione di un endomorfismo $\sigma : F \rightarrow F$ ad un elemento r di un sottoinsieme finito di F .

Un vantaggio delle presentazioni endomorfe è che molti algoritmi usati per lo studio di gruppi finitamente presentati si possono adattare a gruppi finitamente L-presentati, viene descritto nel dettaglio l'esempio dell'algoritmo di Todd-Coxeter per l'enumerazione di classi laterali.

Si conclude con un'applicazione delle presentazioni endomorfe al *teorema di Higman* fornendo una descrizione esplicita di un gruppo finitamente presentato $\hat{\Gamma}$ contenente il gruppo di Grigorchuk come sottogruppo.

Capitolo 1

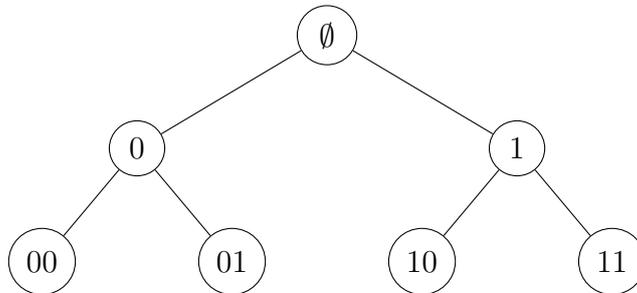
Gruppi di automorfismi degli alberi d -ari

Definizione 1.1. Sia d un numero naturale, $d > 2$. L'albero d -ario infinito \mathcal{T}_d è un grafo in cui ogni vertice v è rappresentato da una sequenza finita $(v_i)_{i=1}^{\ell_v}$ a valori in $\{0, 1, \dots, d-1\}$ e in cui due vertici u, v sono collegati se le sequenze corrispondenti $(u_i)_{i=1}^{\ell_u}$ e $(v_i)_{i=1}^{\ell_v}$ sono tali che $|\ell_u - \ell_v| = 1$ ed $u_i = v_i$ per $i = 0, 1, \dots, \min\{\ell_u, \ell_v\}$ (ovvero se possiamo ottenere la sequenza più corta cancellando l'ultimo termine di quella più lunga). Il vertice corrispondente alla sequenza vuota, v_\emptyset è detto *radice* di \mathcal{T}_d .

Definiamo poi, per $k \geq 0$, il *livello k -esimo* $L_d(k)$ di \mathcal{T}_d come l'insieme dei vertici rappresentati da sequenze di lunghezza k . È utile pensare a \mathcal{T}_d come ad un'unione disgiunta di tali livelli in cui $L_d(k+1)$ è al di sotto di $L_d(k)$.

Ogni vertice v (eccetto v_\emptyset) ha esattamente $d+1$ vertici collegati: se $v \in L_d(k)$, $k \geq 0$ ne avrà uno nel livello superiore $L_d(k-1)$ rappresentato da $(v_i)_{i=1}^{\ell_v-1}$ e d in $L_d(k+1)$ le cui sequenze sono formate dagli stessi termini della sequenza di v con l'aggiunta di un (ℓ_v+1) -esimo termine appartenente sempre a $\{0, 1, \dots, d-1\}$. La radice v_\emptyset invece è collegata a esattamente d vertici: gli elementi di $L_d(1)$.

Osservazione 1.2. è facile vedere che $|L_d(k)| = d^k$.



Siamo interessati allo studio dei gruppi di automorfismi di questi alberi. Un automorfismo è in questo caso una funzione biettiva $\alpha : \mathcal{T}_d \rightarrow \mathcal{T}_d$ che mantiene la struttura di albero: α manda vertici collegati in vertici collegati.

Questa condizione impone che $\alpha v_\emptyset = v_\emptyset$ per qualunque automorfismo α dato che, come visto sopra, v_\emptyset è l'unico vertice di \mathcal{T}_d di valenza d ; da questo segue ancora che la restrizione $\alpha|_{L_d(k)}$ per ogni k ha immagine in $L_d(k)$ ed è iniettiva e suriettiva, in altre parole è una permutazione di $L_d(k)$.

Per un qualunque gruppo di automorfismi G di \mathcal{T}_d possiamo definire per $k \geq 0$ il sottogruppo $\text{St}_G(k)$ (detto *stabilizzatore* del livello k) costituito dagli elementi di G che fissano i vertici del livello $L_d(k)$.

Osservazione 1.3. *Sia G un gruppo di automorfismi di \mathcal{T}_d e sia $\alpha \in G$; se $\alpha \in \text{St}_G(k)$, allora $\alpha \in \text{St}_G(k-1)$, ovvero $\text{St}_G(k) \subseteq \text{St}_G(k-1)$. Infatti, come già visto, ogni vertice v di livello k è collegato ad esattamente un vertice $v' \in L_d(k-1)$, dato che $\alpha(v) = v$ e $\alpha(v') \in L_d(k-1)$ si deve avere $\alpha(v') = v'$.*

Osservazione 1.4. *L'insieme G_d di tutti gli automorfismi di \mathcal{T}_d forma un gruppo con l'operazione di composizione.*

Gli alberi d -ari hanno una struttura molto simmetrica: sotto ogni vertice v vi è una copia dell'albero stesso. Infatti sia $\mathcal{T}_d[v]$ il sottoalbero di \mathcal{T}_d dato da tutti i vertici che si trovano "sotto" v , ovvero tutti i vertici le cui sequenze cominciano con la sequenza di v . Abbiamo un isomorfismo canonico:

$$\delta_v : \mathcal{T}_d \rightarrow \mathcal{T}_d[v]$$

che a $x \in \mathcal{T}_d$ associa vx , il vertice ottenuto concatenando la sequenza di x a quella di v . Questa struttura si riflette sui gruppi di automorfismi: in G_d possiamo rappresentare gli elementi $g \in \text{St}_{G_d}(1)$ che stabilizzano il primo livello $L_d(1) = \{x_0, \dots, x_{d-1}\}$ come delle d -uple di automorfismi $(g_1, \dots, g_{d-1}) \in G_d \times \dots \times G_d$ tali che l'azione di g su ogni sottoalbero $\mathcal{T}_d[x_j]$ sia $\delta_{x_j} g_j \delta_{x_j}^{-1}$ per ogni $j \in \{0, \dots, d-1\}$.

Abbiamo definito in altre parole un isomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \psi = (\phi_0, \dots, \phi_{d-1}) : \text{St}_{G_d}(1) &\rightarrow G_d \times \dots \times G_d \\ g &\mapsto (g_0, \dots, g_{d-1}) \end{aligned}$$

In generale si può definire un isomorfismo simile anche per gli altri sottogruppi di stabilizzatori $\text{St}_{G_d}(k)$ del livello k . Questi sottogruppi godono inoltre di varie altre proprietà:

Proposizione 1.5. *Per ogni $k \geq 0$, $\text{St}_{G_d}(k)$ è un sottogruppo normale di G_d di indice finito.*

Dimostrazione. Consideriamo il gruppo $Sym(L_d(k))$ di tutte le permutazioni di $L_d(k)$, la restrizione di un automorfismo α dell'albero d -ario al livello k -esimo definisce un omomorfismo fra G_d e $Sym(L_d(k))$:

$$\alpha \mapsto \alpha|_{L_d(k)}$$

. Il nucleo di questo omomorfismo è proprio lo stabilizzatore e dato che $|Sym(L_d(k))|$ è finito, anche $|G_d/St_{G_d}(k)|$ è finito. \square

Simili risultati valgono anche per i sottogruppi di G_d :

Proposizione 1.6. *Sia $H \subseteq G_d$ un sottogruppo di G_d , allora $St_H(k)$ è un sottogruppo normale di H .*

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione precedente non usa alcuna proprietà specifica di G_d , solo proprietà condivise da qualunque gruppo di automorfismi di \mathcal{T}_d . Sostituendo nella dimostrazione precedente $L_H(k)$ a $L_d(k)$ e $St_H(k)$ a $St_{G_d}(k)$ si ha la tesi. \square

Introduciamo ora una notazione per descrivere dei particolari elementi di G_d .

Definizione 1.7. Si consideri il gruppo simmetrico $Sym(d)$ delle permutazioni dell'insieme $\{0, 1, \dots, d-1\}$. Ad ogni mappa $\alpha : \mathcal{T}_d \rightarrow Sym(d)$ associamo un automorfismo g_α di G_d nel modo seguente:

Il vertice v_\emptyset rimane fissato.

$$g_\alpha(v_\emptyset) = v_\emptyset$$

. Per $v \in L_1(d)$, ovvero v è rappresentato dalla sequenza con un solo termine $\{j\}$ con $1 \leq j \leq d-1$,

$$g_\alpha(j) = \alpha(v_\emptyset)(j)$$

. Per $v \in L_k(d)$, ovvero v è rappresentato da una sequenza $\{j_1, \dots, j_k\}$ con $1 \leq j_i \leq d-1$ per ogni $1 \leq i \leq k$,

$$g_\alpha(j_1, \dots, j_k) = (g_\alpha(j_1, \dots, j_{k-1}), \alpha(j_1, \dots, j_{k-1})(j_k))$$

Un primo esempio di utilizzo per questa notazione può essere la dimostrazione del seguente fatto.

Proposizione 1.8. *Ogni gruppo G_d contiene automorfismi di ordine infinito.*

Dimostrazione. Denotiamo con ϵ il d -ciclo $(1 \ 2 \ \dots \ d-1) \in Sym(d)$. Definiamo una mappa $\beta : \mathcal{T}_d \rightarrow Sym(d)$ come:

$$\beta(v_\emptyset) = \epsilon$$

$$\beta(j_1, \dots, j_k) = \begin{cases} \epsilon & \text{se } j_1 = j_2 = \dots = j_k = d-1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vediamo nel dettaglio l'azione di g_β sui primi livelli di \mathcal{T}_d :
 Per i vertici del primo livello:

$$g_\beta(j) = \beta(v_\emptyset)(j) = (1 \ 2 \ \dots \ d-1)(j) = \epsilon(j)$$

Per i vertici del secondo livello:

$$g_\beta(j_1, j_2) = (g_\beta(j_1), \beta(j_1)(j_2))$$

dunque per come abbiamo definito β , se $j_1 \neq d-1$ vale $g_\beta(j_1, j_2) = (\epsilon(j_1), j_2)$, altrimenti $g_\beta(d-1, j_2) = (\epsilon(d-1), \epsilon(j_2)) = (0, \epsilon(j_2))$.

Per i vertici del terzo livello:

$$g_\beta(j_1, j_2, j_3) = (g_\beta(j_1, j_2), \beta(j_1, j_2)(j_3))$$

ragionando come prima:

$$g_\beta(j_1, j_2, j_3) = \begin{cases} (\epsilon(j_1), j_2, j_3) & j_1, j_2 \neq d-1 \\ (0, \epsilon(j_2), j_3) & j_1 = d-1 \neq j_2 \\ (0, 0, \epsilon(j_3)) & j_1 = j_2 = d-1 \end{cases}$$

è chiaro che la permutazione di $L_d(k)$ indotta da g_β è un ciclo di ordine $|L_d(k)| = d^k$ per ogni $k \geq 1$. Segue che l'ordine di g_β è infinito. \square

Capitolo 2

Il Gruppo di Grigorchuk

Consideriamo nel caso $d = 2$ un particolare gruppo Γ generato da quattro automorfismi a, b, c, d dell'albero binario \mathcal{T}_2 che denoteremo da qui in poi più semplicemente come \mathcal{T} (analogamente ne denoteremo il livello k -esimo $L_2(k)$ come $L(k)$).

