

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Sede di Forlì

Corso di Laurea in

Ingegneria Meccanica

Classe LM-33

Tesi di laurea in Tecnologie Speciali e dei materiali compositi LM

Analisi di modelli analitici per la caratterizzazione  
dei modi di delaminazione in materiali compositi

Candidato

Monti Gianluca

Relatore

Prof. Lorenzo Donati

Correlatore

Francesco Rondina

Anno Accademico 2017/2018



# Sommario

L'oggetto della presente tesi è un approfondimento sui modi di rottura a delaminazione di Modo I, II e misto I/II a cui i materiali compositi sono sottoposti mediante la ricerca bibliografica di articoli scientifici e normative tecniche, corredando la ricerca con alcune prove pratiche di caratterizzazione svolte in laboratorio e con una comparazione analitica tra dati ottenuti con metodologia classica e dati ottenuti con metodologie avanzate. L'analisi dei dati è stata basata sui provini e sui risultati ottenuti dalle prove effettuate da Filippo Maria Casadio per il suo elaborato di tesi di laurea. L'elaborazione di tutti i dati è stata ottenuta tramite l'utilizzo del software Microsoft Excel.

# Indice

1. Capitolo 1: Introduzione ai modi di danneggiamento nei materiali compositi.....	P.7
2. Capitolo 2: Metodi sperimentali esistenti per la caratterizzazione dei modi di delaminazione.....	P.12
3. Capitolo 3: Modo I	
3.1: Le origini: formulazione classica semplificata.....	P.19
3.2: Test DCB con modelli avanzati: Kanninen.....	P.23
3.3: Test DCB con modelli avanzati: Williams.....	P.30
3.4: Normativa ASTM standard 5528.....	P.31
3.5: Confronto con dati sperimentali.....	P.36
4. Capitolo 4: Modo II	
4.1: Le origini: formulazione classica semplificata.....	P.57
4.2: Test ENF con modelli avanzati: Kanninen.....	P.59
4.3: Test ENF con modelli avanzati: Williams.....	P.59
4.4: Normativa ASTM standard 7905.....	P.61
4.5: Confronto con dati sperimentali.....	P.64

## 5. Capitolo 5: Modo Misto I/II

5.1: Le origini: formulazione classica semplificata.....	P.79
5.2: Test MMB con modelli avanzati: Kanninen.....	P.83
5.3: Test MMB con modelli avanzati: Williams.....	P.84
5.4: Test MMB con modelli avanzati: Bennati-Valvo.....	P.84
5.5: Normativa ASTM standard 6671.....	P.86
5.6: Confronto con dati sperimentali.....	P.89
6. Conclusioni.....	P.100
Bibliografia.....	P.102



# Capitolo 1: Introduzione ai modi di danneggiamento nei materiali compositi

La delaminazione (o *debonding*) è un processo di rottura caratteristico dei laminati realizzati in materiale composito. È un fenomeno che si presenta come separazione delle lamine, e che si presenta nei pressi dei bordi liberi del laminato, zona dove si ha la maggiore concentrazione di tensioni. In letteratura, viene definita lamina uno strato di materiale composito rinforzato da fibre, mentre viene definito laminato il prodotto ottenuto attraverso la sovrapposizione e l'incollaggio di più lamine. La figura 1.1 raffigura una possibile delaminazione di un laminato.

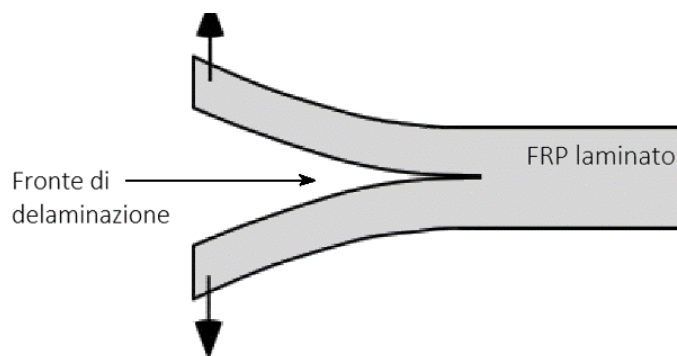
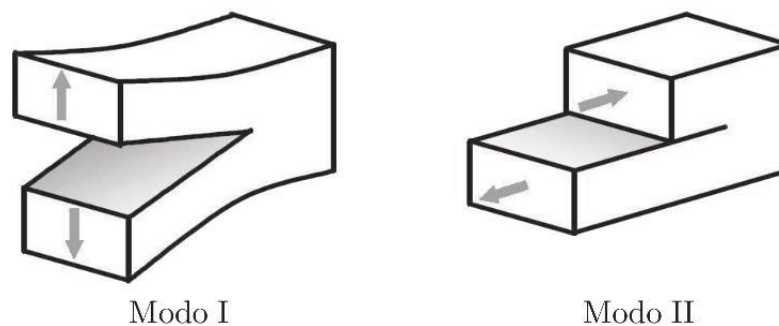


Figura 1.1. Schematizzazione di una delaminazione di un laminato in puro Modo I.

Lo studio della delaminazione e dei modi e delle condizioni sotto cui si manifesta sono di estremo interesse, in quanto, a prescindere dalle modalità di formazione, al suo verificarsi le proprietà meccaniche del materiale si abbassano drasticamente, comportando nel caso di applicazioni strutturali maggiori condizioni di pericolo. Il rischio di delaminazione non è limitato alla sola applicazione nel campo delle materie plastiche rinforzate con fibre di carbonio, ma si estende anche al campo delle travi strutturali in cemento armato rinforzato con materiale fibroso.

Il processo che porta alla formazione e alla propagazione della frattura all'interno dei materiali compositi è complesso e di difficile riproduzione, in quanto quasi sempre nel danneggiamento intervengono altri meccanismi di danneggiamento intralaminare (come il distacco tra fibra e matrice, la rottura delle fibre). Nel corso del tempo sono stati messi a punto e classificati diversi modelli per la determinazione numerica della resistenza alla delaminazione dei materiali compositi. Classificazione effettuata anche per le modalità di rottura del laminato:



*Figura 1.2. Schematizzazione dei modi puri di carico e di propagazione della delaminazione*

Solitamente, i materiali presentano la minore resistenza alla delaminazione quando si trovano nelle condizioni di Modo I.

Nel Modo I, la delaminazione avviene tra i due strati di lamine e si accresce lungo essi. Essendo il Modo I effettuato con materiali compositi formati da strati di lamine deposte a  $0^\circ$  l'una rispetto all'altra, la propagazione avviene lungo la matrice. Nel caso del Modo II, all'apice della zona di intaglio si formano delle microcricche inclinate di  $45^\circ$  rispetto alla direzione longitudinale; in seguito, una volta raggiunto un determinato valore del carico, tali microcricche si aprono e si connettono tra di loro, dando luogo alla delaminazione.



L'unità di misura utilizzata per misurare la resistenza alla delaminazione nella teoria della *Linear Elastic Fracture Mechanics*, o meccanica della frattura lineare elastica (LEFM), è il cosiddetto *Energy Release Rate*,  $G$ , o tasso di rilascio dell'energia, misurato nel Sistema Internazionale (SI) in  $J/m^2$ . La definizione data da Irwin nel 1956 è:

$$G = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (1.1)$$

dove  $\Pi$  è l'energia potenziale totale e  $A$  l'area della fessura, con l'energia potenziale definita, nel caso di un corpo elastico, come:

$$\Pi = \Omega - W \quad (1.2)$$

dove  $\Omega$  rappresenta l'energia di deformazione elastica immagazzinata nel corpo, e  $W$  il lavoro totale compiuto dai carichi esterni. Si prenda ora come esempio la piastra della figura 1.3 con intaglio di lunghezza  $a$  e soggetta a controllo di spostamento, su cui ad un certo punto viene applicato un carico  $P$ :

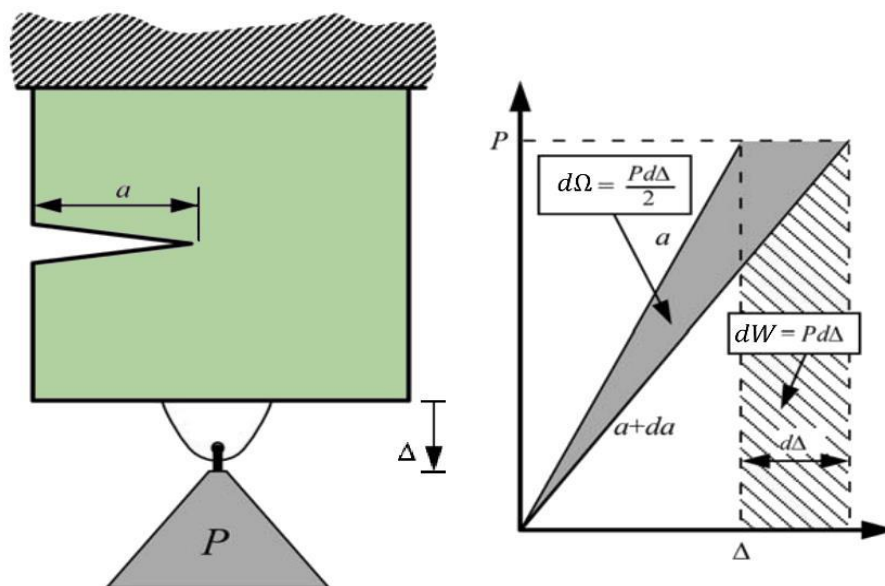


Figura 1.3. Piastra fessurata in controllo di carico  $P$ .

Effettuando le dovute operazioni è possibile vedere come:

$$\Omega = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{P\Delta}{2}; \quad W = P\Delta = 2\Omega; \quad \rightarrow \quad \Pi = -\Omega \quad (1.3)$$

Di conseguenza:

$$G = \frac{d\Omega}{dA} \Big|_P = \frac{P}{2B} \frac{d\Delta}{da} \Big|_P \quad (1.4)$$

dove B rappresenta la larghezza della piastra e  $\Delta$  l'apertura dei bracci di lamina:

Ora, per la risoluzione del problema analogo in controllo di spostamento, in cui sulla piastra vien applicato uno spostamento  $\Delta$ :

$$W = 0; \quad \rightarrow \quad \Pi = \Omega; \quad (1.5)$$

da cui, di conseguenza:

$$G = -\frac{d\Omega}{dA} \Big|_{\Delta} = -\frac{\Delta}{2B} \frac{dP}{dA} \Big|_{\Delta} \quad (1.6)$$

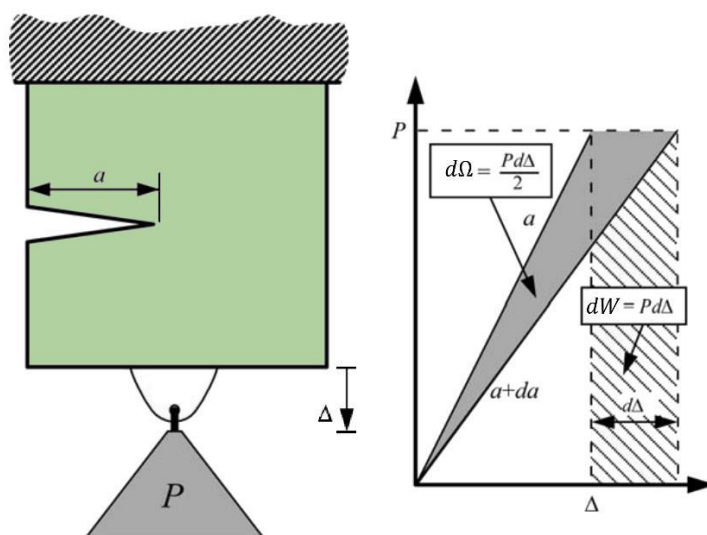


Figura 1.4. Piastra fessurata in controllo di spostamento  $\Delta$ .

Si definisce quindi la cedevolezza del sistema (pari all'inverso della rigidezza) come:

$$C = \frac{\Delta}{P} \quad (1.7)$$

Svolgendo i necessari passaggi matematici, si conclude che:

$$d\Delta = PdC \rightarrow dP = -\frac{P^2}{\Delta} dC \quad (1.8)$$

Arrivando infine alla conclusione:

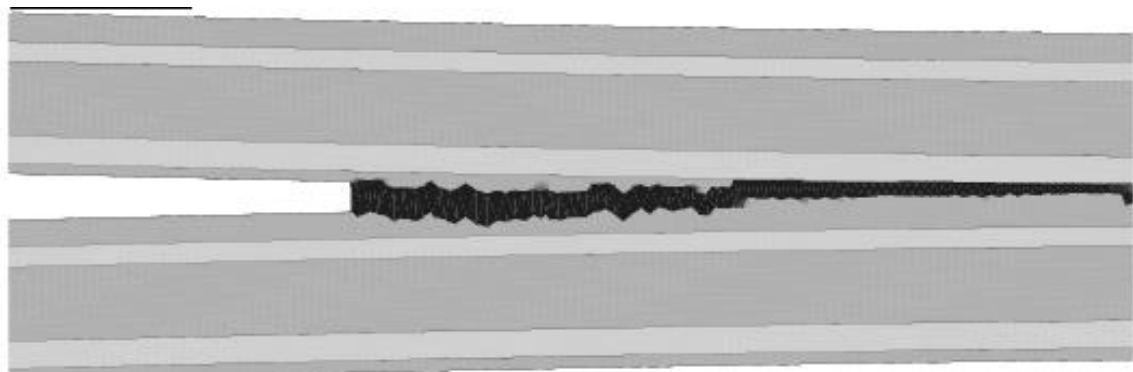
$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad (1.9)$$

Quindi, considerando il corpo come elastico, il tasso di rilascio dell'energia definito dall'equazione (1.1) è lo stesso sia in caso di controllo di carico, sia in controllo di spostamento.

## Capitolo 2: Metodi sperimentali esistenti per la caratterizzazione dei modi di delaminazione

Gli attuali metodi esistenti per la caratterizzazione dei diversi modi di delaminazione sono il risultato del perfezionamento di tecniche sperimentate per la prima volta negli anni passati.

Il *Double Cantilever Beam* test nacque dal semplice test condotto da J. J. Benbow e F. C. Roesler, dove ognuna delle due parti del campione soggetto a delaminazione è trattata come una trave a mensola avente la medesima estensione della lunghezza della cricca. È un test che viene utilizzato per verificare la resistenza dei materiali compositi alla delaminazione per Modo I.



*Figura 2.1. Schematizzazione della propagazione della delaminazione in Modo 1.*

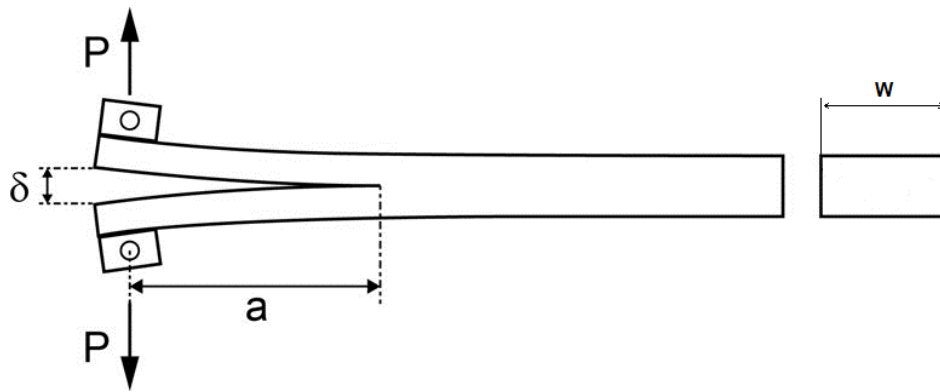


Figura 2.2. Rappresentazione schematica di una prova DCB.

Per la caratterizzazione della resistenza dei laminati al Modo II si ricorre invece al test *End Notched Flexure*, il primo tipo di test realizzato ad essere adottato come normativa dalla *American Society for Testing and Materials* (ASTM). Consiste nel posizionare il provino di materiale composito su 2 supporti rigidi e di applicare il carico sulla faccia superiore, in posizione tra i due supporti, per mezzo di un puntale. Questa prova ha tuttavia il principale e non trascurabile svantaggio di causare una propagazione instabile della cricca. Per cui, per avere una propagazione stabile, si effettua costantemente la misura dello spostamento dei lembi della cricca, in modo da condurre la prova in regime di controllo di carico.

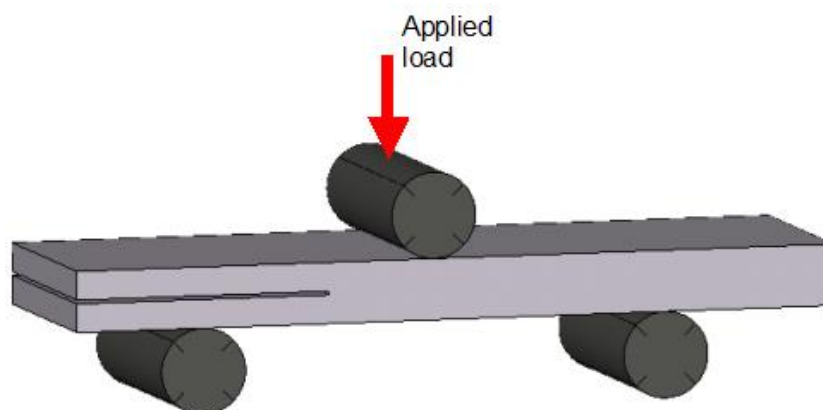


Figura 2.3. Rappresentazione schematica di una prova ENF.

Vista la difficoltà dell'esecuzione della prova, e per risolvere il problema della propagazione instabile della cricca, venne sviluppata un'evoluzione del test ENF, il 4ENF, che utilizza 4 punti di contatto anziché 3. Sebbene la propagazione della cricca sia più stabile, la prova presenta il grande svantaggio di avere una forte componente di attrito tra le parti in delaminazione durante l'esecuzione.

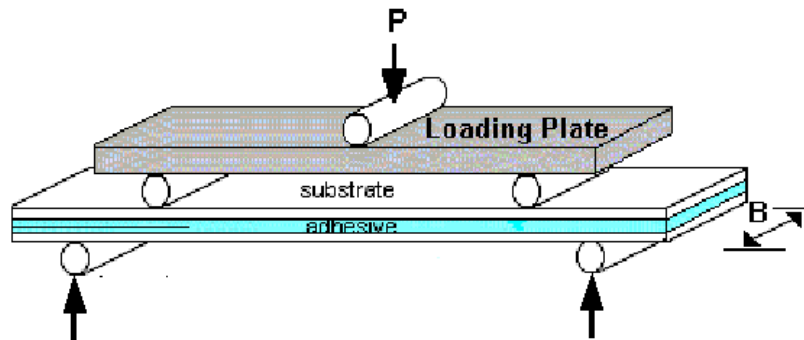


Figura 2.4. Schematizzazione di una prova 4ENF.

Il test *End Loaded Split* (ELS) viene utilizzato come alternativa ai due sopracitati test per la caratterizzazione della resistenza di un materiale in Modo II. Rispetto al test ENF gode di una maggiore stabilità nella propagazione della cricca, ed è adatto per la caratterizzazione di provini in materiale composito di elevata lunghezza in cui la cricca si estende per la buona parte di essa. Tuttavia, la presenza di una morsa introduce una ulteriore variabile al problema della determinazione della resistenza, in quanto posizionamenti differenti daranno luogo a diverse resistenze.

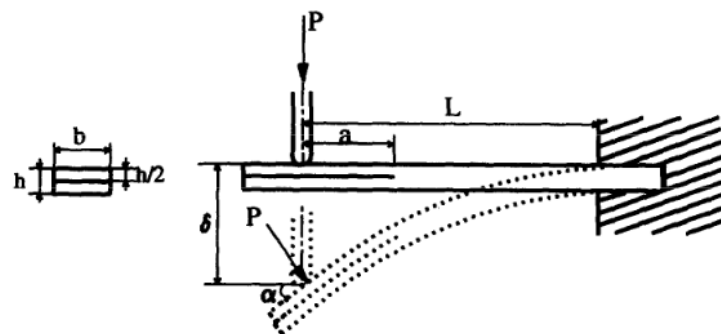


Figura 2.5. Schematizzazione di una prova ELS.

Esistono anche tecniche per caratterizzare contemporaneamente la resistenza a Modo I e Modo II di un materiale, eseguendo un solo tipo di prova. Un esempio di questo tipo è il *Mixed-Mode Bending* test (MMB), che combina il meccanismo di caratterizzazione della prova DCB e della prova ENF. La prova è stata ideata da Reeder e Crews sul finire degli anni '80, migliorata dagli stessi autori nel corso degli anni, ed infine normata dalla ASTM International nel 2001. Misurando l'intensità di un solo carico, è possibile determinare come questo si suddivide nei due carichi tipici delle prove DCB e ENF, consentendo quindi di calcolare le due resistenze. Variando opportunamente il coefficiente che descrive il loro rapporto, è possibile ricondurre la prova mista ad una delle altre due, ottenendo quindi la resistenza a puro Modo I o puro Modo II.

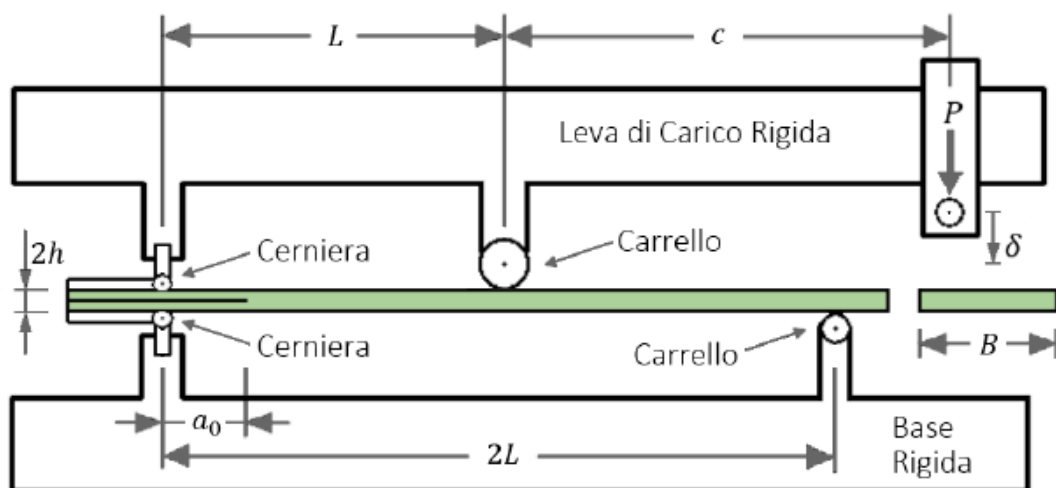


Figura 2.6. Schematizzazione di una prova MMB.

Un ulteriore metodo per valutare simultaneamente la resistenza alla delaminazione in Modo I e in Modo II è il *Crack Lap Shear* (CLS) test, inizialmente concepito da Brussat nel 1977 e poi migliorato da altri team di ingegneri nel corso degli anni. La rottura del provino avviene in Modo II, ma è possibile calcolare entrambi i tipi di resistenza. Nonostante la prova abbia il vantaggio di avere l'energy release rate indipendente dalla lunghezza di cricca, è estremamente sensibile ad errori di misura delle condizioni al contorno, e la determinazione dei parametri che caratterizzano la prova è estremamente difficoltosa.

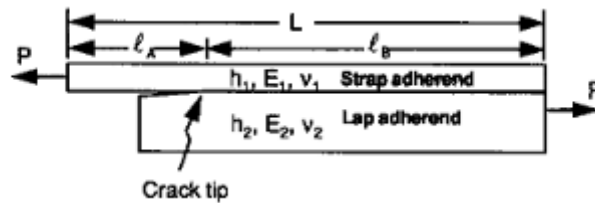


Figura 2.7. Schematizzazione di una prova CLS.

In ultima analisi viene qui descritta la resistenza a delaminazione in Modo III. Tale modo di rottura in letteratura non trova molto spazio, principalmente a causa della difficoltà di determinare un modello analitico in grado di predirne i valori di resistenza. Motivo per cui, nonostante la presenza di test effettuabili per la caratterizzazione, non vi siano riferimenti nelle normative standard internazionali.

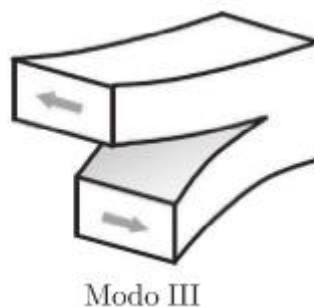


Figura 2.8. Schematizzazione di una delaminazione in puro Modo 3

Una delle prove utilizzate è il *Crack Rail Shear* (CRS) test, che utilizza lo stesso tipo di provini dello *Shear Test* normato dalla ASTM D4255-83, con la sola aggiunta di un velo di materiale polimerico nel piano intermedio del composito che agisce come sito iniziale per la propagazione della cricca.



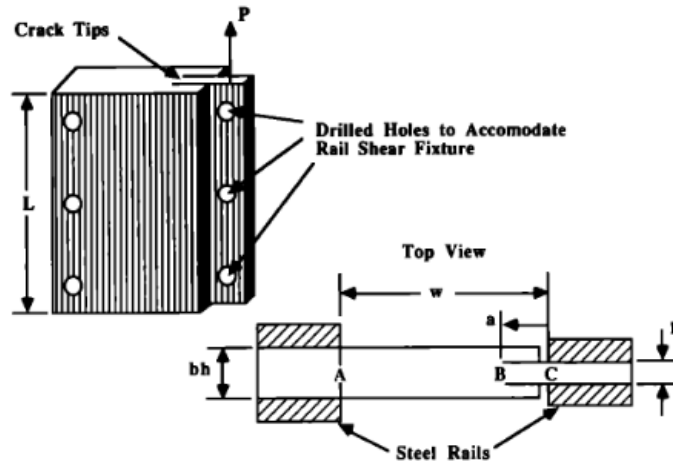


Figura 2.9. Schematizzazione di una prova CRS.

Un'ulteriore prova per la determinazione della resistenza a Modo III è la versione ottenuta modificando la *Split Cantilever Beam* (SCB). La prova SCB senza modifiche produce una componente non trascurabile (fino al 40%) anche in Modo II, motivo per cui è possibile vederla come una prova mista II/III. Nel caso si volesse ottenere una misura di puro Modo III, le soluzioni adottate comprendono l'uso di blocchi di afferraggio molto rigidi e di uno schema di carico apposito per limitare il più possibile la componente di Modo II.

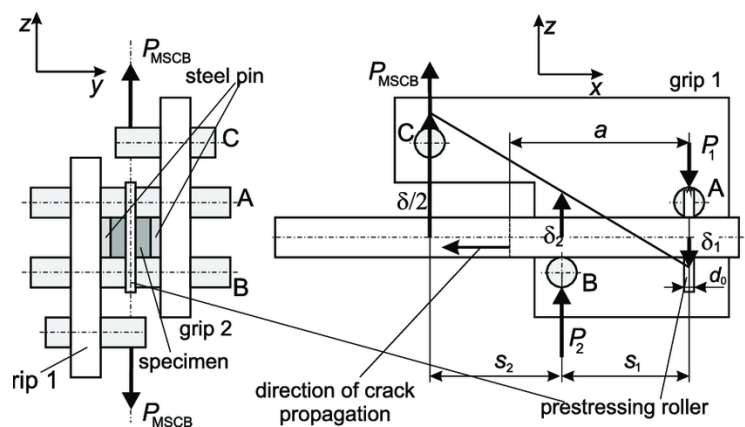


Figura 2.10. Schematizzazione di una prova SCB.

Passando alla dimensione dei provini scelti per effettuare il test, essa non potrà essere presa a piacimento ma dovrà sottostare a vincoli ben precisi. Per la geometria del materiale composito da utilizzare nella prova DCB, la lunghezza del provino dovrà essere di almeno 125 mm e la sua larghezza compresa tra i 20 mm e i 25 mm, con uno spessore compreso tra i 3 mm e i 5 mm (ponendo quindi intrinsecamente un limite massimo al numero di strati di fibra che è possibile sovrapporre).

Per la caratterizzazione della resistenza a Modo II invece, la geometria dei provini richiesta dalla normativa è, per le prove ENF, 4ENF e ELS la seguente: il provino dovrà avere una lunghezza massima di 100 mm, una larghezza compresa tra i 19 mm e i 26 mm, e uno spessore compreso tra i 3,4 mm e 4,7mm.

Per il modo misto II/III, la geometria adottata è la medesima utilizzata nella prova ENF per la resistenza a Modo II.

# Capitolo 3: Modo I

## 3.1: Le origini: formulazione classica semplificata

È la prova utile per definire l'energia di frattura,  $G_{IC}$ , relativa al Modo I nei laminati rinforzati con fibre unidirezionali. Il provino viene lasciato libero nell'estremo intatto, mentre nell'estremo intagliato vengono applicate due cerniere o, in alternativa, due blocchetti metallici dotati ciascuno di un foro passante. La cerniera (o il blocchetto) inferiore è vincolata all'esterno, mentre quella superiore viene tirata verso l'alto. La prova avviene in controllo di spostamento e, durante la stessa, vengono registrate la reazione vincolare  $P$ , l'apertura dei bracci di lamina  $\Delta$ , e la lunghezza di delaminazione  $a$ .

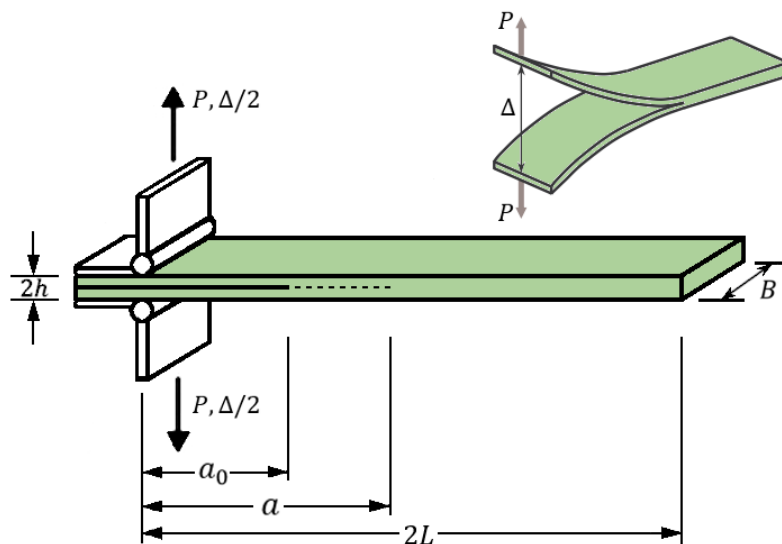


Figura 3.1. Schematizzazione del Double Cantilever Beam test. Uso di cerniere per l'afferraggio.

