

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Sui cinque corpi regolari

Tesi di Laurea in Algebra Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Verardi Libero

Tesi di Laurea di:
Lucia Bernardini

III Sessione
Anno Accademico 2009-2010

*Ai miei cari nonni,
che mi hanno dato la forza e l'energia,
e alla piccola Natalia*

Introduzione

Lo studio di questa tesi è incentrato sullo studio dei poliedri, in particolare sui poliedri regolari, mostrando come la loro perfezione e simmetria hanno affascinato matematici, scienziati e artisti di ogni genere dall'antichità fino ai giorni nostri.

Il titolo della mia tesi è stato scelto per dare omaggio a Piero della Francesca, mio conterraneo, e per ricordare i suoi studi su questo argomento, in particolare la sua opera *Libellus de quinque corporibus regularibus* incentrata proprio sullo studio dei poliedri regolari.

In questa tesi vengono presentati storicamente i cinque corpi regolari (vedi capitolo 1), mostrando l'importanza e l'influenza che hanno avuto attraverso i diversi periodi storici e le diverse culture.

In particolare vedremo che un primo studio dei poliedri regolari risale alla scuola pitagorica e che successivamente sono stati oggetto di studio di Platone il quale, nel *Timeo*, vuole interpretare i fenomeni legati all'esperienza empirica attraverso i poliedri regolari e con il quale vengono anche chiamati solidi platonici. Euclide dedica l'ultimo libro degli *Elementi* allo studio dei poliedri regolari ed in seguito anche Archimede si occupa di poliedri, in particolare dei poliedri semiregolari o archimedei. E' poi con il Rinascimento che si osserva una ripresa dell'interesse e degli studi della geometria: i poliedri regolari li rivediamo in Piero della Francesca e in Luca Pacioli nella sua opera *De divina proportione*, dove possiamo ammirare le famose tavole dei solidi regolari realizzate da Leonardo da Vinci. Anche Keplero rimane affascinato dai solidi platonici, utilizzati ancora una volta per spiegare i fenomeni na-

turali: egli, nella sua opera *Mysterium Cosmographicum*, vuole descrivere le orbite dei pianeti attraverso i poliedri regolari. Infine vedremo che Cartesio formulò una importante relazione che legava vertici, spigoli e facce dei poliedri regolari, ma fu Eulero un secolo più tardi a dimostrarla e non solo per i solidi platonici ma anche per poliedri più generali.

Nel secondo capitolo vengono analizzati dal punto di vista matematico i poliedri convessi con le relative proprietà e descritti i poliedri dal punto di vista combinatorio, con lo studio dei relativi diagrammi di Schlegel, e gli sviluppi piani dei poliedri.

Infine vengono studiati i cinque corpi regolari, mostrando che sono solamente cinque ed analizzando le varie relazioni che li legano come per esempio la dualità. Inoltre verranno descritte le caratteristiche di simmetria dei solidi platonici, i quali presentano la massima simmetria tra tutti i poliedri.

Dato che in un futuro lavorativo non escluderei la possibilità di intraprendere la professione didattica, ho voluto indagare come vengono insegnati i poliedri a scuola (vedi capitolo 3), dalle elementari fino alle superiori, mostrando alcune attività che si possono fare in classe per meglio comprendere l'argomento e andando ad analizzare se nei libri di testo scolastici sono presenti imprecisioni e definizioni non corrette nel presentare i poliedri regolari. Inoltre verrà presentato anche il software didattico Cabri 3D, adatto a studiare la geometria solida in classe.

Infine nel quarto capitolo verrà analizzato come i poliedri sono stati utilizzati nell'arte da vari artisti, in particolare nella pittura, nell'architettura e nella scultura.

Vedremo che la presenza dei poliedri nell'arte la ritroviamo soprattutto a partire dal primo Rinascimento, periodo in cui l'artista scopre che la matematica è fondamentale a garantire all'opera d'arte bellezza, armonia, equilibrio e rigore. Essi vengono utilizzati in architettura nella realizzazione di edifici, come si può vedere per esempio in Filippo Brunelleschi o più recentemente in Le Corbusier; vedremo inoltre come essi vengono raffigurati in pittura da Dürer, Escher, Dalì e Lucio Saffaro oppure come vengono utilizzati nella

realizzazione di affreschi, per esempio con Piero della Francesca, o di dipinti con il Cubismo, movimento artistico del primo Novecento che consiste nella scomposizione degli oggetti in poliedri.

Indice

Introduzione	i
1 Storia dei poliedri regolari	1
1.1 Scuola pitagorica	2
1.2 Platone	4
1.3 Gli <i>Elementi</i> di Euclide	7
1.4 Geometria alessandrina: Archimede e Apollonio	10
1.5 Pappo e Diofanto	12
1.6 I poliedri regolari e l'alchimia	12
1.7 Piero della Francesca e il Rinascimento	14
1.8 Luca Pacioli e Leonardo	15
1.9 Keplero e il sistema solare	17
1.10 Cartesio e Eulero	19
2 Poliedri	21
2.1 Poliedri convessi	21
2.1.1 Vertici, spigoli e facce	22
2.1.2 Teorema di Eulero	23
2.2 Poliedri dal punto di vista combinatorio	25
2.2.1 Diagrammi di Schlegel	27
2.2.2 Poliedri astratti	30
2.3 Sviluppi piani dei poliedri	31
2.4 Poliedri regolari	36
2.4.1 Simmetrie dei poliedri regolari	46

3	Poliedri regolari nella didattica	57
3.1	Scuole elementari	57
3.2	Scuole medie	62
3.3	Scuole superiori	67
4	Poliedri nell'arte	75
	Conclusioni	95
	Bibliografia	97

Capitolo 1

Storia dei poliedri regolari

Valutando retrospettivamente la mia personale esperienza di studente durante tutto il percorso scolastico dalla scuola elementare fino alle medie superiori, devo riconoscere la carenza della presentazione storica nell'insegnamento della matematica. Infatti i vari insegnanti che ho avuto si limitavano a presentare ogni argomento solo dal punto di vista dimostrativo e senza alcuna presentazione introduttiva. Invece un logico inquadramento storico, che preparasse la mente ad accogliere più facilmente i contenuti proposti, avrebbe facilitato lo studente nell'apprendimento e lo avrebbe anche motivato entusiasmandolo allo studio. Questo però potrebbe essere in alcuni casi rischioso poiché non a tutti gli studenti interessa la storia della matematica, infatti qualcuno di essi preferisce arrivare al “sodo”, alla formula matematica direttamente. Penso quindi che ci debba essere un giusto equilibrio tra l'introduzione storica di un argomento matematico e la trattazione teorica di esso per evitare questi pericoli.

Per questo motivo ritengo che sia importante ai fini didattici introdurre ogni argomento storicamente, rispettandone i suoi elementi costitutivi fondamentali. E' importante utilizzare la storia sia come analisi critica della evoluzione delle idee, sia la storia come sviluppo dei fatti e sia la storia aneddotica. La prima (analisi critica dell'evoluzione delle idee) costituisce il settore d'interesse da privilegiare, se non proprio per lo studente, che a volte potrebbe

rivelarsi immaturo e dunque non preparato ad affrontare situazioni troppo più grandi di lui, almeno per l'insegnante il quale, grazie all'analisi critica dell'evoluzione delle idee matematiche, matura convinzioni e riflessioni scientifiche, epistemologiche e dunque didattiche.

La seconda (storia come sviluppo dei fatti) spiega le origini delle idee, dei problemi, delle teorie che hanno reso la matematica così come è oggi, in modo da considerarla non come una stantia raccolta di cose già fatte e sistemate da sempre e per sempre, ma come un qualcosa in continua evoluzione, fatta dall'uomo per l'uomo. Questa si avvicina di più al mondo dell'allievo.