Con \mathcal{T}_0 e \mathcal{T}_1 indicheremo inoltre i due sottoalberi principali di \mathcal{T} , ovvero i sottoalberi dati da tutti i vertici sotto ai vertici v_0 e v_1 direttamente connessi alla radice v_\emptyset dell'albero. In altre parole, ricordando che ogni vertice $v \in \mathcal{T}$ può essere identificato con una sequenza finita j_1, \dots, j_k con $k > 0$ e $j_i \in \{0, 1\}$, possiamo descrivere \mathcal{T}_0 come il sottoalbero dei vertici di \mathcal{T} le cui sequenze iniziano con $j_1 = 0$ e \mathcal{T}_1 come il sottoalbero dei vertici di \mathcal{T} le cui sequenze iniziano con $j_1 = 1$.

Definiamo ora gli automorfismi che generano il gruppo di Grigorchuk Γ .

Definizione 2.1. Il primo, a , agisce su \mathcal{T} scambiando fra loro i due sottoalberi principali. Nello specifico l'azione di a su un vertice $v = j_1, \dots, j_k$ è data da $av = \bar{j}_1, \dots, j_k$ dove $\bar{j} = 1 - j$ con $j \in \{0, 1\}$.

I restanti automorfismi b, c, d sono definiti simultaneamente e ricorsivamente anch'essi in termini di azione sui sottoalberi principali che, ricordiamo, sono canonicamente isomorfi all'albero binario stesso. Nello specifico, agiscono come l'identità sulla radice v_\emptyset e sui vertici v_0 e v_1 poi

- b agisce su \mathcal{T}_0 come a e su \mathcal{T}_1 come c
- c agisce su \mathcal{T}_0 come a e su \mathcal{T}_1 come d
- d agisce su \mathcal{T}_0 come l'identità e su \mathcal{T}_1 come b

queste azioni si possono descrivere più esplicitamente sui vertici come

$$\begin{cases} b(0, j_2, \dots, j_k) = (0, \bar{j}_2, \dots, j_k) \\ b(1, j_2, \dots, j_k) = (1, c(j_2, \dots, j_k)) \\ c(0, j_2, \dots, j_k) = (0, \bar{j}_2, \dots, j_k) \\ c(1, j_2, \dots, j_k) = (1, d(j_2, \dots, j_k)) \\ d(0, j_2, \dots, j_k) = (0, j_2, \dots, j_k) \\ d(1, j_2, \dots, j_k) = (1, b(j_2, \dots, j_k)) \end{cases}$$

Definizione 2.2. Denotiamo con $\text{St}_\Gamma(1)$ il sottogruppo di Γ che fissa gli elementi del primo livello di \mathcal{T} . Possiamo allora considerare la restrizione dell'omomorfismo $\psi : \text{St}_{G_2}(1) \rightarrow G_2 \times G_2$ definito in precedenza, ottenendo un omomorfismo

$$\psi : \text{St}_\Gamma(1) \rightarrow \Gamma \times \Gamma$$

I tre automorfismi b, c, d hanno immagini:

$$\begin{aligned} \psi(b) &= (a, c) \\ \psi(c) &= (a, d) \\ \psi(d) &= (1, b) \end{aligned}$$

Da cui ritroviamo la descrizione delle loro azioni in termini di azioni sui sottoalberi principali.

Esempio 2.3. Consideriamo il vertice v dato dalla sequenza $(1, 0, 1, 1, 0)$, calcoliamo l'immagine di v tramite a, b, c, d

$$\begin{aligned} a(1, 0, 1, 1, 0) &= (0, 0, 1, 1, 0) \\ b(1, 0, 1, 1, 0) &= (1, c(0, 1, 1, 0)) = (1, 0, 0, 1, 0) \\ c(1, 0, 1, 1, 0) &= (1, d(0, 1, 1, 0)) = (1, 0, 1, 1, 0) \\ d(1, 0, 1, 1, 0) &= (1, b(0, 1, 1, 0)) = (1, 0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

Iniziamo a verificare certe relazioni fra questi generatori con cui potremo identificare Γ come quoziente del prodotto libero $C_2 * V$ dove V è il gruppo di Klein, $C_2 \times C_2$.

Proposizione 2.4. Valgono le seguenti relazioni: $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$ e

$$\begin{aligned} bc &= cb = d \\ cd &= dc = b \\ bd &= db = c \end{aligned}$$

In altre parole $\{1, a\}$ è un sottogruppo di Γ isomorfo a C_2 e $\{1, b, c, d\}$ è un sottogruppo di Γ isomorfo a V

Dimostrazione. La relazione $a^2 = 1$ segue direttamente dalla definizione, infatti per un vertice v rappresentato da una sequenza da j_1, \dots, j_k si ha

$$a^2(j_1, \dots, j_k) = a(\bar{j}_1, \dots, j_k) = (\bar{\bar{j}}_1, \dots, j_k) = (j_1, \dots, j_k)$$

Dimostriamo le altre relazioni per induzione su k (ovvero per induzione sul livello a cui si trova v in \mathcal{T}). Per $v \in L(1)$ è chiaro che $b^2 = c^2 = d^2 = 1$. Per $v \in L(k)$ avremo due casi: $v \in \mathcal{T}_0$ oppure $v \in \mathcal{T}_1$, in altre parole v potrà essere rappresentato dalla sequenza $0, j_2, \dots, j_k$ oppure da $1, j_2, \dots, j_k$. Nel primo caso si avrà:

$$\begin{aligned} b^2(0, j_2, \dots, j_k) &= b(0, \bar{j}_2, \dots, j_k) = (0, \bar{\bar{j}}_2, \dots, j_k) = (0, j_2, \dots, j_k) \\ c^2(0, j_2, \dots, j_k) &= c(0, \bar{j}_2, \dots, j_k) = (0, \bar{\bar{j}}_2, \dots, j_k) = (0, j_2, \dots, j_k) \\ d^2(0, j_2, \dots, j_k) &= d(0, j_2, \dots, j_k) = (0, j_2, \dots, j_k) \end{aligned}$$

e nel secondo:

$$\begin{aligned} b^2(1, j_2, \dots, j_k) &= b(1, c(j_2, \dots, j_k)) = (1, c^2(j_2, \dots, j_k)) \\ c^2(1, j_2, \dots, j_k) &= b(1, c(j_2, \dots, j_k)) = (1, d^2(j_2, \dots, j_k)) \\ d^2(1, j_2, \dots, j_k) &= b(1, c(j_2, \dots, j_k)) = (1, b^2(j_2, \dots, j_k)) \end{aligned}$$

e si concluderà per ipotesi induttiva essendo j_2, \dots, j_k la sequenza associata ad un vertice del livello $(k - 1)$ -esimo.

Per le altre relazioni la dimostrazione è del tutto analoga. □

Osservazione 2.5. *Ad ogni parola w di lunghezza finita in a, b, c, d possiamo associare un elemento del prodotto libero $C_2 * V$ e dunque un elemento di Γ tramite la proiezione canonica sul quoziente. Ogni elemento di $C_2 * V$ si può rappresentare univocamente con una parola "ridotta" della forma*

$$t_0 a t_1 a \cdots a t_{n-1} a t_n$$

con $n \geq 0$, $t_1, \dots, t_{n-1} \in \{b, c, d\}$ e $t_0, t_n \in \{\emptyset, b, c, d\}$.

Definizione 2.6. Per una parola generica w definiamo la sua *riduzione*, $r(w)$, come l'unica parola in forma ridotta che rappresenta lo stesso elemento in $C_2 * V$. Queste nozioni hanno un significato anche in Γ con la eccezione dell'unicità: più parole ridotte possono infatti rappresentare lo stesso elemento.

2.1 Il gruppo Γ come controesempio ad un problema di Burnside

Il *problema di Burnside* posto da William Burnside nel 1902 consiste nella seguente domanda:

Sia G un gruppo finitamente presentato e tale che ogni suo elemento abbia ordine finito. Sono queste condizioni sufficienti affinché anche l'ordine di G sia finito?

In generale la risposta è negativa e il gruppo di Grigorchuk Γ fornisce uno dei possibili controesempi. In questa sezione dimostreremo infatti che Γ è un gruppo infinito e che ogni suo elemento ha ordine una potenza di due.

Sarà a questo scopo necessario studiare il sottogruppo $\text{St}_\Gamma(1)$.

Osservazione 2.7. *Una parola w in a, b, c, d rappresenta un elemento di $\text{St}_\Gamma(1)$ se e solo se il numero di occorrenze di a in w è pari.*

Dimostrazione. Ricordando l'esistenza di una forma normale ridotta per le parole che rappresentano gli elementi di Γ , scriviamo w in questa forma $r(w) = t_0 a t_1 a \cdots a t_{n-1} a t_n$ con $n \geq 0$, $t_1, \dots, t_{n-1} \in \{b, c, d\}$ e $t_0, t_n \in \{\emptyset, b, c, d\}$. Il primo livello $L(1)$ dell'albero binario è dato da due soli vertici v_0, v_1 , sappiamo che ogni t_i agisce come l'identità su $L(1)$ mentre $a(v_j) = v_{\bar{j}}$, ovvero l'azione di $t_0 a t_1 a \cdots a t_{n-1} a t_n$ sul primo livello è determinata solo dal numero di volte in cui compare la lettera a . Ricordando che $a^2 = 1$ si ha che w rappresenta un elemento di $\text{St}_\Gamma(1)$ se e solo se questo numero è pari. \square

è chiaro da questa osservazione che $\text{St}_\Gamma(1)$ è generato dai seguenti elementi di Γ

$$\begin{array}{ccc} b & c & d \\ aba & aca & ada \end{array}$$

Proposizione 2.8. *L'omomorfismo $\psi : \text{St}_\Gamma(1) \rightarrow \Gamma \times \Gamma$ è iniettivo e la composizione di ψ con ciascuna delle proiezioni sulle componenti, $\phi_j : \text{St}_\Gamma(1) \rightarrow \Gamma$ per $j \in \{0, 1\}$, è suriettiva.*

Dimostrazione. Come visto in precedenza $\psi(b) = (a, c)$, $\psi(c) = (a, d)$ e $\psi(d) = (1, b)$. Calcoliamo l'immagine di aba, aca e ada tramite ψ osservando come ognuno di questi automorfismi agisce sui due sottoalberi principali. Consideriamo due generici vertici $v \in \mathcal{T}_0$ e $v' \in \mathcal{T}_1$ rappresentati da due sequenze finite $0, j_2, \dots, j_n$ e $1, k_2, \dots, k_m$. Per alleggerire la notazione denoteremo queste sequenze come $0, \mathbf{j}$ e $1, \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} aba(0, \mathbf{j}) &= ab(1, \mathbf{j}) = a(1, c(\mathbf{j})) = 0, c(\mathbf{j}) \\ aba(1, \mathbf{k}) &= ab(0, \mathbf{k}) = a(0, a(\mathbf{k})) = 1, a(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

ovvero aba agisce come c su \mathcal{T}_0 e come a su \mathcal{T}_1 e di conseguenza avremo $\psi(aba) = (c, a)$. Ragionando allo stesso modo si ottengono le immagini anche per aca e ada :

$$\begin{aligned} \psi(aca) &= (d, a) \\ \psi(ada) &= (b, 1) \end{aligned}$$

è quindi chiaro che ψ sia iniettiva poichè manda ogni generatore di $\text{St}_\Gamma(1)$ in un elemento diverso dall'identità di $\Gamma \times \Gamma$. Le composizioni di Γ con le proiezioni sulle due componenti del prodotto diretto contengono tutti i generatori a, b, c, d di Γ nelle loro immagini e dunque entrambe $\phi_0, \phi_1 : \text{St}_\Gamma(1) \rightarrow \Gamma$ sono suriettive. \square

Corollario 2.9. *Il gruppo Γ è infinito, infatti $\text{St}_\Gamma(1)$ è un suo sottogruppo proprio che può essere mappato suriettivamente su Γ .*

Dimostriamo ora che per ogni elemento di Γ ha ordine finito.