Il DCB test è utilizzato da molto tempo (alcuni articoli riguardo al suo utilizzo risalgono agli anni '60) ed in alcuni casi la prova viene simulata in modo diverso, ma staticamente equivalente: l'estremo integro viene incastrato e si impone lo stesso spostamento in modulo ad entrambe le cerniere.

Il vincolo nelle due cerniere può essere riprodotto in due modi: mediante un sistema di blocchi (o perni) dotati di fori passanti (Figura 3.2 a sinistra), oppure attraverso delle cerniere (Figura 3.2 a destra). In ogni caso, qualunque sia il tipo di vincolo scelto esso dovrà essere fissato saldamente alle estremità superiore e inferiore del provino tramite l'utilizzo di resine, in modo da garantire la libera rotazione dell'estremo terminale dei bracci della lamina, senza tuttavia modificarne la rigidezza.

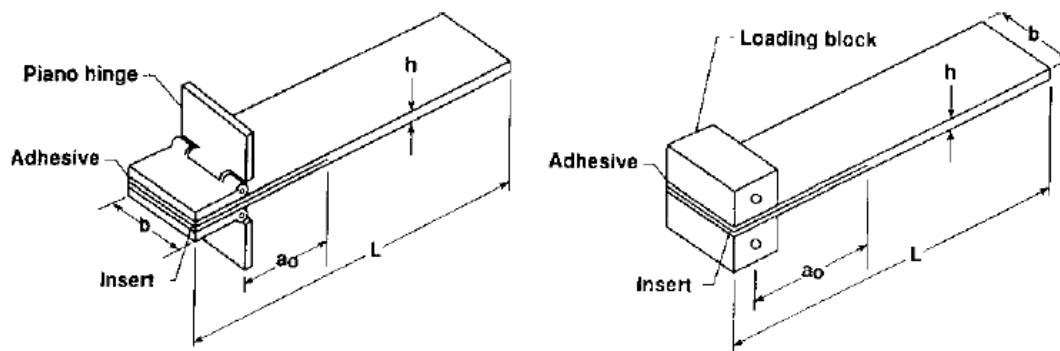


Figura 3.2. A sinistra, prova DCB con uso di cerniere. A destra, prova DCB con uso di blocchi metallici.

La zona di delaminazione viene creata durante la stesura degli strati di materiale fibroso: dato che essa dovrà essere presente in mezzeria, il numero di strati utilizzati dovrà ovviamente essere pari. Per crearla, si inserisce un film di materiale polimerico termoresistente non più spesso di  $13 \mu\text{m}$  e si continua quindi con la sovrapposizione degli strati. Durante la cura, l'inserto non consentirà alla matrice di fluire liberamente, creando quindi la zona di delaminazione iniziale  $a_0$ .

La soluzione analitica proposta in origine per la risoluzione del problema prevedeva una semplificazione, ovvero considerava il provino come una trave di Eulero-Bernoulli. I due bracci della lamina vengono schematizzati come due travi incastrate di lunghezza iniziale  $a_0$  (ossia, corrispondenti alla lunghezza di delaminazione iniziale), e finché non ha luogo la delaminazione la lunghezza delle mensole rimane costante. Quindi, secondo la teoria di Eulero-Bernoulli la relazione che lega lo spostamento  $\Delta$  alla forza  $P$  è:

$$\Delta = \frac{2Pa_0^3}{3EI} \quad (3.1)$$

dove  $E$  rappresenta il modulo elastico longitudinale del materiale della lamina (considerata come omogenea e isotropa), e  $I$  il momento di inerzia della sezione di un braccio del provino nel piano di flessione, che per le travi a sezione rettangolare vale:

$$I = \frac{Bh^3}{12} \quad (3.2)$$

La soluzione elastica lineare (equazione di Eulero-Bernoulli) non è più valida nel momento in cui ha inizio la delaminazione. Nel momento in cui accade, si ricorre anche all'aiuto della teoria della frattura elastica lineare per descrivere il problema, e la soluzione viene ricavata mettendo a sistema le tre seguenti relazioni:

- La soluzione di Eulero-Bernoulli per una trave di lunghezza  $a$  pari alla lunghezza della fessura generata dalla delaminazione:

$$\Delta = \frac{2Pa^3}{3EI} \quad (3.3)$$

- L'espressione del tasso di rilascio dell'energia per Modo I secondo la LEFM è data da:

$$G_I = \frac{P^2 a^2}{BEI} \quad (3.4)$$

- In accordo con la teoria di Griffith, si ha propagazione di cricca quando:

$$G_{IC} = G_I \quad (3.5)$$

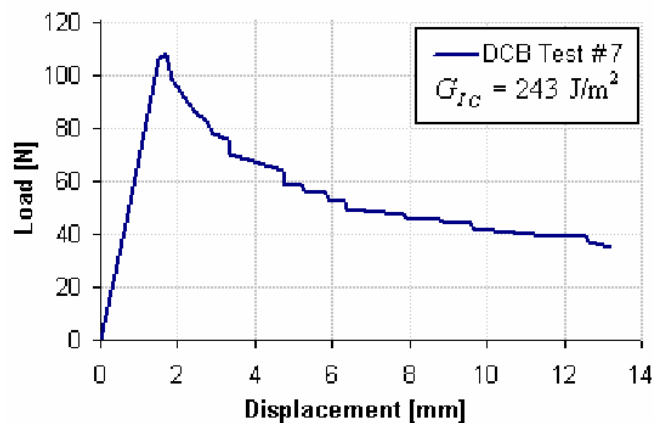


Figura 3.3. Esempio di soluzione di test DCB.

Mettendo a sistema le equazioni (3.3), (3.4) e (3.5) si ottiene la soluzione per la seconda parte della curva nel piano  $P - \Delta$ , dove cessa la linearità:

$$\begin{cases} \Delta = \frac{2Pa^3}{3EI} \\ G_I = \frac{P^2 a^2}{BEI} \\ G_{IC} = G_I \end{cases} \quad \Delta = \frac{2\sqrt{(BG_{IC})^3 EI}}{P^2} \quad (3.6)$$

Considerando che il sistema di equazioni appena descritto è valido anche quando  $a = a_0$ , è possibile utilizzarlo per calcolare il carico massimo  $P_{max}$  che la lamina può sostenere prima di dar luogo alla delaminazione:

$$P_{max} = \frac{\sqrt{BEIG_{IC}}}{a_0} \quad (3.7)$$

È possibile inoltre calcolare anche lo spostamento critico  $\Delta_c$ , ossia lo spostamento subito dalle due lamine immediatamente prima che si verifichi la delaminazione:

$$\Delta_c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{BG_{IC}}{EI}} a_0 \quad (3.8)$$

Riassumendo, le soluzioni analitiche utilizzabili per il ramo di linearità e per il secondo tratto non lineari sono:

$$\begin{cases} \Delta = \frac{2Pa_0^3}{3EI} & se \Delta \leq \Delta_c \\ \Delta = \frac{2\sqrt{(BG_{IC})^3 EI}}{P^2} & se \Delta \geq \Delta_c \end{cases} \quad (3.9)$$

### 3.2: Test DCB con modelli avanzati: Kanninen

Con l'intento di migliorare la teoria classica, nel 1973 Kanninen riformulò la soluzione analitica inerente al Modo I. La teoria DCB "aumentata" considera una trave di lunghezza finita  $L$  e spessore  $B$  con la parte soggetta ad apertura priva di vincoli, e quella invece non interessata dalla delaminazione come supportata da una fondazione elastica. Per la soluzione matematica considerò i due più semplici ed accurati modelli a disposizione: la teoria di Eulero-Bernoulli e il modello di Winkler.

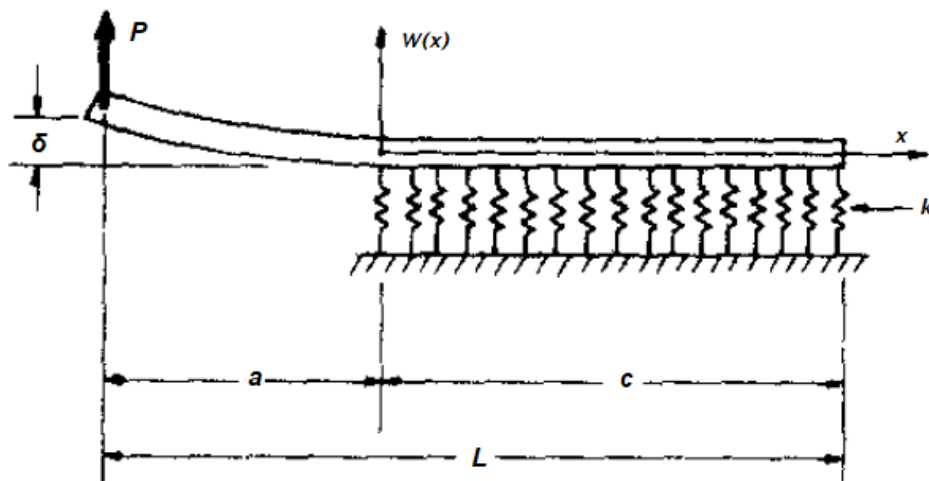


Figura 3.4. Schematizzazione della prova DCB "aumentata". Provino su fondazione elastica.

L'equazione differenziale che descrive l'inflessione  $w(x)$  del provino è:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 H(x)w = 0 \quad (3.10)$$

dove:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

con:

$$\lambda^4 = \frac{k}{4EI} = \frac{3k}{EBh^3}$$

Dove  $k$  rappresenta la rigidità della fondazione elastica,  $E$  il modulo di Young,  $I$  il momento di inerzia della sezione e  $h$  l'altezza della singola lamina. Le condizioni di contorno utilizzate sono quelle di una forza di taglio  $P$  che agisce all'estremità sinistra del provino in figura 3.4, e di condizioni di bordo libero all'estremità destra, che possono essere scritte come:

$$w''(-a) = 0, w'''(-a) = P/EI = 12P/EBh^3$$

Avendo:

$$w''(c) = w'''(c) = 0$$

Considerando le condizioni al contorno, la soluzione dell'equazione 3.10 è ottenuta considerando i due intervalli  $(-a, 0)$  e  $(0, c)$  separatamente, quindi si procede confrontando i valori delle deflessioni ottenute a  $x=0$ . Il risultato ottenuto è:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^3 x^3}{3} + a\lambda^3 x^2 - A\lambda x + B & \text{se } -a \leq x \leq 0 \\ a\lambda \sin(\lambda x) \sinh(\lambda x) - \left(\frac{A-1}{2}\right) \sin(\lambda x) \cosh(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \cosh(\lambda x) + \\ - \left(\frac{A+1}{2}\right) \cos(\lambda x) \sinh(\lambda x) & \text{se } 0 \leq x \leq c \end{cases}$$

Dove:

$$A = \left[ \frac{\sinh^2(\lambda c) + \sin^2(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right] + 2a\lambda \left[ \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) + \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right]$$

e

$$B = \left[ \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) - \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right] + a\lambda \left[ \frac{\sinh^2(\lambda c) + \sin^2(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right]$$

Nel caso in cui  $\delta = w(-a)$ , la relazione per la cedevolezza si può scrivere come:

$$\frac{\delta}{P} = \frac{\phi}{EP} \quad (3.11)$$

Dove  $\phi$  vale:

$$\phi = \frac{2}{\lambda^3 h^3} \left[ 2\lambda^3 a^3 + 6\lambda^2 a^2 \left( \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) + \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right) + \right. \\ \left. + 6\lambda a \left( \frac{\sinh^2(\lambda c) + \sin^2(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right) + 3 \left( \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) - \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right) \right]$$



Il modello ricavato attraverso la soluzione semplificata può essere ricavato in qualunque momento considerando la fondazione come infinitamente rigida. Se  $k \rightarrow \infty$  allora  $\lambda \rightarrow \infty$  e  $\delta = 4Pa^3/(EBh^3)$ .

Normalmente la rigidezza è indipendente dai parametri della trave, ma dato che nella versione di Kanninen il compito della fondazione è compensare la parte non sostenuta,  $k$  non sarà indipendente. Il suo valore verrà invece calcolato associando il rateo di deflessione della lamina in mezzeria con la deformazione media trasversale del provino, e la reazione della fondazione con lo stress trasversale. Quindi, in prima approssimazione:

$$\sigma = \frac{k w(x)}{B} = E \varepsilon = \frac{E w(x)}{h/2}$$

In modo che:

$$k = \frac{2EB}{h}$$

Dove quindi:

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{6}}{h} \quad (3.12)$$

Il modulo di fondazione è stato stabilito da Kanninen in maniera piuttosto arbitraria, ma i risultati ottenuti sono in ottimo accordo con i dati sperimentali. Prendendo inoltre  $c \gg h$  si ha:

$$\frac{\delta}{P} = \frac{4a^3}{EBh^3} \left[ 1 + 1,92 \frac{h}{a} + 1,22 \frac{h^2}{a^2} + 0,39 \frac{h^3}{a^3} \right] \quad (3.13)$$

Risultato in linea con quelli ottenuti con una trattazione classica del test DCB in assenza di effetti di bordo libero.

Per il calcolo dell'energia di deformazione elastica durante la prima fase di propagazione stabile della cricca, si utilizza il lavoro svolto dai carichi applicati. L'energia di deformazione vale  $W = P\delta$  o, dall'equazione (3.11):

$$W(a) = \frac{P^2}{EB} \phi = \frac{EB\delta^2}{\phi} \quad (3.14)$$

dove la prima forma è impiegata sotto condizioni di controllo di forza, mentre la seconda in controllo di spostamento.

La relazione tra il fattore di intensità di stress e il tasso di rilascio dell'energia può essere espresso per una trave come:

$$K^2 = \begin{cases} \frac{P^2}{B^2} \dot{\phi} & \text{se in condizioni di controllo di forza} \\ \frac{E^2 \delta^2}{\phi^2} \dot{\phi} & \text{se in condizioni di controllo di spostamento} \end{cases} \quad (3.15)$$

Dove:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial a} - \frac{\partial \phi}{\partial c} = \frac{12}{\lambda^2 h^3} \left[ \lambda a \left( \frac{\sinh^2(\lambda c) + \sin^2(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right) + \left( \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) - \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \right)^2 \right]$$

L'analisi appena svolta è molto efficace e in accordo con i dati sperimentali, ma nella sua formulazione fu trascurata l'influenza di forze di taglio e di forze di inerzia rotazionali, oltre ad incontrare difficoltà nella descrizione analitica della propagazione instabile della cricca. Per questo motivo, nel 1974 Kanninen pubblicò un aggiornamento del suo iniziale lavoro, includendo forze di taglio e di inerzia. Partendo dal bilancio dell'energia del modello della meccanica elastica della frattura, si estende il concetto fino a situazioni dinamiche, considerando il rateo dell'energia dissipata alla sommità della cricca come una proprietà del materiale. L'energia non dissipata rimane quindi nel sistema come energia elastica di deformazione o come energia cinetica. Se nessun lavoro esterno viene compiuto sul provino, è possibile scrivere l'espressione del bilancio energetico come:

$$\frac{dU}{da} + \frac{dT}{da} + BR = 0 \quad (3.16)$$

dove  $U$  e  $T$  sono rispettivamente l'energia di deformazione e l'energia cinetica, e  $R$  è l'energia assorbita alla sommità della cricca per unità d'area dell'avanzamento di cricca, e  $B$  lo spessore del provino in corrispondenza della sommità di cricca. Si ha l'arresto dell'avanzamento di cricca quando l'energia del sistema non è più sufficiente a garantirne la crescita. Nelle fasi iniziali dello studio, si è ricorsi ancora una volta all'uso della teoria delle travi di Eulero-Bernoulli e a quella della fondazione di Winkler, efficaci nel descrivere il provino nel caso statico. Includendo quindi forze di taglio e inerzie il modello più indicato per descrivere

analiticamente la prova è la teoria delle travi di Timoshenko, considerando anche una fondazione cedevole che conferisca rigidità torsionale. Le equazioni quindi sono:

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - k_r H^*(\vartheta_c - \vartheta) \psi = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

$$kGA \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_c H^*(\vartheta_c - \vartheta) w = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

Dove  $w$  rappresenta la deflessione media della sezione trasversale,  $\psi$  l'angolo medio di rotazione della sezione trasversale sull'asse neutro,  $E$  il modulo elastico,  $I$  il momento di inerzia,  $G$  il modulo di elasticità tangenziale,  $\rho$  la densità di massa,  $A$  l'area della sezione della trave,  $k_r$  la rigidità rotazionale della fondazione,  $k_c$  la rigidità estensionale della fondazione,  $k$  il coefficiente di taglio della trave,  $\theta$  parametro di estensione della cricca,  $\vartheta_c$  il valore critico del parametro di estensione della cricca e  $H^*(x)$  la funzione gradino già incontrata nel precedente lavoro di Kanninen, ma modificata in modo che non possa cambiare valore da 0 a 1. Nella teoria delle travi di Timoshenko l'effettiva deformazione di taglio trasversale è presa uguale allo stress di taglio medio su una sezione trasversale diviso per il prodotto del modulo di taglio con il coefficiente  $k$ . Il valore approssimato di  $k$  qui considerato vale:

$$\frac{kG}{E} = \frac{1}{3} \quad (3.19)$$

Le condizioni al contorno da imporre corrispondono a quelle di bordo privo di stress all'estremità del provino, stress dati in termini di deflessione e rotazione dalle relazioni:

$$S = kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)$$

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.20)$$

dove  $S$  è lo stress di taglio trasversale e  $M$  il momento flettente.

Il parametro  $\theta$  che appare nelle equazioni (3.17) e (3.18) può essere calcolato considerando l'energia del sistema. Sulla base dell'approccio di Cowpers, l'espressione dell'energia per una prova DCB vale:

$$U = \int_{-e}^L \left\{ EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 + H^* (\vartheta_c - \vartheta) [k_e w^2 + k_r \psi^2] \right\} dx \quad (3.21)$$

$$T = \int_{-e}^L \left\{ \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (3.22)$$

Le premesse per il modello di meccanica della frattura adottato prevedono che l'avanzamento di cricca sia possibile solo quando l'energia rilasciata durante l'estensione della cricca è almeno uguale a quella assorbita dalla cricca. Il bilancio energetico totale durante un avanzamento infinitesimo di cricca  $da$  vale:

$$\frac{dU}{da} + \frac{dT}{da} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} (U + T) \quad (3.23)$$

dove  $V = da/dt$  è la velocità di avanzamento della cricca. Sostituendo quindi le equazioni (3.21) e (3.22) nella (3.23), differenziando rispetto a  $t$  e quindi integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{da} + \frac{dT}{da} = & -\frac{1}{V} \left\{ 2 \int_{-e}^L \frac{d\psi}{dt} \left[ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - k_r H^* (\vartheta_c - \vartheta) \psi - \right. \right. \\ & \left. \left. \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] dx + 2 \int_{-e}^L \frac{\partial w}{\partial t} \left[ kGA \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - k_e H^* (\vartheta_c - \vartheta) w - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] dx + \right. \\ & \left. \left[ EI \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} + kGA \frac{\partial w}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right]_{x=-e}^{x=L} + \frac{da}{dt} [k_e w^2 + k_r \psi^2]_{x=a} \right\} \quad (3.24) \end{aligned}$$

Confrontando l'equazione appena ottenute con la (3.17) e la (3.18) è possibile notare come i due integrali che appaiono nella (3.24) siano pari a zero. Di conseguenza l'equazione si riduce:

$$\frac{dU}{da} + \frac{dT}{da} = -[k_e w^2 k_r \psi^2]_{x=a(t)} \quad (3.25)$$

Dove i termini tra parentesi rappresentano l'energia di deformazione elastica della fondazione in corrispondenza della sommità di cricca. Dal confronto con l'equazione (3.16) appare chiaro che:

$$BR = [k_e w^2 k_r \psi^2]_{x=a(t)} \quad (3.26)$$

Quindi il parametro  $\theta$  deve essere associato con lo stato di deformazione della fondazione:

$$\vartheta = k_e w^2 k_r \psi^2 \quad (3.27)$$

$$\vartheta_c = BR \quad (3.28)$$

I parametri così ottenuti andranno utilizzati per la risoluzione delle equazioni (3.17) e (3.18).

Per quanto riguarda i parametri della fondazione, è possibile calcolarli come segue:

$$k_e = \frac{2EB}{h} \quad (3.29)$$

$$k_r = \frac{kGA}{2} \quad (3.30)$$

Infine, per ottenere l'espressione della cedevolezza  $\delta/P$  e il fattore di intensità dello stress si risolvono le versioni indipendenti dal tempo delle equazioni (3.17) e (3.18). Considerando che:

$$K^2 = E[k_e w^2 k_r \psi^2]_{x=a(t)}$$

$$K = \frac{2\sqrt{3}Pa}{Bh^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{h}{a}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

e

$$\frac{\delta}{P} = \frac{4a^3}{EBh^3} \left\{ 1 + \frac{3\sqrt{5}}{4} \left(\frac{h}{a}\right) + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{3\sqrt{5}}{16} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \right\} \quad (3.32)$$

Entrambi i risultati sono validi solo fintanto che la lunghezza non criccata  $L - a$  rimane molto più grande di  $h$ .

### 3.3: Test DCB con modelli avanzati: Williams

Con l'intenzione di ampliare ulteriormente la soluzione di Kanninen estendendola anche ai materiali ortotropi unidirezionali per test DCB, nel 1989 Williams partì dal modello di Kanninen e vi introdusse delle piccole modifiche empiriche per ottenere una correzione dell'effettiva lunghezza di cricca nella forma  $a_1 = (a + \chi h)$ , dove  $a$  è la lunghezza di cricca,  $h$  lo spessore del provino e  $\chi$  un fattore di correzione.

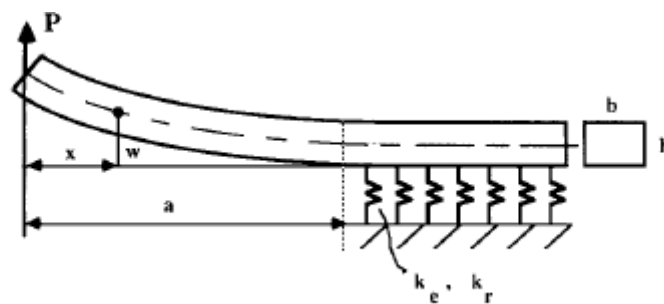


Figura 3.5. Schema del modello DCB adottato da Williams.

Il parametro di correzione di lunghezza di intaglio  $\chi$  è quindi calcolabile come:

$$\chi = \sqrt{\frac{E_{11}}{11G_{12}}} \left[ 3 - 2 \left( \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} ; \quad \Gamma = 1,18 \frac{\sqrt{E_{11}E_{22}}}{G_{12}} \quad (3.33)$$

dove  $\Gamma$  rappresenta il parametro di correzione del modulo elastico trasversale,  $G_{12}$  il modulo di elasticità tangenziale,  $E_{11}$  il modulo elastico lungo l'asse del provino ed  $E_{22}$  il modulo elastico trasversale all'asse. Una volta calcolati i coefficienti, è sufficiente sostituire  $a$  con  $a_1$  nella formulazione classica del problema.

### 3.4: Normativa ASTM standard 5528

La normativa ASTM 5528 ha come scopo la definizione di uno standard di esecuzione della prova DCB per la caratterizzazione della resistenza a Modo I,  $G_{Ic}$ , di un materiale composito in condizioni di controllo di spostamento. Il test è limitato all'applicazione solo su materiali compositi con fibre unidirezionali di carbonio o vetro, e matrice polimerica solidificata e fragile. Come già accennato, il numero di strati di materiale fibroso dovrà essere pari, e in mezzo dovrà essere inserito un film di materiale non adesivo non più spesso di  $13\mu\text{m}$  che funga da sito di propagazione della cricca. I parametri da registrare frequentemente attraverso l'uso del calcolatore per tutta la durata della prova sono il carico  $P$  agente sul provino, l'apertura dei bracci del provino  $\Delta$  e la lunghezza di cricca  $a$ .



Figura 3.6. Un esempio di prova DCB.

Almeno cinque provini dello stesso tipo devono essere testati, e per ognuno di loro si deve realizzare una delaminazione di tipo I, qualunque altro tipo di rottura è da scartare. La formulazione generale per la determinazione della resistenza è esprimibile come:

$$G = -\frac{1}{b} \frac{dU}{da}$$

Perché il provino scelto per la prova sia valido è necessario che esso soddisfi alcune condizioni:

$$a_0 \leq 0,042 \sqrt{\frac{E_{11}h^3}{G_{Ic}}}$$

$$h \geq 8,28 \left( \frac{G_{Ic}a_0^2}{E_{11}} \right)^{1/3}$$

È possibile stimare la forza massima  $P_{max}$  che teoricamente il provino dovrebbe sopportare prima che si abbia la delaminazione come:

$$P_{max} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{G_{Ic}E_{11}h^3}{96}}$$

Ai fini della determinazione della resistenza  $G_{Ic}$  invece, si possono utilizzare tre diversi metodi analitici:

- Il primo è il metodo *Modified Beam Theory* (MBT). La normale teoria delle travi:

$$G_I = \frac{3P\delta}{2ba}$$

tenderà a sovrastimare il valore di  $G_I$  in quanto essa non è perfettamente incastrata alla sua estremità, ma tenderà a presentare una piccola rotazione sul fronte di delaminazione. Un modo per correggere tale stima è quello di allungare la delaminazione ottenuta,  $a + |\Delta|$ , con  $\Delta$  ottenibile sperimentalmente attraverso il calcolo della regressione lineare del grafico  $a - C^{1/3}$ , dove  $C$  è la cedevolezza calcolata come  $\delta/P$ . L'espressione della resistenza a Modo I diventa quindi:

$$G_I = \frac{3P\delta}{2b(a + |\Delta|)}$$



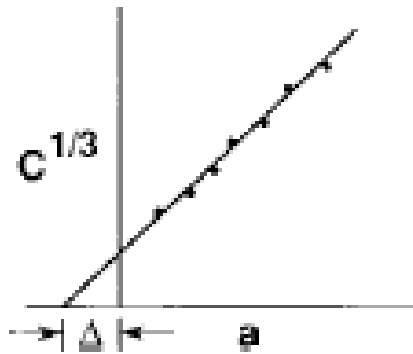


Figura 3.7. Esempio di grafico  $a - C^{1/3}$  da cui ricavare  $\Delta$ .

- Il secondo metodo è il *Compliance Calibration* (CC), in cui la resistenza viene ottenuta attraverso l'uso di un coefficiente correttivo  $n$  applicato alla formula classica delle travi.

$$G_I = \frac{nP\delta}{2ba}$$

Il coefficiente  $n$  è ottenuto come calcolo della pendenza della retta generata sul piano  $\log a - \log C$ .

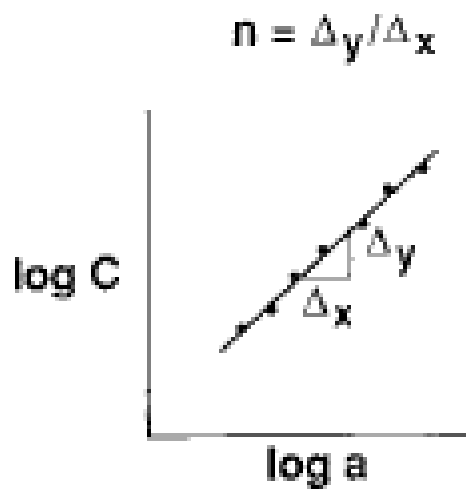


Figura 3.8. Esempio di grafico  $\log a - \log C$  da cui ricavare  $n$ .

- Come terzo e ultimo metodo vi è il *Modified Compliance Calibration* (MCC):

$$G_I = \frac{3P^2 C^{\frac{2}{3}}}{2A_1 b h}$$

in cui il coefficiente  $A_1$  è dato come pendenza della linea generata dal grafico

$$C^{\frac{1}{3}} - a/h$$

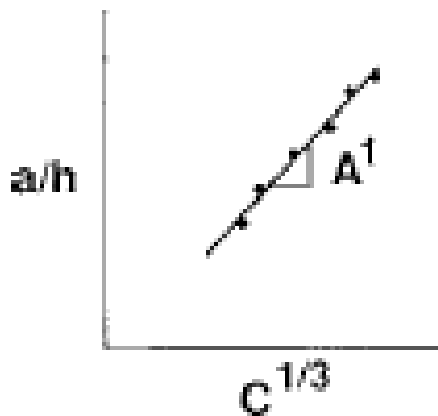


Figura 3.9. Esempio di grafico  $C^{\frac{1}{3}} - a/h$ . Dal calcolo della pendenza è possibile ricavare  $A_1$ .

Nel caso in cui il rapporto tra l'incremento di prima propagazione  $d_a$  e la lunghezza di delaminazione iniziale  $a_0$  sia:

$$\frac{d_a}{a_0} > 0,4$$

è necessario adottare dei fattori di correzione.

Come fattore di correzione per grandi aperture dei bracci del provino, si ricorre all'uso del parametro  $F$ , da includere nel calcolo della resistenza  $G_I$ :

$$F = 1 - \frac{3}{10} \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{\delta t}{a^2} \right)$$

dove  $t$  rappresenta, sia nel caso si siano utilizzate cerniere sia che si siano utilizzati blocchetti metallici, la distanza tra il centro del perno e la faccia superiore del braccio del provino, come mostrato dalla figura (3.10).