Infine la terza (storia aneddotica) affascina i giovani e non solo; i matematici, personaggi che dedicano la loro vita a qualche cosa che per i più è misterioso, sono esseri umani che hanno una storia personale e questo li rende meno estranei agli studenti, creando in loro curiosità e interesse. La matematica si smitizza e umanizza e questo grazie al fatto che chi la crea non è al di fuori del mondo, e si avvicina al mondo degli studenti [D'Amore, 1999].

E' per questo motivo che ho voluto introdurre la mia tesi partendo dalla storia dei poliedri regolari evidenziandone in modo particolare i primi due aspetti sopra citati.

1.1 Scuola pitagorica

Il più antico scritto giunto fino a noi in cui si menzionano i cinque poliedri regolari è il *Timeo* di Platone (428/7 a.C.- 348/7 a.C.). Tuttavia, ci sono delle ragioni che portano a pensare che lo studio dei cinque solidi regolari risalga ad un'epoca precedente, alla *scuola pitagorica*. L'attività in campo matematico della scuola pitagorica è presente negli scritti di Platone, Aristotele (384 a.C.- 322 a.C.) e su un passo di Proclo (410- 85 d.C.), ma mentre gli scritti dei primi due ci garantiscono soltanto che la Scuola di Pitagora (575 a.C.- 495 a. C.) si è occupata oltre che di filosofia anche di matematica, il *Riassunto* di Proclo entra più nei dettagli. Nel *Riassunto* si attribuisce alla scuola pitagorica il primato dello studio delle *figure cosmiche*, ovvero, dei

poliedri regolari. Lo scritto di Proclo non è l'unico indizio che abbiamo per sostenere che già la scuola pitagorica conoscesse i solidi regolari. Nel 1885 è stato rinvenuto vicino a Padova un dodecaedro in pietra di origine etrusca, risalente quindi ad un periodo anteriore al 500 a.C. Nella civiltà etrusca si utilizzavano i dodecaedri di pietra come dadi ed essi avevano un significato religioso. Nulla impedisce di pensare che la scuola pitagorica, venuta a contatto con la civiltà etrusca, abbia avuto il merito di trattare il problema della costruzione del dodecaedro da un punto di vista geometrico. I Pitagorici potrebbero aver costruito i cinque poliedri regolari semplicemente accostando un certo numero di poligoni regolari in modo da ottenere prima di tutto un angolo solido, e poi più angoli solidi dello stesso tipo, fino a completare la figura. I poligoni regolari utilizzati sono i triangoli equilateri per il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro e i quadrati per il cubo, due figure piane entrambe certamente note alla scuola di Pitagora. Il dodecaedro ha invece come faccia il pentagono regolare, ma i pitagorici conoscevano anche questa figura piana perché essi usavano come proprio segno di riconoscimento la stella pentagonale che si ottiene dal pentagono regolare tracciandone le diagonali. Inoltre in Sicilia vi è una presenza rilevante di pirite, un minerale di zolfo, che cristallizzandosi assume la forma del *pentagono dodecaedro*, che è un poliedro non regolare, in cui ciascuna delle dodici facce è un pentagono con quattro lati uguali fra loro ed uno di diversa lunghezza (vedi figura 1.1).

L'osservazione di questa forma di cristallizzazione potrebbe aver suggerito ai matematici della scuola di Pitagora l'idea di costruire un solido analogo, ma con tutte le caratteristiche di regolarità. Possiamo quindi attribuire con buona probabilità la costruzione dei poliedri regolari alla scuola pitagorica.



Fig. 1.1: Cristalli pentagono-dodecaedrici di pirite

1.2 Platone

Platone, anche se conosceva molto bene la matematica del suo tempo, non fu un vero ricercatore. Egli è interessato alla purezza concettuale della matematica e alla rigosità con la quale vengono definiti i concetti e non alla tecnica di calcolo o alle regole pratiche. Per lui la matematica ha significato solo in quanto scienza pura, sciolta da ogni suo utilizzo nella pratica; essa è ridotta a pura struttura logica e a puri concetti. La matematica può avvicinare l'uomo alla conoscenza dell'assoluto, può liberare l'uomo dall'apparenza della realtà sensibile in continua trasformazione e fargli cogliere le forme immutabili che si nascondono dietro alle cose: le *idee*. Platone nel *Timeo* vuole interpretare attraverso i poliedri regolari i fenomeni legati all'esperienza empirica. Nell'affresco di Raffaello “*Scuola di Atene*” egli ha in mano proprio questo libro.

Riprendendo le tesi già sostenute da Empedocle, il mondo reale trae origine dai quattro elementi fondamentali *fuoco, terra, aria, acqua*, ai quali Platone associa quattro dei cinque poliedri regolari: al fuoco è associato il tetraedro,

alla terra il cubo, all'aria l'ottaedro e all'acqua l'icosaedro.

“e alla terra diamo la forma cubica perocché delle quattro specie è la meno mobile e di tutti i corpi la più plasmabile. E tale bisogna che sia quello che ha le basi più salde... all'acqua poi la forma che delle rimanenti è più difficile a muoversi, la più mobile di tutte al fuoco, e quella di mezzo all'aria; e così il corpo più piccolo al fuoco, il più grande all'acqua, e quello di mezzo all'aria; e il più acuto ancora al fuoco, e quello che gli vien dopo all'aria, e il terzo all'acqua... quel corpo solido che ha assunto la figura della piramide sia l'elemento e il seme del fuoco, e il secondo in ordine di generazione diciamolo quello dell'aria, e il terzo dell'acqua” [Il Timeo, 2001]

Il dodecaedro veniva invece associato da Platone all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta quintessenza, attribuendogli quindi un ruolo di tipo ornamentale e decorativo (vedi figure 1.2-1.6).

“restava una quinta combinazione e Dio se ne giovò per decorare l'universo”[Il Timeo, 2001]

Quello che Platone intende fare è spiegare le caratteristiche e il comportamento dei quattro elementi attraverso la configurazione spaziale dei quattro poliedri regolari. Egli interpreta i fenomeni naturali attraverso la geometria: le proprietà geometriche dei poliedri spiegano quelle dei quattro elementi.

“non accorderemo a nessuno che vi siano corpi visibili più belli di questi” [Il Timeo, 2001].

L'aspetto macroscopico dei quattro elementi si spiega sulla base della loro struttura microscopica costituita da particelle aventi la forma dei quattro poliedri regolari, i quali vengono anche chiamati *figure cosmiche* perché il Cosmo è composto da particelle aventi la loro forma. Queste particelle non



Fig. 1.2: tetraedro-fuoco

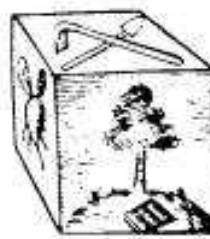


Fig. 1.3: cubo-terra

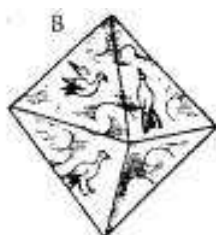


Fig. 1.4: ottaedro-aria

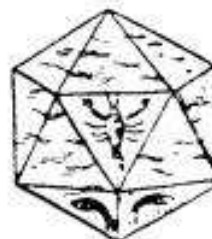
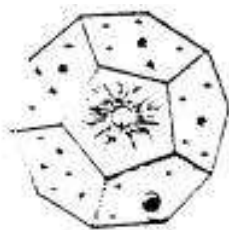


Fig. 1.5: icosaedro-acqua

Fig. 1.6:
dodecaedro-quintessenza

rappresentano per Platone l'elemento primo indivisibile, perché ognuna di esse è composta ulteriormente da figure geometriche più semplici che sono i triangoli rettangoli scaleni, metà di un triangolo equilatero. Queste figure sono, in fine, concepite come rappresentazioni di numeri: alle radici della realtà la teoria platonica pone quindi il numero. La realtà ultima del mondo è fondata sui rapporti numerici, emanazione del divino sulla natura, che garantiscono l'armonia, l'unità e la razionalità.