Definizione 2.10. Per ogni $\gamma \in \Gamma$ denoteremo la *lunghezza* di γ rispetto all'insieme di generatori $S = \{a, b, c, d\}$ come il più piccolo intero n per cui esista una parola in S di lunghezza n che rappresenti l'elemento γ in Γ e scriveremo $n = |\gamma|_S$ (o più semplicemente $|\gamma|$).

Osservazione 2.11. *In virtù della forma normale già discussa in precedenza sappiamo che ogni elemento $\gamma \in \Gamma$ è rappresentato da un'unica parola w della forma*

$$t_0 a t_1 a \cdots a t_k$$

con $t_0, t_k \in \{1, b, c, d\}$ e $t_i \in \{b, c, d\}$ per $0 < i < k$.

Sono possibili i seguenti casi:

$$|\gamma| = \begin{cases} 2k - 1 & t_0 = 1, t_k = 1 \\ 2k & t_0 = 1, t_k \neq 1 \\ 2k & t_0 \neq 1, t_k = 1 \\ 2k + 1 & t_0 \neq 1, t_k \neq 1 \end{cases}$$

Ovvero $|\gamma|$ è dispari se e solo se la prima e l'ultima lettera di w sono entrambe 1 o entrambe in $\{b, c, d\}$.

Teorema 2.12. *Il gruppo Γ è un 2-gruppo ovvero per ogni elemento $\gamma \in \Gamma$ esiste un intero $N \geq 0$ tale che $\gamma^{2^N} = 1$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla lunghezza di γ .

Per $|\gamma| = 1$ ovvero $\gamma \in \{a, b, c, d\}$ abbiamo già dimostrato che $\gamma^2 = 1$.

Supponiamo $|\gamma| = n > 1$, se n è dispari allora per l'osservazione precedente la parola w rappresentante γ può essere della forma $w = aw'a$ oppure $w = uw'v$ con $u, v \in \{b, c, d\}$. Nel primo caso $a\gamma a$ è un elemento coniugato a γ rappresentato da una parola di lunghezza $n - 2$ nel secondo $u\gamma u$ è un elemento coniugato a γ di lunghezza $n - 1$, in entrambi i casi per ipotesi induttiva γ ha ordine una potenza di due.

Supponiamo ora n pari, allora w può essere della forma $aw'v$ oppure $uw'a$, nel primo caso sostituendo w con awa possiamo comunque supporre che w sia della forma $aw'v$ con $v \in \{b, c, d\}$, ovvero:

$$w = at_1 a t_2 \cdots a t_k$$

con $t_i \in \{b, c, d\}$ per $1 \leq t \leq k$ e $k = \frac{n}{2}$. Studiamo due casi possibili:

1. k è pari, dunque in w appare la lettera a un numero pari di volte e $\gamma \in \text{St}_\Gamma(1)$, è ben definita allora la sua immagine tramite ψ :

$$\psi(\gamma) =: (\gamma_0, \gamma_1).$$

Ricordando che $\text{St}_\Gamma(1)$ è generato dagli elementi b, c, d, aba, aca, ada possiamo scrivere $\psi(\gamma) = \psi(at_1a)\psi(at_2a) \dots \psi(at_{k-1}a)\psi(t_k)$ e verificare, usando le immagini dei generatori trovate nella proposizione 2.2, che le parole rappresentanti γ_0 e γ_1 hanno lunghezza al più $k = \frac{n}{2} < n$. Per ipotesi induttiva esistono $L, M \geq 0$ tali che $\gamma_0^{2^L} = \gamma_1^{2^M} = 1$, usando l'iniettività di ψ troviamo che γ ha come ordine il minimo comune multiplo di 2^L e 2^M , che è un'altra potenza di due.

2. $k = \frac{n}{2}$ è dispari; consideriamo γ^2 rappresentato dalla parola

$$\begin{aligned} ww &= (at_1at_2 \dots at_k)(at_1at_2 \dots at_k) = \\ &= (at_1a)t_2 \dots t_{k-1}(at_ka)t_1 \dots (at_{k-1}a)t_k \end{aligned}$$

di lunghezza $2k$, come prima il numero di a che compaiono in ww è pari quindi $\gamma^2 \in \text{St}_\Gamma(1)$. In modo analogo sono ben definiti gli elementi $(\alpha, \beta) := \psi(\gamma^2)$ entrambi con $|\alpha| = |\beta| \leq 2k = n$. Abbiamo tre ulteriori casi da considerare:

- (i) Uno dei t_i è uguale a d , ricordando che $\psi(ada) = (b, 1)$ e $\psi(d) = (1, b)$ possiamo raffinare la stima sulle lunghezze di α e β a $n - 1$ rientrando nell'ipotesi induttiva concludiamo che γ^2 ha ordine una potenza di due e di conseguenza così anche γ .
- (ii) Uno dei t_i è uguale a c , ricordando che $\psi(aca) = (d, a)$ e $\psi(c) = (a, d)$ troviamo che α e β sono rappresentati da parole di lunghezza al più n in cui d compare almeno una volta, possiamo quindi ricondurci al punto (i).
- (iii) Le lettere c e d non compaiono in w , dunque $w = (ab)^k$ e considerando come nei casi precedenti γ^2 e usando il fatto che $\psi(aba) = (c, a)$ e $\psi(b) = (a, c)$ ci riconduciamo al caso (ii). \square

Abbiamo dimostrato che Γ , un gruppo finitamente generato, ha cardinalità infinita e ogni suo elemento ha ordine finito, fornendo dunque un controesempio al *Problema di Burnside*.

Con tecniche molto più avanzate è stato dimostrato da Burnside, Schur e Kaplansky che il *Problema di Burnside* ha risposta affermativa se supponiamo che il gruppo in questione sia un sottogruppo di $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dove \mathbb{K} è un campo qualunque. Questo ci porta al seguente corollario:

Corollario 2.13. *Siano \mathbb{K} un campo qualunque e $n \geq 1$, allora l'immagine di qualunque omomorfismo $\phi : \Gamma \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ha immagine finita.*

In altre parole, il gruppo di Grigorchuk Γ non è un "gruppo lineare".

Capitolo 3

Le presentazioni di Γ

Nei capitoli precedenti abbiamo rappresentato gli elementi del gruppo di Grigorchuk come parole finite nell'alfabeto $\{a, b, c, d\}$ interpretando queste quattro lettere come le trasformazioni dell'albero binario definite nella definizione 2.1. Un modo per formalizzare questa idea è tramite la nozione di presentazione.

Definizione 3.1. Sia G un gruppo, un sottoinsieme S di G si dice *insieme di generatori* per G se per ogni $g \in G$ esistono $s_1, \dots, s_n \in S$ e $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{1, -1\}$ tali che

$$g = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$$

Nel caso in cui S sia un insieme finito diciamo che G è *finitamente generato*.

Definizione 3.2. Siano S un insieme e R un insieme di parole in S , il gruppo G *presentato* da S ed R , denotato $G = \langle S \mid R \rangle$, è definito come quoziente F_S/N dove F_S è il gruppo libero su S ed N è la chiusura normale di $\langle R \rangle$ in F_S ovvero il più piccolo sottogruppo normale di F_S che contiene R . Gli elementi di N sono detti *relatori* e sono le parole in S che rappresentano l'elemento neutro di G .

Nel caso in cui sia S che R siano insiemi finiti diciamo che G è *finitamente presentato*.

In questo capitolo dimostreremo che il gruppo di Grigorchuk Γ non ammette una presentazione finita. Per fare ciò troveremo inizialmente una sua presentazione della forma

$$\Gamma = \langle a, b, c, d \mid W = \{w_1, w_2, w_3, \dots\} \rangle$$

e dimostreremo che qualunque sottoinsieme finito di W non basterà a presentare Γ . Concluderemo poi con questa proposizione:

Proposizione 3.3. *Siano a, b, c, d i generatori del gruppo di Grigorchuk Γ e sia*

$$\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \mid W \rangle$$

una sua presentazione. Supponiamo che esista una presentazione finita

$$\langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle$$

allora la chiusura normale di $\langle W \rangle$ coincide con la chiusura normale di un sottogruppo finitamente generato $\langle w_1, \dots, w_t \rangle$, in altre parole possiamo trovare $w_1, \dots, w_t \in W$ tale che $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \mid w_1, \dots, w_t \rangle$ sia una presentazione per Γ .

Dimostrazione. Sia F il gruppo libero su quattro lettere $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$ e sia $p : F \rightarrow \Gamma$ l'omomorfismo corrispondente alla presentazione $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \mid W \rangle$, ovvero la proiezione canonica sulla la chiusura normale di $\langle W \rangle$ di F . Analogamente sia \tilde{F} il gruppo libero su $\{g_1, \dots, g_n\}$ e $\tilde{p} : \tilde{F} \rightarrow \Gamma$ la proiezione sul quoziente di \tilde{F} sulla la chiusura normale di $\langle r_1, \dots, r_s \rangle$. Possiamo allora costruire un'altra presentazione a partire da \tilde{p} nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \bar{p} : \bar{F} &\rightarrow \Gamma \\ \langle g_1, \dots, g_n, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \mid r_1, \dots, r_k, \bar{a} = \tilde{p}^{-1}(a), \dots, \bar{d} = \tilde{p}^{-1}(d) \rangle \end{aligned}$$

dove \bar{F} è il gruppo libero su $n + 4$ elementi e sono state scelte delle preimmagini qualunque dei generatori a, b, c, d di Γ . Notiamo che è sempre una presentazione del gruppo di Grigorchuk poichè le ultime quattro relazioni ci dicono che i generatori aggiuntivi sono rappresentati da parole in g_1, \dots, g_n .

Grazie alla proprietà universale dei gruppi liberi è ben definito un unico omomorfismo $\pi : \bar{F} \rightarrow F$ tale che $\bar{p} = p\pi$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{p} & \Gamma \\ \pi \uparrow & \nearrow \bar{p} & \\ \bar{F} & & \end{array}$$

Si ha che $\pi^{-1}(\ker p)$ coincide con $\ker \bar{p}$ che è la chiusura normale del sottogruppo finitamente generato $\langle r_1, \dots, r_k, \tilde{p}^{-1}(a)\bar{a}^{-1}, \dots, \tilde{p}^{-1}(d)\bar{d}^{-1} \rangle$. \square

Ricordando quanto dimostrato nella proposizione 2.4, possiamo pensare al gruppo Γ come ad un quoziente del prodotto libero

$$C_2 * V = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1 \rangle$$

Nelle seguenti proposizioni costruiremo un sottogruppo normale N di $C_2 * V$ tale che $\Gamma \cong (C_2 * V)/N$.

Proposizione 3.4. Sia L il sottogruppo $\langle b, c, d, aba, aca, ada \rangle$ di $C_2 * V$, la seguente mappa $\tilde{\psi} : \{b, c, d, aba, aca, ada\} \rightarrow (C_2 * V) \times (C_2 * V)$ definita come:

$$\begin{aligned} \psi(b) &= (a, c) & \psi(aba) &= (c, a) \\ \psi(c) &= (a, d) & \psi(aca) &= (d, a) \\ \psi(d) &= (1, b) & \psi(ada) &= (b, 1) \end{aligned}$$

si estende ad un omomorfismo $\psi : L \rightarrow (C_2 * V) \times (C_2 * V)$.