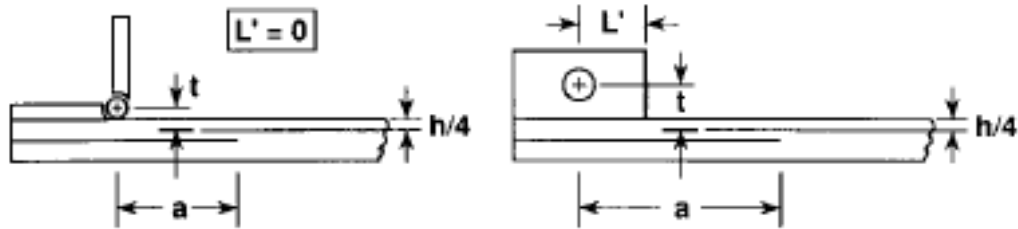


Figura 3.10. Parametri variabili a seconda della scelta del tipo di fissaggio.

La distanza  $t$  deve essere più piccola possibile per evitare errori. Per evitare influssi indesiderati:

$$t \leq \frac{h}{4} + 0,01 \sqrt{a^2 + \frac{0,0434h^3 E_{11}}{G_{Ic}}}$$

Se questa condizione non dovesse essere raggiunta, è necessaria l'adozione di un ulteriore parametro di correzione,  $N$ :

$$N = 1 - \left(\frac{L'}{a}\right)^3 - \frac{9}{8} \left[1 - \left(\frac{L'}{a}\right)^2\right] \left(\frac{\delta t}{a^2}\right) - \frac{9}{35} \left(\frac{\delta}{a}\right)^2$$

con  $L'$  determinabile come in figura (3.10). Le correzioni appena trovate possono essere applicate a qualsiasi metodo di calcolo della resistenza: se sono state utilizzate cerniere il fattore  $F$  va moltiplicato per il valore di  $G_I$  trovato; se al contrario sono stati utilizzati blocchetti il valore della cedevolezza  $C$  trovato deve essere diviso per il fattore  $N$  quando lo si utilizza per la determinazione dei coefficienti  $\Delta$ ,  $n$  e  $A_1$ . Quindi, si moltiplica  $G_I$  per  $F/N$  per ottenere il valore corretto di  $G_I$ .

### 3.5: Confronto con dati sperimentali

Vengono ora presentati i risultati numerici di sei prove DCB effettuate su sei provini di materiale composito differenti. I provini sono stati ricavati dalla stessa lastra di materiale composito e dalla zona più distante possibile dai bordi in modo da avere in tutti lo stesso rapporto fibra matrice. Sono state utilizzate 12 pelli in fibra unidirezionale di carbonio per la creazione dei provini. Le prove sono state svolte attenendosi alla normativa ASTM 5528, e per ognuna è stata valutata la resistenza a delaminazione di tipo I per tutte le tre modalità previste, comprendendo anche l'utilizzo di fattori di correzione  $F$  e  $N$ .

Ai fini dei calcoli non verranno considerati tutti dati ottenuti dalla prova, ma solo quelli più significativi, in modo da ottenere una decina di punti di interesse.

I parametri dimensionali e dati necessari ai calcoli per il provino **DCB 1** sono:

Dimensioni [mm]		Valori aggiuntivi	
Lunghezza (L):	160	E11 [Mpa]:	90000
Larghezza (b):	19,38	G1c [J/m <sup>2</sup> ]:	470
Altezza (h):	3,58	d_a [mm]:	1
a0:	60	Pmax [N]:	45,93

La massima forza che teoricamente si dovrebbe sviluppare prima della delaminazione è pari a circa 46 N. Analizzando i valori registrati dalla cella di carico, si vede come il massimo valore di carico raggiunto sia stato di circa 47 N, ossia estremamente vicino a quanto preventivato.

Displacement $\delta$ [mm]	Carico P [N]	Cricca a [mm]	Fattori di correzione		Cedevolezza			Altri dati	
			F	N	C	Log C	C <sup>1/3</sup>	Log a	a/h
0,00	0,00	60	1,000	1,000	0,000		0	1,78	16,76
8,00	46,97	60	0,972	0,981	0,170	-0,769	0,554	1,78	16,76
9,89	43,93	67	0,966	0,980	0,225	-0,647	0,608	1,83	18,72
11,34	42,29	68	0,957	0,977	0,268	-0,571	0,645	1,83	18,99
12,65	41,52	72	0,951	0,976	0,305	-0,516	0,673	1,86	20,11
13,16	41,02	74	0,949	0,976	0,321	-0,494	0,685	1,87	20,67
13,88	40,81	76	0,945	0,976	0,340	-0,468	0,698	1,88	21,23
14,79	40,04	77	0,938	0,974	0,370	-0,432	0,718	1,89	21,51
15,13	39,74	79	0,936	0,975	0,381	-0,419	0,725	1,90	22,07
16,09	39,73	81	0,930	0,974	0,405	-0,393	0,740	1,91	22,63
16,51	39,05	82	0,925	0,974	0,423	-0,374	0,751	1,91	22,91
17,40	38,86	84	0,919	0,973	0,448	-0,349	0,765	1,92	23,46
18,37	38,40	85	0,910	0,972	0,478	-0,320	0,782	1,93	23,74
19,23	37,44	88	0,900	0,972	0,514	-0,289	0,801	1,94	24,58

Figura 3.11. Tabella di calcolo Excel utilizzata per i calcoli, in questo caso il DCB 1.

Con i dati appena trovati, è possibile tracciare un primo grafico  $\delta$ -P:

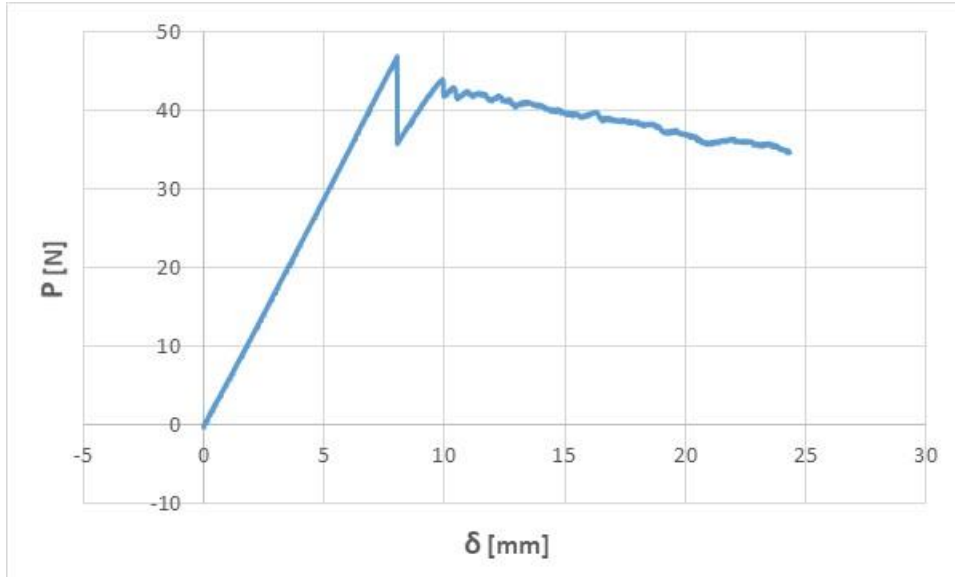


Figura 3.12. Diagramma  $\delta$ -P del provino DCB 1.

in cui è possibile notare il punto in cui in cui si verifica la delaminazione. Quindi i passi successivi sono la determinazione dei parametri necessari per la determinazione della resistenza a delaminazione di tipo I secondo i tre metodi individuati. Partendo con il metodo MBT, il parametro necessario è  $\Delta$ :

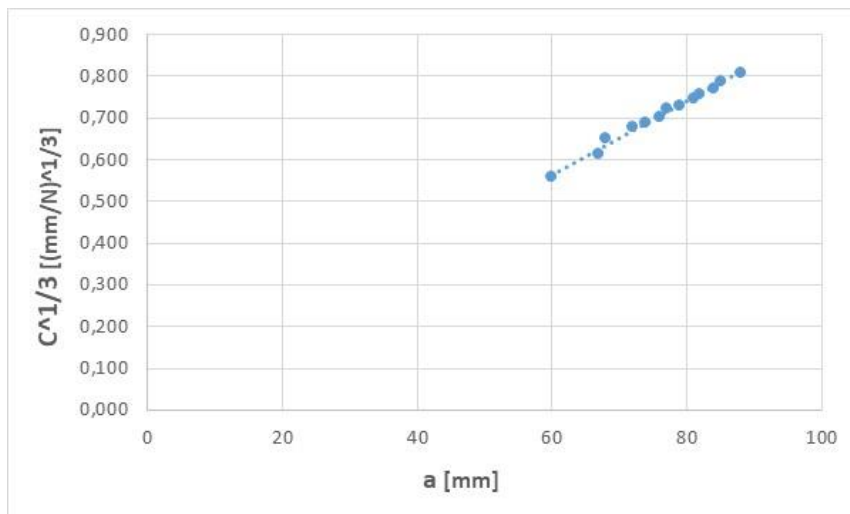


Figura 3.13. Diagramma  $a$ - $C^{1/3}$  del provino DCB 1.

Nel calcolo di  $\Delta$  è stato utilizzato il coefficiente correttivo  $N$ . Utilizzando le apposite funzioni matematiche fornite da Excel è possibile calcolare il punto in cui la retta interpolante interseca l'asse delle ascisse, ottenendo così  $\Delta = -2,8358$ .

Per il metodo CC è necessario trovare il parametro  $n$ , dato come pendenza del grafico  $\text{Log } a - \text{log } C$ :

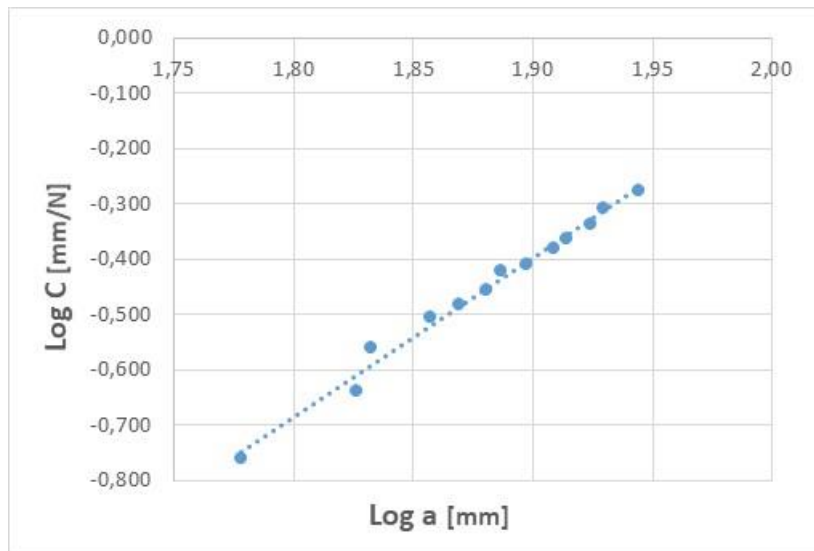


Figura 3.14. Diagramma  $\text{Log } a - \text{Log } C$  del provino DCB 1.

con un valore di  $n = 2,8773$ .

Per la determinazione del parametro correttivo  $A_1$  per il metodo MCC si procede determinando la pendenza della retta interpolante del grafico:

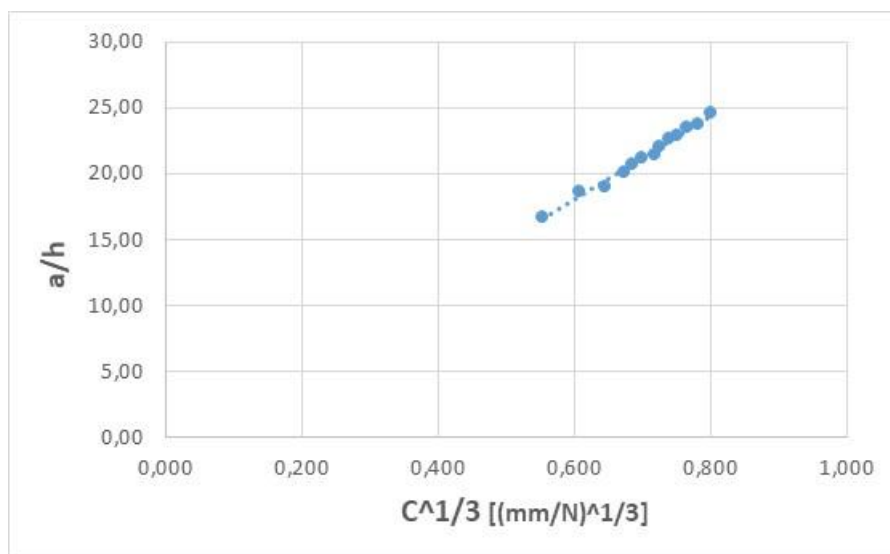


Figura 3.15. Diagramma  $C^{1/3} - a/h$  del provino DCB 1.

trovando infine un valore  $A_1 = 31,7407$ .

Riportando tutti i valori in tabella e applicando gli opportuni fattori di correzione (in questo caso il solo fattore  $N$ ), si ottiene un confronto tra i valori della resistenza a delaminazione calcolati attraverso diversi metodi:

Displacement $\delta$ [mm]	Carico P [N]	Cricca a [mm]	$G_{Ic}$ [J/m <sup>2</sup> ]		
			MBT	CC	MCC
0,00	0,00	60			
8,00	46,97	60	459	461	463
9,89	43,93	67	475	475	486
11,34	42,29	68	514	513	504
12,65	41,52	72	529	528	526
13,16	41,02	74	528	526	530
13,88	40,81	76	538	536	544
14,79	40,04	77	553	550	550
15,13	39,74	79	546	542	552
16,09	39,73	81	563	559	572
16,51	39,05	82	559	555	566
17,40	38,86	84	569	564	579
18,37	38,40	85	582	577	586
19,23	37,44	88	568	562	578

Figura 3.16. Confronto tra le diverse resistenze calcolate con i metodi MBT, CC e MCC.

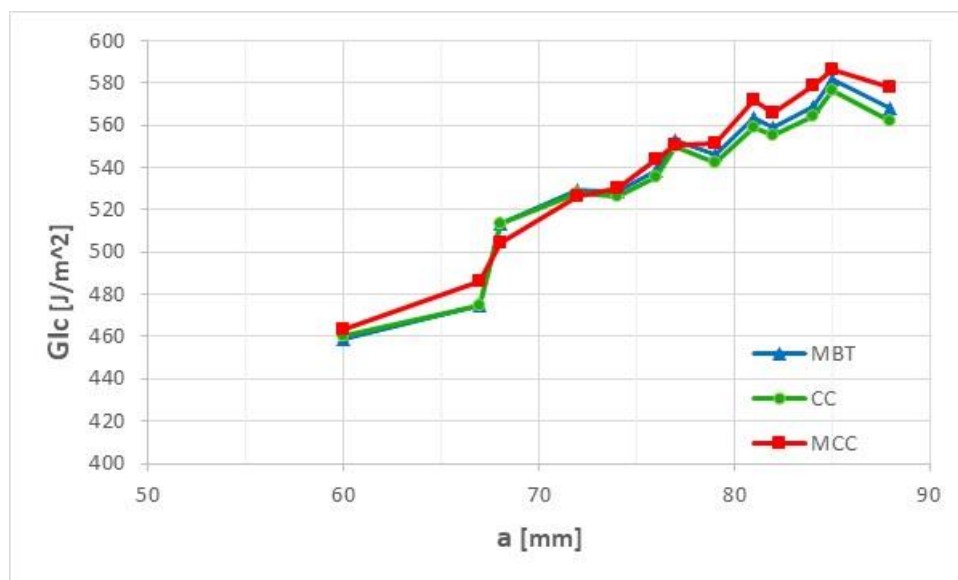


Figura 3.17. Diagramma  $a - G_{Ic}$  del provino DCB 1, confronto grafico tra le resistenze calcolate.

Confrontando fra loro i risultati della resistenza a Modo I ottenuta con i tre metodi, si può notare come la differenza sia minima. Dal momento che tutti e 3 i metodi forniscono valori simili, per ragioni di comodità computazionale si potrebbe utilizzare solamente la MBT.

Tale procedimento viene reiterato per tutti i provini presi in esame, dalle caratteristiche geometriche riassunte come segue:

### DCB 2

Dimensioni [mm]	
Lunghezza (L):	160
Larghezza (b):	20,24
Altezza (h):	3,79
a0:	60

Valori aggiuntivi	
E11 [Mpa]:	90000
G1c [J/m <sup>2</sup> ):	470
d_a [mm]:	1
Pmax [N]:	52,25

### DCB 3

Dimensioni [mm]	
Lunghezza (L):	160
Larghezza (b):	20,04
Altezza (h):	3,89
a0:	60

Valori aggiuntivi	
E11 [Mpa]:	90000
G1c [J/m <sup>2</sup> ):	470
d_a [mm]:	1
Pmax [N]:	53,79

### DCB 4

Dimensioni [mm]	
Lunghezza (L):	160
Larghezza (b):	20,26
Altezza (h):	3,92
a0:	60

Valori aggiuntivi	
E11 [Mpa]:	130000
G1c [J/m <sup>2</sup> ):	470
d_a [mm]:	1
Pmax [N]:	66,12



## DCB 5

### Dimensioni [mm]

Lunghezza (L):	160
Larghezza (b):	20,21
Altezza (h):	3,88
a0:	59

### Valori aggiuntivi

E11 [Mpa]:	90000
G1c [J/m <sup>2</sup> ]:	470
d_a [mm]:	1
Pmax [N]:	54,95

## DCB 6

### Dimensioni [mm]

Lunghezza (L):	160
Larghezza (b):	20,24
Altezza (h):	3,72
a0:	60

### Valori aggiuntivi

E11 [Mpa]:	90000
G1c [J/m <sup>2</sup> ]:	470
d_a [mm]:	1
Pmax [N]:	52,25

Di seguito invece vengono rappresentati in tabelle i valori delle resistenze di ogni provino calcolati con i tre metodi:

DCB 1				DCB 2			
Cricca a [mm]	Glc [J/m <sup>2</sup> ]			Cricca a [mm]	Glc [J/m <sup>2</sup> ]		
	MBT	CC	MCC		MBT	CC	MCC
60				60			
60	459	461	463	60	458	460	458
67	475	475	486	69	454	454	458
68	514	513	504	76	440	439	444
72	529	528	526	81	445	443	450
74	528	526	530	86	436	434	445
76	538	536	544	88	453	450	459
77	553	550	550	90	454	451	457
79	546	542	552	92	451	448	454
81	563	559	572	94	469	466	467
82	559	555	566	98	467	463	470
84	569	564	579	100	455	451	458
85	582	577	586	102	445	441	450
88	568	562	578	106	430	426	443

DCB 3				DCB 4			
Cricca a [mm]	Glc [J/m <sup>2</sup> ]			Cricca a [mm]	Glc [J/m <sup>2</sup> ]		
	MBT	CC	MCC		MBT	CC	MCC
60				60			
60	390	399	390	60,0	400	413	402
64	390	396	386	65,0	419	428	419
66	378	382	381	68,0	436	442	436
69	408	409	409	73,0	449	451	455
73	421	420	426	76,0	461	461	469
76	426	423	431	79,0	477	474	484
79	442	436	445	84,0	470	464	479
83	449	441	452	88,0	457	448	463
87	455	445	462	90,0	460	450	463
89	478	466	485	93,0	466	454	469
91	490	477	495	97,0	452	438	458
94	502	486	503	98,0	456	442	461
97	522	505	524	100,0	456	441	460

DCB 5				DCB 6			
Cricca a [mm]	Glc [J/m <sup>2</sup> ]			Cricca a [mm]	Glc [J/m <sup>2</sup> ]		
	MBT	CC	MCC		MBT	CC	MCC
59				60			
59,0	462	472	468	60,0	423	430	428
68,0	441	445	443	66,5	441	445	442
74,0	435	436	438	70,0	448	450	444
81,0	399	397	405	72,0	451	452	451
82,0	399	397	403	74,0	442	441	452
84,0	420	417	425	77,0	447	445	455
88,0	405	401	413	79,0	464	461	471
90,0	415	410	420	82,5	466	462	468
92,0	419	414	424	85,0	480	475	484
93,0	426	420	431	88,0	486	479	492
94,0	428	422	432	90,0	474	467	475
96,0	428	421	435	94,0	475	466	483
98,0	409	402	414	97,0	473	464	480

Per ogni provino è stato necessario calcolare ed applicare ai risultati finali il parametro correttivo  $N$ , mentre al contrario ciò non è stato necessario per il parametro  $F$ .

Il provino DCB 4 presentava un valore del modulo elastico molto superiore rispetto agli altri provini, ma dal momento che i risultati ottenuti erano in linea con quelli di altri provini con lunghezza di cricca simile, si conclude che esso non influisca in maniera significativa sulla resistenza.

Ad influire in maniera significativa è la larghezza del provino  $b$ : sia il DCB 1 che il DCB 3 sono quelli che presentano le resistenze più alte rispetto agli altri, e quelli che allo stesso tempo hanno larghezza inferiore. Da ciò si deduce che esso sia il parametro più influente nella determinazione della resistenza a delaminazione di tipo I.

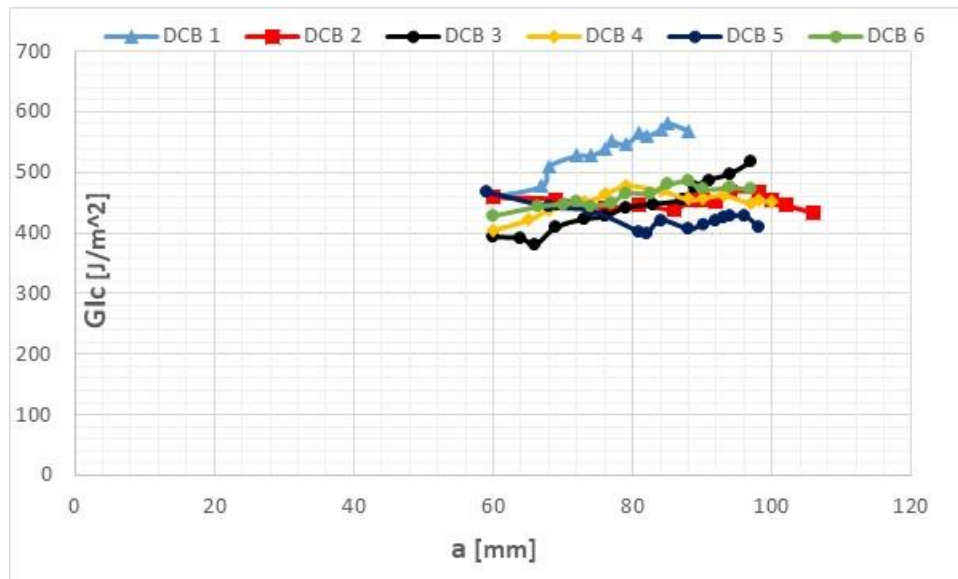


Figura 3.19. Confronto tra i valori medi delle resistenze a Modo I dei provini.

Calcolando i valori medi della resistenza a Modo I per ogni lunghezza di delaminazione  $a$  di ogni provino, si nota da un confronto grafico come i valori siano raggruppati all'interno di una fascia. Dato che tutti i provini sono stati ricavati dalla medesima lastra, ciò indica che i dati ottenuti dall'analisi sperimentale possono essere impiegati in un ambiente a elementi finiti per la valutazione della resistenza a Modo I di laminati compositi. Eventuali fluttuazioni dalla fascia (come il provino DCB 1) possono essere viste come provini intagliati da zone con un diverso rapporto fibra/matrice rispetto alle altre.

Ora verranno invece presentati dei calcoli e dei confronti tra la teoria classica e le teorie di Kanninen e Williams. L'obiettivo è quello di cercare di evidenziare l'entità della differenza tra il modello classico e più semplice, e i modelli che tengono conto di forze non considerate dalla teoria classica. Per un rapido confronto, viene ora riportata la tabella DCB 1 con i valori dei dati principali. Per evitare ripetizioni di dati e tabelle, per i restanti provini verranno riportati i soli diagrammi di confronto tra i diversi metodi.

Displacement $\delta$ [mm]	Carico P [N]	Cricca a [mm]	$G_I$ [J/m <sup>2</sup> ]		
			MBT	CC	MCC
0,00	0,00	60			
8,00	46,97	60	459	461	463
9,89	43,93	67	475	475	486
11,34	42,29	68	514	513	504
12,65	41,52	72	529	528	526
13,16	41,02	74	528	526	530
13,88	40,81	76	538	536	544
14,79	40,04	77	553	550	550
15,13	39,74	79	546	542	552
16,09	39,73	81	563	559	572
16,51	39,05	82	559	555	566
17,40	38,86	84	569	564	579
18,37	38,40	85	582	577	586
19,23	37,44	88	568	562	578

### DCB 1

Partendo con il metodo classico si applica il sistema di formule (3.9) e si ottiene  $\delta$ , quindi si procede al calcolo della  $G_I$  usando la formula (3.6):

P [N]	a [mm]	$\delta$ [mm]	$G_I$ [J/m <sup>2</sup> ]
0	0	0	
46,97	60	8,11	492
43,93	67	10,57	536
42,29	68	10,63	512
41,52	72	12,39	553
41,02	74	13,29	570
40,81	76	14,33	595
40,04	77	14,62	588
39,74	79	15,67	610
39,73	81	16,89	641
39,05	82	17,22	635
38,86	84	18,42	659
38,40	85	18,86	659
37,44	88	20,40	672

I risultati di  $\delta$  ottenuti con il metodo classico sono molto simili a quelli ottenuti sperimentalmente, mentre i valori calcolati di  $G_I$  risultano molto più grandi di quelli calcolati con i metodi MBT, CC e MCC.

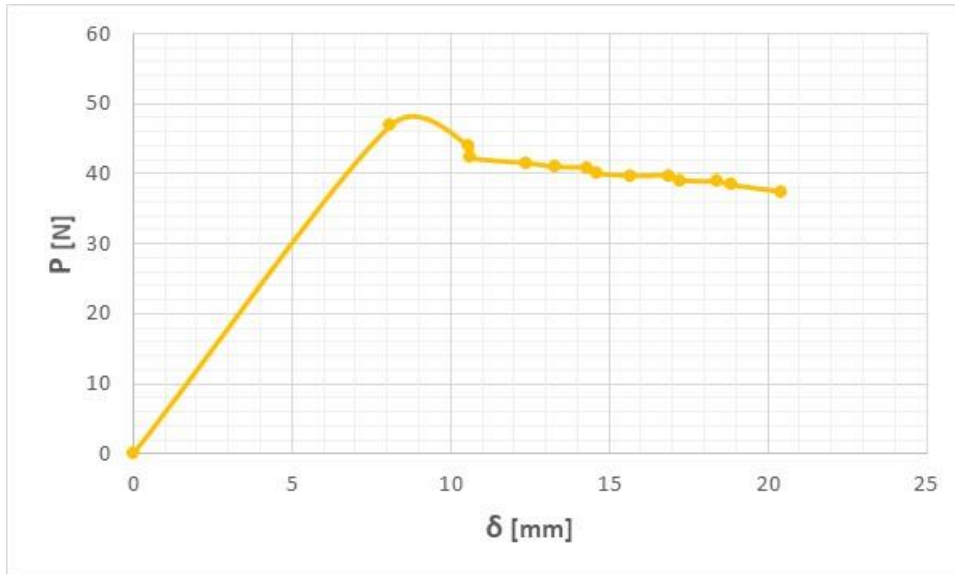


Figura 3.20. Diagramma  $\delta - P$  del modello classico applicato al provino DCB 1.

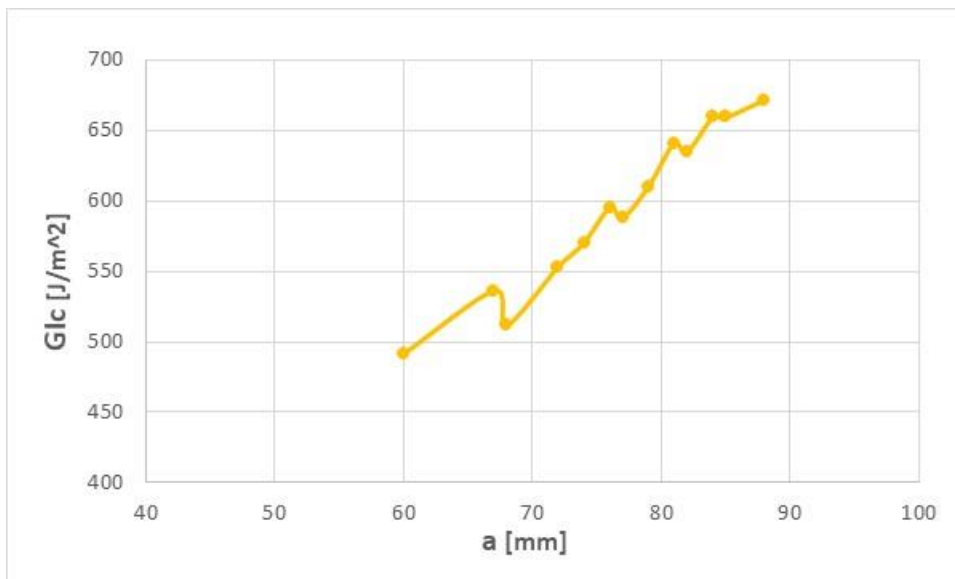


Figura 3.21. Diagramma  $a - G_{1c}$  del modello classico applicato al provino DCB 1.

Per il metodo di Kanninen invece, si è applicata l'equazione (3.32) per il calcolo di  $\delta$ , per poi usare le equazioni del metodo classico per il calcolo di  $G_{1c}$ .

P [N]	a [mm]	$\delta$ [mm]	$G_I$ [J/m <sup>2</sup> ]
0	0	0	
46,97	60	4,26177	491,51016
43,93	67	5,52183	536,113951
42,29	68	5,55375	511,784634
41,52	72	6,45817	553,251889
41,02	74	6,91851	570,28356
40,81	76	7,44838	595,347792
40,04	77	7,59597	588,222852
39,74	79	8,13483	610,051791
39,73	81	8,75876	641,095885
39,05	82	8,92815	634,791126
38,86	84	9,54118	659,468101
38,40	85	9,76508	659,387531
37,44	88	10,55170	671,749016

Dato che il metodo classico non impiega  $\delta$  nel calcolo di  $G_I$ , i valori di quest'ultima sono ovviamente uguali a quelli del metodo classico. Ciò in cui differisce sono i valori calcolati di  $\delta$ , insolitamente bassi rispetto a quelli calcolati con gli altri metodi e quelli ottenuti sperimentalmente.