La descrizione dei solidi data da Platone esercitò una grande influenza sul pensiero e sull'attività scientifica e filosofica delle generazioni successive,

aprendo la strada ad un susseguirsi di studi finalizzati all'individuazione delle proprietà geometriche dei cinque *solidi platonici*.

1.3 Gli *Elementi* di Euclide

Gli *Elementi* di Euclide (323- 285 a.C.) ci offrono la prima occasione per trattare i cinque solidi platonici da un punto di vista esclusivamente geometrico. Gli *Elementi* sono strutturati in tredici libri: i primi quattro trattano la geometria elementare del piano, il V e il VI sono dedicati alla teoria generale delle proporzioni e alle sue applicazioni in geometria piana, i libri VII, VIII e IX studiano i numeri interi positivi e il X gli irrazionali, gli ultimi tre libri trattano di geometria dello spazio. Nel tredicesimo e ultimo libro troviamo i poliedri regolari, in cui Euclide si propone di inscrivere ciascuno di essi in una sfera di dato diametro e di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto e il diametro della sfera circoscritta. In tal modo le misure tra gli spigoli dei cinque poliedri regolari vengono espresse mediante uno stesso parametro (il diametro della sfera che li circonda) e quindi sono tra loro confrontabili.

Si può inoltre esprimere il volume, la superficie totale, il raggio della sfera inscritta r e circoscritta R di un poliedro regolare in funzione dello spigolo l . Nella seguente tabella sono riportati tali relazioni e il valore dell'angolo diedro dei solidi platonici.

POLIEDRO	VOLUME	SUPERFICIE	r	R	DIEDRO
Tetraedro	$l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$	$l^2 \sqrt{3}$	$l \frac{\sqrt{6}}{12}$	$l \frac{\sqrt{6}}{4}$	$\arccos \frac{1}{3}$
Cubo	l^3	$6l^2$	$\frac{l}{2}$	$l \frac{\sqrt{3}}{2}$	90°
Ottaedro	$l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$	$2l^2 \sqrt{3}$	$l \frac{\sqrt{6}}{6}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos \frac{-1}{3}$
Dodecaedro	$l^3 \frac{(15+7\sqrt{5})}{4}$	$3l^2 \sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$l \frac{\sqrt{3(1+\sqrt{5})}}{4}$	$\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$
Icosaedro	$l^3 \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$	$5l^2 \sqrt{3}$	$l \frac{\sqrt{3(3+\sqrt{5})}}{12}$	$l \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\arccos \frac{-\sqrt{5}}{3}$

Fino ad ora abbiamo dato per scontato che non esistano altri poliedri regolari oltre al tetraedro, al cubo, all'ottaedro, all'icosaedro e al dodecaedro. Euclide dopo aver costruito i cinque poliedri regolari conclude gli *Elementi* dimostrando che non vi possono essere altre configurazioni poliedriche regolari al di fuori delle cinque già note. Questa dimostrazione sfrutta una proprietà, esposta nel libro XI, riguardante gli angoli solidi convessi:

“Se un angolo solido è compreso da tre angoli piani la somma di due qualunque di essi, presi in qualunque modo, è maggiore dell'angolo rimanente”
[Elementi, libro XI, prop. 20]

Dimostrazione. Consideriamo l'angolo solido formato da tre piani α , β e γ , cioè l'angolo triedro nella figura 1.7

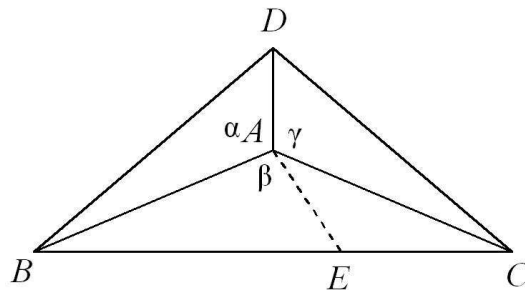


Fig. 1.7: angolo triedro

Euclide osserva che se i tre angoli piani del triedro sono tutti uguali tra loro, la dimostrazione è banale (così come è anche banale nel caso in cui due angoli sono uguali, mentre il terzo no). Consideriamo quindi il caso generale in cui i tre angoli piani sono diversi tra loro e poniamo l'angolo appartenente al piano β maggiore degli altri due. Tracciamo una semiretta uscente da A e giacente sul piano β in modo tale che gli angoli BAE e BAD siano uguali tra loro. Fissiamo i punti E e D in modo che risulti $AD=AE$. Determiniamo i punti B e C conducendo una retta qualunque per E e tracciamo i segmenti BD e CD. Per costruzione, i triangoli BAD e BAE sono congruenti e quindi $BE=BD$. Poiché *“in ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è*

maggiore del lato rimanente” (Libro 1, prop.20), con riferimento al triangolo BCD possiamo scrivere la seguente relazione:

$$BD + DC > BC = BE + EC = BD + EC$$

da cui segue che:

$$DC > EC$$

Consideriamo ora la coppia di triangoli ADC e ACE: essi hanno due lati congruenti, $AD=AE$, il lato AC in comune, mentre $DC > EC$ e dunque anche $\hat{D}\hat{A}\hat{C} > \hat{E}\hat{A}\hat{C}$. Tenendo presente che per costruzione $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{B}\hat{A}\hat{E}$ abbiamo:

$$\hat{D}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{D} > \hat{E}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{E}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{E} = \hat{B}\hat{A}\hat{C}$$

In modo analogo si procede per dimostrare che per altre due coppie di angoli del triedro la loro somma è maggiore dell'angolo restante. \square

Dimostriamo ora che:

“Ogni angolo solido è compreso da angoli piani la cui somma è minore di quattro angoli retti” [Elementi, libro XI, prop. 21]

Dimostrazione. La dimostrazione di Euclide si limita solo al caso degli angoli solidi triedri. La figura a cui dobbiamo far riferimento è analoga a quella della proposizione precedente (fig. 1.7) dove, però, i punti B, C e D sono ora presi in modo qualsiasi sulle semirette uscenti dal vertice A. Tracciamo le congiungenti BC, CD e BD e utilizziamo la proposizione precedente riferendola ai tre angoli triedri di vertice rispettivamente B, C e D. Otteniamo le seguenti disuguaglianze tra angoli:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{A}\hat{B}\hat{D} > \hat{C}\hat{B}\hat{D}$$

$$\hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{D} > \hat{B}\hat{C}\hat{D}$$

$$\hat{A}\hat{D}\hat{B} + \hat{A}\hat{D}\hat{C} > \hat{B}\hat{D}\hat{C}$$

che, sommate membro a membro, conducono alla seguente disuguaglianza:

$$\hat{A}BC + \hat{A}BD + \hat{A}CB + \hat{A}CD + \hat{A}DB + \hat{A}DC > \hat{C}BD + \hat{B}CD + \hat{B}DC$$

Il secondo membro della disuguaglianza rappresenta la somma degli angoli interni del triangolo BCD e quindi la quantità al primo membro risulta maggiore di due angoli retti. Se ai nove angoli interni appartenenti ai tre triangoli ABC, ADC e ABD, la cui somma vale in tutto sei angoli retti, sottraiamo i sei angoli al primo membro della disuguaglianza, la cui somma è maggiore di due angoli retti, restando i tre angoli $\hat{B}AC$, $\hat{B}AD$ e $\hat{C}AD$, la cui somma risulta minore di quattro angoli retti, cioè:

$$\hat{B}AC + \hat{B}AD + \hat{C}AD < 4 \text{ angoli retti}$$

La somma degli angoli piani che concorrono a formare un angolo solido triedro è minore di quattro angoli retti. \square

Euclide arriva infine ad enunciare la seguente proposizione come conseguenza delle due proposizioni precedenti:

“Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette, non può costruirsi nessun'altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali” [Elementi, libro XIII, prop. 18]

1.4 Geometria alessandrina: Archimede e Apollonio

Dopo Euclide, Alessandria continua ad affermarsi come l'indiscusso punto di riferimento di tutta l'attività culturale del mondo greco. Gli studi matematici compiono un grande balzo in avanti; al Museo di Alessandria devono la loro formazione altre due figure notevoli di matematici: Archimede (287-212 a.C.) e Apollonio.