Chiamiamo ψ_0, ψ_1 le componenti di ψ .

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente che L è isomorfo ad un prodotto libero di due copie del gruppo di Klein $V * V$, in particolare si avrà $L = \langle b, c, d \rangle * \langle aba, aca, ada \rangle$. Consideriamo due copie isomorfe del gruppo di Klein:

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_1x_2x_3 = 1 \rangle \\ V_2 &= \langle y_1, y_2, y_3 \mid y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = y_1y_2y_3 = 1 \rangle \end{aligned}$$

si dimostra facilmente che i sottogruppi $\langle b, c, d \rangle$ e $\langle aba, aca, ada \rangle$ sono anch'essi isomorfi al gruppo di Klein, dunque esistono due isomorfismi:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : V_1 &\rightarrow \langle b, c, d \rangle \subseteq L \\ \alpha_2 : V_2 &\rightarrow \langle aba, aca, ada \rangle \subseteq L \end{aligned}$$

definiti ad esempio da

$$\alpha_1 : \begin{cases} x_1 \mapsto b \\ x_2 \mapsto c \\ x_3 \mapsto d \end{cases} \quad \alpha_2 : \begin{cases} y_1 \mapsto aba \\ y_2 \mapsto aca \\ y_3 \mapsto ada \end{cases}$$

Usando la proprietà universale del prodotto libero è ben definita un'unico omomorfismo

$$\alpha : V_1 * V_2 \rightarrow L$$

tale che $\alpha_i = \alpha \iota_i$ per $i = 1, 2$ dove $\iota_i : V_i \rightarrow V_1 * V_2$ sono i morfismi di inclusione.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & & \\ \downarrow \iota_1 & \searrow \alpha_1 & \\ & V_1 * V_2 & \dashrightarrow L \\ \uparrow \iota_2 & \swarrow \alpha_2 & \\ V_2 & & \end{array}$$

Essendo α_1 e α_2 iniettive, abbiamo che anche α è iniettivo, resta da dimostrare che è suriettivo. Consideriamo un elemento $x \in L$, essendo x anche un elemento di $C_2 * V$ può essere scritto nella forma normale $x = t_0 a t_1 a \cdots a t_k$ in cui $t_0, t_k \in \{1, b, c, d\}$ e $t_i \in \{b, c, d\}$ per $0 < i < k$.

Essendo gli elementi di L caratterizzati come elementi di $C_2 * V$ nella cui forma normale il simbolo a compare un numero pari di volte, possiamo scriverli come nel seguente prodotto:

$$x = t_0(at_1a)t_2(at_3a)t_4 \cdots (at_{k-1}a)t_k$$

è chiaro dunque che la preimmagine di x esiste in $V_1 * V_2$ ed è data dal prodotto $\alpha^{-1}(t_0)\alpha^{-1}(at_1a) \cdots \alpha^{-1}(at_{k-1}a)\alpha^{-1}(t_k)$.

Tornando alla mappa $\tilde{\psi}$, è chiaro che questa definisce due omomorfismi $V_1 \rightarrow (C_2 * V) \times (C_2 * V)$, $V_2 \rightarrow (C_2 * V) \times (C_2 * V)$, usando il fatto appena dimostrato che $L \cong V_1 * V_2$ e la proprietà universale del prodotto libero otteniamo l'omomorfismo $\psi : L \rightarrow (C_2 * V) \times (C_2 * V)$. \square

Questa definizione ricorda quella di $\psi = (\phi_0, \phi_1) : \text{St}_\Gamma(1) \rightarrow \Gamma \times \Gamma$ data nella definizione 2.2. L'abuso di notazione è giustificato dal fatto che posta $\pi : C_2 * V \rightarrow \Gamma$ la proiezione sul quoziente, è facile vedere che $\pi(L) = \text{St}_\Gamma(1)$ e che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\psi=(\psi_0, \psi_1)} & (C_2 * V) \times (C_2 * V) \\ \pi \downarrow & & \downarrow (\pi, \pi) \\ \text{Stab}_\Gamma(1) & \xrightarrow{\psi=(\phi_0, \phi_1)} & \Gamma \times \Gamma \end{array}$$

commuta.

Proposizione 3.5. *Il sottogruppo L è normale in $C_2 * V$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che $x^{-1}Lx \subseteq L$ per $x = a$ dato che $C_2 * V$ è generato da $\{a, b, c, d\}$ e che $b, c, d \in L$. Usando il fatto dimostrato precedentemente che $L \cong \langle b, c, d \rangle * \langle aba, aca, ada \rangle$ possiamo rappresentare ogni elemento $x \in L$ nella seguente forma normale:

$$x = t_0 s_0 t_1 s_1 \cdots s_k t_k$$

con $t_0, t_k \in \{1, b, c, d\}$, $t_i \in \{b, c, d\}$ per $0 < i < k$ e $s_j \in \{aba, aca, ada\}$ per $0 \leq j \leq k$. Coniugando per a si ottiene:

$$\begin{aligned} axa &= a(t_0 s_0 t_1 s_1 \cdots s_k t_k)a = at_0(aa)s_0(aa)t_1(aa)s_1(aa) \cdots (aa)s_k(aa)t_k a \\ &= (at_0a)(as_0a) \cdots (as_ka)(at_ka) \in L \end{aligned}$$

dato che $a(b)a, a(c)a, a(d)a \in L$ e $a(aba)a = b, a(aca)a = c, a(ada)a = d$. \square

Definizione 3.6. Consideriamo ora una successione di sottogruppi di $C_2 * V$ così definita:

$$\begin{aligned} N_0 &= \{1\} \\ N_{k+1} &= \psi^{-1}(N_k \times N_k), k \geq 1 \end{aligned}$$

Lemma 3.7 (Lysionok). *Per ogni $k \geq 0$ si ha che N_k è un sottogruppo di N_{k+1} e che N_k è normale in $C_2 * V$.*

Dimostrazione. Per induzione su k .

Il caso $k = 0$ è banale essendo $N_0 = \ker \psi$ sottogruppo normale di L che è a sua volta normale in $C_2 * V$. Supponiamo quindi che l'asserto sia vero per N_i con $0 \leq i \leq k$. Essendo $N_k \subseteq N_{k+1}$ si ha:

$$N_{k+1} = \psi^{-1}(N_k \times N_k) \subseteq \psi^{-1}(N_{k+1} \times N_{k+1}) = N_{k+2}.$$

Dimostriamo ora la normalità di N_k in $C_2 * V$, ci basta far vedere che $x^{-1}N_{k+1}x \subseteq N_{k+1}$ per $x \in \{a, b, c, d\}$. Usando la definizione di ψ sui generatori osserviamo che per ogni $y \in \{b, c, d, aba, aca, ada\}$ si ha $\psi(aya) = (\psi_1(y), \psi_0(y))$. Essendo L generato da $\{b, c, d, aba, aca, ada\}$ troviamo che per ogni $w \in N_{k+1} \subseteq L$ si ha:

$$\psi(awa) = (\psi_0(awa), \psi_1(awa)) = (\psi_1(w), \psi_0(w)) \in N_{k+1} \times N_{k+1}$$

Questo ci mostra che per $x = a$, si ha $x^{-1}wx \in N_{k+1}$ per ogni $w \in N_{k+1}$. Altrimenti per $x \in \{b, c, d\}$ basta ricordare che per ipotesi induttiva $N_k \trianglelefteq C_2 * V$, quindi $N_k \times N_k \trianglelefteq (C_2 * V) \times (C_2 * V)$ e dunque la sua preimmagine $N_{k+1} = \psi^{-1}(N_k \times N_k)$ è normale in L , dunque $x^{-1}N_{k+1}x \subseteq N_{k+1}$ per $x \in \{b, c, d\} \subseteq L$. □

Definizione 3.8. Poniamo ora $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$.

È facile vedere che N è un sottogruppo normale di $C_2 * V$, possiamo ulteriormente caratterizzarlo con la seguente proprietà:

Proposizione 3.9. *Sia $x \in C_2 * V$, allora $x \in N$ se e solo se $x \in L$ e $\psi(x) \in N \times N$*

Dimostrazione. Supponiamo $x \in N$, ricordando che $N_k \subset L$ per ogni $k \geq 0$ si ha che $N \subset L$. Inoltre per definizione $x \in N$ implica $x \in N_k$ per qualche $k \geq 0$, da cui $\psi(x) \in N_{k-1} \times N_{k-1} \subset N \times N$.

Per dimostrare l'altra implicazione supponiamo $x \in L$, se $\psi(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x)) \in N \times N$ allora esistono $k_1, k_2 \geq 0$ tali che $\psi_0(x) \in N_{k_1}$ e $\psi_1(x) \in N_{k_2}$, ricordando che i sottogruppi N_k formano una catena rispetto all'inclusione, ponendo $k = \max\{k_1, k_2\}$ si ha che $\psi(x) \in N_k \times N_k$. Segue che $x \in \psi^{-1}(N_k \times N_k) = N_{k+1} \subset N$. □

Con questa proprietà è facile verificare se un certo elemento di $C_2 * V$ appartiene o meno a N .

Esempio 3.10. Dalla definizione di ψ si ha che $\psi(b) = (a, c)$, dato che $a \notin L$ si vede subito che $\psi(b) \notin N \times N$ e dunque $b \notin N$.

Esempio 3.11. Consideriamo gli elementi d e ada , essendo $\psi(d) = (1, b)$ e $\psi(ada) = (b, 1)$ usando l'esempio precedente otteniamo $d, ada \notin N$ e analogamente per il loro prodotto si ha $adad \notin N$. Invece

$$\psi((adad)^2) = \psi(ada)\psi(d)\psi(ada)\psi(d) = (b, b)(b, b) = (1, 1) \in N$$

quindi $(adad)^2 \in N$. Ancora più nello specifico dato che $N_0 = \{1\}$ e $N_1 = \psi^{-1}(N_0 \times N_0) = \psi^{-1}((1, 1)) = \ker \psi$ possiamo dire che $(adad)^2 \in N_1$.

Lemma 3.12. *Il sottogruppo N è il nucleo della proiezione $\pi : C_2 * V \rightarrow \Gamma$, ovvero si ha l'isomorfismo $\Gamma \cong (C_2 * V)/N$.*

Dimostrazione. Ricordando che ogni elemento di Γ corrisponde ad un'azione sull'albero binario \mathcal{T} , abbiamo che $\pi(x) = 1$ per $x \in C_2 * V$ se e solo se $x \in L = \pi^{-1}(\text{St}_\Gamma(1))$ e $\psi(x) = (1, 1)$, vale a dire se e solo se $\pi(x)$ è un automorfismo di \mathcal{T} che stabilizza il primo livello e che agisce come l'identità sui due sottoalberi principali.

Cerchiamo di dimostrare che $\pi(x) = 1$ se e solo se $x \in N$ per induzione sulla lunghezza di x rispetto ai generatori $\{a, b, c, d\}$.

- Se $|x| = 0$ allora $x = 1$ e l'affermazione è ovvia.
- Se $|x| = 1$ allora $x \in \{a, b, c, d\}$, da $a \notin L$ e $\psi(b), \psi(c), \psi(d) \notin N \times N$ deduciamo che $x \notin N$ e $\pi(x) \neq 1$.
- Sia ora $|x| \geq 2$ e supponiamo che per tutti gli elementi y di $C_2 * V$ di lunghezza minore di $|x|$ si abbia $\pi(y) = 1$ se e solo se $y \in N$. Se $x \notin L$ allora $\pi(x) \notin \text{St}_\Gamma(1)$ e dunque $\pi(x) \neq 1$.