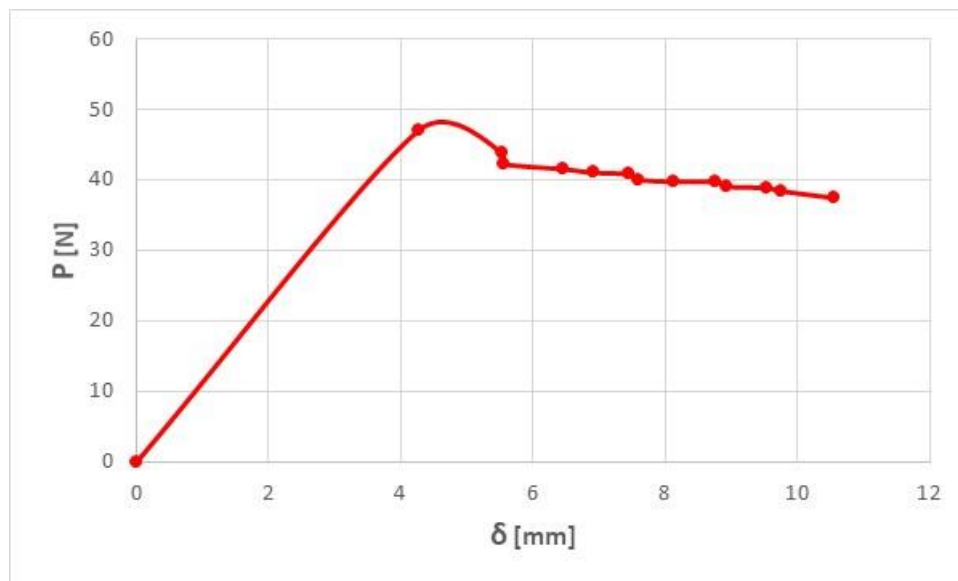


Figura 3.22. Diagramma  $\delta - P$  del provino DCB 1 calcolato con metodo classico.

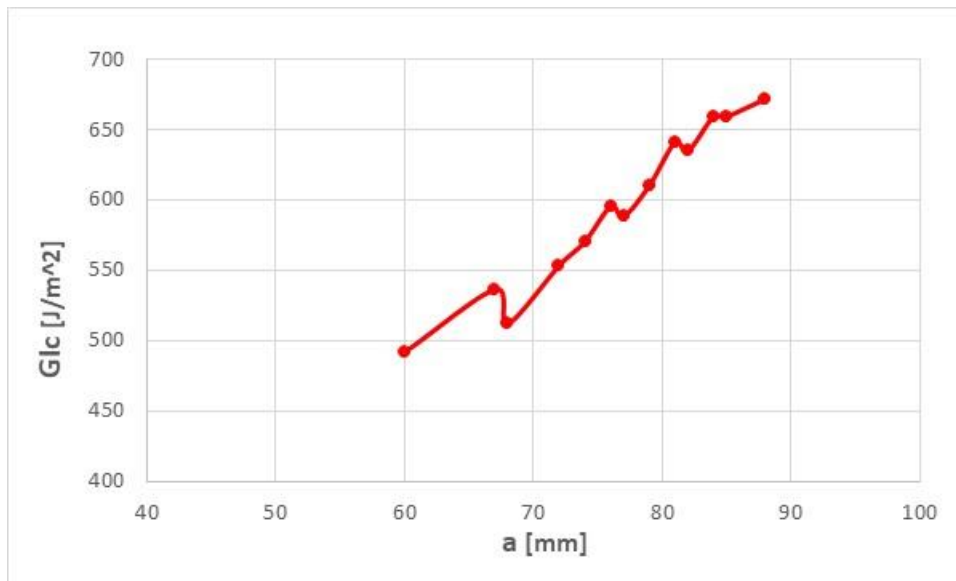


Figura 3.23. Diagramma  $a - G_{Ic}$  del provino DCB 1 calcolato con metodo di Kanninen.

Per il metodo di Williams si sono applicate le equazioni (3.33), utilizzando una  $E_{22} = 900MPa$  e  $G_{12} = 4680 MPa$ .

a [mm]	P [N]	a1 [mm]	$\delta$ [mm]	$G_i$ [J/m^2]
0	0	0	0	0
60	46,97	63,377433	8,11274	548,4023217
67	43,93	70,377433	12,2448248	591,5266884
68	42,29	71,377433	12,29747764	563,8859377
72	41,52	75,377433	14,22170102	606,3740341
74	41,02	77,377433	15,19690744	623,5281216
76	40,81	79,377433	16,32155339	649,4379454
77	40,04	80,377433	16,62574732	640,9567175
79	39,74	82,377433	17,76558792	663,3290698
81	39,73	84,377433	19,08771584	695,6736704
82	39,05	85,377433	19,43700779	688,1598417
84	38,86	87,377433	20,73070228	713,565398
85	38,40	88,377433	21,19698767	712,8294638
88	37,44	91,377433	22,84211255	724,3018579

I risultati ottenuti mostrano valori di  $\delta$  molto vicini a quelli trovati sperimentalmente, e valori di  $G_I$  più alti rispetto a quelli ottenuti sperimentalmente.



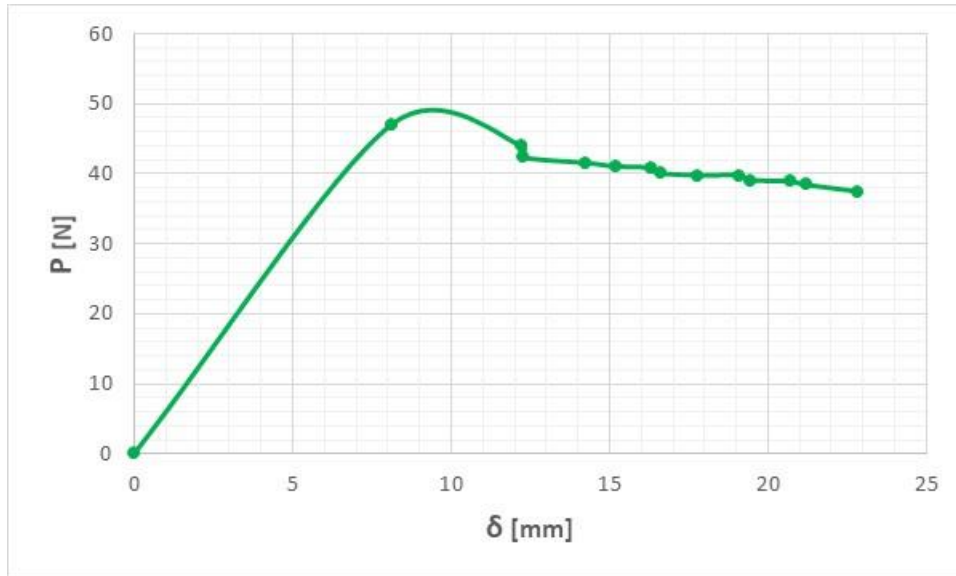


Figura 3.24. Diagramma  $\delta - P$  del provino DCB 1 calcolato con metodo di Williams.

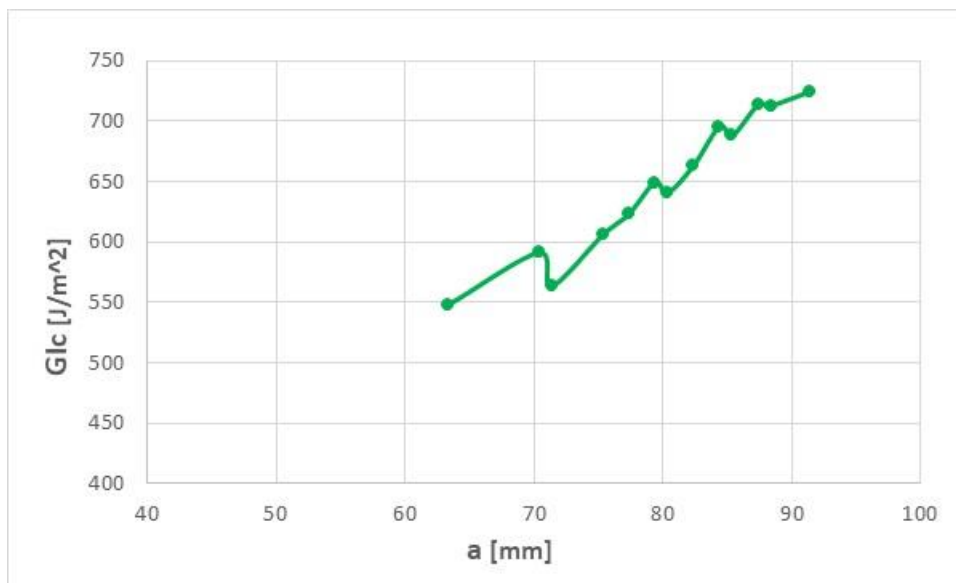


Figura 3.25. Diagramma  $a - G_{Ic}$  del provino DCB 1 calcolato con metodo di Williams.

Come ultimo passo, i grafici ottenuti finora vengono confrontati fra loro per una migliore valutazione. Nei grafici  $G_{Ic} - a$  i dati ottenuti dalla teoria classica appaiono perfettamente sovrapposti a quelli ottenuti con Kanninen (dato che  $\delta$  non compare nella formula per il calcolo della resistenza), pertanto verranno visualizzati solo quelli ottenuti con la teoria classica.

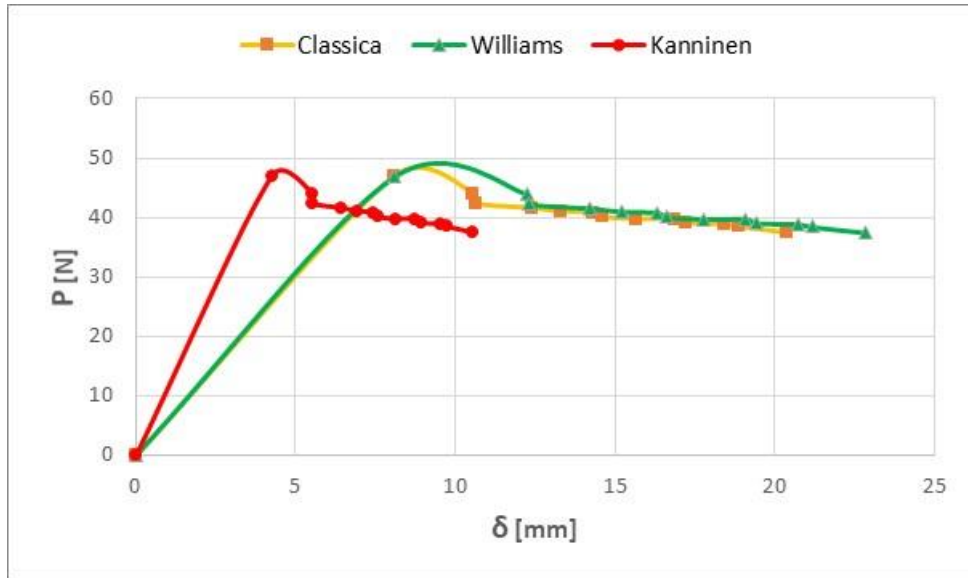


Figura 3.26. Diagramma comparativo  $\delta - P$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 1.

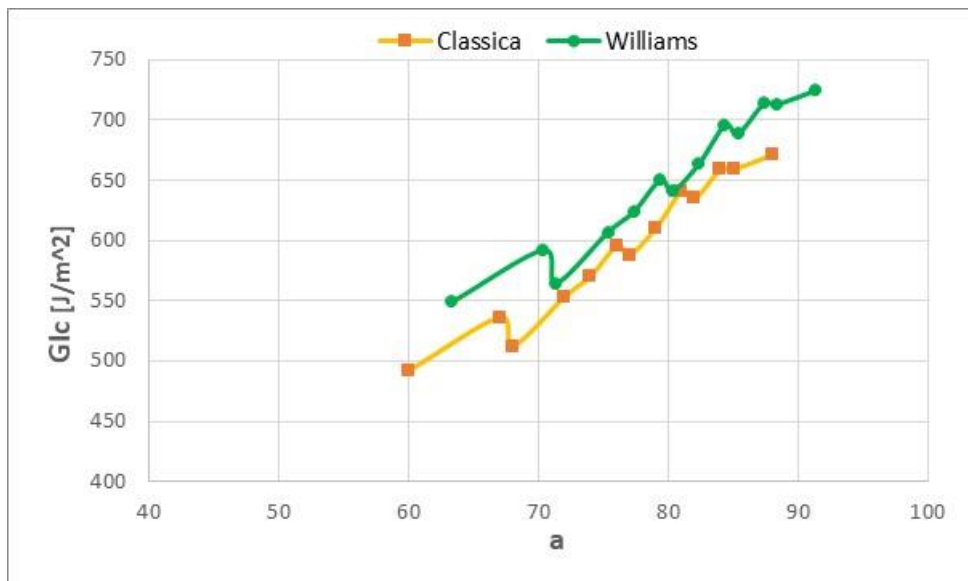


Figura 3.27. Diagramma comparativo  $a - G_{Ic}$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 1.

Di seguito verranno presentati i diagrammi degli altri provini DCB:

## DCB 2

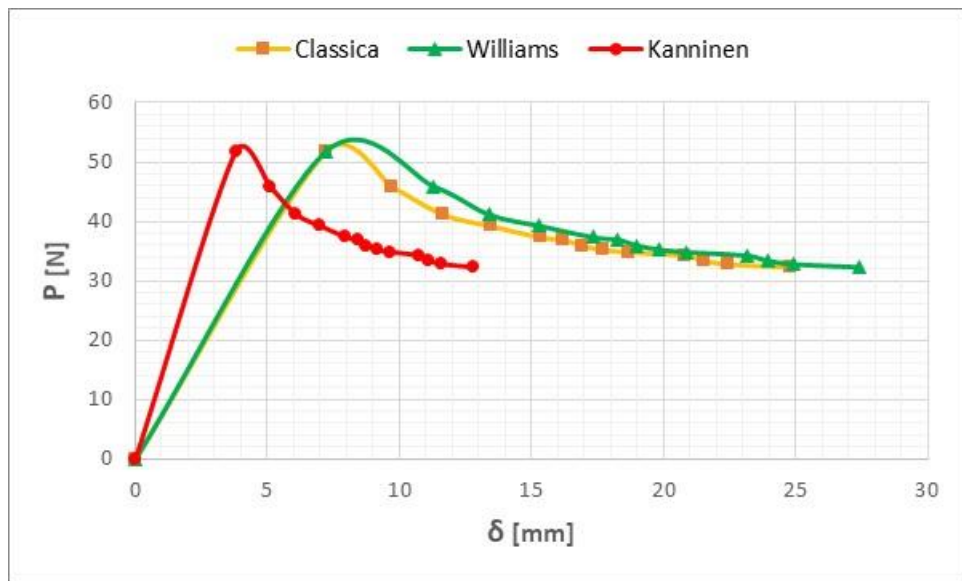


Figura 3.28. Diagramma comparativo  $\delta - P$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 2.

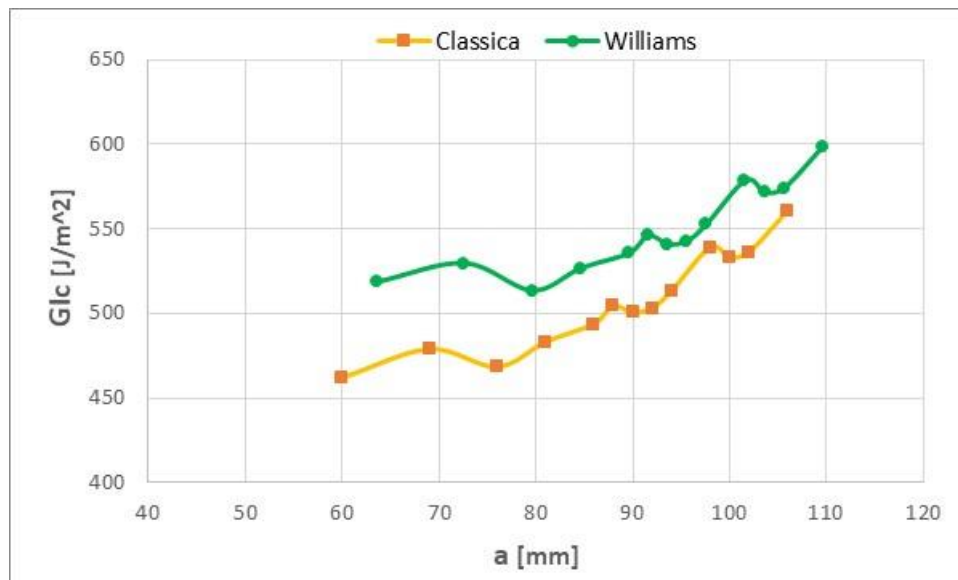


Figura 3.29. Diagramma comparativo  $a-G_{Ic}$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 2.

### DCB 3

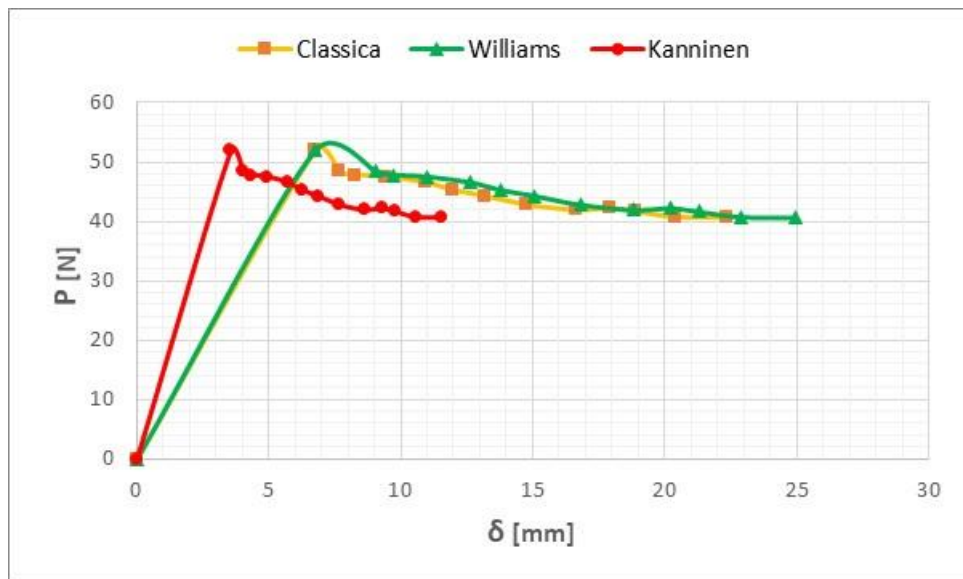


Figura 3.30. Diagramma comparativo  $\delta - P$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 3.

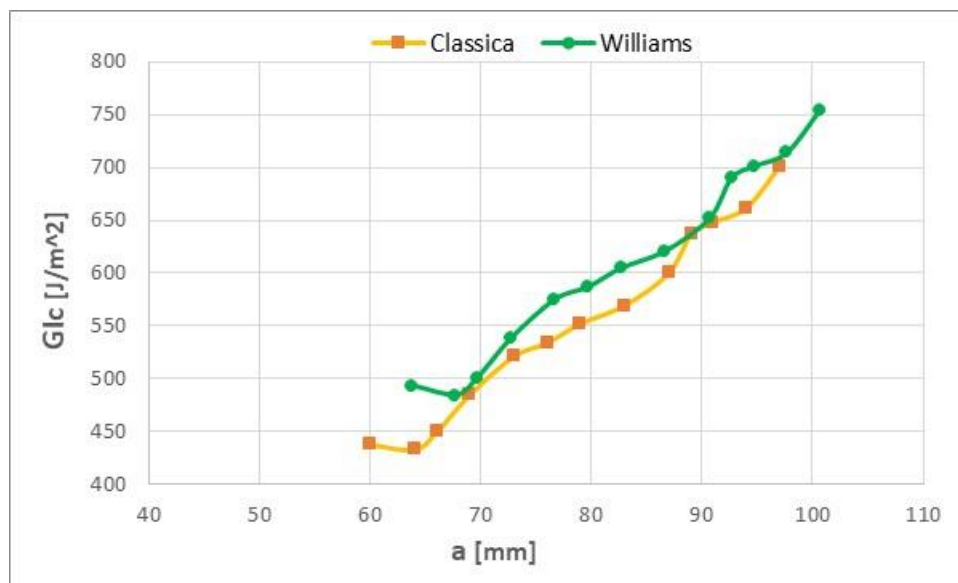


Figura 3.31. Diagramma comparativo  $a - G_{Ic}$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 3.

## DCB 4

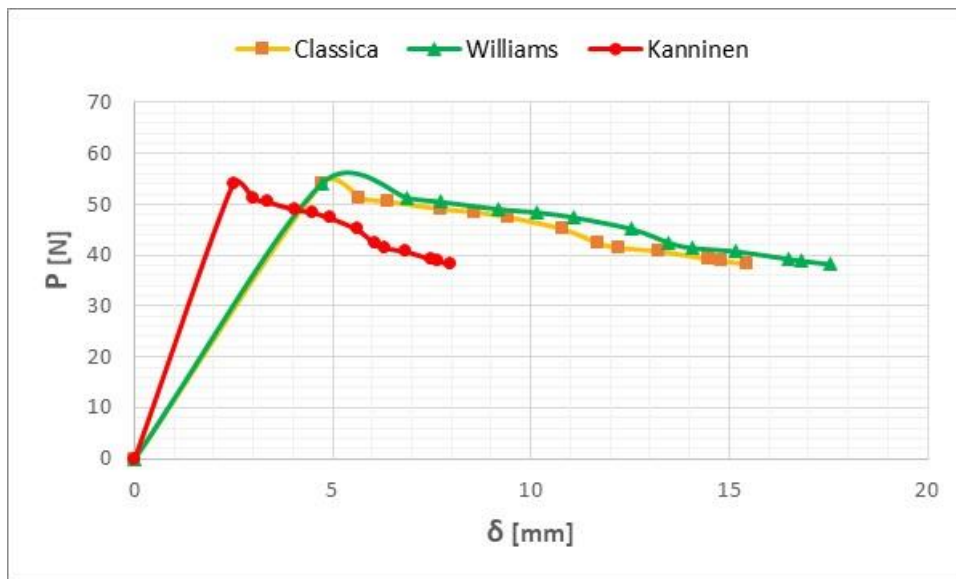


Figura 3.32. Diagramma comparativo  $\delta - P$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 4.

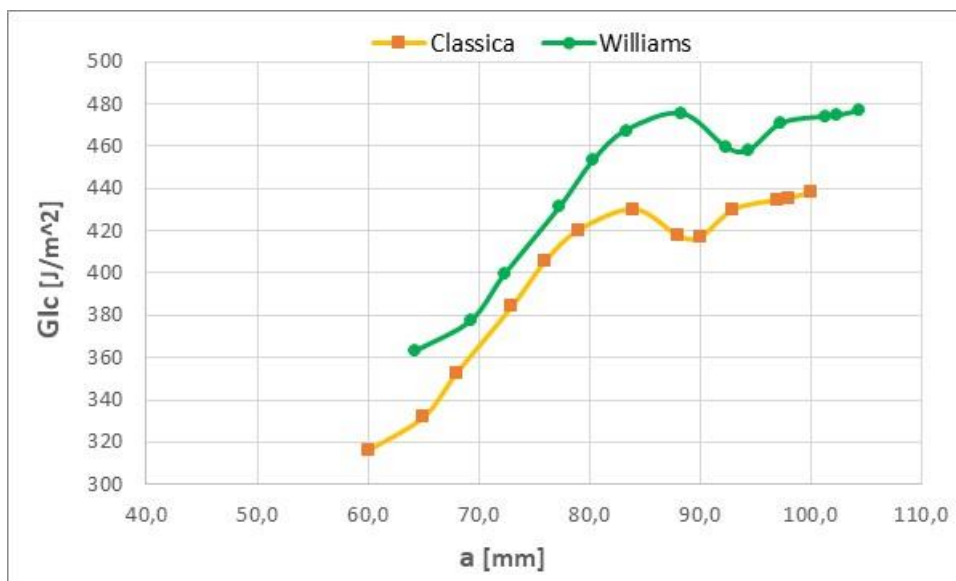


Figura 3.33. Diagramma comparativo  $a - G_{Ic}$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 4.

## DCB 5

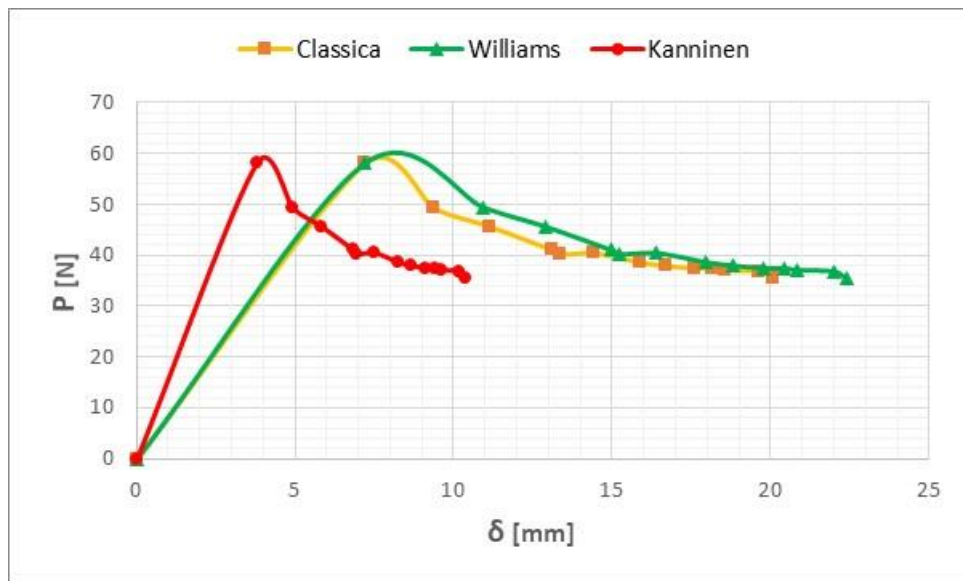


Figura 3.34. Diagramma comparativo  $\delta - P$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 5.

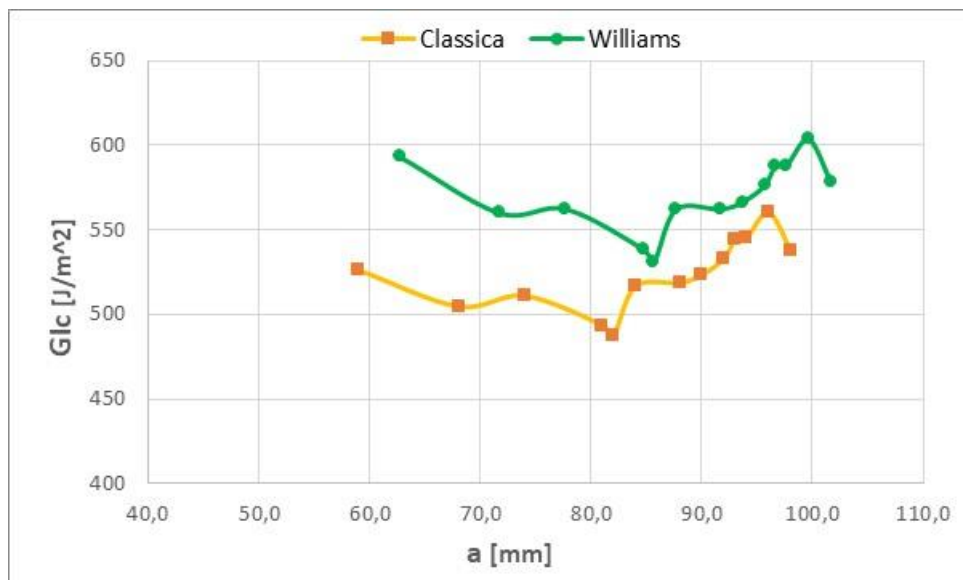


Figura 3.35. Diagramma comparativo  $a - G_{lc}$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 5.

## DCB 6

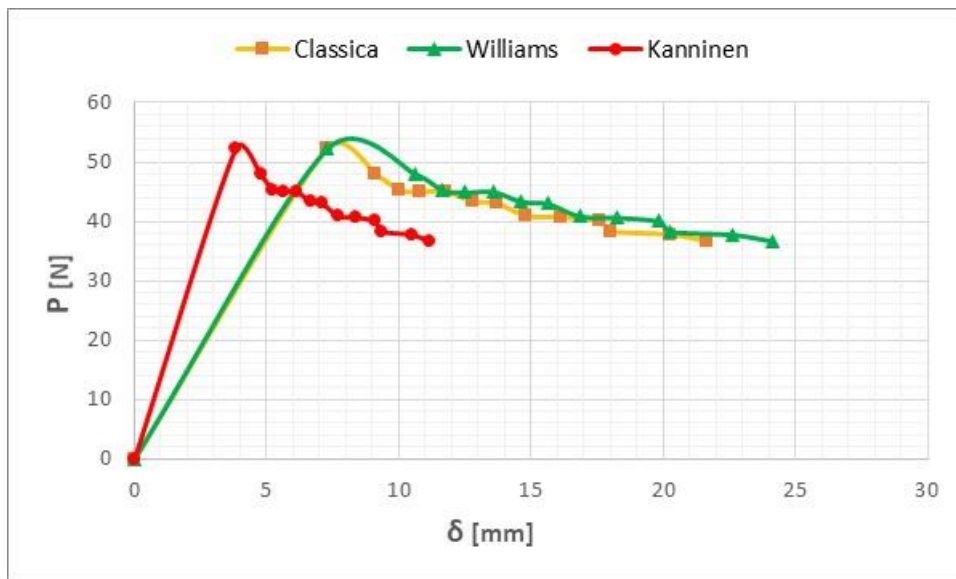


Figura 3.36. Diagramma comparativo  $\delta - P$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 6.