Archimede dopo gli studi compiuti sotto la guida dei continuatori di Euclide si trasferisce a Siracusa, ma continua a mantenere stretti contatti con l'attività scientifica di Alessandria. Anche Archimede si occupa di poliedri, ma non di quelli strettamente regolari: egli ricerca quelle forme poliedriche che presentino delle caratteristiche di regolarità, ma non tutte quelle che si riscontrano nelle cinque figure platoniche. Egli richiede la regolarità delle facce, cioè le facce del poliedro devono essere ancora poligoni regolari, ma non pretende che siano tutte dello stesso tipo; inoltre i vertici devono essere tra loro congruenti: ciò significa che le facce devono essere disposte nello stesso ordine intorno ad ogni vertice. I poliedri che presentano queste caratteristiche sono detti *semiregolari* o anche *archimedei*. Anche per questi solidi abbiamo un numero limitato di possibilità, infatti sono in tutto tredici tutte individuate da Archimede (vedi fig 1.8).

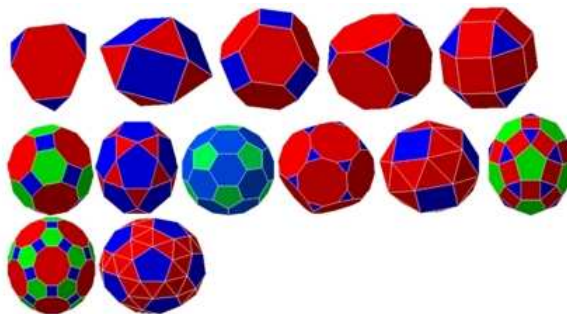


Fig. 1.8: Poliedri archimedei

Apollonio compose molte opere, tutte però andate perdute, tra cui un trattato *Sopra il confronto del dodecaedro e dell'icosaedro*. Questa notizia ci viene fornita da Ipsicle, matematico alessandrino vissuto intorno al 150 a.C., che sostiene di aver preso spunto per la stesura del suo XIV libro degli *Elementi* dal testo di Apollonio. Gli *Elementi* di Euclide e il XIV libro degli *Elementi* di Ipsicle ci fanno conoscere lo spigolo, la superficie, il volume, il raggio del cerchio che circoscrive la faccia del poliedro regolare in funzione del raggio r della sfera che circoscrive il poliedro.

1.5 Pappo e Diofanto

A partire dal II secolo a.C. inizia la decadenza della ricerca scientifica mentre aumenta sempre più l'interesse per le scienze occulte come la magia, l'astrologia e l'alchimia. Fino al II secolo d.C. gli studi matematici spostano il loro interesse dall'indagine teorica a quella applicativa. Verso il III secolo d.C. abbiamo una riscoperta e una rinascita della matematica pura con gli studi di Pappo e di Diofanto. Pappo affronta il problema dei poliedri inscritti in una sfera in modo nuovo, attraverso la ricerca delle sezioni circolari della sfera contenenti i vertici dei poliedri, fornendo dimostrazioni alternative e generalizzazioni ai teoremi fino ad allora dimostrati.

Diofanto e Pappo segnano una breve ripresa della matematica, ma con essi si conclude la fase creativa della matematica ellenistica. La civiltà alessandrina si conclude definitivamente intorno al 640 d.C. quando gli arabi conquistano l'Egitto. L'algebra avanza e cresce grazie all'influenza del mondo arabo, mentre la fase creativa della geometria si arresta e si dovrà aspettare il Rinascimento per avere una sua ripresa attraverso l'elaborazione delle idee e dei risultati degli antichi, ma con un atteggiamento nuovo e liberato dai vincoli del pensiero greco.

1.6 I poliedri regolari e l'alchimia

Nel XIV secolo l'alchimia è in Europa ampiamente diffusa; la concezione parmenidea e pitagorica dell'unità della materia (la materia è unica ma può prendere forme diverse) e quella di origine empedoclea dei quattro elementi (fuoco, terra, aria e acqua) come costituenti della materia, vengono condivise dagli alchimisti. L'alchimia è un insieme di procedimenti empirici come la lavorazione dei metalli, della ceramica, la colorazione di tessuti, la produzione di medicinali, e di dottrine filosofiche della scuola greca ed alessandrina. A questo si aggiungono credenze mistiche e simboliche, riti e pratiche della magia e della stregoneria. Per gli alchimisti all'origine del mondo reale si trova la "materia primaria" che non contiene in sé alcuna forma e alcuna

distinzione. La materia passa dalla forma unitaria alle forme molteplici in virtù di due principi contrapposti, indicati con il nome di Zolfo e Mercurio, ai quali in un'epoca successiva viene aggiunto un terzo principio, il Sale. Lo Zolfo è il principio attivo, caldo e stabile; il Mercurio è il principio passivo, freddo e volatile; il Sale funge da mezzo di congiunzione tra i due precedenti principi. Dalla differenziazione della materia derivano i quattro elementi terra, fuoco, aria e acqua. Ai quattro elementi gli alchimisti ne aggiungono successivamente un quinto, la "quintaessenza", che rappresenta la parte occulta, essenziale e attiva della materia. L'aggiunta del quinto elemento completa la corrispondenza elemento-poliedro regolare (vedi fig. 1.9).



Fig. 1.9: Corrispondenza elemento-poliedro

Tuttavia nell'alchimia si perde in parte la matematizzazione della realtà, presente invece nel *Timeo* di Platone. Anche la corrispondenza elemento-poliedro regolare è svuotata dal suo significato originario perché assume ora un carattere puramente simbolico.

1.7 Piero della Francesca e il Rinascimento

Nel Rinascimento si osserva una ripresa dell'interesse e degli studi della geometria e questa è dovuta soprattutto agli artisti, che considerano questa disciplina indispensabile nella realizzazione di un'opera d'arte. L'arte rinascimentale, infatti, si avvicina al metodo scientifico, al contrario di quella medievale, e l'artista non è più un semplice osservatore della natura ma un vero e proprio studioso. Sono i pittori fiorentini che all'inizio del Quattrocento riscoprono la prospettiva come modo di rappresentare sul quadro gli oggetti reali secondo i principi scientifici dell'ottica geometrica.

Piero della Francesca (1410/20 -1492) è considerato colui che ha dato una coerente base teorica alla prospettiva centrale. Secondo Piero è la matematica che può fornirci gli strumenti per capire e per rappresentare nei dipinti la realtà, attraverso le armonie geometriche e le proporzioni. Nel suo trattato *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Piero sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ricondotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano la forma eterna, l'eterna perfezione. Vengono quindi riconsiderati i cinque poliedri regolari a distanza di secoli come modello di perfezione geometrica e Piero si preoccupa anche di studiare le loro proiezioni.

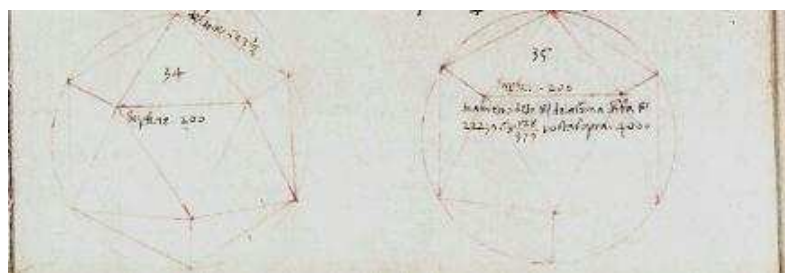


Fig. 1.10: Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Codice vaticano urbinatese latino 632, Firenze, 2005, tavola icosaedro

Il suo trattato riprende la costruzione euclidea dei poliedri inscritti nella sfera: assegnando un determinato valore al diametro egli calcola il corrispondente valore dello spigolo, della superficie e del volume del poliedro inscritto e viceversa; inoltre affronta anche un altro tipo di problema, quello riguardante l'iscrizione di un poliedro in un altro poliedro.