Supponiamo invece $x \in L$. Ricordiamo che $L \subseteq C_2 * V$, e che ogni elemento $y \in C_2 * V$ è rappresentato da una parola della forma:

$$y = t_0 a t_1 a \cdots a t_k$$

in cui $t_0, t_k \in \{1, b, c, d\}$ e $t_i \in \{b, c, d\}$ per $0 < i < k$.

Ora, essendo x un elemento di L , sappiamo che il numero di occorrenze di a in x è pari, dunque possiamo suddividere la parola che lo rappresenta nel modo seguente:

$$x = t_0 (a t_1 a) t_2 (a t_3 a) t_4 \cdots (a t_{k-1} a) t_k$$

dato che ogni elemento di questo prodotto un elemento di L , possiamo calcolare $\psi(x)$ come prodotto in $(C_2 * V) \times (C_2 * V)$ ovvero:

$$\psi(x) = \psi(t_0)\psi(at_1a)\psi(t_2)\psi(at_3a)\psi(t_4) \cdots \psi(at_{k-1}a)\psi(t_k)$$

ora usando la definizione di ψ sui generatori di L , $\{b, c, d, aba, aca, ada\}$, è facile verificare che entrambe le componenti dell'immagine soddisfano $|\psi_i(x)| < |x|$ per $i = 0, 1$. Ora, $\psi(x) = 1$ se e solo se $\psi_i(x) = 1$, per ipotesi induttiva si ha che $\psi_i(x) \in N$, dunque per la proposizione precedente (essendo $x \in L$) questo accade se e solo se $x \in \psi^{-1}(N)$. Possiamo quindi concludere che $\psi(x) = 1$ se e solo se $x \in N$. □

Abbiamo trovato una presentazione per Γ . Se dimostriamo ora che il sottogruppo N non è finitamente generato potremo concludere, usando la proposizione 3.3, che Γ non ammette alcuna presentazione finita.

Per fare ciò dimostriamo che le inclusioni $N_k \subseteq N_{k+1}$ sono strette per ogni $k \geq 0$, vale a dire $N_{k+1} \setminus N_k \neq \emptyset$.

Definizione 3.13. Sia w una parola in $\{a, b, c, d\}$, denotiamo con $\sigma(w)$ la parola che si ottiene da w mediante le sostituzioni:

$$\tilde{\sigma} : \begin{cases} a & \mapsto aca \\ b & \mapsto d \\ c & \mapsto b \\ d & \mapsto c \end{cases}$$

Proposizione 3.14. La funzione di sostituzione $\tilde{\sigma}$ si estende ad un endomorfismo di $C_2 * V$ che denoteremo come σ .

Dimostrazione. Consideriamo i gruppi $\langle a \rangle$ isomorfo a C_2 e $\langle b, c, d \rangle$ isomorfo a V , è facile vedere che la mappa $\tilde{\sigma}$ definisce due omomorfismi

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \langle a \rangle &\rightarrow \langle aca \rangle \subseteq C_2 * V \\ \sigma_2 : \langle b, c, d \rangle &\rightarrow \langle d, b, c \rangle \subseteq C_2 * V \end{aligned}$$

Usando la proprietà universale del prodotto libero è ben definito un unico omomorfismo $\sigma : C_2 * V$ tale che $\sigma_i = \sigma \iota_i$ per $i = 1, 2$ dove $\iota_1 : \langle a \rangle \rightarrow C_2 * V$ e $\iota_2 : \langle b, c, d \rangle \rightarrow C_2 * V$ sono i morfismi di inclusione. □

Proposizione 3.15. Dalle definizioni è possibile verificare che è soddisfatta la relazione $\psi_1(\sigma(x)) = x$ per ogni $x \in C_2 * V$.

Definizione 3.16. Costruiamo ora una successione $(w_k)_{k \geq 0}$ di elementi di $C_2 * V$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} w_0 &= ad \\ w_{k+1} &= \sigma(w_k) \end{aligned}$$

ovvero $w_k = \sigma^k(w_0)$.

Lemma 3.17. Per ogni $k \geq 3$ si ha $\psi_0(w_k) = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo altre due successioni:

$$\begin{aligned} u_0 &= a & t_0 &= d \\ u_{k+1} &= \sigma(u_k) & t_{k+1} &= \sigma(t_k) \end{aligned}$$

Per induzione si vede che $u_{k+1} = u_k t_{k+1} u_k$, infatti $u_1 = aca = u_0 t_1 u_0$ e supponendo vera l'affermazione per tutti gli i con $0 \leq i \leq k$ si vede

$$u_{k+1} = \sigma(u_k) = \sigma(u_{k-1} t_k u_{k-1}) = \sigma(u_{k-1}) \sigma(t_k) \sigma(u_{k-1}) = u_k t_{k+1} u_k$$

È chiaro poi che $w_k = \sigma^k(ad) = \sigma^k(a) \sigma^k(d) = u_k t_k$ per $k \geq 0$. Inoltre per $k \geq 3$ si ha

$$\psi_0(u_k) = \psi_0(t_k) = \begin{cases} a & \text{se } k \equiv 1, 2 \pmod{3} \\ 1 & \text{se } k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Questo fatto è immediato per $\psi_0(t_k)$ dalle definizioni di σ e di ψ , per $\psi_0(u_k)$ si dimostra ancora una volta per induzione partendo dal fatto che $\psi_0(u_3) = 1$ e usando la relazione fra u_k e t_k trovata prima.

Si conclude con $\psi_0(w_k) = \psi_0(u_k) \psi_0(t_k) = 1$. □

Lemma 3.18. Sia $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la successione definita precedentemente, allora

$$(w_k)^4 \in N_{k+1} \setminus N_k$$

Dimostrazione. Per $k = 0$, $(w_0)^4 = (ad)^4 = (adad)^2$ e per quanto visto nell'esempio 3.11 si ha $\psi_0((w_0)^4) = \psi_1((w_0)^4) = 1$ quindi $(w_0)^4 \in N_1 = \ker \psi$ ma $(w_0)^4 \notin N_0 = \{1\}$.

Per $k = 1$, si ha

$$w_1 = \sigma(w_0) = \sigma(ad) = \sigma(a)\sigma(d) = acac$$

Si calcola $\psi_0((w_1)^4) = (da)^4$ e $\psi_1((w_1)^4) = (ad)^4$, entrambe le immagini appartengono a N_1 e sono diverse dall'identità, quindi per definizione $(w_1)^4 \in N_2 \setminus N_1$.

Per $k = 2$ si ha $\psi_0((w_2)^4) = (da)^8 \in N_1$ e $\psi_1((w_2)^4) = (w_1)^4 \in N_2 \setminus N_1$, quindi $(w_2)^4 \in N_3 \setminus N_2$.

Procediamo per induzione supponendo che l'asserto sia vero per $k \geq 2$ e lo dimostriamo per $k + 1$. Per ipotesi induttiva $w_k \in N_{k+1} \setminus N_k$. Dato che $k + 1 \geq 3$ possiamo usare il lemma precedente per ottenere $\psi_0((w_{k+1})^4) = 1$, inoltre grazie all'osservazione 3.15 sappiamo che $\psi_1((w_{k+1})^4) = \psi_1(\sigma((w_k)^4)) = (w_k)^4 \in N_{k+1} \setminus N_k$, quindi $(w_{k+1})^4 \in N_{k+2} \setminus N_{k+1}$. □

Mettendo insieme questi ultimi lemmi e la proposizione 3.3 otteniamo

Teorema 3.19. *Il gruppo Γ non è finitamente presentato.*

Osservazione 3.20. *In particolare I. Lysionok in [4] ha dimostrato che Γ ammette la seguente presentazione:*

$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \mid \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1 \\ (w_n)^4 = (w_n w_{n+1})^4 = 1 \quad (n \geq 0) \end{array} \right\rangle.$$

Capitolo 4

Presentazioni endomorfe

Come visto nel capitolo precedente il gruppo di Grigorchuk non ammette una presentazione finita, tuttavia si può dimostrare che questa presentazione è dotata di una certa regolarità: ovvero tutte le relazioni che sussistono in Γ possono essere ricavate a partire da un insieme finito di relazioni iniziali e da ripetute applicazioni dell'endomorfismo σ .

Proposizione 4.1. *Il gruppo Γ ammette la seguente presentazione:*

$$\Gamma = \langle a, c, d \mid \sigma^n(a^2), \sigma^n(w_0)^4, \sigma^n(w_0w_1)^4 \ (n \geq 0) \rangle \quad (4.1)$$

dove $w_0 = ad$, $w_1 = \sigma(w_0) = (ac)^2$.

Dimostrazione. Ricordando che sui generatori di Γ sussistono le relazioni $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1$, possiamo scrivere $b = cd$ e dunque effettuare questa sostituzione sia nella presentazione dell'osservazione 3.20 sia nella definizione dell'endomorfismo σ data in 3.13:

$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \mid \begin{array}{l} a^2 = (cd)^2 = c^2 = d^2 = 1 \\ (w_n)^4 = (w_nw_{n+1})^4 = 1 \ (n \geq 0) \end{array} \right\rangle. \quad (4.2)$$

$$\sigma : \begin{cases} a \mapsto aca \\ c \mapsto cd \\ d \mapsto c \end{cases}$$

Dove, come in precedenza, $w_0 = ad$ e $w_k = \sigma^k(w_0)$.

Dimostriamo ora l'equivalenza fra le presentazioni (4.1) e (4.2).

Assumendo la presentazione (4.2) ritroviamo facilmente le ultime due relazioni $\sigma^n(w_0)^4$ e $\sigma^n(w_0w_1)^4$ dalla definizione della successione $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e dal fatto che σ è un omomorfismo di gruppi. La relazione $\sigma^n(a^2) = 1$ è sempre verificata in Γ essendo $a^2 = 1$.

Viceversa assumiamo ora la presentazione (4.1), come prima le relazioni riguardanti w_n

sono banalmente equivalenti. Calcoliamo i primi valori della successione $(\sigma^n(a^2))_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\sigma^0(a^2) &= a^2 = 1 \\ \sigma^1(a^2) &= (aca)^2 = ac^2a = 1 \\ \sigma^2(a^2) &= \sigma(a)\sigma(c^2)\sigma(a) = (aca)(cd)^2(aca) = 1 \\ \sigma^3(a^2) &= \sigma(aca)\sigma((cd)^2)\sigma(aca) = \sigma(aca)d^2\sigma(aca) = 1\end{aligned}$$

da cui si ricavano facilmente $a^2 = 1$, $c^2 = 1$, $(cd)^2 = 1$ e $d^2 = 1$. \square

Gli esempi di gruppi con presentazioni infinite ma con questa particolare struttura forniscono una motivazione per la seguente definizione:

Definizione 4.2. Una *presentazione endomorfa* o *L-presentazione* è un'espressione della forma

$$L = \langle S|Q|\Phi|R \rangle$$

dove S è un insieme di simboli, Q e R sono sottoinsiemi di F_S , il gruppo libero su S e infine Φ è un insieme di omomorfismi $\phi : F_S \rightarrow F_S$. La presentazione L definisce un gruppo nel modo seguente:

$$G_L = F_S / \left\langle \left\langle Q \cup \bigcup_{\phi \in \Phi^*} \phi(R) \right\rangle^{\text{norm}} \right\rangle$$

dove $\langle \cdot \rangle^{\text{norm}}$ denota la chiusura normale e Φ^* la chiusura rispetto alla composizione di $\{\text{id}\} \cup \Phi$ (ovvero il monoide generato da Φ).