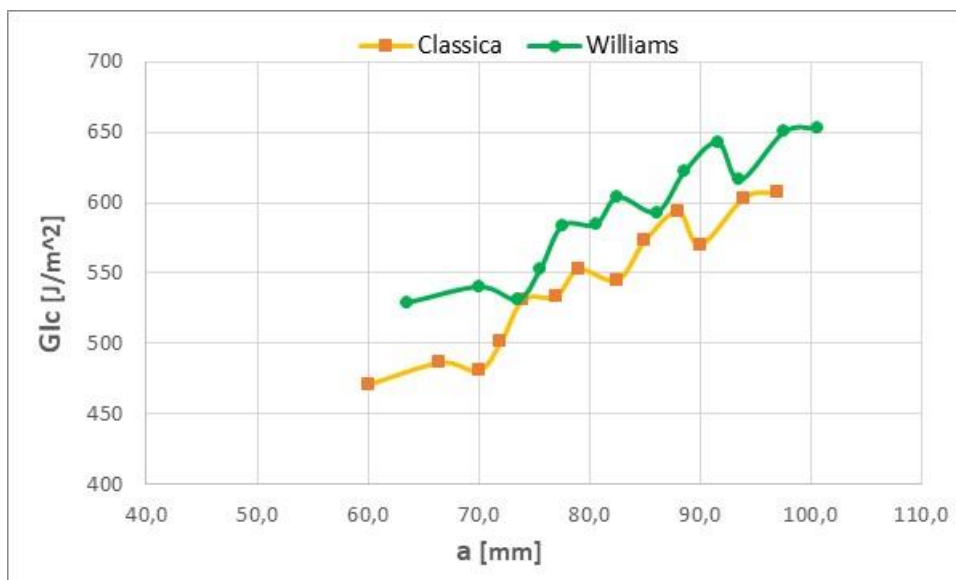


Figura 3.37. Diagramma comparativo  $a - G_{Ic}$  fra i tre metodi applicati al provino DCB 6.

Dal confronto tra i vari metodi analitici nel grafico  $\delta - P$  emerge come il metodo di Kanninen non fornisca risultati in linea né con gli altri metodi né con quelli sperimentali, in quanto i valori di  $\delta$  sono di molto inferiori. I valori di  $\delta$  calcolati con metodo classico e di Williams sono invece molto vicini a quelli sperimentali. Considerando invece la resistenza a delaminazione, si nota come i 3 metodi forniscano in generale valori molto più alti di quelli sperimentali, con il metodo di Williams che mostra i valori più elevati. Alla luce di ciò si trae la conclusione che i metodi sperimentali siano quelli che offrono la precisione migliore per il calcolo della resistenza.



## Capitolo 4: Modo II

### 4.1: Le origini: formulazione classica semplificata

Come il test DCB per il Modo I, anche il Modo II possiede un test per la determinazione della resistenza  $G_{IIc}$  dei materiali compositi unidirezionali chiamato *End Notched Flexure* (ENF). In tale prova, normata dall'ASTM solo nel 2014 il provino preso in esame viene posizionato su due perni cilindrici rigidi, mentre un terzo perno preme sulla parte superiore. Si tratta essenzialmente di una prova di flessione di una trave su due appoggi, ma con la sostanziale differenza di avere un estremo intagliato.

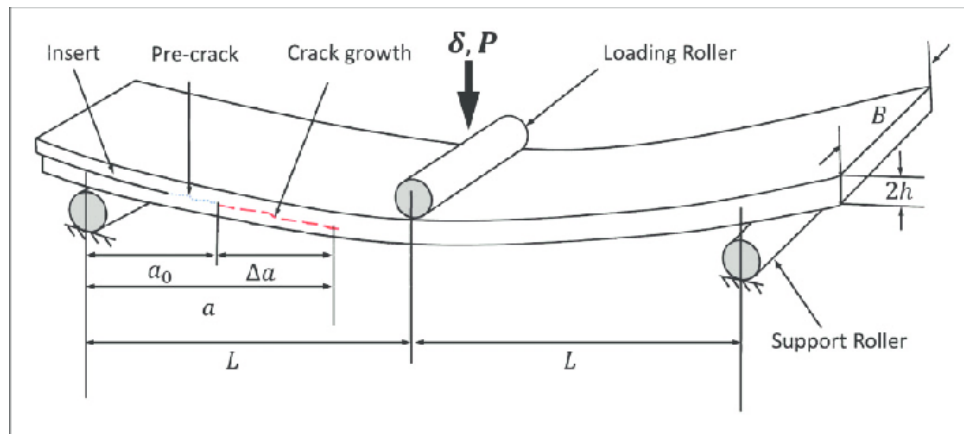


Figura 4.1. Schematizzazione della prova ENF.

Nonostante la prova sia regolamentata dalla normativa permangono tutt'ora alcune problematiche, la principale delle quali, come già affermato, è la misura dell'esatta estensione della delaminazione  $a$ . Dato che l'avanzamento della delaminazione è da imputare al collegamento, raggiunto un certo valore del carico, tra le cricche (inclinate di  $45^\circ$  rispetto al piano) è assai difficile distinguere la posizione del fronte di delaminazione. Inoltre, il contatto tra le lamine genera attrito durante tutta la durata della prova, rendendo difficoltosa la determinazione dell'energia di frattura  $G_{IIc}$ . Un'altra criticità della prova risiede nel fatto che, in controllo di spostamento, la cricca si propaga in maniera stabile solo se  $a \geq \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0,7L$  e quindi è assai probabile che i risultati finali siano disturbati da tale effetto.

La creazione della zona delaminata segue le stesse procedure già viste per la prova DCB, ossia l'inserimento in mezzo agli strati sovrapposti di materiale fibroso di un inserto polimerico non adesivo. Per quanto riguarda la trattazione classica del problema, si procede in maniera simile a quanto visto con il test DCB. Partendo dalla cedevolezza  $C$ , essa può essere ricavata dalla bibliografia come:

$$C = \frac{2L^3 + 3a^3}{96EI} \quad (4.34)$$

Per cui dall'equazione (1.7):

$$\delta = \frac{(2L^3 + 3a^3)P}{96EI} \quad (4.35)$$

dove  $P$  e  $\delta$  sono carico e spostamento in mezzeria. Tale espressione per la fase elastica in cui  $a = a_0$  è:

$$\delta = \frac{(2L^3 + 3a_0^3)P}{96EI} \quad (4.36)$$

Utilizzando l'equazione (1.9) e (4.34) si ottiene l'espressione dell'energia di delaminazione:

$$G_{IIc} = \frac{3P^2 a^2}{64BEI} \quad (4.37)$$

Considerando la condizione di delaminazione:

$$G_{IIc} = G_{II} \quad (4.38)$$

e mettendola a sistema con le espressioni (4.35) e (4.37) si ottiene per la fase in cui  $a < L$ :

$$\delta = \frac{P}{96EI} \left[ \frac{(64BEIG_{IIc})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}P^3} + 2L^3 \right] \quad (4.39)$$

Per la fase in cui  $a > L$  invece:

$$\delta = \frac{P}{96EI} \left[ 8L^3 - \frac{(64BEIG_{IIc})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}P^3} \right] \quad (4.40)$$

L'inflessione in mezzeria corrispondente ad una completa delaminazione del provino vale:

$$\delta = \frac{PL^3}{12EI} \quad (4.41)$$

È possibile inoltre determinare il carico massimo  $P_{max}$  che si sviluppa durante la prova mettendo a sistema le equazioni (4.36) e (4.39):

$$P_{max} = \sqrt{\frac{64BEIG_{IIc}}{3a_0^2}} \quad (4.42)$$

## 4.2: Test ENF con modelli avanzati: Kanninen

La soluzione di Kanninen riprende la soluzione adottata nel 1986 da Reeder e Crews per il calcolo della componente di Modo II nel test MMB, e prevede l'aggiunta in termini energetici del contributo delle deformazioni dovute all'effetto di taglio.

$$G_{II} = \frac{3P^2 a^2}{64BEI} \left[ 1 + \frac{2IE_{11}}{G_{13}A_* a^2} \right] \quad (4.43)$$

Tuttavia, data la snellezza dei provini utilizzati la componente di taglio è trascurabile per cui si ritiene ugualmente valida la soluzione classica.

## 4.3: Test ENF con modelli avanzati: Williams

Così come per il test DCB, anche per la prova ENF la soluzione classica viene migliorata aumentando la reale lunghezza di cricca  $a$  di una determinata quantità  $a\chi_{II}$ . Williams e Wang stabilirono che per il parametro correttivo per il Modo II,  $\chi_{II}$ , fosse una frazione di quello già calcolato per il Modo I,  $\chi_I$ , con l'equazione (3.33):

$$\begin{aligned} \chi_{II} &= 0,42\chi_I \\ a_{II} &= a + \chi_{II}h \end{aligned} \quad (4.43)$$

Con queste correzioni le equazioni (4.36) e (4.37) diventano:

$$\delta = \frac{(2L^3 + 3a_{II0}^3)P}{96E_{11}I} \quad (4.44)$$

$$G_{II} = \frac{3P^2 a_{II}^2}{64BE_{11}I} \quad (4.45)$$

con  $a_{II0} = a_{II} + \chi_{II}h$ . L'espressione per il carico massimo diventa invece:

$$P_{max} = \sqrt{\frac{64BEIG_{IIc}}{3a_{II0}^2}} \quad (4.46)$$

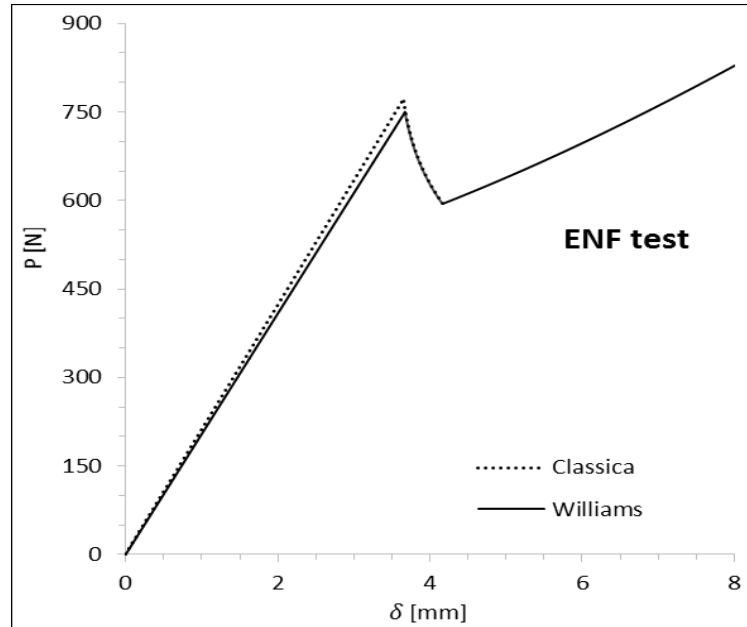


Figura 4.2. Confronto tra metodo classico e metodo di Williams per Modo II.

Come è possibile notare nella figura soprastante, la differenza tra la soluzione classica e quella di Williams è minima, con una lieve differenza solo per la fase elastica, indicando il metodo di Williams come il più preciso dei due.

#### 4.4: Normativa ASTM standard 7905

La normativa ASTM 7905 ha come scopo la definizione di uno standard di esecuzione della prova ENF per la caratterizzazione della resistenza a Modo II,  $G_{IIc}$ , di un materiale composito in condizioni di controllo di spostamento. Il test è limitato all'applicazione solo su materiali compositi con fibre unidirezionali di carbonio o vetro, e matrice polimerica solidificata e fragile. Anche in questo caso il numero di strati di fibra dovrà essere pari, e in mezzo andrà inserito un inserto non adesivo che funga da zona di delaminazione iniziale.



*Figura 4.3. Esempio di prova ENF.*

La crescita della delaminazione non è stabile, quindi vengono presi in considerazione alcuni accorgimenti per minimizzarne l'effetto. L'unico metodo di valutazione numerica accettato per la valutazione dell'energia di frattura è il *Compliance Calibration (CC)*, e prima di essere sottoposti alla prova ogni campione deve essere pre-criccato secondo un determinato metodo. Gli inserti di supporto e di carico possono essere fissi o rotanti, quel che è importante

è che il contatto sia uniforme in ogni punto. Il diametro del rullo di carico dovrà essere compreso tra i 4,7 mm e i 9,6 mm e posizionato in mezzeria, mentre i due rulli di supporto dovranno necessariamente essere uguali e con un diametro compreso tra i 3 mm e i 6,4 mm. Come per il test DCB, anche per il test ENF dovranno essere testati almeno cinque provini perché i risultati abbiano rilevanza statistica, e allo stesso modo i parametri da registrare continuamente a brevi intervalli di tempo sono il carico applicato  $P$  e l'inflessione  $\delta$ . L'espressione generale per il calcolo dell'energia di delaminazione è:

$$G = -\frac{1}{b} \frac{dU}{da}$$

I valori di resistenza saranno calcolati per lo stesso provino sia quando questi è non precriccato (NPC), sia in seguito al pre-criccaggio (PC).

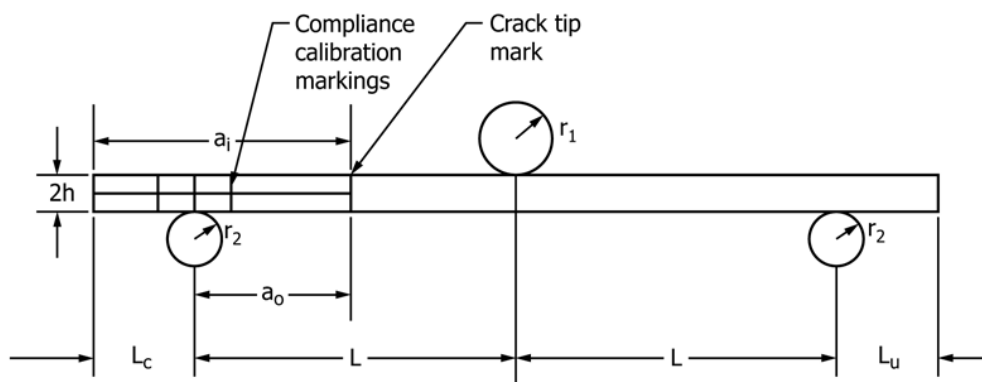


Figura 4.4. Schema di prova ENF.

Partendo dal provino NPC, si posizionano i marcatori sul rullo di sinistra come in figura 4.4 in modo da avere una lunghezza di delaminazione  $a$  prima di 20 mm, e poi riposizionato in modo da averla di 40 mm. Quindi, viene effettuato un ulteriore riposizionamento a 30 mm e si procede caricando il provino fino all'avanzamento della cricca. Il segno a 30 mm è per il test a frattura mentre quelli a 20 mm e 40 mm per il test CC. Prima di effettuare la parte di test PC, le cedevolezza per CC sono calcolate a partire dalle lunghezze a 20 mm e 40 mm. Una volta fatto, il provino viene ricollocato sul segno a 30 mm e si procede con il carico fino all'avanzamento di cricca, poi lo si scarica.

Per la parte di test PC invece, i dati ottenuti dallo scarico del provino NPC vengono utilizzati per il calcolo di  $a_{calc}$  utilizzando il metodo della subsezione, e tale valore viene calcolato a

partire dal precedente indicatore CC, posizionando un marcatore nella nuova posizione. Quindi, tre nuovi marcatori a 20 mm, 30 mm e 40 mm verranno segnati a partire dal marcatore PC della Figura 4.5. Il valore di  $a_{calc}$  è pari a:

$$a_{calc} = \left( \frac{C_u - A}{m} \right)^{1/3}$$

dove  $A$  e  $m$  sono coefficienti ricavabili dal test NPC dalla formula della retta  $C = A + ma^3$ , e  $C_u$  la cedevolezza della linea di scarico del test a frattura NPC. Per la determinazione di  $A$  e  $m$  si procede effettuando la regressione lineare tramite metodo dei minimi quadrati della cedevolezza  $\delta/P$  associata ad ogni lunghezza di cricca. Per le lunghezze a 20 mm e 40 mm vengono presi solo i valori in cui il carico  $P$  è maggiore o uguale a 90 N (valore ritenuto sufficientemente alto da trascurare iniziali effetti di non linearità), mentre per la lunghezza di 30 mm verranno presi i valori del carico  $P$  maggiori o uguali a 90 N e minori o uguali alla metà della forza di picco riscontrata. Quindi, le tre cedevolezza ottenute vengono inserite in un grafico  $C - a^3$ , da cui con le apposite funzioni si calcolano i valori di  $A$  (la pendenza della retta interpolante) e di  $m$  (la pendenza della retta interpolante).

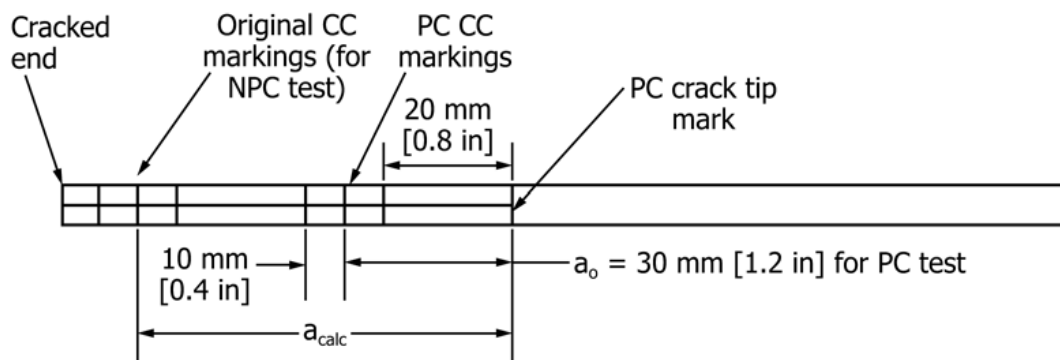


Figura 4.5. Configurazione provino per prove NPC e PC.

Se viene adottato il metodo della subsezione, la stima della resistenza è calcolata come:

$$G_Q = \frac{3mP_{max}^2 a_0^2}{2B}$$

valido sia per il test NPC che PC, e dove  $P_{max}$  rappresenta la forza di picco nel test. Se il valore calcolato è stimato come corretto, allora lo si assume come valido  $G_{IIc} = G_Q$ . Infine, come ultimo passaggio si procede al calcolo della  $\%G_Q$  ottenuta durante le prove CC sia nel test

NPC che in quello PC. Tale calcolo viene impiegato per verificare che la resistenza a Modo II calcolata inizialmente sia valida, e viene considerata valida solo se  $15 \leq \%G_Q \leq 35$ ; se così non è i risultati sono da scartare.  $\%G_Q$  è calcolata come:

$$\%G_Q = \left[ \frac{100(P_j a_j)^2}{(P_{max} a_0)^2} \right]; j = 1, 2$$

dove  $P_{max}$  è presa dal test a frattura e  $P_j$  e  $a_j$  le forze e le lunghezze associate ai due test CC.

#### 4.5: Confronto con dati sperimentali

Nelle seguenti prove sperimentali verranno mostrati i risultati numerici di cinque prove ENF effettuate su cinque provini differenti di materiale composito. Come per i provini DCB, anche questi provini sono stati ricavati dalla stessa lastra di materiale composito e dalla zona più distante possibile dai bordi in modo da avere in tutti lo stesso rapporto fibra matrice, utilizzando 12 pelli in fibra unidirezionale di carbonio per la loro creazione. Le prove sono state svolte attenendosi alla normativa ASTM 7905, e per ognuna è stata valutata la resistenza a delaminazione di tipo II sia per la parte di test NPC che per la parte PC.

Per evitare inutili ripetizioni verrà riportato il procedimento eseguito per un solo provino, mostrando invece per i rimanenti solo i risultati finali.

I parametri dimensionale e i dati aggiuntivi per il provino **ENF 1** sono:

<b>Dimensioni</b>		<b>Dati aggiuntivi</b>	
L [mm]:	160	E11 [MPa]:	105000
b [mm]:	20,201	G2c [J/m <sup>2</sup> ):	1742,69 stimata
2h [mm]:	3,855	d_a [mm]:	1
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico	Pmax [N]:	1017,688 stimata
		E_1f [GPa]:	102954,6

Teoricamente, la massima forza che si dovrebbe sviluppare durante la prova è pari a circa 1018 N. Tale forza  $P_{max}$  è calcolata come:



$$P_{max} = \frac{4}{3} \frac{b}{a_0} \sqrt{G_{IIc} E_{1f} h^3}$$

dove  $E_{1f}$  rappresenta il modulo flessionale del provino, calcolato come:

$$E_{1f} = \frac{L^3}{4Abh^3}$$

Vengono quindi inseriti i dati sperimentali ricavati dalla prova NPC (di seguito verrà mostrata solo una parte della tabella dei dati):

20 mm	$\delta$ [mm]	P [N]	40 mm	$\delta$ [mm]	P [N]	30 mm	$\delta$ [mm]	P [N]
	0,003941	0,494385		-0,00121	-0,08545		0,001729	1,08948
	0,003636	-1,03149		0,001077	0,219727		0,000203	-1,04675
	0,006383	0,189209		-0,00014	0,219727		0,000813	0,479126
	0,005009	-0,42114		0,001077	-0,08545		0,000203	0,784302
	0,004704	0,189209		-0,00045	-0,39063		0,001424	-0,4364
	0,003636	-0,42114		0,000772	-0,08545		0,000508	0,784302
	0,005315	-0,11597		-0,00014	-0,6958		0,000966	1,08948
	0,006383	0,494385		-0,00045	0,219727		0,000356	0,784302
	0,003941	0,494385		0,000162	-0,08545		0,001271	0,784302
	0,003636	0,189209		-0,00381	-1,00098		0,001118	-0,13123
	-0,00949	-0,42114		0,003061	0,524902		0,001881	1,08948
	-0,01391	-0,11597		0,002603	-0,6958		0,002339	0,17395
	0,005315	0,189209		-0,00075	-1,00098		0,001271	-0,74158
	0,00623	0,189209		0,000772	0,219727		0,000661	0,17395
	0,004704	0,189209		0,000772	0,219727		0,001424	-0,13123
	0,002721	-0,72632		0,000467	0,524902		0,001729	1,08948
	0,003178	0,494385		0,00123	0,524902		0,000813	-0,13123
	0,005925	0,189209		-0,00045	-1,9165		0,001271	-0,13123
	0,001958	0,494385		-0,00121	0,219727		0,001576	0,479126
	0,003178	-0,11597		9,16E-06	0,219727		0,000966	-0,13123
	0,001653	-0,72632		9,16E-06	-0,08545		0,001424	-0,74158
	0,004383	0,494385		0,000025	0,219727		0,00041	0,51525

Da cui si ricavano i grafici  $P - \delta$ :

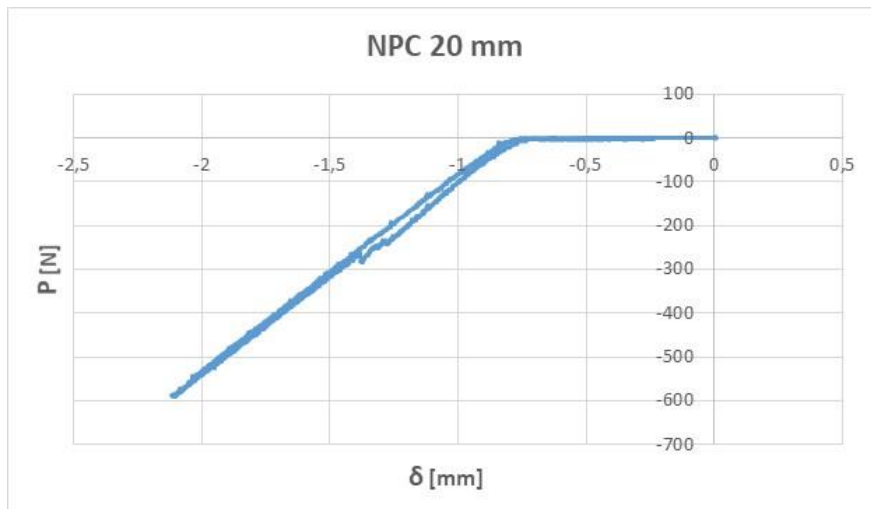


Figura 4.6. Diagramma  $\delta - P$  del test NPC con  $\alpha_0 = 20$  mm effettuato sul provino ENF 1.

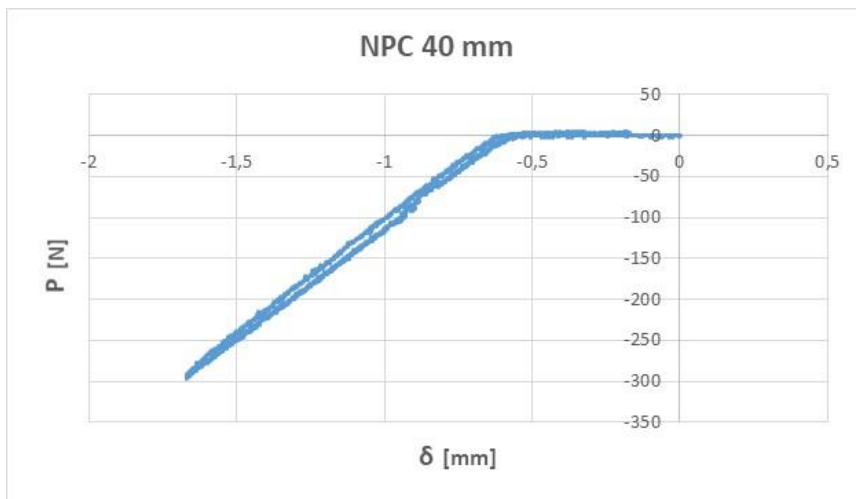


Figura 4.7. Diagramma  $\delta - P$  del test NPC con  $\alpha_0 = 40$  mm effettuato sul provino ENF 1.

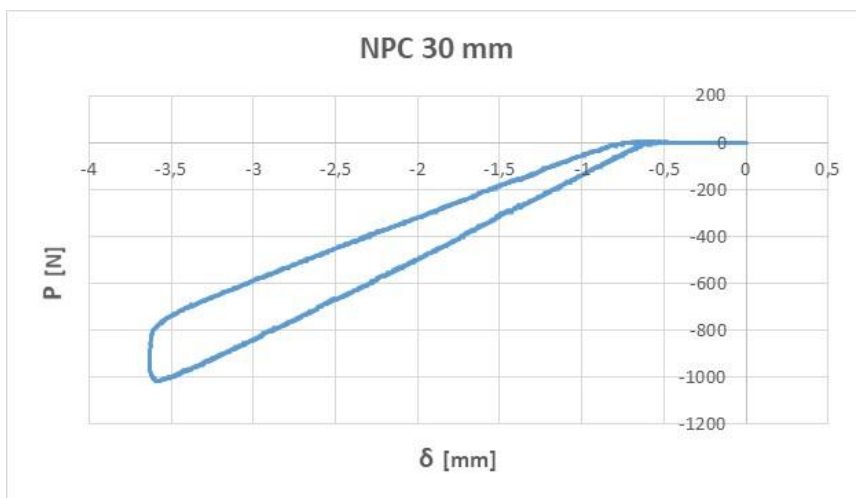


Figura 4.8. Diagramma  $\delta - P$  del test NPC con  $\alpha_0 = 30$  mm effettuato sul provino ENF 1.

A questo punto si procede al calcolo delle cedevolezza di ogni parte di prova, calcolando l'inverso della pendenza solo dei valori maggiori di 90 N per le lunghezze di 20 mm e 40 mm e dei valori maggiori di 90 N e minori della metà della massima forza ottenuta per la lunghezza a 30 mm.

	20	40	30 carico	30scarico
<b>k [N/mm]:</b>	436,328351	270,3433	359,0054	266,1757
<b>C [mm/N]:</b>	0,00229185	0,003699	0,002785	0,003757 <= C_u
<b>Pmax [N]:</b>	591,547	294,885	1018,81	

Ottenute quindi le cedevolezza delle varie prove, si procede a ricavare i parametri  $A$  e  $m$  della retta interpolante data dal grafico  $C - a^3$ :

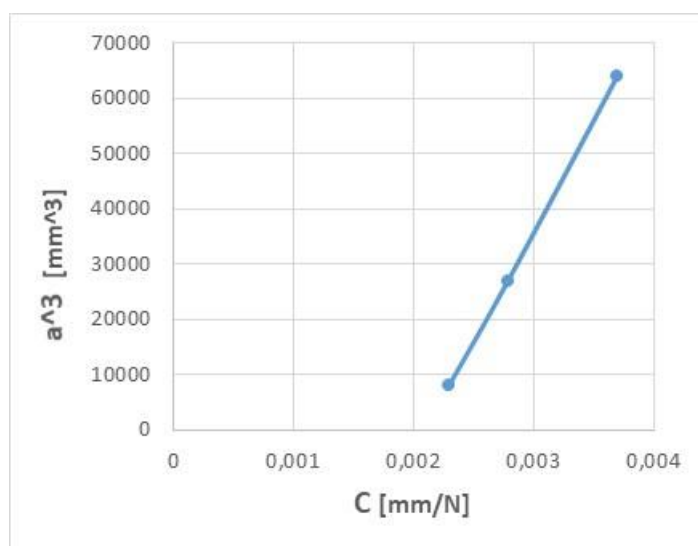


Figura 4.9. Diagramma  $C - a^3$  per la determinazione di  $A$  e  $m$  ricavato dalla prova NPC.