1.8 Luca Pacioli e Leonardo

Del *De quinque corporibus regularibus* esiste una versione in volgare nella *De divina proportione* di Luca Pacioli (1445-1514), allievo di Piero della Francesca; per questo fu accusato di plagio dal Vasari, il quale nelle *Vite* ha osservato che una delle cose peggiori che possa accadere a un uomo è di lavorare e studiare a beneficio di altri.

Il volume *Divina proportione* deve molta della sua fama al fatto che le sessanta tavole dei solidi regolari, semiregolari e stellati furono

“facte e formate per quella ineffabile mano sinistra a tutte discipline mathematici accomodatissima del prencipe oggi fra i mortali, pro prima fiorentino, Leonardo da Vinci”[De divina Proportione, 2000]

il quale ha voluto mostrare i solidi non appoggiati semplicemente su una superficie piana, né galleggianti nello spazio astratto, bensì sospesi mediante un cordoncino per evidenziarne il peso e la solidità (vedi figure 1.11-1.15). Luca Pacioli ha inoltre costruito dei modellini di legno dei poliedri e le tavole di Leonardo (1452- 1519) costituiscono quindi l'equivalente grafico delle sculture lignee di Pacioli. Stiamo assistendo ad un processo di visualizzazione della geometria euclidea che conduce le forme astratte dei solidi platonici ad incarnarsi in concrete forme materiali, scolpite in legno o disegnate in prospettiva.

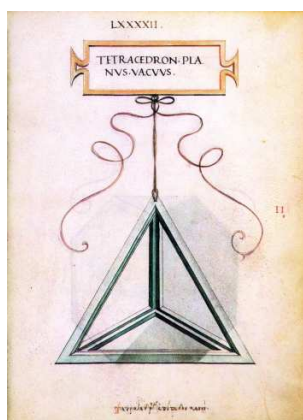


Fig. 1.11: Tetracedron piano vacuo

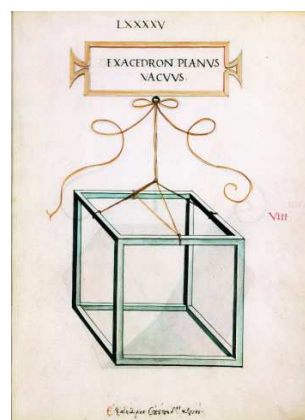


Fig. 1.12: Exacedron piano vacuo

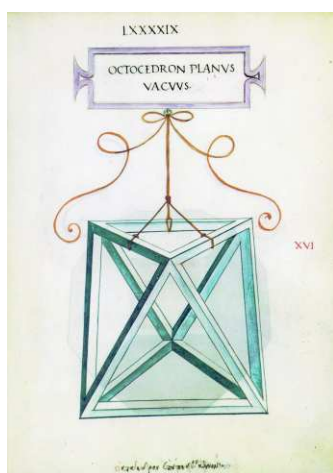


Fig. 1.13: Ottaedro piano vacuo

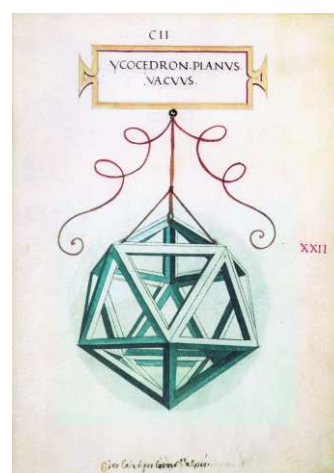


Fig. 1.14: Ycokedron piano vacuo

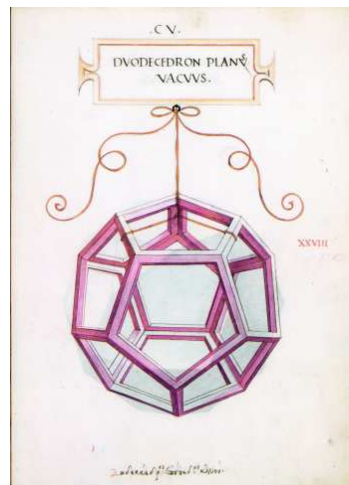


Fig. 1.15: Dodecaedro piano vacuo

1.9 Keplero e il sistema solare

Nel Rinascimento lo scopo della scienza e dell'arte è quello di studiare il mondo della natura e la sua rappresentazione in termini razionali. Per gli scienziati del Quattrocento e per quelli fino al Seicento, Dio ha creato l'universo secondo un disegno matematico; occuparsi di scienza quindi permette di avvicinarsi al progetto divino, a Dio.

Di questa mentalità fa parte Keplero (1571- 1630) il quale è convinto che l'universo è ordinato secondo un piano matematico. Nella sua opera *Mysterium Cosmographicum* ritroviamo i solidi regolari, ancora una volta utilizzati per spiegare i fenomeni naturali. Intento del trattato è

“dimostrare che Dio nel creare l'universo e nel regolare l'ordine del Cosmo, ebbe in vista i cinque corpi regolari della geometria, già conosciuti dai tempi dei pitagorici e di Platone, e che ha fissato in accordo con le loro dimensioni il numero dei cieli, le loro proporzioni, le relazioni dei loro movimenti.”

[*Mysterii Cosmographici*, 1858]

Keplero vuole spiegare le orbite dei pianeti del sistema solare usando le cin-

que figure platoniche. A quest'epoca si conoscono solo sei pianeti: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno. Keplero nel realizzare il suo modello di sistema solare, mette in relazione il raggio dell'orbita intorno al Sole di ciascun pianeta con lo spigolo di uno dei cinque poliedri regolari. Egli traccia una sfera di centro il Sole e il cui raggio coincida con quello dell'orbita di Saturno, nella quale vi inscrive un cubo e in questo un'altra sfera il cui raggio, secondo Keplero, viene a coincidere con esattamente con il raggio dell'orbita di Giove. Nella sfera di Giove vi inscrive un tetraedro che a sua volta circoscrive una sfera il cui raggio è quello dell'orbita di Marte. Nella sfera di Marte inscrive il dodecaedro che è circoscritto alla sfera della Terra; quindi inscrive nella sfera della Terra l'icosaedro che determina la sfera di Venere. Infine nella sfera di Venere inscrive l'ottaedro che è circoscritto alla sfera di Mercurio. In questo modello abbiamo la successione pianeta-poliedro: Saturno, cubo, Giove, tetraedro, Marte, dodecaedro, Terra, icosaedro, Venere, ottaedro, Mercurio (vedi figura 1.16).

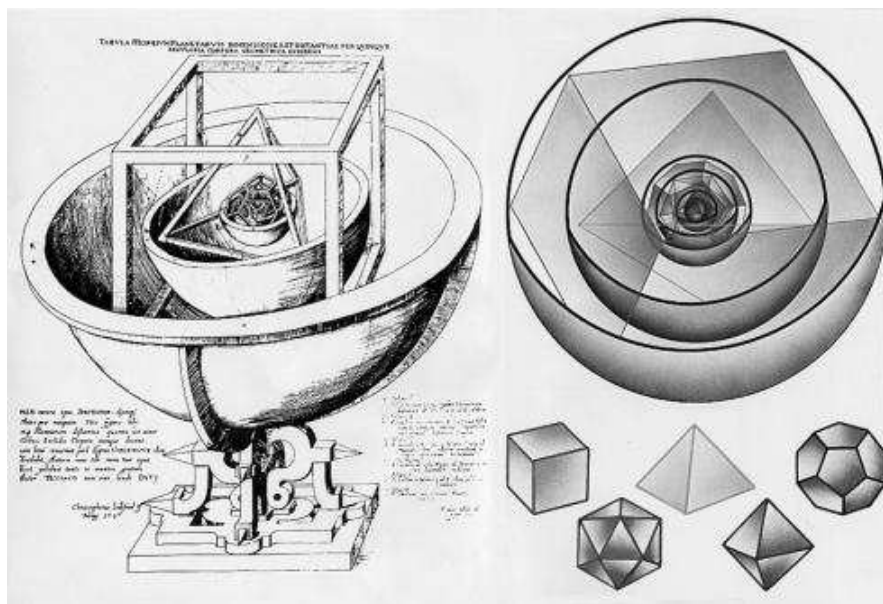


Fig. 1.16: Modello planetario di Keplero

Keplero successivamente si rende conto che il suo modello planetario non è corretto perché non corrisponde ai risultati dell'osservazione ed è costretto ad abbandonare la sua ipotesi. Il modello comunque conteneva gli ingredienti essenziali del metodo scientifico che ha portato l'evoluzione della scienza: da una parte era basato sul patrimonio dei dati astronomici, dall'altra era confutabile tramite ulteriori osservazioni.