Una tale L-presentazione si dice *finita* se S, Q, Φ, R sono insiemi finiti e *ascendente* se Q è l'insieme vuoto.

Osservazione 4.3. In luce di questa definizione possiamo riscrivere la presentazione di Γ trovata nella proposizione precedente come presentazione endomorfa:

$$\Gamma = \langle a, c, d | \sigma|a^2, (ad)^4, (ad(ac)^2)^4 \rangle$$

si noti che in questo caso Q è l'insieme vuoto, si tratta dunque di una presentazione endomorfa ascendente.

Vediamo alcune proprietà elementari delle L-presentazioni.

Proposizione 4.4. Sia G un gruppo finitamente L-presentato e sia N un suo sottogruppo normale finitamente generato, allora il quoziente $Q = G/N$ è finitamente L-presentato.

Dimostrazione. Sia $\langle S|Q|\Phi|R \rangle$ una L-presentazione finita per G e sia T un insieme finito di generatori per N . Per definizione $G \cong F_S/K$ dove K è la chiusura normale del sottogruppo $\langle Q \cup \bigcup_{\phi \in \Phi^*} \phi(R) \rangle$ di F_S , siano $\pi_1 : F_S \rightarrow G$ e $\pi_2 : G \rightarrow Q$ le proiezioni sui

rispettivi quozienti, allora posto $\pi = \pi_2\pi_1$ si ha che $\pi(w) = 1$ per $w \in F_S$ se e solo se $w \in K$ oppure $w \in \pi_1^{-1}(N)$.

Allora essendo $N = \langle T \rangle$ e dunque $\pi_1^{-1}(N) = \langle \pi_1^{-1}(T) \rangle$, si ha, per il primo teorema di omomorfismo, che $\langle S|Q \cup \pi_1^{-1}(T)|\Phi|R \rangle$ è una L-presentazione finita per G/N . \square

Proposizione 4.5. *Siano G e H gruppi finitamente L-presentati, allora il prodotto libero $G * H$ è finitamente L-presentato.*

Dimostrazione. Siano $\langle S|Q|\Phi|R \rangle$ e $\langle S'|Q'|\Phi'|R' \rangle$ due L-presentazioni finite per G e H rispettivamente. Indicando con K e K' i sottoinsiemi di F_S e $F_{S'}$ contenenti tutte le relazioni generate dalle presentazioni endomorfe di G ed H , si ha, per definizione di prodotto libero: $G * H = \langle S \cup S'|K \cup K' \rangle$, in altre parole una L-presentazione finita per $G * H$ è data da $\langle S \cup S'|Q \cup Q'|\Phi \cup \Phi'|R \cup R' \rangle$. \square

Proposizione 4.6. *Siano N e H gruppi finitamente L-presentati, allora il prodotto semidiretto $N \rtimes H$ è finitamente L-presentato.*

Dimostrazione. Siano $\langle S|Q|\Phi|R \rangle$ e $\langle T|P|\Psi|U \rangle$ due L-presentazioni finite per N e H e consideriamo un loro prodotto semidiretto $G = N \rtimes H$. Possiamo identificare N con il sottogruppo $\{(n, 1) : n \in N\} \trianglelefteq G$ e H con $\{(1, h) : h \in H\} \subseteq G$. Essendo N normale in G , per ogni coppia di generatori $s \in S$ e $t \in T$ esiste un elemento $g_{s,t} \in N$ tale che $t^{-1}st = g_{s,t}$; in altre parole in G sussistono le relazioni $t^{-1}stg_{s,t}^{-1} = 1$ per ogni $s \in S$, $t \in T$. Consideriamo la presentazione endomorfa:

$$L = \langle S \cup T|Q \cup \{t^{-1}stg_{s,t}^{-1}\}_{s \in S, t \in T}|\Phi \cup \Psi|R \cup U \rangle$$

in cui ogni $\phi \in \Phi$ è esteso ad un endomorfismo $\phi : F_{S \cup T} \rightarrow F_{S \cup T}$ definendo $\phi(t) = t$ per ogni $t \in T$ (analogamente per gli elementi di Ψ). Le relazioni generate dalla presentazione L sono tutte valide in G . Vediamo che vale anche il viceversa, cioè che ogni parola w in $S \cup T$ che rappresenta l'identità in G può essere scritta a partire da relazioni in L . Sia quindi w una parola in $S \cup T$, le relazioni $st = tg_{s,t}$ ci permettono di scriverla come $w = s_1 \cdots s_n t_1 \cdots t_m$ con $s_i \in S$ e $t_j \in T$. Proiettando l'elemento rappresentato da w su H si ottiene $t_1 \cdots t_m = 1$ usando le relazioni di H , analogamente proiettando su N si ottiene $s_1 \cdots s_n = 1$ usando le relazioni di N . Queste stesse relazioni esistono in L , dunque L è una presentazione per G . \square

Definizione 4.7. Sia G un gruppo con presentazione $\langle S|R \rangle$, e sia α un isomorfismo fra due suoi sottogruppi H e K . L'estensione HNN di G , denotata con $G*_\alpha$ è data dalla presentazione:

$$\langle S, t|R, t^{-1}ht = \alpha(h), h \in H \rangle$$

dove t è un simbolo che non compare in S , detto *lettera stabile*.

Proposizione 4.8. *Sia G un gruppo finitamente L -presentato, H e N due suoi sottogruppi finitamente generati e $\psi : H \rightarrow N$ un isomorfismo. Allora l'estensione HNN $G*_\psi$ è finitamente L -presentata.*

Dimostrazione. Sia U un insieme finito di generatori per H e sia $t \notin S$. Una presentazione per $G*_\psi$ è data da

$$L = \langle S \cup \{t\} | Q \cup \{t^{-1}ut\psi(u)^{-1}\}_{u \in U} | \Psi | R \rangle$$

È immediato verificare che tutti i relatori nella presentazione L corrispondono a quelli di $G*_\psi$ presentato usando la definizione 4.7 e viceversa. \square

4.1 Enumerazione di classi laterali

Un vantaggio di questa rappresentazione è che molti algoritmi usati per lo studio di gruppi finitamente presentati si possono adattare a gruppi finitamente L -presentati, un esempio è l'algoritmo di Todd-Coxeter. Questo algoritmo, dato un gruppo finitamente presentato G e un suo sottogruppo finitamente generato U di indice finito, è in grado di determinare il valore $[G : U]$ e una descrizione dell'azione di G sullo spazio delle classi laterali $\text{Sym}(U \setminus G)$

4.1.1 Breve descrizione dell'algoritmo di Todd Coxeter

Consideriamo un gruppo $G = \langle E = \{g_1, \dots, g_n\} | R = \{r_1, \dots, r_k\} \rangle$ e un sottogruppo $H = \langle B = \{h_1, \dots, h_m\} \rangle$ che si supponga avere indice finito in G , ogni $r_i \in R$ e $h_j \in B$ sono identificati con delle parole in $E' = E \cup E^{-1}$. Ogni classe laterale viene associata nel corso dell'algoritmo ad un numero naturale che chiameremo "etichetta" e per cui useremo la notazione $[n]$ per $n \in \mathbb{N}$. Durante l'algoritmo vengono generate nuove etichette e tramite un processo sistematico si potrà stabilire quando due di esse rappresentano la stessa classe laterale.

Si comincia con l'associare $[1]$ alla classe laterale banale $H \cdot 1$ e si definisce una tabella \mathcal{M} le cui righe sono indicizzate dalle etichette e le colonne dagli elementi di E' (ordinati in precedenza), i suoi elementi vengono aggiunti con il seguente criterio: $\mathcal{M}([k], g) = [\ell]$ se la classe laterale associata a $[k]$ quando moltiplicata da destra per $g \in E'$ diventa la classe laterale rappresentata da $[\ell]$, in altre parole se sussiste la relazione $[k]g = [\ell]$. Inizialmente in questa tabella è presente solo la riga corrispondente a $[1]$ e nessun'etichetta in essa. Si usano le seguenti proprietà per definire altri due tipi di tabelle:

- Per ogni $s \in H$, si ha l'uguaglianza $Hs = H$
- Per ogni $r \in R$ e classe laterale Hg con $g \in G$, si ha l'uguaglianza $Hgr = Hg$

in altre parole

- Per ogni $s = g_{i_1} \cdots g_{i_t} \in H$ si ha la sequenza

$$H, Hg_{i_1}, Hg_{i_1}g_{i_2}, \dots, Hg_{i_1} \cdots g_{i_t} = Hs \quad (4.3)$$

il cui ultimo termine è sicuramente uguale alla classe laterale H .

- Per ogni $k \in G$ e relazione $r = g_{i_1} \cdots g_{i_{t'}} \in \langle R \rangle$ si ha la sequenza

$$Hk, Hkg_{i_1}, Hkg_{i_1}g_{i_2}, \dots, Hkg_{i_1} \cdots g_{i_{t'}} = Hkr \quad (4.4)$$

il cui ultimo termine è sicuramente uguale alla classe laterale Hk .

Si definiscono quindi delle tabelle \mathcal{S}_h per $h \in B$ e \mathcal{R}_r per $r \in R$. Le tabelle \mathcal{S}_h hanno una sola riga corrispondente a $[1]$ e colonne indicizzate da $g_1, \dots, g_t \in E'$ tali che $h = g_1 \cdots g_t$. Gli elementi di \mathcal{S}_h sono etichette corrispondenti alle classi laterali della sequenza (4.3) ovvero $\mathcal{S}_h([1], g_i) = [k]$ dove $[k]$ è l'etichetta di $Hg_1 \cdots g_i$. Le tabelle \mathcal{R}_r sono definite in modo simile, le colonne sono indicizzate da $g_1, \dots, g_{t'} \in E'$ dove $r = g_1 \cdots g_{t'}$ e le righe sono indicizzate dalle etichette. Come prima si pone $\mathcal{R}_r([k], g) = [\ell]$ se $[k]g = [\ell]$.

Dalle osservazioni precedenti è chiaro che l'ultimo elemento di ogni riga delle tabelle \mathcal{S}_h è l'etichetta $[1]$ e che l'ultimo elemento di ogni riga $[k]$ di ogni tabella \mathcal{R}_r è l'etichetta $[k]$. Il primo passo dell'algoritmo inizia scegliendo h_1 e riempiendo la tabella \mathcal{S}_{h_1} di etichette nuove. Per fissare le idee sia $h_1 = g_1 \cdots g_t$ si definiscono allora

$$\begin{aligned} [2] &:= [1]g_1 \\ [3] &:= [2]g_2 \\ &\dots \\ [t] &:= [t-1]g_t \end{aligned}$$

queste etichette si possono aggiungere alla tabella \mathcal{M} (che in questo primo passo è completamente vuota) nel seguente modo: $\mathcal{M}([i], g_i) = [i+1]$ per $i = 1, \dots, t$. Sempre dalle osservazioni precedenti però abbiamo $[t] = [1]$ e dunque la riga corrispondente a $[t]$ in \mathcal{M} è ridondante e può essere eliminata, si deducono quindi le relazioni $[t-1]g_t = [1]$ e $[1]g_t^{-1} = [t-1]$, anch'esse vengono aggiunte alla tabella \mathcal{M} .