$C = ma^3 + A$ , con:

<b>A</b>	0,002098207
<b>m</b>	2,50677E-08

A questo punto si può procedere con il calcolo di  $a_{calc}$  che è pari a circa 40,45 mm. Quindi è possibile calcolare la resistenza a modo II  $G_Q$  per la prova NPC:

Test NPC	a0 [mm]	P_j [N]	C [mm/N]	Avanzamento cricca	
	20	591,547	0,0022919	a_calc	40,44688267
30	1018,81	0,0027855	C_u	0,003756917	
40	294,885	0,003699			

Adottando il metodo della subsezione, si procede allo stesso modo per la determinazione dei parametri e della resistenza per la parte di prova PC:

Parametri NPC		Gq [J/m <sup>2</sup> ]	
<b>A</b>	0,002098207		1738,852
<b>m</b>	2,50677E-08		

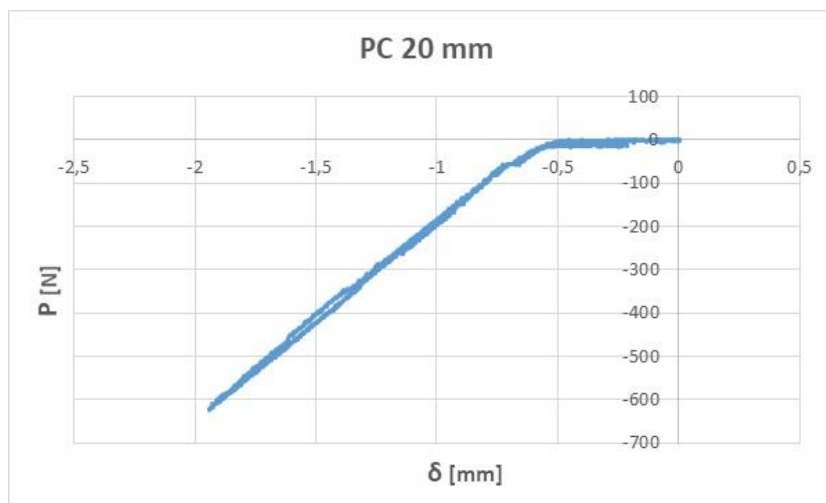


Figura 4.10. Diagramma  $\delta - P$  del test PC con  $\alpha_0 = 20$  mm effettuato sul provino ENF 1.

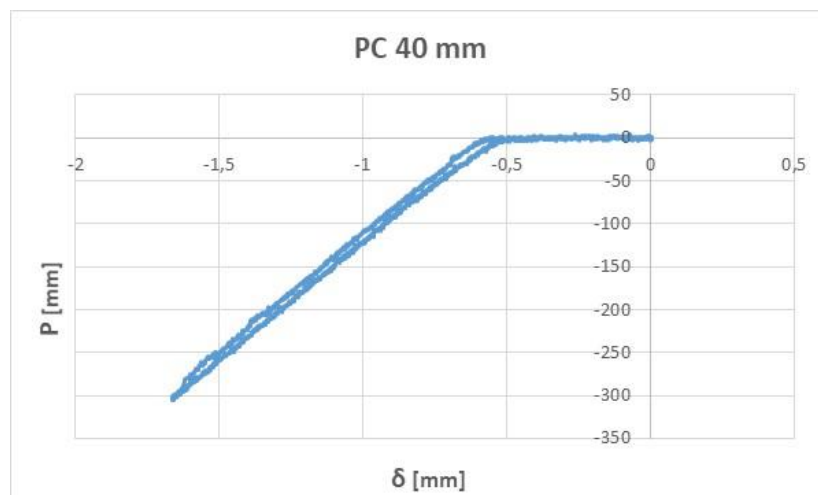


Figura 4.11. Diagramma  $\delta - P$  del test PC con  $\alpha_0 = 40$  mm effettuato sul provino ENF 1.

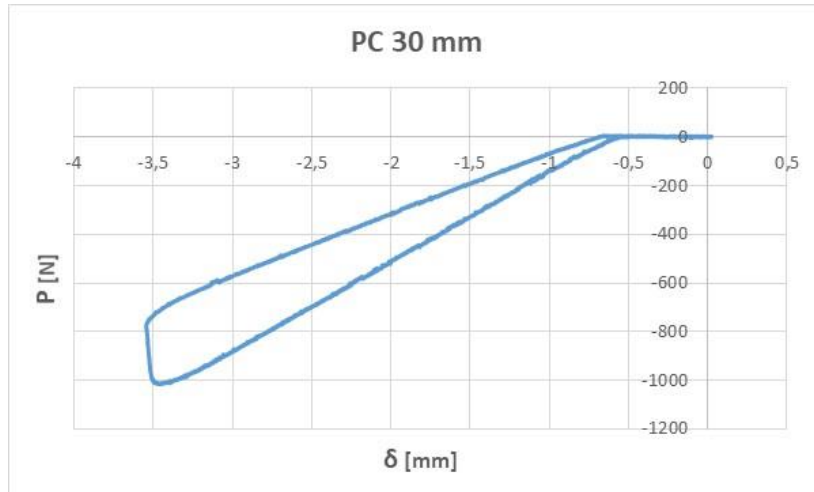


Figura 4.12. Diagramma  $\delta - P$  del test PC con  $a_0 = 30$  mm effettuato sul provino ENF 1.

A questo punto come per la prova NPC si procede al calcolo delle cedevolezza di ogni parte di prova, calcolando anche in questo caso le cedevolezza come l'inverso della pendenza solo dei valori maggiori di 90 N per le lunghezze di 20 mm e 40 mm e dei valori maggiori di 90 N e minori della metà della massima forza ottenuta per la lunghezza a 30 mm.

	20	40	30 carico	30 scarico	
<b>k [N/mm]:</b>	457,1435	276,4522	370,52832	250,54587	
<b>C [mm/N]:</b>	0,002187	0,003617	0,0026988	0,0039913	<b>C_u</b>
<b>Pmax [N]:</b>	623,465	305,045		1013,67	

Ricavando quindi  $A$  e  $m$ :

<b>A</b>	0,001995
<b>m</b>	2,54E-08

Riassumendo:

Test PC	$a_0$ [mm]	$P_j$ [N]	$C$ [mm/N]
Da effettuare	20	623,465	0,0021875
dopo test NPC 30	30	1013,67	0,00269885
	40	305,045	0,00361726

Secondo avanzamento

<b>a_calc</b>	42,81400351
<b>C_u</b>	0,003991285

<b>Gq [J/m<sup>2</sup>]</b>	1746,528
-----------------------------	----------

La forza stimata inizialmente si è rivelata molto simile a quelle raggiunte durante i test NPC e PC. Una volta calcolata  $a_{calc}$  per entrambe le prove, si può procedere a stimare analiticamente l'accrescimento della cricca:

$$a_{c\ tot} = a_{calc\ NPC} + a_{calc\ PC} - a_0$$

che per il primo provino vale

<b>a_c_tot [mm]</b>	59,64
---------------------	-------

Infine, si valuta %G<sub>Q</sub>:

NPC	%G <sub>Q</sub>
a_20	15%
a_40	15%

PC	%G <sub>Q</sub>
a_20	17%
a_40	16%

Quindi entrambi i valori di G<sub>Q</sub> calcolati sono corretti.

Tale procedura viene ripetuta per i restanti quattro provini, le cui caratteristiche principali quali geometria e resistenza a Modo II vengono elencate qui di seguito:

## ENF 2

### Dimensioni

L [mm]:	160
b [mm]:	20,097
h [mm]:	3,927
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico

Test NPC	a0 [mm]	P <sub>j</sub> [N]	C [mm/N]
	20	660,95	0,0021907
	30	1060,01	0,0026619
	40	330,40	0,0035586

<b>G<sub>Q</sub> [J/m<sup>2</sup>]</b>	1841,658
--	----------

Test PC	a0 [mm]	P <sub>j</sub> [N]	C [mm/N]
	20	805,19	0,0020847
	30	1061,84	0,0025813
	40	337,37	0,0032944

### Dati aggiuntivi

E11 [MPa]:	96000
G2c [J/m <sup>2</sup> ]:	1726,806 stimata
d_a [mm]:	1
P <sub>max</sub> [N]:	1035,32 stimata
E <sub>1f</sub> [GPa]:	102781,7

### Avanzamento cricca

<b>a_calc</b>	43,31
<b>C_u</b>	0,003980853

NPC	%G <sub>Q</sub>
a_20	17%
a_40	17%

### Secondo avanzamento

<b>a_calc</b>	46,33
<b>C_u</b>	0,004067608

<b>Gq [J/m<sup>2</sup>]</b>	1611,953
-----------------------------	----------

<b>PC</b>	<b>%Gq</b>
<i>a_20</i>	26%
<i>a_40</i>	18%

*Avanzamento totale cricca*

<b>a_c_tot [mm]</b>	59,64
---------------------	-------

### ENF 3

#### Dimensioni

L [mm]:	160
b [mm]:	20,24
h [mm]:	3,924
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico

#### Dati aggiuntivi

E11 [MPa]:	75220
G2c [J/m <sup>2</sup> ):	1815,728 stimata
d_a [mm]:	1
Pmax [N]:	1086,759 stimata
E_1f [MPa]:	106429,7

Test NPC	a0 [mm]	P_j [N]	C [mm/N]
	20	669,25	0,0021138
	30	1102,65	0,0026236
	40	353,824	0,0035437

*Avanzamento cricca*

<b>a_calc</b>	41,58
<b>C_u</b>	0,003749773

<b>Gq [J/m<sup>2</sup>]</b>	2063,305
-----------------------------	----------

<b>NPC</b>	<b>%Gq</b>
<i>a_20</i>	16%
<i>a_40</i>	18%

Test PC	a0 [mm]	P_j [N]	C [mm/N]
	20	680,72	0,0021564
	30	1000,56	0,0026761
	40	347,82	0,0034858

*Secondo avanzamento*

<b>a_calc</b>	41,32
<b>C_u</b>	0,00365408

<b>Gq [J/m<sup>2</sup>]</b>	1568,152
-----------------------------	----------

<b>PC</b>	<b>%Gq</b>
<i>a_20</i>	21%
<i>a_40</i>	21%

*Avanzamento totale cricca*

<b>a_c_tot [mm]</b>	52,90
---------------------	-------

## ENF 4

### Dimensioni

L [mm]:	160
b [mm]:	20,24
h [mm]:	3,924
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico

Test NPC	a0 [mm]	P <sub>j</sub> [N]	C [mm/N]
	20	917,548	0,00235341
	30	1039,42	0,00276232
	40	339,352	0,00373963

Gq [J/m <sup>2</sup> ]	1800,181
------------------------	----------

Test PC	a0 [mm]	P <sub>j</sub> [N]	C [mm/N]
	20	649,40	0,00228855
	30	1001,18	0,00273089
	40	361,70	0,00375202

Gq [J/m <sup>2</sup> ]	1760,605
------------------------	----------

### Avanzamento totale cricca

a <sub>c_tot</sub> [mm]	51,74
-------------------------	-------

### Dati aggiuntivi

E11 [MPa]:	75220
G2c [J/m <sup>2</sup> ):	1780,393 stimata
d <sub>a</sub> [mm]:	1
P <sub>max</sub> [N]:	1022,539 stimata
E <sub>1f</sub> [MPa]:	96092,85

### Avanzamento cricca

a <sub>calc</sub>	39,77
C <sub>u</sub>	0,003698993

NPC	%Gq
a <sub>20</sub>	35%
a <sub>40</sub>	19%

### Secondo avanzamento

a <sub>calc</sub>	41,97
C <sub>u</sub>	0,004001205

PC	%Gq
a <sub>20</sub>	19%
a <sub>40</sub>	23%

## ENF 5

### Dimensioni

L [mm]:	160
b [mm]:	20,231
h [mm]:	3,574
a0 [mm]:	45 dal rullo di carico

Test NPC	a0 [mm]	P <sub>j</sub> [N]	C [mm/N]
	20	666,05	0,0028557
	30	957,88	0,0034176
	40	333,33	0,0045991

### Dati aggiuntivi

E11 [MPa]:	75220
G2c [J/m <sup>2</sup> ):	1785,553 stimata
d <sub>a</sub> [mm]:	1
P <sub>max</sub> [N]:	618,2028 stimata
E <sub>1f</sub> [MPa]:	104382,7

### Avanzamento cricca

a <sub>calc</sub>	45,26
C <sub>u</sub>	0,005489039

NPC	%Gq
-----	-----



<b>Gq [J/m<sup>2</sup>]</b>	1912,804
-----------------------------	----------

<i>a</i> <sub>20</sub>	21%
<i>a</i> <sub>40</sub>	22%

Test PC	a0 [mm]	P <sub>j</sub> [N]	C [mm/N]
	20	647,40	0,0028707
	30	865,06	0,003444
	40	339,06	0,0047193

<b>Gq [J/m<sup>2</sup>]</b>	1658,30
-----------------------------	---------

*Secondo avanzamento*

<b>a<sub>calc</sub></b>	47,69
<b>C<sub>u</sub></b>	0,006184831

PC	%Gq
<i>a</i> <sub>20</sub>	25%
<i>a</i> <sub>40</sub>	27%

*Avanzamento totale cricca*

<b>a<sub>c_tot</sub> [mm]</b>	47,95
-------------------------------	-------

Confrontando tra loro in un grafico  $a_{c\_tot} - G_{IIc}$  i risultati ottenuti per tutti i provini si ottiene:

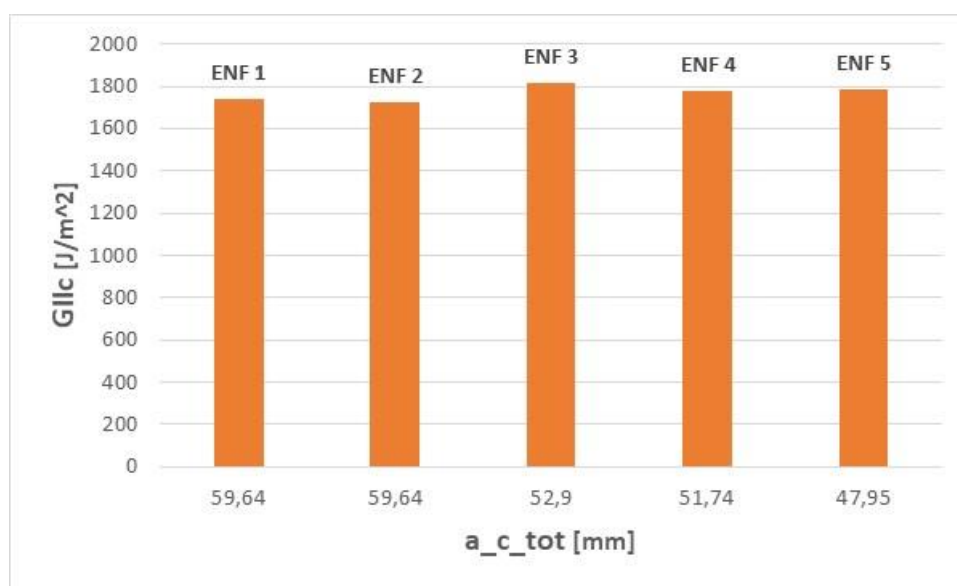


Figura 4.13. Grafico comparativo  $a_{c\_tot} - G_{IIc}$  tra i provini ENF.

Anche per questa serie di provini i risultati della resistenza a Modo II sono raggruppati nella medesima fascia di valori, presentando differenze minime fra loro. La differenza più marcata è nell'avanzamento di cricca: mentre per i primi quattro provini la differenza è piccola, per il provino ENF 5 è grande. Si potrebbe concludere che il provino ENF 5 presenti dei microdifetti (o che abbia subito piccoli errori in fase di lavorazione) che ne causano la deviazione dai risultati medi ottenuti con gli altri provini. In generale, tali risultati possono essere utilizzati

per la costruzione di un modello per determinare la resistenza a delaminazione a Modo II di laminati compositi.

Ora, come già avvenuto per la prova DCB, verranno presentati i calcoli e i confronti tra la teoria classica e la teoria di Williams. Dato che il metodo di Kanninen restituisce valori molto simili a quelli della teoria classica non verrà considerato. Partendo con il provino ENF 1 e utilizzando le equazioni della teoria classica (4.34) e (4.37):

<b>Gc [J/m<sup>2</sup>]:</b>	1746,53
<b>a<sub>pc</sub> [mm]:</b>	30,11

dove  $a_{pc}$  rappresenta l'avanzamento teorico della cricca. È possibile notare come il valore della resistenza sia molto vicino a quello ottenuto sperimentalmente, e come l'avanzamento della cricca sia inferiore rispetto a quello reale. Per i restanti provini si sono ottenuti come risultati:

**ENF 2**

<b>Gc [J/m<sup>2</sup>]:</b>	1900,43
<b>a<sub>pc</sub> [mm]:</b>	28,18

**ENF 3**

<b>Gc [J/m<sup>2</sup>]:</b>	2041,87
<b>a<sub>pc</sub> [mm]:</b>	27,53

**ENF 4**

<b>Gc [J/m<sup>2</sup>]:</b>	1814,41
<b>a<sub>pc</sub> [mm]:</b>	29,76

**ENF 5**

<b>Gc [J/m<sup>2</sup>]:</b>	1541,59
<b>a<sub>pc</sub> [mm]:</b>	37,42

In generale, l'andamento dei dati riscontrato con il primo provino è lo stesso per tutti gli altri.

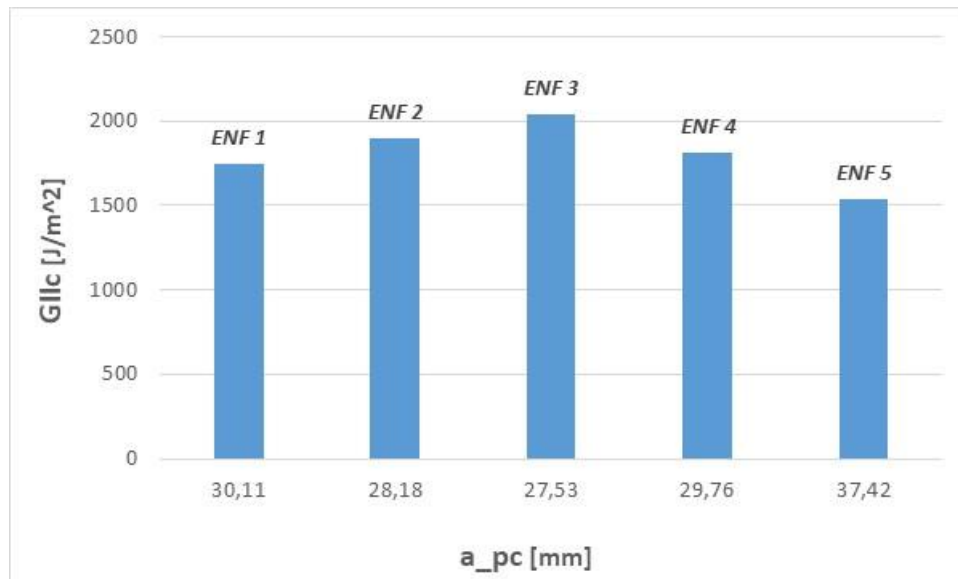


Figura 4.14. Grafico compartivo  $a_{pc}$  –  $G_{IIc}$  tra i provini ENF calcolati con metodo classico.

Volendo misurare gli stessi parametri adottando il metodo di Williams, si utilizzano prima le equazioni (3.33) per il calcolo di  $\chi_I$  e poi le equazioni (4.43) per ottenere  $\chi_{II}$  e  $a_{II}$ . Partendo sempre dal primo provino ENF 1:

Dimensioni	
L [mm]:	50
b [mm]:	20,201
h [mm]:	3,855
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico
E_1f [MPa]:	102954,6
I [mm <sup>4</sup> ]:	12,05521
E22 [MPa]:	900
G12 [MPa]:	4680
E11 [MPa]:	105000

$\Gamma$	2,451049367
$\chi_i$	2,015236681
$\chi_{ii}$	0,846399406
a <sub>ii</sub>	31,63143486

G <sub>c</sub> [J/m <sup>2</sup> ]:	1941,65
a <sub>pc</sub> [mm]:	30,10

La lunghezza di 50 mm si riferisce alla distanza tra il perno di carico e il perno di sostegno situato al di sotto della zona con l'inserto per la delaminazione. Dato che il metodo di Williams influisce sul calcolo della resistenza ma non su quello dell'avanzamento di cricca, il valore di

quest'ultimo sarà uguale a quello già calcolato con il metodo classico. I risultati per i restanti quattro provini sono:

### ENF 2

Dimensioni	
L [mm]:	50
b [mm]:	20,097
h [mm]:	3,927
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico
E <sub>1f</sub> [MPa]:	97898,91
I [mm <sup>4</sup> ]:	12,67777
E22 [Mpa]:	900
G12 [MPa]:	4680
E11 [Mpa]:	96000

$\Gamma$	2,343651461
$\chi^i$	1,939603757
$\chi^{ii}$	0,814633578
aii	31,59953303

Gc [J/m <sup>2</sup> ]:	2108,48
-------------------------	---------

### ENF 3

Dimensioni	
L [mm]:	50
b [mm]:	20,24
h [mm]:	3,924
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico
E <sub>1f</sub> [MPa]:	97430,351
I [mm <sup>4</sup> ]:	12,738734
E22 [MPa]:	900
G12 [MPa]:	4680
E11 [MPa]:	75220

$\Gamma$	2,074550798
$\chi^i$	1,747273903
$\chi^{ii}$	0,733855039
aii	31,43982359

Gc [J/m <sup>2</sup> ]:	2242,56
-------------------------	---------

## ENF 4

### Dimensioni

L [mm]:	50
b [mm]:	20,24
h [mm]:	3,924
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico
E <sub>1f</sub> [MPa]:	97430,35
I [mm <sup>4</sup> ]:	12,73873
E22 [MPa]:	900
G12 [MPa]:	4680
E11 [MPa]:	75220

$\Gamma$	2,074550798
$\chi^i$	1,747273903
$\chi^{ii}$	0,733855039
aii	31,43982359

Gc [J/m <sup>2</sup> ]:	1992,74
-------------------------	---------

## ENF 5

### Dimensioni

L [mm]:	50
b [mm]:	20,231
h [mm]:	3,574
a0 [mm]:	30 dal rullo di carico
E <sub>1f</sub> [MPa]:	129006,3
I [mm <sup>4</sup> ]:	9,620768
E22 [MPa]:	900
G12 [MPa]:	4680
E11 [MPa]:	75220

$\Gamma$	2,074550798
$\chi^i$	1,747273903
$\chi^{ii}$	0,733855039
aii	31,31139896

Gc [J/m <sup>2</sup> ]:	1679,31
-------------------------	---------

Confrontando i risultati dei provini ENF in un grafico si ottiene:

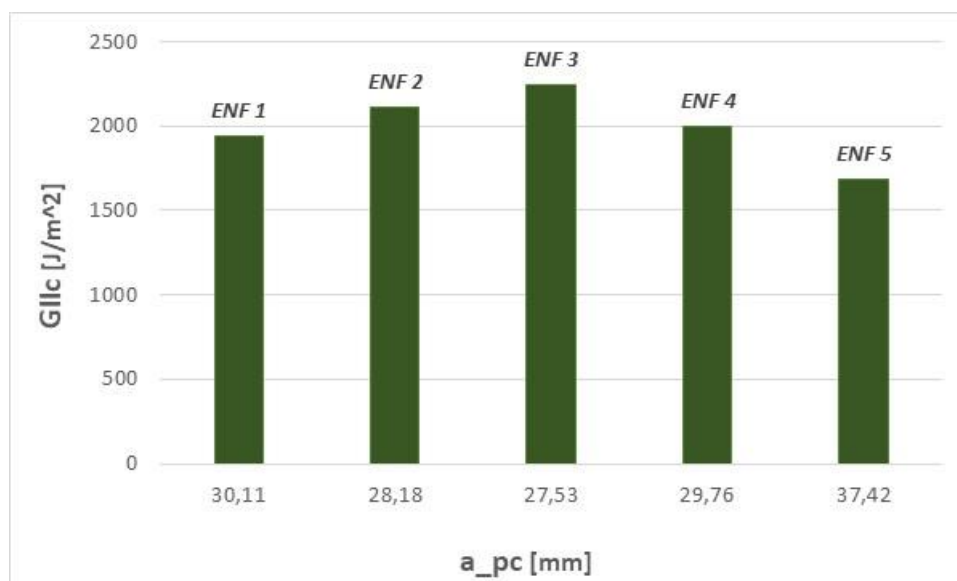


Figura 4.15. Grafico comparativo  $a_{pc} - G_{IIc}$  tra i provini ENF calcolati con metodo di Williams.

Confrontando infine tra loro i risultati ottenuti:

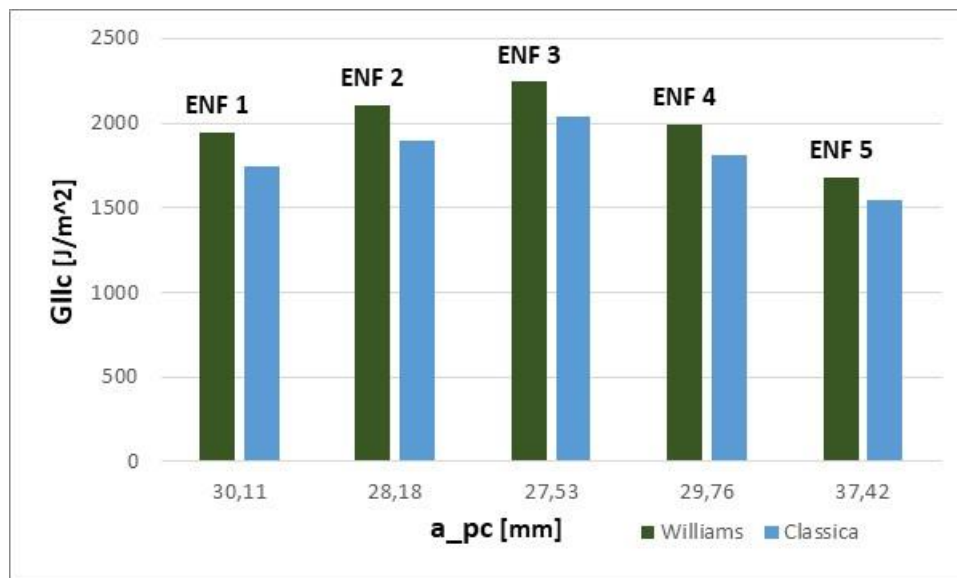


Figura 4.16. Grafico comparativo  $a_{pc} - G_{IIc}$  tra il metodo classico e di Williams.

Dal confronto fra i due metodi emerge come il metodo di Williams fornisca valori di resistenza più alti rispetto al modello classico (come d'altronde è lecito aspettarsi, dato che il metodo di Williams considera una lunghezza di cricca maggiorata). Dal confronto con i dati ottenuti sperimentalmente invece, si nota come nessuno dei due metodi analitici sia in grado di stimare in maniera più o meno accurata il valore di resistenza a Modo II. Il solo metodo classico sembra avvicinarsi, ma non per tutti i provini. Inoltre, l'avanzamento di cricca previsto rimane di molto inferiore a quello reale ottenuto sperimentalmente. In conclusione, per il Modo II il metodo sperimentale è la migliore scelta per determinare la resistenza a delaminazione e l'avanzamento di cricca.

# Capitolo 5: Modo misto I/II

## 5.1: Le origini: formulazione classica del problema

Il *Mixed Mode Bending* test (MMB) nacque per caratterizzare entrambi i tipi di resistenza a delaminazione in Modo I e II di materiali compositi con fibre unidirezionali con un'unica prova. Variando il rapporto tra i Modi è possibile osservare la variazione tra le due resistenze.

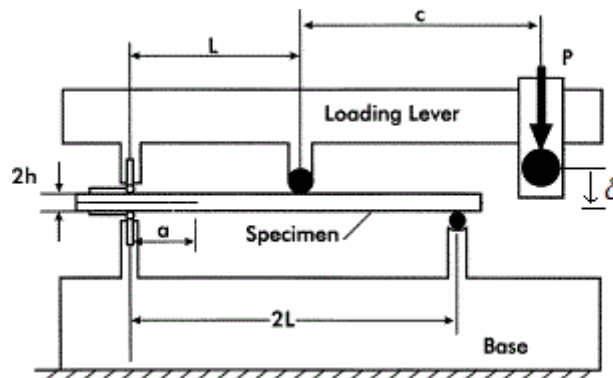


Figura 5.1. Schematizzazione di una prova MMB.

Come riportato nella figura 5.1 il provino viene vincolato ad una base rigida nell'estremo dove è presente la delaminazione iniziale, mentre all'estremo opposto viene fissato ad un carrello. Nella parte superiore l'estremo intagliato viene vincolato ad una cerniera nello stesso modo della prova DCB, mentre in mezzeria è presente un perno libero di ruotare sul suo asse (che costituirà la parte ENF della prova). L'entità delle forze trasmesse al perno e alla cerniera è determinata dalla leva di carico, su cui viene imposto  $P$  (se in controllo di carico) o  $\delta$  (se in controllo di spostamento) ad una distanza  $c$  dalla mezzeria. Proprio da quest'ultima dipende un parametro fondamentale della prova,  $k$  (o  $\beta$ ) che descrive il rapporto tra i due modi. In accordo con la normativa, la dimensione i provini dovrebbero presentare una lunghezza  $L = 50$  mm, una larghezza  $B$  compresa tra i 20 mm e i 25 mm, un'altezza  $2h$  compresa tra i 3 mm e i 5 mm e una lunghezza di cricca iniziale  $a_0 = 25$  mm. Per ridurre inoltre i problemi derivati da non linearità geometriche, l'altezza che va dal punto di applicazione del carico

esterno,  $P$ , al baricentro della cerniera superiore dovrebbe essere  $0,3L$ . In realtà la reale lunghezza dei provini è maggiore di  $2L$ , a causa della necessità di vincolare adeguatamente le cerniere.