1.10 Cartesio e Eulero

Nel 1659 è stata ritrovata una copia del trattato *De solidorum elementis* di Cartesio (1596- 1650) che Leibniz (1646- 1717) fece nel 1676. In questo trattato Cartesio formulò una relazione che legava vertici, spigoli e facce dei poliedri regolari, ma egli non si accorse dei suoi importanti risultati.

Fu il matematico Eulero (1707- 1783), un secolo più tardi, a riscoprire e dimostrare la formula che porta il suo nome:

$$V + F = S + 2$$

che venne poi dimostrata non solo per i poliedri regolari ma anche per solidi e superfici molto più generali. L'intenzione di Eulero è quella di trovare una classificazione soddisfacente per le figure dello spazio in analogia con quelle del piano, ma constatato che un poliedro non può essere classificato solo in base al numero di facce (F), ricorre anche agli spigoli (S) e vertici (V).

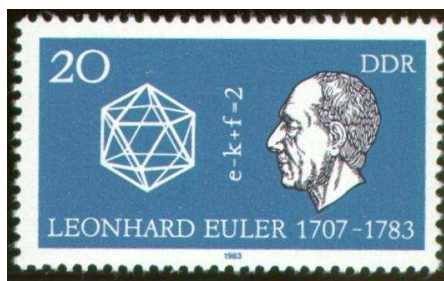


Fig. 1.17: Francobollo della Repubblica Democratica Tedesca per commemorare il 200-esimo anniversario della morte di Eulero

Da allora l'interesse matematico e scientifico per i poliedri regolari non è mai venuto meno; via via si è cercato di trovare i solidi platonici nelle forme della natura.

Per esempio, D'Arcy Wentworth Thompson (1860- 1948) cercò di analizzare i processi biologici partendo dai loro aspetti matematici e fisici. Egli studiò le strutture degli scheletri dei Radiolari, organismi microscopici che fanno parte del plancton marino, e osservò che questi scheletri hanno la forma dei solidi poliedrici regolari (vedi fig. 1.18).

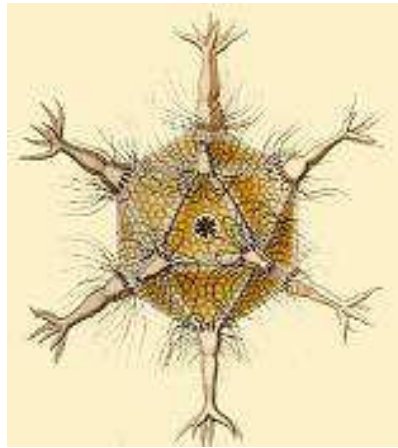


Fig. 1.18: Forma icosaedrica di un radiolare

Molti studiosi continuano ancora oggi a porre i cinque corpi regolari alla base della struttura fisica dell'universo mantenendo viva l'idea di Platone [Gario, 1979].

Capitolo 2

Poliedri

In questo capitolo vengono analizzati i poliedri regolari dal punto di vista matematico: prima si introduce la nozione di poliedro convesso con le relative proprietà e relazioni che riguardano gli elementi costitutivi di essi.

Poi vengono descritti i poliedri dal punto di vista combinatorio, con lo studio dei relativi diagrammi di Schlegel, e gli sviluppi piani dei poliedri.

Infine verranno analizzati i cinque corpi regolari studiando le varie relazioni che intercorrono tra essi e le loro simmetrie.

2.1 Poliedri convessi

Sia E uno spazio euclideo.

Definizione 2.1. Un sottoinsieme $S \subset E$ si dice *limitato* se è contenuto in un disco, cioè se esistono $C \in E$ ed $r > 0$ tali che $S \subset D(C, r)$.

Definizione 2.2. Un **poliedro convesso** è un sottoinsieme limitato di E che non è contenuto in un sottospazio affine proprio di E e che è l'intersezione di un numero finito di semispazi.

Definizione 2.3. Sia A uno spazio affine reale. Un sottoinsieme S di A si dice *convesso* se per ogni $P, Q \in S$ il segmento PQ è contenuto in S .

Un poliedro convesso è un insieme convesso perché lo è ogni semispazio. La dimensione di E è detta *dimensione del poliedro*. Se $\dim(E)=1$ si ottiene un segmento. Se $\dim(E)=2,3$ un poliedro convesso si dice *poligono convesso* o *solido convesso* rispettivamente.

Supponiamo che $\dim(E)=3$, ci troviamo quindi nello spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale \mathbb{R}^3 .

Dunque stiamo considerando uno spazio affine reale su uno spazio vettoriale reale a tre dimensioni in cui per ogni coppia di vettori $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ è assegnato il seguente prodotto scalare definito positivo:

$$x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i = 1, 2, 3$$

Inoltre \mathbb{R}^3 è uno *spazio metrico* con la topologia indotta dalla distanza euclidea:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

con

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

D'ora in poi chiameremo semplicemente poliedri i solidi convessi.

2.1.1 Vertici, spigoli e facce

Sia $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un solido convesso. Se h è un piano di \mathbb{R}^3 tale che Π sia contenuto in uno dei due semispazi definiti da h , allora abbiamo le seguenti possibilità:

- $h \cap \Pi = \emptyset$;
- $h \cap \Pi$ è un punto, che si dice *vertice* di Π ;
- $h \cap \Pi$ è un segmento, che si dice *spigolo* (o *lato*) di Π ;
- $h \cap \Pi$ è un poligono, che si dice *faccia* di Π .

Dal fatto che Π è intersezione di un numero finito di semispazi segue che esso possiede un numero finito V di vertici, S di spigoli ed F di facce.

Un poliedro è quindi una regione dello spazio delimitata da piani che lo intersecano in facce ed inoltre vale che:

- ogni spigolo è un lato di due facce
- ogni vertice è un estremo di almeno tre spigoli
- ad ogni vertice concorrono almeno tre facce [Sernesi, 1992].

Definizione 2.4. Si chiama *diedro* ciascuna delle due parti in cui lo spazio è diviso da due semipiani aventi lo stesso bordo, inclusi questi due semipiani.

Definizione 2.5. Dati un poligono convesso di un numero $n \geq 3$ qualsiasi di lati e un punto V esterno al suo piano, si chiama *angoloide* di vertice V la figura formata da tutte le semirette di origine V che passano per i diversi punti del dato poligono.

Esempio 2.1. Se $n = 3$ l'angoloide si chiama anche *triedro* [Zwirner, Scaglianti, 1998].

Queste ultime due definizioni sono riprese da un testo scolastico per la scuola secondaria e si può notare che nella definizione di angoloide viene dato per scontato che si sta considerando la porzione convessa di spazio compresa fra le facce uscenti da uno stesso vertice e questo atteggiamento è molto frequente nei libri di testo per le superiori (si veda capitolo 3).