L'algoritmo procede poi a riempire le tabelle \mathcal{S}_h per $h \in \{h_2, \dots, h_m\}$ nel modo appena descritto e le tabelle \mathcal{R}_r per ogni $r \in R$ in cui sono state aggiunte le righe corrispondenti alle etichette trovate nei passi precedenti. Ancora una volta al termine di ogni riempimento si possono dedurre due relazioni del tipo $[k]g_i = [\ell]$ e $[\ell]g_i^{-1} = [k]$, nel trascrivere queste informazioni nella tabella \mathcal{M} bisogna prestare attenzione. Supponiamo di avere ottenuto l'informazione $[k]g = [\ell]$, sono possibili i due seguenti casi:

1. Il posto corrispondente $\mathcal{M}([k], g)$ nella tabella \mathcal{M} non è ancora stato assegnato nei passi precedenti, si pone quindi $\mathcal{M}([k], g) = [\ell]$

2. In un passo precedente era stata già dedotta l'informazione $[k]g = \ell'$, dunque il posto $\mathcal{M}([k], g)$ è già occupato da $[\ell']$, in questa situazione si dice che si è trovata una **coincidenza**. Avendo quindi l'ulteriore informazione $[\ell] = [\ell']$ si procede con una sostituzione effettuata in tutte le tabelle fin'ora considerate scrivendo $[\min(\ell, \ell')]$ al posto di $[\ell]$ e $[\ell']$. Si elimina poi la riga $[\max(\ell, \ell')]$ dalla tabella \mathcal{M} essendo questa ridondante.

Una volta effettuate queste sostituzioni si cerca il primo posto vuoto nella tabella \mathcal{M} corrispondente ad un'etichetta $[k]$ e ad un elemento $g \in E'$, si procede quindi a riempire le righe corrispondenti a $[k]$ nelle tabelle \mathcal{R}_r per ogni $r \in R$ usando se necessario nuove etichette. Il processo termina se tutte le tabelle vengono completate contemporaneamente.

Si noti che vi è una certa arbitrarietà nell'ordine in cui vengono riempite le tabelle \mathcal{S}_h , \mathcal{R}_r e \mathcal{M} . Per garantire che l'algoritmo termini sarà necessario fare ulteriori ipotesi.

Lemma 4.9 (Proprietà **t**). *Consideriamo per $k > 1$ la classe laterale $[k]$, allora esiste $g \in E'$ tale che $[k]g = [k']$ con $k' < k$.*

Dimostrazione. Essendo $k > 1$ esiste $\ell < k$ e $g \in E'$ tale che $[k] = [\ell]g$ da cui $[\ell] = [k]g^{-1}$ ovvero nella riga di $[k]$ è presente un'etichetta $[\ell]$ con $\ell < k$. \square

Teorema 4.10. *Nel caso in cui l'algoritmo termini riempiendo tutte le tabelle è possibile determinare l'indice $[G : H]$ e un'azione di G sull'insieme $H \setminus G$ delle classi laterali destre di H in G .*

Dimostrazione. Innanzitutto vediamo dalla tabella \mathcal{M} che ogni classe laterale di H è stata moltiplicata per ogni generatore e inverso di generatore e ad ogni classe laterale risultante da queste moltiplicazioni è stata assegnata un'etichetta. Il terminare dell'algoritmo implica che ogni elemento di G giace in una di queste classi laterali numerate. Dunque se r è tale numero (ovvero il numero di righe di \mathcal{M} , che coincide col numero delle etichette), si ha $[G : H] \leq r$.

La tabella \mathcal{M} determina una funzione $E' \times H \setminus G \rightarrow H \setminus G$ data da $(g, [k]) = \mathcal{M}([k], g)$ per $g \in E'$, ricordando poi che se $[k]g = [\ell]$ allora $[\ell]g^{-1} = [k]$.

Tutte le relazioni di G agiscono in modo banale su $H \setminus G$, dunque quest'azione è ben definita. Dalla proprietà **t** si vede che quest'azione è transitiva, ovvero per ogni $k \geq 1$ esiste $g \in G$ tale che $[1]g = [k]$: sia $m \geq k > 1$, esiste $g_1 \in E'$ tale che $[k]g_1 = [k_1]$ con $1 \leq k_1 < k$, esiste $g_2 \in E'$ tale che $[k_1]g_2 = [k_2]$ con $1 \leq k_2 < k_1 < k$ e così via. Ripetendo questo ragionamento al più k volte si raggiunge la prima riga. Dunque per qualche $1 \leq t \leq k$ abbiamo trovato $[k]g_1 \cdots g_t = [1]$.

Si ha quindi $[G : \text{Stab}([1])] = \text{Orb}([1]) = r$, dalle tavole \mathcal{S}_h si vede che $H \subseteq \text{Stab}([1])$, dunque $[G : H] \geq r$ da cui $[G : H] = r$. \square

Per garantire che questa procedura termini, oltre all'ipotesi fondamentale che $[G : H]$ sia finito, è inoltre necessario prestare attenzione al modo in cui si effettuano le operazioni di riempimento.

Lemma 4.11. *Se per ogni etichetta $[k]$ definita in qualche passo dell'algoritmo tale che non venga mai eliminata nei passi successivi si garantisce la definizione di etichette per tutte le classi laterali $[k]g$ per $g \in E'$ allora per qualche $n \in \mathbb{N}$ esiste un numero di passi finito dopo il quale l'algoritmo lascia invariate le prime n righe di ogni tabella \mathcal{M} , \mathcal{R}_r e \mathcal{S}_h .*

Dimostrazione. Si consideri la prima riga di tutte le tabelle, l'etichetta corrispondente $[1]$ è definita e non viene mai eliminata per tutta la durata dell'algoritmo. L'ipotesi implica che tutti i posti della prima riga di tutte le tabelle vengono prima o poi riempiti con delle etichette. Dato che l'unico modo in cui le etichette possono cambiare è tramite una sostituzione nel caso di coincidenze, tuttavia in questi casi il valore di ogni etichetta può solo diminuire e solo per un numero finito di volte. Dunque la prima riga di ogni tabella rimane invariata dall'algoritmo dopo un numero finito di passi.

Supponiamo per induzione che da un certo passo dell'algoritmo in poi le prime $k - 1$ righe delle tabelle rimangano invariate, consideriamo la k -esima riga delle tabelle \mathcal{M} e \mathcal{R}_r , $r \in R$ corrispondente all'etichetta $[k]$. Per la proprietà \mathfrak{t} esiste un'etichetta $[\ell]$ con $\ell < k$ tale che $[k] = [\ell]g$ per qualche $g \in E'$. Questo significa che $[k]$ compare in una delle righe che abbiamo supposto invariate per ipotesi induttiva, deduciamo che non è mai eliminata nel corso dell'algoritmo in seguito a coincidenze. Possiamo procedere con lo stesso ragionamento fatto per la riga $[1]$: ogni posto della riga $[k]$ viene eventualmente riempito da un'etichetta per l'ipotesi del teorema, il valore di ognuna di esse cambia solo in seguito a delle sostituzioni, in quei casi può solo diminuire e solo per un numero finito di volte. Dunque dopo un certo numero di passi la riga $[k]$ rimane invariata. \square

Si può dimostrare quindi

Teorema 4.12. *Se l'indice $[G : H]$ è finito, una qualunque procedura di riempimento delle tabelle che soddisfi l'ipotesi del lemma precedente termina riempiendo tutte le righe di tutte le tabelle.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente sappiamo che ogni riga di ogni tabella rimane invariata dopo un certo numero di passi, se per assurdo la procedura non dovesse terminare allora il numero di tali righe dovrebbe crescere all'infinito. Per il teorema precedente sappiamo costruire un'azione transitiva da G all'insieme delle etichette e quindi sappiamo che $[G : \text{Stab}([1])]$ è infinito. Tuttavia $H \subseteq \text{Stab}(1)$ contraddicendo l'ipotesi che $[G : H]$ sia finito. \square

4.1.2 Adattamento per gruppi finitamente L-presentati

In questo caso è dato un gruppo G e una sua L-presentazione finita $\langle S|Q|\Phi|R \rangle$ sia $H = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ un suo sottogruppo finitamente generato, supponendo che l'indice $[G : H]$ di H in G sia finito vorremmo calcolarne il valore. Per definizione G è il quoziente di F_S per il sottogruppo normale $K = \langle Q \cup \bigcup_{\phi \in \Phi^*} \phi(R) \rangle^{\text{norm}}$ e penseremo ai generatori di H

come elementi di F_S , poniamo poi $U = \langle g_1, \dots, g_n \rangle \subseteq F_S$. Essendo K normale si ha che UK è un sottogruppo di F_S , questo è proprio la preimmagine di H tramite la proiezione $\pi : F_S \rightarrow G \cong F_S/K$, si ha quindi che $UK/K \cong H$ e $[G : H] = [F_S/K : UK/K]$. Per il terzo teorema di omomorfismo si ottiene infine che $[F_S/K : UK/K] = [F_S : UK]$, in particolare $[F_S : UK]$ è finito.

Definiamo ora una sequenza di sottogruppi di UK . Definiamo per un elemento ψ del monoide Φ^* , generato dall'insieme finito Φ , la *lunghezza* $|\psi|$, ovvero il minimo numero naturale r per cui $\psi = \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_r}$ con $\phi_{i_j} \in \Phi$.

Definiamo, per $\ell \geq 0$:

- Gli insiemi finiti $\Phi_\ell = \{\psi \in \Phi^* : |\psi| \leq \ell\}$
- I sottogruppi di F_S finitamente generati $K_\ell = \langle Q \cup \bigcup_{\phi \in \Phi_\ell} \phi(R) \rangle^{\text{norm}}$
- I gruppi quoziente $G_\ell = F_S/K_\ell$ finitamente presentati

Osserviamo che le inclusioni $K_{\ell_1} \subseteq K_{\ell_2}$ per $\ell_1 \leq \ell_2$ inducono degli omomorfismi suriettivi $G_{\ell_1} \rightarrow G_{\ell_2}$, allo stesso modo l'inclusione $K_\ell \subseteq K$ per ogni ℓ induce un omomorfismo suriettivo $G_\ell \rightarrow G$.

Da queste otteniamo poi la seguente catena di inclusioni:

$$UK_0 \subseteq UK_1 \subseteq \cdots \subseteq UK_\ell \subseteq \cdots \subseteq UK$$

e $UK = \bigcup_{\ell \geq 0} UK_\ell$,

Osservazione 4.13. *Si noti che essendo $UK_\ell \subseteq UK$ per ogni ℓ si ha, per la moltiplicatività degli indici:*

$$[F_S : UK_\ell] = [F_S : UK][UK : UK_\ell] = [G : H][UK : UK_\ell]$$

ovvero $[G : H]$ divide $[F_S : UK_\ell]$ qualora quest'ultimo sia finito.

Grazie al seguente lemma essendo F_S finitamente generato e UK di indice finito, si ha che UK è finitamente generato.

Lemma 4.14 (Schreier). *Sia G un gruppo finitamente generato e sia H un suo sottogruppo di indice finito, allora anche H è finitamente generato.*

Dimostrazione. Sia $X = \{g_1, \dots, g_n\}$ un insieme di generatori per G e sia $[G : H] = m \in \mathbb{N}$, sia poi $T = \{t_1, \dots, t_k\}$ un insieme di rappresentanti per ogni classe laterale destra di H , poniamo $t_1 = 1$ a rappresentare la classe laterale banale $H \cdot 1 = H$. È ben definito per $g \in G$ un unico elemento $\bar{g} \in T$ tale che $g \in H\bar{g}$. Dimostriamo ora che l'insieme $B = \{tx(\bar{tx})^{-1} | t \in T, x \in X\}$ è un sistema di generatori per H , cioè che ogni elemento di H si può scrivere come prodotto di elementi di $B' = B \cup B^{-1}$.