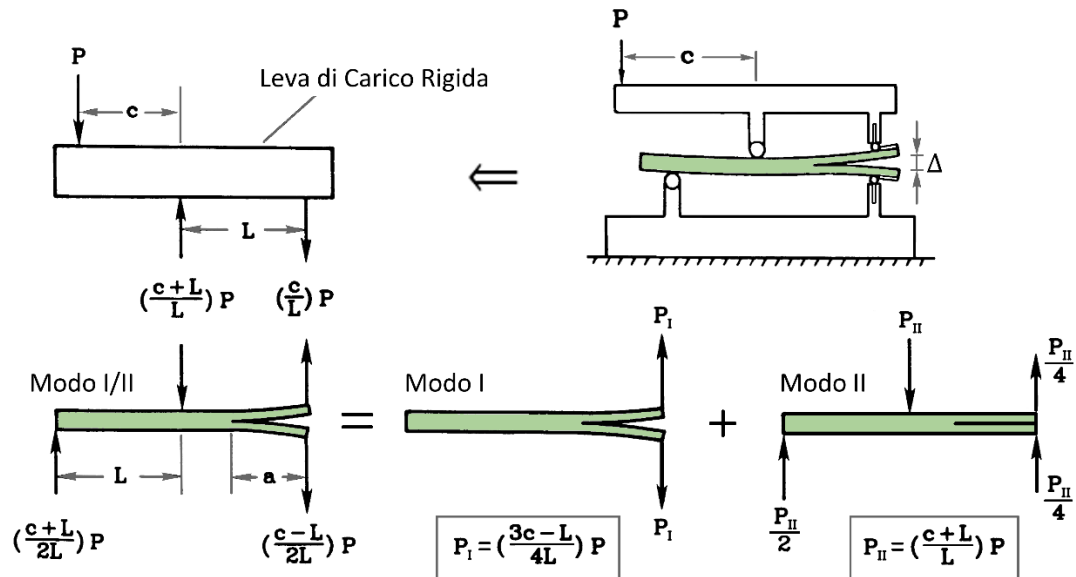


Figura 5.2. Schema delle forze agenti sul provino nel test MMB.

Complessivamente, il sistema di forze che agisce sul provino può essere visto come la somma dei due Modi separati, da cui deriva la considerazione che per la risoluzione analitica del test MMB si possa ricorrere alle soluzioni già ottenute per il test DCB e ENF. La distribuzione di forze che compongono rispettivamente il Modo I e II viene rappresentata come:

$$P_I = \left( \frac{3c-L}{4L} \right) P ; \quad P_{II} = \left( \frac{c+L}{L} \right) P \quad (5.47)$$

Determinata quindi la lunghezza  $2L$  il solo parametro che influisce sul rapporto tra i due Modi è la lunghezza del braccio  $c$ .

Riprendendo le espressioni per il calcolo dell'*energy release rate* di ogni Modo, ossia la (3.4) per  $G_I$  e la (4.37) per  $G_{II}$ , l'espressione per il Modo misto I/II  $G$  è:

$$G_I = \frac{P_I^2 a^2}{BEI} \quad (5.48)$$

$$G_{II} = \frac{3P_{II}^2 a^2}{64BEI} \quad (5.49)$$

$$G = G_I + G_{II} \quad (5.50)$$



Si esprime ora l'interazione tra i Modi I e II attraverso i coefficienti di modo misto  $\beta$  e  $k$ , definiti come:

$$\beta = \sqrt{\frac{G_{II}}{G_I}}; \quad k = \frac{G_{II}}{G_I + G_{II}} \quad (5.51)$$

Mettendo a sistema le equazioni (5.47), (5.48), (5.49) e (5.51) si ottiene l'espressione della lunghezza di braccio  $c$  in funzione dei coefficienti di Modo misto:

$$c = \frac{\sqrt{3\left(\frac{1-k}{k}\right)+2}}{6-\sqrt{3\left(\frac{1-k}{k}\right)}} L = \frac{2\beta+\sqrt{3}}{6\beta-\sqrt{3}} L \quad (5.52)$$

Se viene posto  $k = 1$  quello che si ottiene è un puro Modo II, mentre se  $k = 0$  si ottiene un puro Modo I. Valori che se sostituiti nella (5.52) danno:

$$c(k = 0) = c(\beta = 0) = -L ; \quad c(k = 1) = c(\beta \rightarrow \infty) = \frac{L}{3} \quad (5.53)$$

Per quanto a livello teorico sia possibile ottenere prove di puro Modo I o II variando opportunamente  $c$ , nella realtà ciò non è possibile. Derivando la funzione  $c$ :

$$\frac{dc}{d\beta} = -\frac{8\sqrt{3}L}{(6\beta - \sqrt{3})^2}$$

Si nota come il limite:

$$\lim_{\beta \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{\pm}} \frac{dc}{d\beta} = -\infty$$

se viene posto:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{13}$$

Quindi da quest'ultima equazione è possibile notare come  $k$  non possa assumere il valore richiesto per un puro Modo I. Tecnicamente sarebbe comunque possibile ottenere un puro Modo II, ma esistendo per questo compito già la prova ENF il vero scopo del test è quello di valutare tutti i possibili modi di risposta misti di interesse ingegneristico variando  $k$  entro un range di valori che va da  $k = 0,1$  a  $k = 0,9$ .

Passando all'analisi dell'apertura dei bracci del provino  $\Delta$ , la sola componente che la influenza è il Modo I, come si può anche notare dall'immagine 5.2. Quindi, in analogia con quanto è già stato visto con il Modo I è possibile descrivere la parte elastica come:

$$\Delta = \frac{2P_I a_0^3}{3EI} \quad (5.54)$$

Per descrivere invece la parte in cui avviene la delaminazione, non essendo noto a priori un valore di  $G_C$ , è necessario utilizzare un criterio di propagazione associato alle equazioni (5.48), (5.49) e (5.54). Una soluzione è stata trovata da Pinho, Iannucci e Robinson nella legge di potenza, che può essere espressa come:

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\alpha = 1 \quad (5.55)$$

Mettendo quindi a sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \frac{2P_I a^3}{3EI} \\ G_I = \frac{P_I^2 a^2}{BEI} \\ G_{II} = \frac{3P_{II}^2 a^2}{64BEI} \\ \left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\alpha = 1 \end{array} \right. \rightarrow \Delta = \frac{2P_I \sqrt{B^3 EI}}{3 \left[ \left(\frac{P_I^2}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{3P_{II}^2}{64G_{IIc}}\right)^\alpha \right]^{\frac{3}{2\alpha}}} \quad (5.56)$$

Stando a quanto affermato dalla letteratura, per i materiali compositi con fibre unidirezionali di carbonio i valori che  $\alpha$  assume sono  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Secondo lo studio effettuato da Mi e Crisfield utilizzando sempre la legge di potenza, si ottengono risultati accettabili e vicino ai dati sperimentali con  $\alpha = 1$ .

Nel caso in cui si desiderasse studiare l'inflessione  $\delta$  in mezzeria del provino, si parte dalla cedevolezza  $C$  del provino, che come dimostrato da Bennati e Valvo vale:

$$C = \left(\frac{3c-L}{4L}\right)^2 C_I + \left(\frac{c+L}{L}\right)^2 C_{II} \quad (5.57)$$

con  $C_I$  e  $C_{II}$  le cedevolezza rispettivamente del Modo I e II, che per il Modo misto I/II si esprimono:

$$C = \frac{\delta}{P}; \quad C_I = \frac{\Delta}{P_I}; \quad C_{II} = \frac{\delta_{II}}{P_{II}} \quad (5.58)$$

Sostituendo quindi le (5.58) e le (5.47) nelle (5.57) si ottiene:

$$\delta = \left(\frac{3c-L}{4L}\right) \Delta + \left(\frac{c+L}{L}\right) \delta_{II} \quad (5.59)$$

Sostituendo la (3.3) (dove  $P = P_I$ ) e la (4.35) (dove  $P = P_{II}$ ) nella (5.59) si ottiene l'espressione generale dello spostamento  $\delta$  in mezzzeria:

$$\delta = \left(\frac{3c-L}{4L}\right) \frac{2P_I a^3}{3EI} + \left(\frac{c+L}{L}\right) \frac{(2L^3+3a^3)P_{II}}{96EI} \quad (5.60)$$

## 5.2: Test MMB con modelli avanzati: Kanninen

Come per le prove DCB e ENF anche per la prova MMB il provino viene immaginato per la teoria classica come una trave semplice, trascurando altri effetti come quello di taglio. Le prove sperimentali tuttavia fornivano valori di resistenza più alti di quelli calcolati analiticamente. Le considerazioni effettuate da Kanninen (una trave con proprietà isotropiche appoggiata su fondazione elastica) per tenere conto di questi effetti furono riprese da Reeder e Crews, che nel 1988 elaborarono una soluzione al problema estendendolo al caso di travi ortotropiche:

$$G_I = \frac{3P^2(3c-L)^2}{4B^2h^3L^2E_{11}} \left( a^2 + \frac{2a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{h^2E_{11}}{10G_{13}} \right) \quad (5.61)$$

dove:

$$\lambda = \left( \frac{3K'}{Bh^3E_{11}} \right)^{\frac{1}{4}}; \quad K' = \frac{2BE_{22}}{h} \quad (5.62)$$

e:

$$G_{II} = \frac{9P^2(c+L)^2}{16B^2h^3L^2E_{11}} \left( a^2 + 0.2 \frac{h^2E_{11}}{10G_{13}} \right) \quad (5.63)$$

Nel caso in cui i provini si possano considerare trasversalmente isotropici,  $G_{13}$  può essere sostituito con  $G_{12}$ .

### 5.3: Test MMB con modelli avanzati: Williams

Sulla base di quanto affermato da Williams per i test DCB e ENF, Kinloch suggerì di tenere conto delle deformazioni indotte dalle forze di taglio e flettenti (non considerate dalla teoria classica) aumentando la lunghezza di delaminazione dell'opportuno fattore di correzione. Utilizzando le equazioni (5.48) e (5.49):

$$G_I = \frac{12P_I^2(a+\chi h)^2}{B^2h^3E_{11}}; \quad G_{II} = \frac{9P_{II}^2(a+\chi_{II}h)^2}{16B^2h^3E_{11}} \quad (5.64)$$

I valori di  $\chi$  e  $\chi_{II}$  sono gli stessi trovati nei metodi DCB con l'equazione (3.33) e (4.43). A loro volta si modificano le espressioni delle cedevolezze:

$$C_I = \frac{\Delta}{P_I} = \frac{8(a+\chi h)^3}{Bh^3E_{11}}; \quad C_{II} = \frac{\delta_{II}}{P_{II}} = \frac{2L^3+3(a+\chi_{II}h)^3}{8B^2h^3E_{11}} \quad (5.65)$$

### 5.4: Test MMB con modelli avanzati: Bennati-Valvo

Nel 2014 Bennati e Valvo pubblicarono un metodo alternativo per la considerazione degli effetti di taglio e flettenti, dove similmente a Kanninen si immagina che l'interfaccia tra i due lembi del provino sia costituita da una distribuzione di molle linearmente elastiche e fragili. La cedevolezza complessiva viene calcolata come:

$$C = \left(\frac{3c-l}{4L}\right)^2 C_{DCB} + \left(\frac{c+l}{l}\right)^2 C_{ENF}$$

dove:

$$C_{DCB} = \frac{2a^3}{3BD_1} + \frac{2a}{BC_1} + \frac{2}{\lambda_1\lambda_2BD_1} \left[ (\lambda_1 + \lambda_2)a^2 + 2a + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right]$$

$$C_{ENF} = \frac{1}{24B} \frac{A_1h^2}{A_1h^2+4D_1} \left( \frac{a^3}{D_1} + \frac{8l^3}{A_1h^2} \right) + \frac{l}{4BC_1} + \frac{1}{8BD_1} \frac{A_1h^2}{A_1h^2+4D_1} \frac{1}{\lambda_5^2} \left[ \lambda_5 a^2 + a + 2l - \frac{2}{\lambda_5} - \frac{4a}{e^{\lambda_5(l-a)}} \right]$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k_z}{C_1} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2C_1^2}{k_z D_1}} \right)}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k_z}{C_1} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2C_1^2}{k_z D_1}} \right)}; \quad \lambda_5 = \sqrt{2k_x \left( \frac{1}{A_1} + \frac{h^2}{4D_1} \right)}$$

Dove  $k_x$  e  $k_z$  sono le costanti elastiche delle molle, rispettivamente, longitudinali e trasversali alla direzione dell'interfaccia del piano, così come mostrato in figura 5.2:

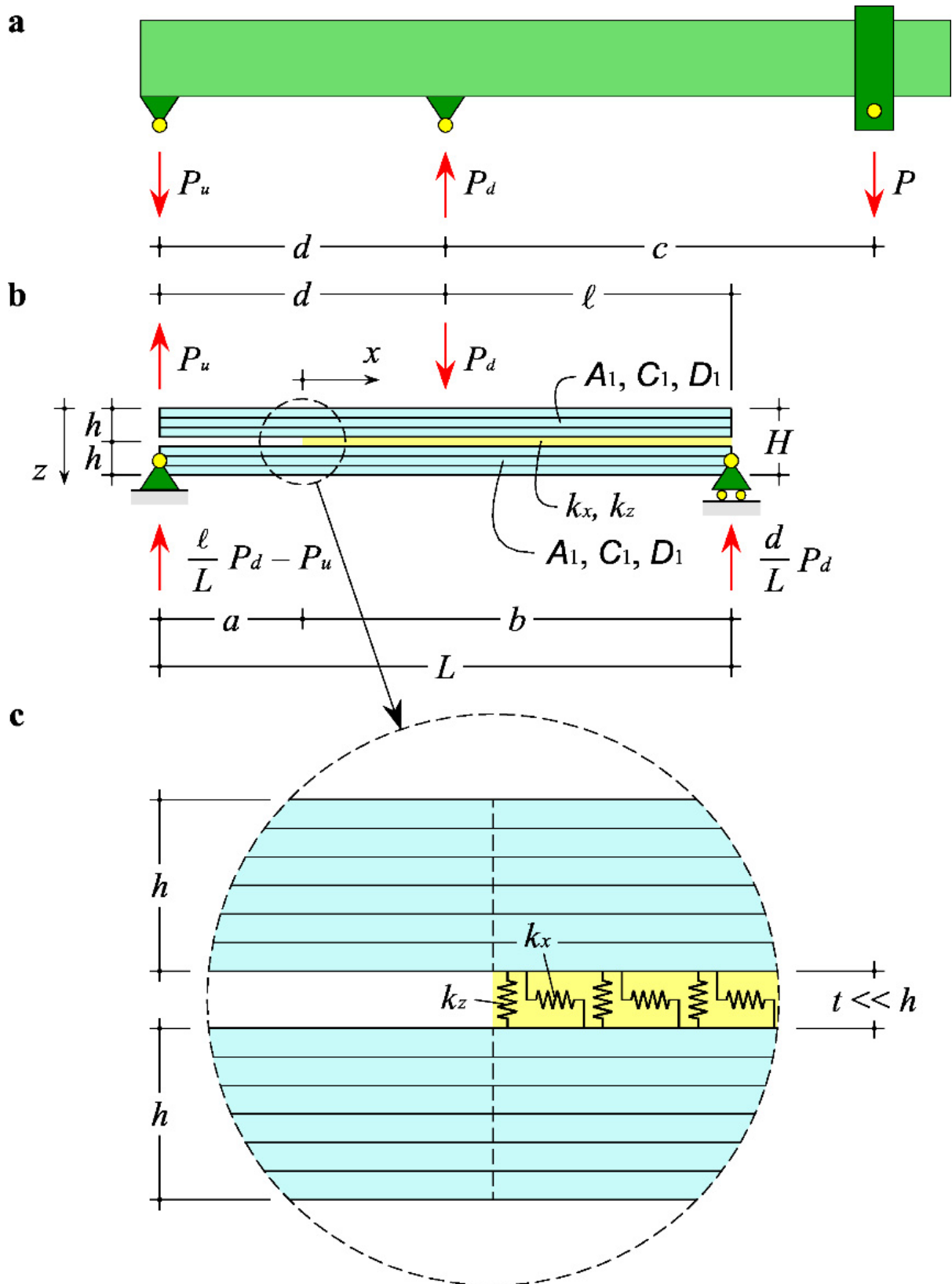


Figura 5.2. Schematizzazione della soluzione di Bennati-Valvo.

Mentre i valori di  $A_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  sono dati da:

$$A_1 = E_{11}h; \quad C_1 = 5 \frac{G_{13}h}{6}; \quad D_1 = \frac{E_{11}h^3}{12}$$

L'espressione dell'energy release rate dei due modi diventa invece:

$$G_I = \frac{P_I^2}{2B} \frac{dC_{DCB}}{da}; \quad G_{II} = \frac{P_{II}^2}{2B} \frac{dC_{ENF}}{da}$$

$$P_I = \frac{1}{2} \left( \frac{c+d}{L} + \frac{c}{d} - 1 \right) P; \quad P_{II} = \left( 1 + \frac{c}{d} \right) P$$

Sostituendo le espressioni delle cedevolezze trovate nelle espressioni delle resistenze si ottiene:

$$G_I = \frac{P_I^2}{B^2 D_1} (a + \chi h)^2; \quad G_{II} = \frac{P_{II}^2}{16B^2 D_1} \frac{A_1 h^2}{A_1 h^2 + 4D_1} (a + \chi_{II} h)^2$$

dove:

$$\chi = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right); \quad \chi_{II} = \frac{1}{h} \frac{1}{\lambda_5}$$

La normativa ASTM 6671 che si occupa di regolamentare la prova MMB assume come parametro di correzione il metodo di Williams; la soluzione di Bennati-Valvo propone quindi una alternativa al calcolo dei due fattori di correzione richiesti.

## 5.5: Normativa ASTM standard 6671

La normativa ASTM 6671 ha come scopo la definizione di uno standard di esecuzione della prova MMB per la caratterizzazione della resistenza sia a Modo I che a Modo II di un materiale composito in condizioni di controllo di spostamento. Come per gli altri test già analizzati, è limitato all'applicazione solo su materiali compositi con fibre unidirezionali di carbonio o vetro, e matrice polimerica solidificata, con un numero pari di strati di fibra, nel cui mezzo andrà inserito un inserto non adesivo che funga da zona di delaminazione iniziale.

Il carico  $P$  dovrà mantenersi il più verticale possibile per tutta la durata di applicazione del carico, mentre per variare il rapporto tra i metodi sarà sufficiente variare la lunghezza della leva di carico  $c$ .

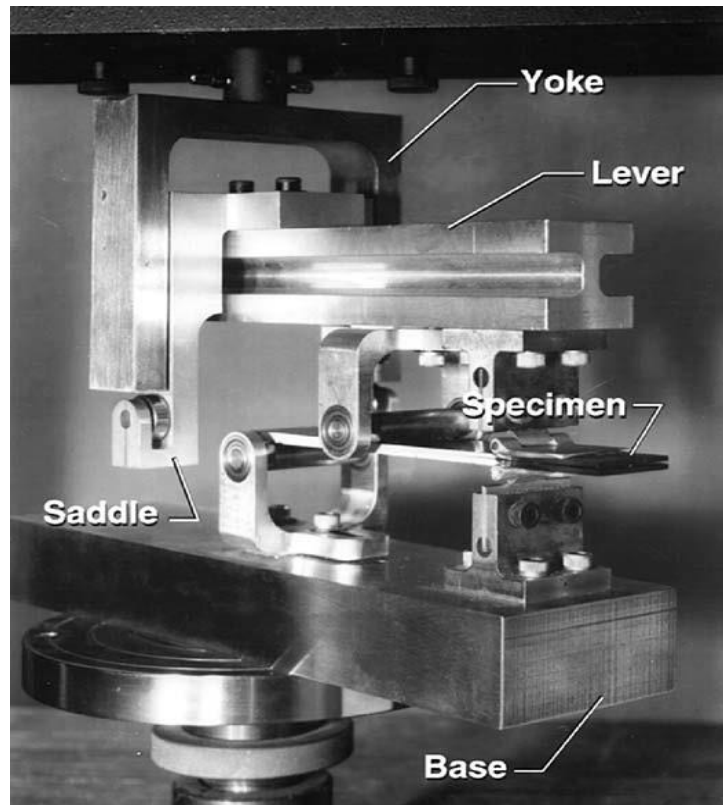


Figura 5.3. Esempio pratico di test MMB.

Il calcolo di  $G_c$  viene effettuato sotto la considerazione di comportamento lineare elastico, ma in alti rapporti di Modo II la crescita di cricca diventa spesso instabile, precludendo il calcolo del valore di resistenza. L'utilizzo di alti valori di delaminazione iniziale riduce la possibilità di crescita instabile.

Lo spostamento del punto di carico è da registrare dal punto di separazione trasversale presente tra il telaio e il carico, oppure è possibile misurarlo tramite l'utilizzo di apparecchiature esterne. Se viene utilizzata la separazione trasversale, la cedevolezza complessiva dell'intero sistema  $C_{sys}$  deve essere corretta. Tale cedevolezza deve essere misurata per ogni valore di  $c$ , e se viene calcolata per mezzo di apparecchiature esterne deve essere posta uguale a zero.

La corretta lunghezza di leva viene calcolata come:

$$c = \frac{12\beta^2 + 3\alpha + 8\beta\sqrt{3\alpha}}{36\beta^2 - 3\alpha} L$$

Con:

$$\alpha = \frac{1 - \frac{G_{II}}{G}}{\frac{G_{II}}{G}}$$

$$\beta = \frac{a + \chi h}{a + 0,42\chi h}$$

Il valore di  $\chi$  è lo stesso del metodo di Williams applicato al test DCB, descritto dall'equazione (3.33). Per il calcolo della cedevolezza del sistema occorre calcolare la cedevolezza di un apposito provino di calibrazione. Tale provino dovrà avere la rigidezza di una barra d'acciaio con  $I = 450 \text{ mm}^4$  e andrà caricato fino al 75% del carico massimo previsto. La cedevolezza si calcolerà come:

$$C_{cal} = \frac{2L(c + L)^2}{B_{cal}E_{cal}t^3}$$

dove  $t$  è lo spessore del provino di calibrazione,  $E_{cal}$  il modulo di Young della barra di calibrazione (ricavato dai dati tabulati) e  $B_{cal}$  la larghezza della barra di calibrazione. Quindi, in un diagramma  $\delta - P$  si misura la pendenza della curva di carico  $m_{cal}$  e si ottiene infine l'espressione per  $C_{sys}$ :

$$C_{sys} = \frac{1}{m_{cal}} - C_{cal}$$

Il provino viene quindi caricato e la lunghezza di cricca viene misurata visivamente. In un diagramma  $\delta - P$  si misura la pendenza della curva di carico,  $m$ , estromettendo qualunque dato si discosti dalla linearità nel primo tratto (pari a circa il 20%).

Per il calcolo della resistenza si ricorre alla rigidezza flessionale:

$$E_{1f} = \frac{8(a_0 + \chi h)^3(3c + L)^2 + [6(a_0 + 0,42\chi h)^3 + 4L^3](3c + L)^2}{16L^2Bh^3\left(\frac{1}{m} - C_{sys}\right)}$$

Le espressioni per il calcolo delle resistenze fanno uso del metodo di correzione utilizzato da Williams e sono:

$$G_I = \frac{12P^2(3c - L)^2}{16B^2h^3L^2E_{1f}}(a + \chi h)^2$$



$$G_{II} = \frac{9P^2(c + L)^2}{16B^2h^3L^2E_{1f}} (a + 0,42\chi h)^2$$

Il valore stimato della resistenza totale invece viene calcolato come:

$$G_c = G|_{P_{1-25}, a_{1-25}}$$

Dove  $P$  assume i valori corrispondenti alla relativa propagazione di cricca compresa tra 1 mm e 25 mm.

## 5.6: Confronto con dati sperimentali

A causa della mancanza di alcuni dati tecnici, è stato possibile effettuare il calcolo sulla base di dati sperimentali solo su due provini. Non è stato inoltre possibile risalire alle modalità di creazione della lastra da cui sono stati ottenuti i provini, anche se appare lecito assumere che siano stati tutti ricavati in accordo con la normativa sperimentale ASTM 6671, ossia con le dimensioni previste e con un numero pari di pelli unidirezionali di fibra di carbonio. Il primo provino a essere testato è il **MMB 1**.

Dati geometrici		Valori aggiuntivi	
L [mm]:	50	E11 [MPa]:	132000
B [mm]:	20	E22 [MPa]:	9000
h/2 [mm]:	1,88	G12 [MPa]:	4600
a0 [mm]:	30	E1f [MPa]:	556782,1
		Gii/G %:	0,25

Il rapporto tra la resistenza a Modo II e la resistenza totale viene impostato perché sia pari al 25%. In base a questi dati quindi si procede al calcolo dei fattori correttivi:

Fattori di correzione	
$\Gamma$ :	8,841631204
$\chi$ :	1,901341294
$\alpha$ :	3
$\beta$ :	1,065813875

Vengono quindi ora riportati i parametri tecnici del provino di calibrazione:

Calibrazione		Parametri provino calibrazione	
Bcal [mm]:	25,215	L. Span [mm]:	100
t [mm]:	5,615	Carico [N]:	210
I [mm <sup>4</sup> ]:	371,9864	sigma [MPa]:	19,811715
Ecal		eps:	9,23
[MPa]:	2146448		

In base a questi dati, e utilizzando quelli ottenuti dal provino sottoposto a prova MMB si ottengono i seguenti parametri:

c [mm]:	75,57885463
Ccal [mm/N]:	0,00016459
mcal [N/mm]:	300
Csys [mm/N]:	0,003168743
m [N/mm]:	34,72964636

Il grafico  $\delta - P$  che si ottiene con i dati registrati dalla prova è:

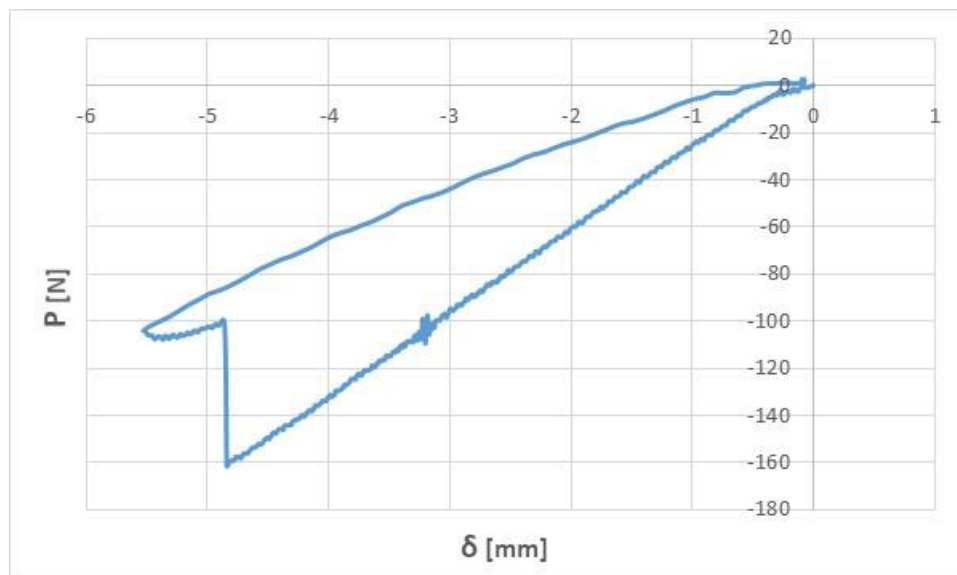


Figura 5.4. Diagramma  $\delta - P$  del provino MMB 1.

Infine, si procede al calcolo delle resistenze a Modo I e II:

Come è possibile vedere dall'ultima colonna della tabella, il rapporto tra il Modo II e la

$\delta$ [mm]	P [N]	a [mm]	$G_i$ [J/m <sup>2</sup> ]	$G_{ii}$ [J/m <sup>2</sup> ]	G [J/m <sup>2</sup> ]	$G_{ii}/G$ %
4,62	161,238	27,4	157,94	52,07	210,01	24,79%
4,78	99,56	36,6	101,30	34,50	135,81	25,41%
4,93	102,91	36,7	108,78	37,06	145,83	25,41%
5,2	106,17	37	117,51	40,06	157,57	25,43%
5,33	106,83	37,4	121,33	41,41	162,74	25,45%

resistenza totale è verificato essere pari al 25%. Ponendo i risultati ottenuti delle due resistenze in un grafico si ottiene:

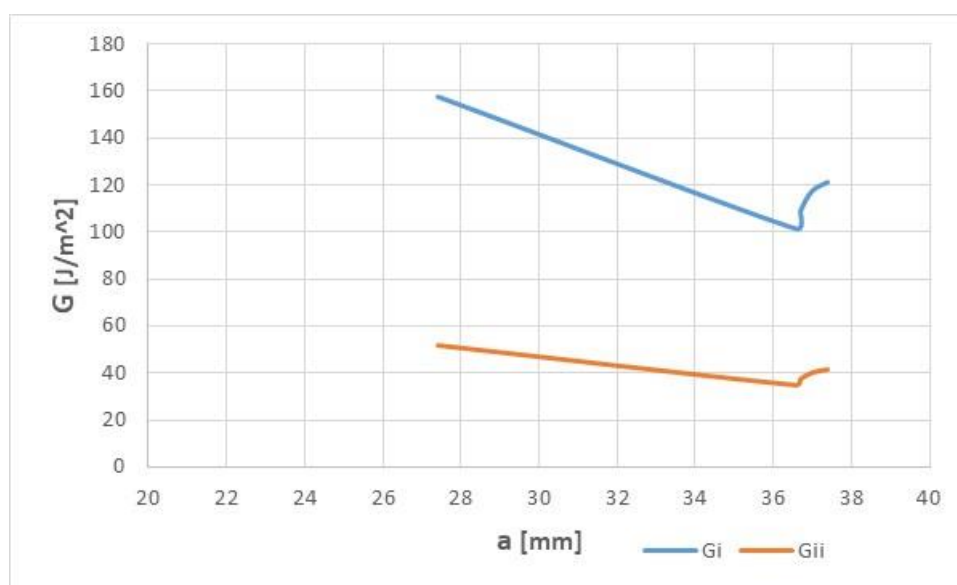


Figura 5.5. Grafico  $G - a$  del provino MMB 1.