2.1.2 Teorema di Eulero

Analizziamo ora una relazione che evidenzia importanti legami fra gli elementi che costituiscono i poliedri, in particolare che riguardano il numero di facce, spigoli e vertici.

Teorema 2.1.1 (Formula di Eulero). *Sia Π un poliedro. Se indichiamo con V il numero dei vertici di Π , con S il numero degli spigoli e con F il numero delle facce allora vale la seguente relazione:*

$$V + F - S = 2 \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Supponiamo che Π sia ottenuto attraverso la seguente costruzione: si parte da una sua faccia e si procede aggiungendone poi una alla volta in ogni fase in modo che ogni nuova faccia che si aggiunge abbia solo lati adiacenti in comune con quelle inserite precedentemente (vedi fig. 2.1).

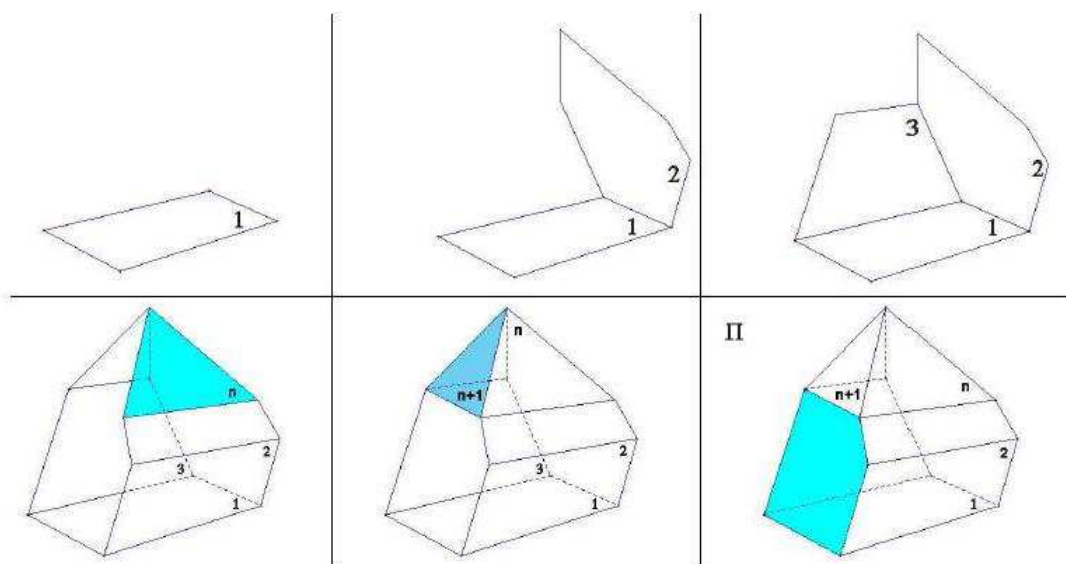


Fig. 2.1: Costruzione di Π

Ad ogni stadio del procedimento denotiamo con Φ il numero $V - S + F - 1$. Per una sola faccia si ha che $\Phi = 0$ perché $F=1$ e supponiamo che la singola faccia sia un poligono di l lati, abbiamo $V=l$ e $S=l$ e quindi

$$\Phi = V - S + F - 1 = 1 + l - l - 1 = 0$$

Procediamo per induzione sul numero di facce inserite, dimostrando che finché il poliedro non è stato completato, si ha $\Phi = 0$.

Supponiamo che ciò sia vero a un dato stadio della costruzione in cui restano da inserire almeno due facce ancora. Aggiungiamo una nuova faccia F avente p lati, di cui q consecutivi siano in comune con le precedenti; pertanto $q+1$ vertici di F appartengono alle precedenti facce. Abbiamo quindi aggiunto una nuova faccia, $p-q$ nuovi spigoli e $p-q-1$ nuovi vertici. Denotando con Φ' la quantità corrispondente di Φ relativa alla nuova configurazione, si ha per ipotesi induttiva

$$\Phi' = \Phi + (p - q - 1) - (p - q) + 1 = \Phi = 0$$

come asserito. Osserviamo che quando si aggiunge l'ultima faccia non si modifica né il numero dei vertici né quello degli spigoli, mentre il numero delle facce aumenta di uno (vedi fig. 2.2).

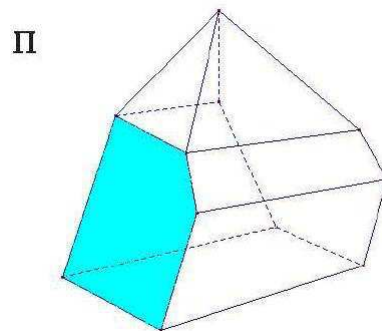


Fig. 2.2: Chiusura di Π

Quindi per Π si ha $\Phi = 1$, cioè la (2.1) [Sernesi, 1992].

□

2.2 Poliedri dal punto di vista combinatorio

Definizione 2.6. Se s ed s' sono vertici, o spigoli, o facce di un poliedro, la scrittura

$$s < s'$$

che viene chiamata *relazione di incidenza*, sta ad indicare che s (che potrà essere un vertice o uno spigolo) è contenuto in s' (che potrà essere uno spigolo o una faccia).

Definizione 2.7. Chiamiamo *bandiera* di un poliedro Π una terna (v, s, f) dove v è un vertice di Π , s è uno spigolo di Π , f è una faccia di Π , ed inoltre $v < s < f$.

Definizione 2.8. Se v è un vertice di un poliedro Π , la *figura al vertice* di Π in v è la poligonale, non necessariamente piana, i cui vertici sono (ordinatamente) i punti medi degli spigoli uscenti da v .

Esempio 2.2. Si veda la figura 2.3 come esempio di figura al vertice.

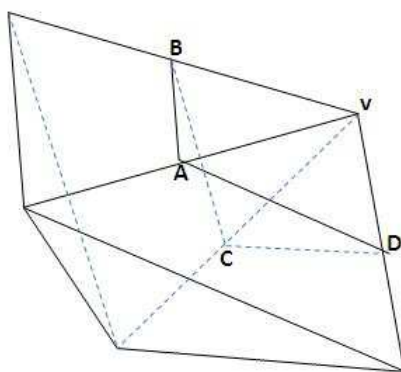


Fig. 2.3: La figura al vertice di v è la poligonale non piana ABCD

Definizione 2.9. La *valenza* di un vertice è il numero degli spigoli, o equivalentemente il numero delle facce che escono da quel vertice.

Definizione 2.10. Se Π e Π' sono due poliedri e se A (rispettivamente A') è l'insieme dei vertici, spigoli e facce di Π (rispettivamente di Π'), chiamiamo **isomorfismo combinatorio** tra Π e Π' un'applicazione biunivoca

$\tau : A \rightarrow A'$ tale che:

$$x < y \text{ in } A \Leftrightarrow T(x) < T(y) \text{ in } A'$$

Definizione 2.11. Due poliedri Π e Π' si dicono **combinatoriamente equivalenti** se esiste un isomorfismo combinatorio tra Π e Π' .

Dato un poliedro Π , l'insieme degli isomorfismi combinatori di Π in se stesso si indica con $\text{Aut}(\Pi)$.

Dal punto di vista combinatorio, l'unica cosa che conta in un poliedro è il reticolato di vertici, spigoli e facce. L'equivalenza combinatoria definita in 2.11 è la relazione di equivalenza che ci dice quando due poliedri devono essere considerati la stessa cosa. Ad esempio, un cubo e un parallelepipedo sono indistinguibili da questo punto di vista; quindi in questo contesto le proprietà metriche non contano.

Se due poliedri sono combinatoriamente equivalenti allora hanno in particolare lo stesso numero di facce, spigoli e vertici; non vale però il viceversa.

Esempio 2.3. Nella figura 2.4 è rappresentato un poliedro con 8 vertici, 12 spigoli, e 6 facce ovvero con un numero di facce, vertici e spigoli di un cubo, ma non è combinatoriamente equivalente ad esso [Dedò, 1999].