Dimostriamo inizialmente una proprietà dell'applicazione $\bar{\cdot} : G \rightarrow T$: per ogni $x, y \in G$ si ha $\overline{\bar{xy}} = \overline{\bar{x}\bar{y}}$. Poniamo

$$t = \bar{x} \qquad t' = \overline{\bar{xy}} \qquad t'' = \overline{\bar{x}\bar{y}}$$

vogliamo dimostrare $t' = t''$. Per definizione esistono $w, w', w'' \in H$ tali che

$$x = wt \qquad \overline{\bar{xy}} = w't' \qquad \overline{\bar{x}\bar{y}} = w''t''$$

da cui $y = \bar{x}^{-1}w't' = t^{-1}w't'$, sostituendo nella terza equazione otteniamo

$$xy = (wt)(t^{-1}w't') = ww't' \in Ht'$$

ovvero $\overline{\bar{xy}} = t'$, ma dato che il rappresentante di ogni classe laterale è unico per definizione, si ha $t' = t''$.

Consideriamo ora un elemento h di H e scegliamo $a_1, \dots, a_k \in A = X \cup X^{-1}$ tali che $h = a_1 \cdots a_k$ e definiamo un insieme di elementi di T nel modo seguente

$$u_0 := 1 \\ u_i := \overline{\bar{a_1 \cdots a_i}}, \text{ per } i \in \{1, \dots, k\}$$

notiamo che

$$u_k = \overline{\bar{a_1 \cdots a_k}} = \bar{h} = t_1 = 1.$$

Sappiamo per le considerazioni precedenti che vale la relazione

$$u_{i+1} = \overline{\bar{a_1 \cdots a_i a_{i+1}}} = \overline{\bar{a_1 \cdots a_i} \bar{a_{i+1}}} = \overline{\bar{u_i} \bar{a_{i+1}}}. \quad (4.5)$$

Riscriviamo quindi prodotto nella seguente forma

$$h = a_1 \cdots a_k = (u_0 a_1 u_0^{-1})(u_1 a_2 u_1^{-1}) \cdots (u_{k-1} a_k u_{k-1}^{-1})$$

che diventa, usando la relazione (4.5),

$$h = (u_0 a_1 (\overline{\bar{u_0 a_1}})^{-1})(u_1 a_2 (\overline{\bar{u_1 a_2}})^{-1}) \cdots (u_{k-1} a_k (\overline{\bar{u_{k-1} a_k}})^{-1})$$

Resta da dimostrare che ognuno di questi fattori è un elemento di B' . Se $a_i \in X$ allora $u_{i-1} a_i (\overline{\bar{u_{i-1} a_i}})^{-1} \in B$. Supponiamo invece che $a_i \in X^{-1}$, ovvero $a_i = x^{-1}$ per

qualche $x \in X$, avremo allora dei fattori della forma $u_{i-1}x^{-1}(\overline{u_{i-1}x^{-1}})^{-1}$, cerchiamo di dimostrare che anche questi sono elementi di B , esplicitamente dimostriamo l'uguaglianza $B^{-1} = \{vx^{-1}(\overline{vx^{-1}})^{-1} \mid v \in T, x \in X\} =: Y$.

Sappiamo che per $u \in T$ vale $\overline{uxx^{-1}} = uxx^{-1} = \bar{u} = u$. Sia $(tx(\overline{tx})^{-1})^{-1}$ un elemento di B^{-1} , chiaramente $(tx(\overline{tx})^{-1})^{-1} = \overline{txx^{-1}t^{-1}}$, ed essendo $t \in T$ vale $t = \overline{txx^{-1}}$ da cui

$$\overline{txx^{-1}t^{-1}} = (\overline{txx^{-1}})(\overline{txx^{-1}})^{-1} = vx^{-1}(\overline{vx^{-1}})^{-1},$$

dove si è posto $v := \overline{tx}$ per alleggerire la notazione. In altre parole $B^{-1} \subseteq Y$. Viceversa sia $g = ux^{-1}(\overline{ux^{-1}})^{-1} \in Y$, allora $g^{-1} = \overline{ux^{-1}xu^{-1}}$. Come prima da $u \in T$ si ha $\overline{ux^{-1}x} = u$, quindi

$$g^{-1} = (\overline{ux^{-1}x})(\overline{ux^{-1}x})^{-1} = vx(\overline{vx})^{-1} \in B$$

dove si è posto $v = \overline{ux^{-1}}$, dunque $g \in B^{-1}$.

Si è trovato $Y \subseteq B^{-1}$ e quindi $B^{-1} = Y$ come richiesto. \square

Sia quindi u_1, \dots, u_s un insieme di generatori per UK , si ha che per ogni u_i esiste un ℓ_i tale che $u_i \in UK_{\ell_i}$, prendendo $\ell = \max_{1 \leq i \leq s} \{\ell_i\}$ si ha l'uguaglianza

$$UK = UK_{\ell}$$

dunque

$$[F_S : UK_{\ell}] = [F_S : UK] = [G : H]$$

Essendo F_S finitamente presentato si può usare l'algoritmo di Todd-Coxeter descritto nella sezione precedente per calcolare l'indice $[F_S : UK_{\ell}]$.

In pratica il valore di ℓ non è noto a priori e può capitare che l'algoritmo di Todd-Coxeter termini per un certo t trovando un valore finito per $[F_S : UK_t]$ ma che $UK_t \subsetneq UK$ e quindi l'indice trovato sia maggiore di $[G : H]$.

Per verificare l'uguaglianza $UK_t = UK$ si considera l'azione $\varphi_t : F_S \rightarrow \text{Sym}(UK_t \setminus F_S)$ trovata come risultato aggiuntivo dall'algoritmo di Todd-Coxeter, è sufficiente verificare che questa induca un omomorfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(UK_t \setminus F_S)$ definito come $\alpha(g) = \varphi_t(g)$ per ogni $g \in G$ (ricordando che gli elementi di G , scritti come parole nell'insieme di generatori S , possono essere pensati come elementi in F_S). Se ciò avviene vuol dire che ogni relatore $k \in K$ agisce come l'identità sull'insieme delle classi laterali destre $UK_t \setminus F_S$ ovvero $UK_t k = UK_t$ ma questo implica $k \in UK_t$ per ogni $k \in K$ e dunque $UK \subseteq UK_t$, ma per costruzione $UK_t \subseteq UK$ per ogni $t \geq 0$, dunque $UK_t = UK$.

Decidere in modo algoritmico se UK_t è uguale a UK è un problema tutt'altro che banale, per una descrizione dettagliata di un possibile approccio si veda [6]

4.2 Il teorema di Highman

Un'altra applicazione delle presentazioni endomorfe riguarda il teorema di Highman.

Definizione 4.15. Sia G un gruppo con presentazione $\langle S|R \rangle$, si dice che G è ricorsivamente presentato se R è un insieme ricorsivamente enumerabile, ovvero se e solo se R è l'immagine di una funzione ricorsiva primitiva.

Teorema 4.16 (Highman). *Un gruppo G è ricorsivamente presentato se e solo se può essere immerso in un gruppo finitamente presentato \widehat{G} , ovvero se esiste un omomorfismo iniettivo $i : G \hookrightarrow \widehat{G}$.*

In generale costruire \widehat{G} è molto complicato, tuttavia nel caso in cui G ammetta una L-presentazione finita e ascendente questo si può scrivere come iterazione finita di estensioni HNN. Utilizziamo il seguente lemma di cui omettiamo la dimostrazione, si veda [9].

Lemma 4.17 (Britton). *Sia G un gruppo con presentazione $\langle S|R \rangle$, sia α un isomorfismo fra due suoi sottogruppi H e K e sia $G*_\alpha$ una sua estensione HNN con lettera stabile t . Data una parola w nei generatori $S \cup \{t\}$ della forma:*

$$w = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 t^{\epsilon_2} \cdots g_{n-1} t^{\epsilon_n} g_n, \quad g_i \in G, \epsilon_i = \pm 1$$

si ha che $w = 1$ implica una delle seguenti possibilità:

- $n = 0$ e $g_0 = 1$ in G
- $n > 0$ e per qualche $i \in \{1, \dots, n-1\}$ vale una delle due condizioni seguenti:
 1. $\epsilon_i = 1, \epsilon_{i+1} = -1, g_i \in H$
 2. $\epsilon_i = -1, \epsilon_{i+1} = 1, g_i \in K$

Corollario 4.18. *L'omomorfismo $G \rightarrow G*_\alpha$ dato dall'identificazione dei generatori di G con i generatori di $G*_\alpha$ eccetto la lettera stabile è iniettivo, ovvero $G*_\alpha$ contiene una copia isomorfa di G .*

Possiamo allora dimostrare:

Teorema 4.19. *Sia G un gruppo finitamente L-presentato da una presentazione endomorfa ascendente. Allora si può costruire tramite successive estensioni HNN un gruppo \widehat{G} finitamente presentato contenente una copia isomorfa di G .*

Dimostrazione. Sia $\langle S|\Phi|R \rangle$ una L-presentazione ascendente finita di G . Scegliamo ora per ogni $\phi \in \Phi$ una lettera t_ϕ che non compaia già in S e consideriamo il seguente gruppo:

$$\widehat{G} = \langle S \cup \{t_\phi\}_{\phi \in \Phi} \mid R \cup \{t_\phi^{-1} s t_\phi \phi(s)^{-1}\}_{\phi \in \Phi} \rangle$$

Questo gruppo è finitamente presentato essendo Φ un insieme finito, inoltre è ottenuto da successive estensioni HNN dato che ogni ϕ induce un omomorfismo iniettivo su G . Infine per il corollario 4.18 segue che la mappa $s \in G \mapsto s \in \widehat{G}$ è un omomorfismo iniettivo. \square

Grazie alla presentazione trovata nella proposizione 4.3 siamo quindi in grado di costruire esplicitamente il gruppo $\widehat{\Gamma}$ a partire dal gruppo di Grigorchuk Γ :

$$\widehat{\Gamma} = \left\langle a, c, d, t \mid \begin{array}{l} a^2 = (ad)^4 = (ad(ac)^2)^4 = 1, \\ t^{-1}at = aca, \quad t^{-1}ct = cd, \quad t^{-1}dt = c \end{array} \right\rangle$$

Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 4.20. *Esiste un gruppo finitamente presentato avente un sottogruppo isomorfo al gruppo di Grigorchuk.*

Bibliografia

- [1] de La Harpe P., *Topics in Geometric Group Theory*, The University of Chicago Press, 2000.
- [2] Ceccherini Silberstein T., Machì A., Scarabotti F., *Il Gruppo di Grigorchuk di Crescita Intermedia*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo L, 2001.
- [3] Bartholdi L., *Endomorphic Presentations of Branch Groups*, Journal of Algebra, Volume 268, Issue 2, 2003.
- [4] Lysenok I. G., *A System of Defining Relations for a Grigorchuk Group*, Plenum Publishing Corporation, 1986.
- [5] Neubüser J., *An Elementary Introduction to Coset Table Methods in Computational Group Theory*, Cambridge University Press, 1982.
- [6] Hartung R., *Coset Enumeration for Certain Infinitely Presented Groups*, International Journal of Algebra and Computation, 2011.
- [7] Holt D., *The Schreier-Sims Algorithm for Finite Permutation Groups*, University of Warwick, 2015.
- [8] Hartung R., *Algorithms for Finitely L-presented Groups and their applications to some self-similar Groups*, Elsevier, 2012.
- [9] Baumslag G., *Topics in Combinatorial Group Theory*, Birkhäuser, 1993.