## MMB 2

Lo stesso procedimento viene ripetuto per il secondo provino, anch'esso sottoposto al test MMB con un rapporto  $G_{II}/G$  pari al 25%:

Dati geometrici	
L [mm]:	50
B [mm]:	23,9
h/2 [mm]:	1,9
a0 [mm]:	28

Valori aggiuntivi	
E11 [MPa]:	110000
E22 [MPa]:	9000
G12 [MPa]:	4680
E1f [MPa]:	341492,65
$G_{ii}/G$ %:	0,25

I fattori di correzione valgono invece:

**Fattori di correzione**

$\Gamma$ :	7,9332977
$\chi$ :	1,7435483
$\alpha$ :	3
$\beta$ :	1,0653726

I dati del provino di calibrazione sono gli stessi usati per il provino MMB 1. I parametri che si ottengono da questi dati sono:

c [mm]:	75,62
Ccal [mm/N]:	0,000164711
mcal [N/mm]:	300
Csys [mm/N]:	0,003168622
m [N/mm]:	29,4900743

La tabella finale è quindi:

$\delta$ [mm]	P [N]	a [mm]	Gi [J/m <sup>2</sup> ]	Gii [J/m <sup>2</sup> ]	G [J/m <sup>2</sup> ]	Gii/G %
4,2	120,104	28	99,21	33,07	132,28	25,00%
4,32	116,51	29,33	101,46	34,00	135,47	25,10%
4,48	109,86	31,69	103,73	35,05	138,78	25,26%
4,68	105,06	32,64	100,08	33,93	134,01	25,32%
5,05	98,72	34,06	95,48	32,51	127,99	25,40%
5,39	94,17	35,95	95,90	32,82	128,71	25,50%
5,65	90,95	37,84	98,27	33,79	132,06	25,59%
5,96	90,81	39,73	107,17	37,01	144,18	25,67%
6,21	90,62	42,57	121,27	42,12	163,39	25,78%

Anche in questo caso, è possibile notare come il rapporto tra i Modi sia pari al 25%. Mettendo in grafico anche questi risultati si ottiene:

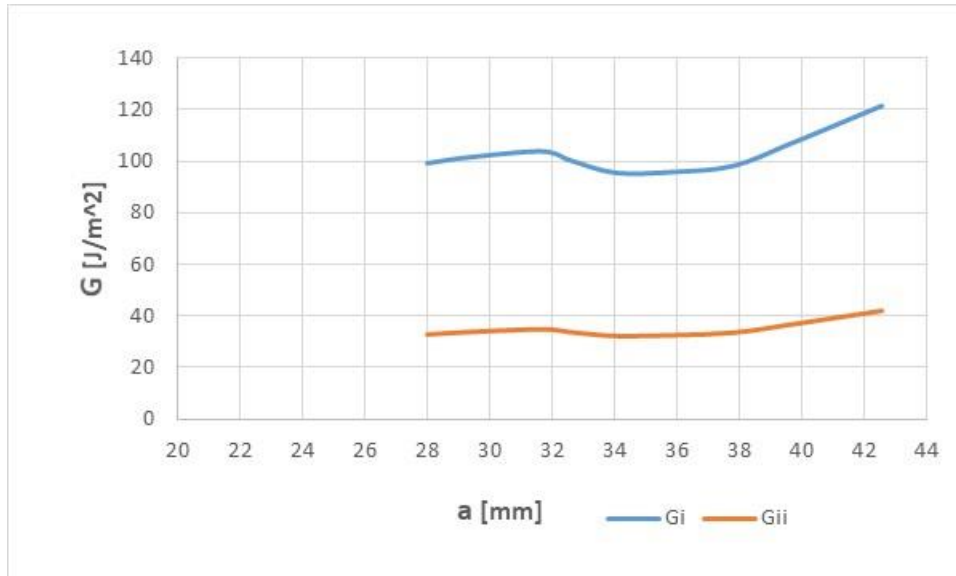


Figura 5.6. Grafico  $G - a$  del provino MMB 2.

Confrontando fra loro i due grafici, si nota come i valori di resistenza a Modo I del provino MMB 1 siano più elevati del provino MMB 2, a differenza del Modo II dove la differenza è molto più contenuta. La lunghezza di delaminazione del primo provino inoltre è di molto inferiore rispetto a quella del secondo provino.

Viene ora svolta un'analisi sul provino MMB 1 utilizzando i metodi classici, di Kanninen e di Williams per avere un confronto tra i risultati. A causa della mancanza dei valori di  $k_x$  e  $k_z$  non è stato possibile effettuare un confronto con il metodo di Bennati-Valvo.

Partendo con il metodo classico, si parte ottenendo la percentuale di Modo II rispetto alla  $G_c$  del modo misto. Per ogni percentuale si calcola quindi il valore di  $\beta$  dell'equazione (5.51) e a seguire si calcola il valore adimensionalizzato di  $\frac{c}{L}$  che si ricava dalla (5.52).

Gii/G %	$\beta$	c/L
0%	0	-1
5%	0,229	-6,162
10%	0,333	8,952
15%	0,420	3,262
20%	0,5	2,155
25%	0,577	1,667
30%	0,655	1,385
35%	0,734	1,198
40%	0,816	1,063
45%	0,905	0,958
50%	1	0,874
55%	1,106	0,805
60%	1,225	0,745
65%	1,363	0,692
70%	1,528	0,644
75%	1,732	0,6
80%	2	0,558
85%	2,380	0,517

Le prime due righe di dati sono segnate in rosso in quanto  $\beta < \frac{\sqrt{3}}{6}$ . Una volta fatto ciò, per ottenere i valori delle due forze  $P_I$  e  $P_{II}$  si ricorre all'adimensionalizzazione, dividendo ogni forza per  $P$ . Quindi, dividendo la resistenza di ogni Modo per  $P$  si ottengono le resistenze  $G_I/P$  e  $G_{II}/P$ :

Pi/P	Pii/P	Gi/P^2	Gii/P^2
-1	0	3,078E-05	0
-4,871	-5,162	7,257E-06	3,819E-07
6,464	9,952	4,773E-06	5,303E-07
2,197	4,262	3,561E-06	6,284E-07
1,366	3,155	2,811E-06	7,027E-07
1	2,667	2,290E-06	7,632E-07
0,789	2,385	1,901E-06	8,149E-07
0,649	2,198	1,598E-06	8,604E-07
0,547	2,063	1,352E-06	9,015E-07
0,469	1,958	1,148E-06	9,394E-07
0,406	1,874	9,751E-07	9,751E-07
0,353	1,805	8,256E-07	1,009E-06
0,308	1,745	6,947E-07	1,042E-06
0,269	1,692	5,786E-07	1,074E-06
0,233	1,644	4,744E-07	1,107E-06
0,2	1,6	3,800E-07	1,140E-06
0,169	1,558	2,937E-07	1,175E-06
0,138	1,517	2,140E-07	1,212E-06
0,106	1,475	1,395E-07	1,255E-06
0,071	1,438	6,882E-08	1,310E-06

Per il provino MMB 1 il grafico  $c/L - G$  risultante è:

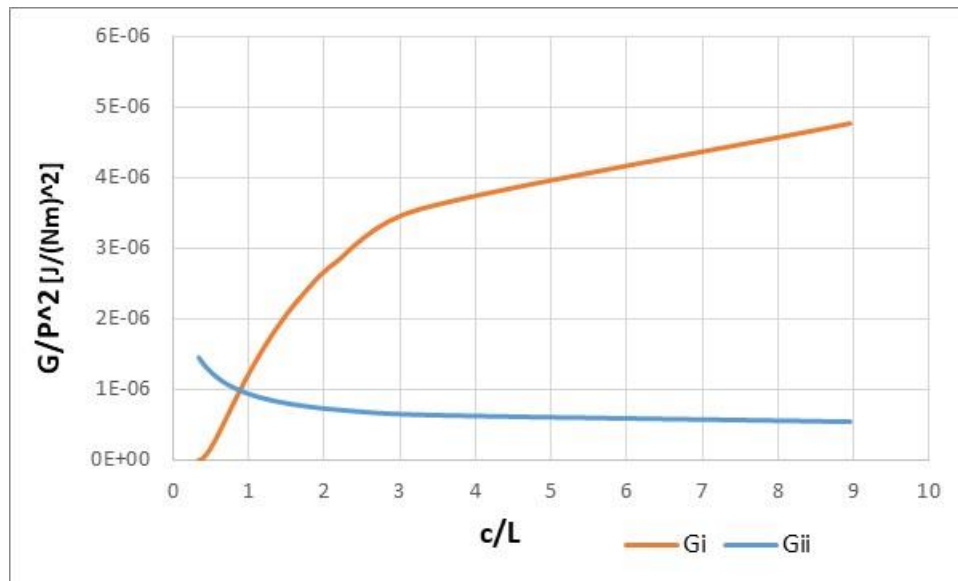


Figura 5.7. Grafico  $c/L - G_I/G_{II}$  del provino MMB 1 utilizzando il metodo classico.

Si nota come all'aumentare del rapporto  $c/L$  (e quindi all'aumentare del Modo II rispetto al Modo I)  $G_I$  subisca un decremento e come aumenti invece, com'è ovvio che sia,  $G_{II}$ . Per il provino MMB 2 il grafico che si ottiene è invece:

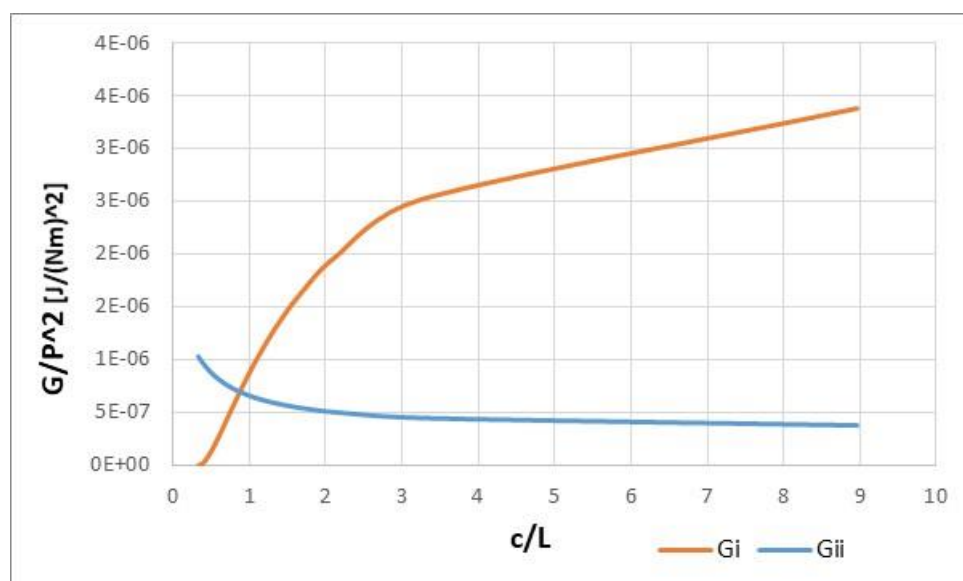


Figura 5.8. Grafico  $c/L - G_I/G_{II}$  del provino MMB 2 utilizzando il metodo classico.

Per il metodo di Kanninen si procede calcolando i valori di  $\lambda$  e  $K'$  come indicato dalle equazioni (5.62):

**Valori aggiuntivi**

<b>E11 [MPa]:</b>	132000
<b>E22 [MPa]:</b>	9000
<b>G12 [MPa]:</b>	4600
<b>I [mm<sup>4</sup>]:</b>	11,07445
<b>K':</b>	191489,4
<b><math>\lambda</math>:</b>	0,4254

Una volta ottenuti, si utilizzano le equazioni (5.61) e (5.63) per calcolare  $G_I/P$  e  $G_{II}/P$ :

Gii/G %	$\beta$	c/L	$G_I/P^2$	$G_{II}/P^2$
0%	0	-1	3,614E-05	0
5%	0,229	-6,162	8,577E-04	3,853E-05
10%	0,333	8,952	1,510E-03	1,432E-04
15%	0,420	3,262	1,744E-04	2,627E-05
20%	0,5	2,155	6,744E-05	1,439E-05
25%	0,577	1,667	3,614E-05	1,028E-05
30%	0,655	1,385	2,249E-05	8,227E-06
35%	0,734	1,198	1,520E-05	6,987E-06
40%	0,816	1,063	1,081E-05	6,152E-06
45%	0,905	0,958	7,941E-06	5,546E-06
50%	1	0,874	5,953E-06	5,081E-06
55%	1,106	0,805	4,514E-06	4,709E-06
60%	1,225	0,745	3,437E-06	4,401E-06
65%	1,363	0,692	2,611E-06	4,139E-06
70%	1,528	0,644	1,963E-06	3,909E-06
75%	1,732	0,6	1,446E-06	3,702E-06
80%	2	0,558	1,028E-06	3,512E-06
85%	2,380	0,517	6,883E-07	3,330E-06
90%	3	0,475	4,097E-07	3,148E-06
95%	4,359	0,428	1,818E-07	2,949E-06
99%	9,950	0,373	3,227E-08	2,727E-06
100%	99,995	0,337	3,030E-10	2,586E-06

Per il provino MMB 1 il grafico  $c/L - G$  risultante dall'applicazione del metodo di Kanninen è:



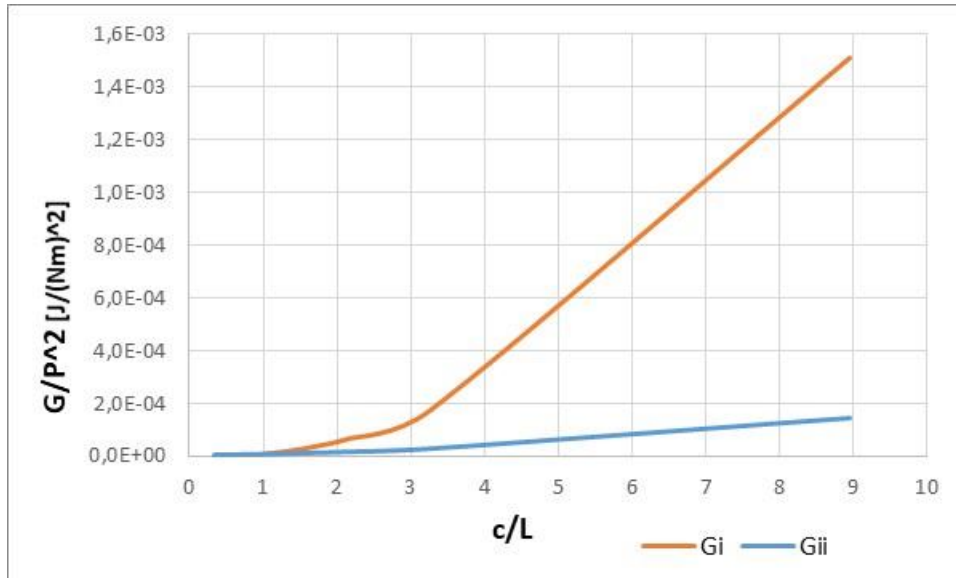


Figura 5.9. Grafico  $c/L - G_I/G_{II}$  del provino MMB 1 utilizzando il metodo di Kanninen.

Per il provino MMB 2 si ottiene invece:

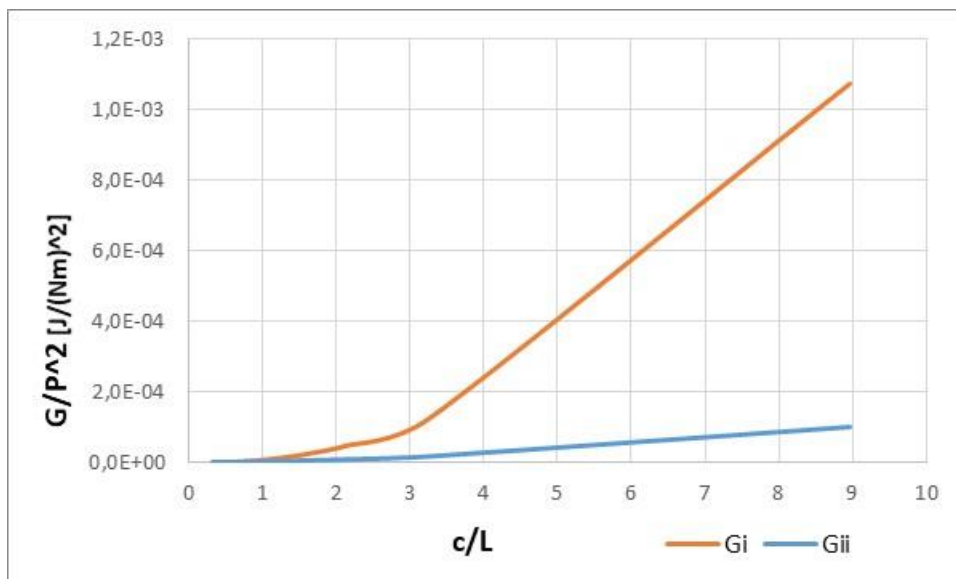


Figura 5.10. Grafico  $c/L - G_I/G_{II}$  del provino MMB 2 utilizzando il metodo di Kanninen.

Infine, si è passati al metodo di Williams, calcolando grazie alle equazioni (3.33) il parametro correttivo  $\chi$ , necessario al calcolo delle resistenze  $G_I/P$  e  $G_{II}/P$  definite dalle equazioni (5.64):

Gii/G %	$\beta$	c/L	Pi/P	Pii/P	Gi/P <sup>2</sup>	Gii/P <sup>2</sup>
0%	0	-1	-1	0	3,856E-05	0
5%	0,229	-6,162	-4,871	-5,162	9,089E-06	4,211E-07
10%	0,333	8,952	6,464	9,952	5,978E-06	5,847E-07
15%	0,420	3,262	2,197	4,262	4,460E-06	6,928E-07
20%	0,500	2,155	1,366	3,155	3,520E-06	7,748E-07
25%	0,577	1,667	1	2,667	2,868E-06	8,415E-07
30%	0,655	1,385	0,789	2,385	2,381E-06	8,985E-07
35%	0,734	1,198	0,649	2,198	2,001E-06	9,486E-07
40%	0,816	1,063	0,547	2,063	1,694E-06	9,940E-07
45%	0,905	0,958	0,469	1,958	1,438E-06	1,036E-06
50%	1	0,874	0,406	1,874	1,221E-06	1,075E-06
55%	1,106	0,805	0,353	1,805	1,034E-06	1,113E-06
60%	1,225	0,745	0,308	1,745	8,701E-07	1,149E-06
65%	1,363	0,692	0,269	1,692	7,246E-07	1,185E-06
70%	1,528	0,644	0,233	1,644	5,942E-07	1,221E-06
75%	1,732	0,6	0,2	1,6	4,760E-07	1,257E-06
80%	2	0,558	0,169	1,558	3,679E-07	1,295E-06
85%	2,380	0,517	0,138	1,517	2,680E-07	1,337E-06
90%	3	0,475	0,106	1,475	1,747E-07	1,384E-06
95%	4,359	0,428	0,071	1,428	8,633E-08	1,444E-06
99%	9,950	0,373	0,030	1,373	1,749E-08	1,524E-06
100%	99,995	0,337	0,003	1,337	1,800E-10	1,584E-06

I grafici risultanti sono:

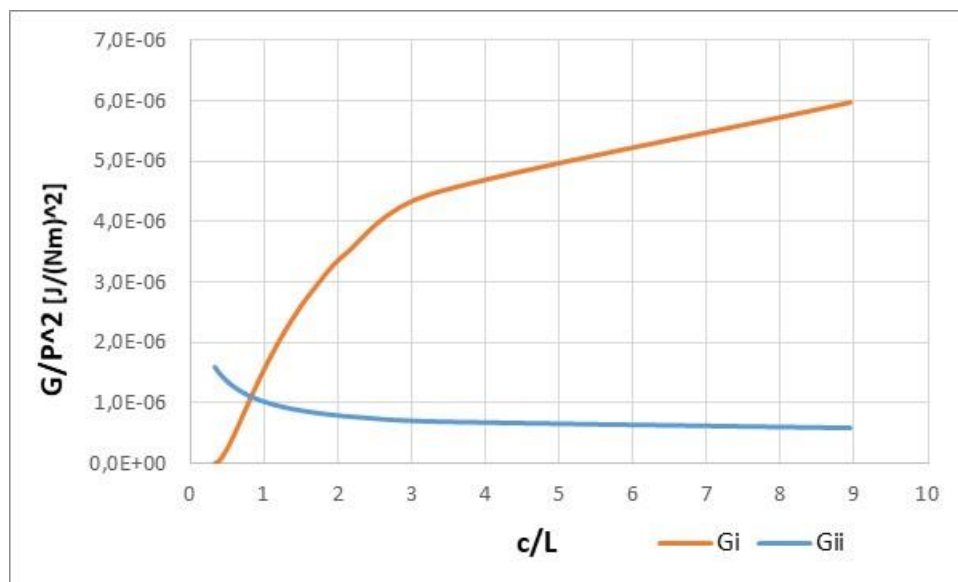


Figura 5.11. Grafico  $c/L - G_I/G_{II}$  del provino MMB 1 utilizzando il metodo di Williams.

Per il provino MMB 2 si ottiene invece:

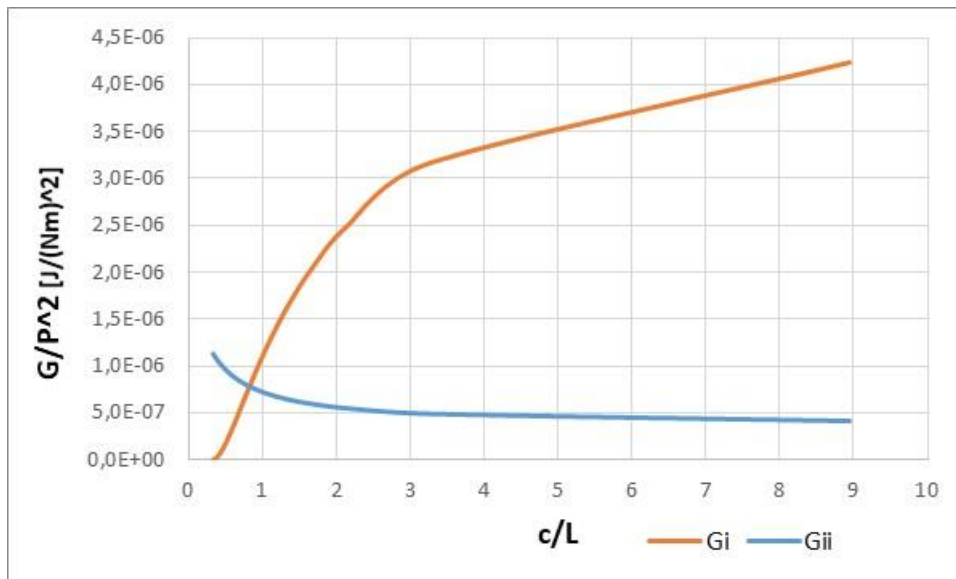


Figura 5.12. Grafico  $c/L - G_I/G_{II}$  del provino MMB 2 utilizzando il metodo di Williams.

Confrontando fra loro i risultati, si nota come l'andamento dei due Modi sia simile tra i due provini. Il metodo classico e di Williams forniscono risultati dello stesso ordine di grandezza (come al solito il metodo di Williams fornisce i risultati più elevati tra i due), mentre il metodo di Kanninen fornisce risultati molto più alti rispetto agli altri. Per quanto non sia stato possibile verificare i risultati con il metodo di Bennati-Valvo, essendo quest'ultimo una variazione del metodo di Williams, è lecito pensare che i risultati finali siano simili a quelli già ottenuti.

In generale, quello che emerge da queste due prove è che i metodi analitici di Kanninen e Williams prevedono con precisione simile andamenti della resistenza a Modo misto I/II quando il rapporto  $c/L$  è spinto verso una maggiore componente di Modo II.

## Capitolo 6: Conclusioni

Lo scopo di questo elaborato di tesi è quello di approfondire la conoscenza sui metodi di rottura a delaminazione di Modo I, Modo II e Modo misto I/II basandosi sulla teoria classica che li descrive, sui modelli alternativi esistenti e sulle normative tecniche che attualmente regolamentano tutte le prove sperimentali. L'elaborato è stato suddiviso in cinque parti:

- Nella prima parte si è introdotto il meccanismo che causa la rottura a delaminazione nei materiali compositi.
- Nella seconda parte si sono elencati i principali test che è possibile eseguire per determinare l'energia di frattura di un Modo, elencando oltre al Modo I e Modo II anche i test disponibili per il Modo III.
- Nella terza parte si è descritto il Modo I, partendo dalla soluzione classica del problema fino ai modelli più avanzati di Kanninen e Williams, completando con l'analisi dei dati ottenuti sperimentalmente su sei provini DCB e con il confronto di tali dati con quelli ottenuti applicando il metodo classico e i metodi avanzati. Si è notato come i metodi analitici non diano precisione elevata rispetto ai metodi sperimentali, fornendo valori molto elevati della resistenza.
- Nella quarta parte si è descritto il Modo II, descrivendo inizialmente la teoria classica e poi i modelli avanzati di Kanninen e Williams, completando con l'analisi dei dati sperimentali ottenuti da cinque provini ENF e con il confronto con quelli ottenuti utilizzando il metodo classico e i metodi avanzati. Il metodo classico fornisce valori vicino a quelli sperimentali, anche se rimangono differenze non prive di nota. Il metodo di Williams sovrastima invece eccessivamente la resistenza.

- Infine, nella quinta e ultima parte si è descritto il Modo misto I/II, partendo dalla soluzione classica e dai modelli più avanzati di Kanninen, Williams e di Bennati-Valvo (che si è dimostrato essere una versione modificata del modello di Williams). A causa della limitata quantità di informazioni è stato possibile eseguire un'analisi dei dati sperimentali solamente su due provini MMB, ed è stato possibile confrontare tra loro solo il metodo classico, di Kanninen e di Williams per lo stesso motivo. I risultati ottenuti dimostrano che metodo classico e di Williams stimano valori simili della resistenza solo durante una preponderante componente di Modo II rispetto al Modo I.

# Bibliografia

1. [https://books.google.it/books?id=MQL7AwAAQBAJ&pg=PA87&lpg=PA87&dq=importanza+delaminazione&source=bl&ots=9tYaoR5cge&sig=asVvveht2R\\_YOKUxmJLfs5mmlHE&hl=it&sa=X&ved=2ahUKEwiw9bWP-uDfAhUD4YUKHVEIB8cQ6AEwA3oECAUQAQ#v=onepage&q=importanza%20delaminazione&f=false](https://books.google.it/books?id=MQL7AwAAQBAJ&pg=PA87&lpg=PA87&dq=importanza+delaminazione&source=bl&ots=9tYaoR5cge&sig=asVvveht2R_YOKUxmJLfs5mmlHE&hl=it&sa=X&ved=2ahUKEwiw9bWP-uDfAhUD4YUKHVEIB8cQ6AEwA3oECAUQAQ#v=onepage&q=importanza%20delaminazione&f=false);
2. Filippo Maria Casadio, *Validazione di modelli numerici agli elementi finiti per la crashworthiness di materiali compositi tramite building block approach*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, A.A. 2015/2016;
3. <http://www.adhesivestoolkit.com/Docs/test/MECHANICAL%20TEST%20METHOD%201%20-%20Mode%20II.xtp>;
4. Marcelo F. S. F. de Moura, *Interlaminar Mode II fracture characterization*, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Porto;
5. James R. Reeder and John R. Crews Jr., *Mixed Mode Bending Method for delamination testing*, AIAA Journal, Volume 28, Number 7, July 1990, Pages 1270—1276;
6. Gary Becht, John W. Gillespie, *Design and analysis of the crack rail shear specimen for mode III interlaminar fracture*, Composites Science and Technology, Volume 31, Issue 2, 1988;
7. P. Robinson, D.Q. Song, *The development of an improved mode III delamination test for composites*, Composites Science and Technology, Volume 52, Issue 2, 1994;
8. András Szekrényes, *Improved analysis of the modified split-cantilever beam for mode-III fracture*, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 51, Issues 9–10, 2009;
9. M. F. Kanninen, *An augmented double cantilever beam model for stud crack propagation and arrest*, International Journal of Fracture, Vol. 9, No. 1, March 1973;
10. M. F. Kanninen, *A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the DCB test specimen*, International Journal of Fracture. Vol. 10, No. 3, September 1974;

11. J. G. Williams, *End Corrections for Orthotropic DCB Specimens*, Composites Science and Technology 35 (1989);
12. ASTM International D5528-13, *Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites*;
13. ASTM International D7905/D7905M – 14, *Determination of the Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites*;
14. ASTM International D6671/D6671M – 13, *Mixed Mode I-Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber Reinforced Polymer Matrix Composites*;
15. Stefano Bennati e Paolo S. Valvo, *An experimental compliance calibration strategy for mixed-mode bending tests*, Procedia Materials Science 3 (2014);
16. James R. Reeder, *Refinements to the Mixed-Mode Bending Test for Delamination Toughness*, NASA Langley Research Center;
17. Kunigal N. Shivakumar, John H. Crews Jr and Vishnu S. Avva, *Modified Mixed-Mode Bending Test apparatus for measuring delamination fracture toughness of laminated composites*, Department of Mechanical Engineering North Carolina A&T State University (1996);
18. Y. Mi, A. Crisfield and G. A. O. Davies, *Progressive delamination using interface elements*, Department of Aeronautics Imperial College (1997);
19. Yeh-Hung Lai, M. Dwayne Rakestraw and David A. Dillard, *The cracked lap shear specimen revisited -a closed form solution*, Engineering Science and Mechanics Department, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg (1994);
20. Gary Becht and John W. Gillespie, Jr, *Design and Analysis of the Crack Rail Shear Specimen for Mode III Interlaminar Fracture*, Center for Composite Materials, Department of Mechanical Engineering, University of Delaware (1987);
21. H. Wang & T. Vu-Khanh, *Use of end-loaded-split (ELS) test to study stable fracture behaviour of composites under mode II loading*, Composite Structures 36 (1996);
22. B. R. K. Blackman, A.J. Brunner & J.G. Williams, *Mode II fracture testing of composites: a new look at an old problem*, Engineering Fracture Mechanics 73 (2006);
23. S. T. Pinho, L. Iannucci, P Robinson, *Formulation and implementation of decohesion elements in an explicit finite element code*, Department of Aeronautics, South Kensington Campus, Imperial College London (2005);

24. John H. Crews, Jr. and James R. Reeder, *A MIXED-MODE BENDING APPARATUS FOR DELAMINATION TESTING*, NASA TECHNICAL MEMORANDUM (1988);
25. Y. Wang & J. G. Williams, *Corrections for Mode II fracture toughness specimens of composites materials*, Composites Science and Technology (1992);