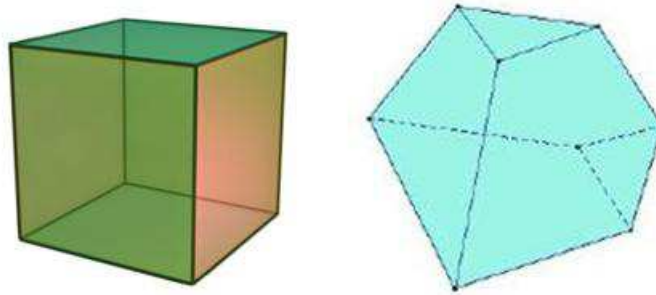


Fig. 2.4: Poliedri non combinatoriamente equivalenti

2.2.1 Diagrammi di Schlegel

Quando si studia un poliedro dal punto di vista combinatorio, e quindi si ignorano quantità metriche come la lunghezza degli spigoli o la misura degli

angoli, fa comodo poter usare un grafo piano, in particolare viene utilizzato il *diagramma di Schlegel*. Esso è un particolare grafo piano che ricostruisce l'intera struttura combinatoria di un poliedro non tenendo conto delle caratteristiche metriche.

Definizione 2.12. Si definisce *grafo piano* un insieme finito di punti chiamati *nodi*, *linee* e *regioni*, appartenenti a un piano che soddisfano le seguenti condizioni:

- ogni linea contiene due nodi alle sue estremità;
- i nodi si trovano solo alle estremità delle linee;
- gli unici punti che possono avere in comune due linee sono nodi;
- le linee non si autointersecano;
- le regioni sono esattamente le parti di piano divise da linee.

METODO PER COSTRUIRE UN DIAGRAMMA DI SCHLEGEL DI UN POLIEDRO

Per costruire un diagramma di Schlegel di un poliedro Π , consideriamo il grafo che si ottiene proiettando su un piano vertici e spigoli di Π da un punto P opportunamente scelto.

Consideriamo un punto P molto vicino ad una faccia f di Π ed un piano α opposto a P rispetto a Π .

Con un'opportuna scelta di P e α è possibile costruire una proiezione $p : \Pi \rightarrow \alpha$ di centro P in modo che $p(f)$ sia un poligono al cui interno si proiettano tutti i restanti vertici e spigoli di Π .

Dato che stiamo considerando poliedri convessi si può sempre scegliere P in modo che la proiezione risulti biunivoca su vertici e spigoli.

Se si aggiunge all'immagine ottenuta con la proiezione la regione illimitata del piano non appartenente a $p(\Pi)$ si ottiene un grafo piano chiamato *diagramma di Schlegel* di Π (vedi fig. 2.5, 2.6).

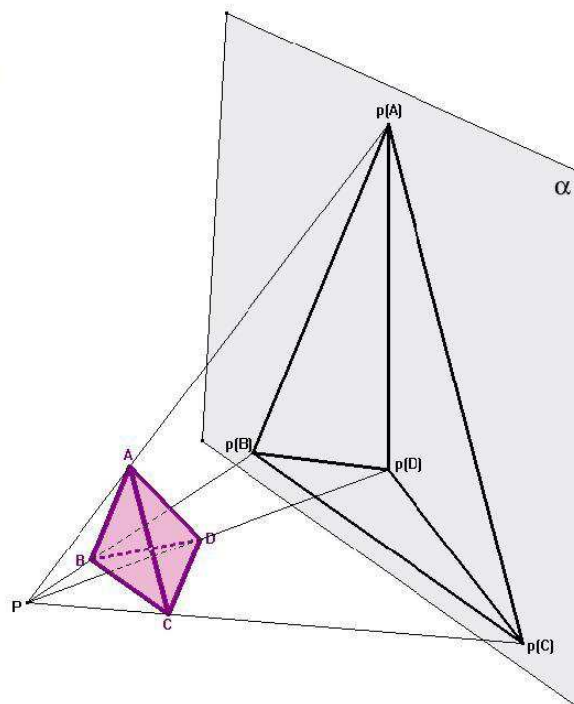


Fig. 2.5: Costruzione del diagramma di Schlegel di un tetraedro

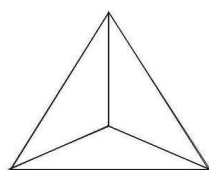


Fig. 2.6: Diagramma di Schlegel di un tetraedro

Dopo aver costruito il diagramma di Schlegel K di un poliedro Π si ottiene che:

- i vertici di Π corrispondono ai nodi di K ;
- gli spigoli di Π corrispondono alle linee di K ;
- le facce di Π corrispondono alle regioni di K .

La regione illimitata corrisponde alla faccia f vicino alla quale si trova il punto P da cui si proietta, mentre le regioni limitate sono in corrispondenza con le altre facce del poliedro.

Estendendo la relazione di incidenza della definizione 2.6 agli elementi di un grafo piano e la relazione di equivalenza combinatoria ai grafi piani (sostituendo rispettivamente i termini vertice, spigolo e faccia con i termini nodo, linea, regione), si ha che Π e K sono combinatoriamente equivalenti [Dedò, 1999].

2.2.2 Poliedri astratti

Ci possiamo domandare quando un grafo piano può essere il diagramma di Schlegel di un poliedro e quindi trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché dato un grafo piano k , esso sia il diagramma di Schlegel di un poliedro Π .

Per rispondere a questa domanda diamo innanzitutto la definizione di *poliedro astratto*, un particolare grafo piano che ci darà le condizioni necessarie affinché k sia un diagramma di Schlegel:

Definizione 2.13. Chiamiamo *poliedro astratto* un grafo piano tale da soddisfare le seguenti proprietà:

- ogni linea è adiacente ad esattamente due regioni;
- ogni linea contiene esattamente due nodi;

- dati due nodi esiste al più una linea che li contiene entrambi;
- date due regioni, esiste al più una linea adiacente ad entrambe;
- ogni nodo è adiacente ad almeno tre regioni;
- ogni regione contiene almeno tre nodi.

Si verifica facilmente che il diagramma di Schlegel di un poliedro è un poliedro astratto.

Il seguente teorema ci dice inoltre che essere un poliedro astratto è condizione sufficiente per essere un diagramma di Schlegel di qualche poliedro ¹. Questo teorema è stato dimostrato dal matematico tedesco Steinitz e viene chiamato *Teorema fondamentale della teoria dei poliedri* [Dedò, 1999].

Teorema 2.2.1 (di Steinitz). *Dato un qualsiasi poliedro astratto K , esiste sempre un poliedro Π combinatoriamente equivalente a K o, in altri termini, che ammette K come diagramma di Schlegel.*

2.3 Sviluppi piani dei poliedri

Per studiare le caratteristiche dei poliedri spesso è utile costruire dei loro modelli ottenuti realizzando le loro superfici con poligoni (per esempio in cartoncino) incollati in modo opportuno; oggi si possono anche visualizzare questi modelli utilizzando la computer grafica creando eventualmente delle animazioni.

Dato un poliedro Π e data una sua rappresentazione tridimensionale, si dice *sviluppo piano di Π* ogni figura piana connessa ottenuta dal suo modello tridimensionale tagliando un opportuno insieme di suoi spigoli che renda possibile la distensione sul piano di quanto ottenuto.

In geometria descrittiva lo sviluppo piano di un solido, a partire da una sua rappresentazione tridimensionale, è una serie di costruzioni geometriche che

¹Per la dimostrazione di questo teorema si può consultare il libro [14]

trasportano la superficie del solido su un piano, eventualmente tagliandola ma senza sconnetterla né deformarla. Nel caso di un poliedro, viene solitamente scelto uno dei piani su cui giacciono le facce del poliedro. In seguito, tagliando la superficie lungo opportuni spigoli, tutte le facce del poliedro possono essere portate sullo stesso piano scelto in precedenza tramite isometrie successive (si veda per esempio la figura 2.7).

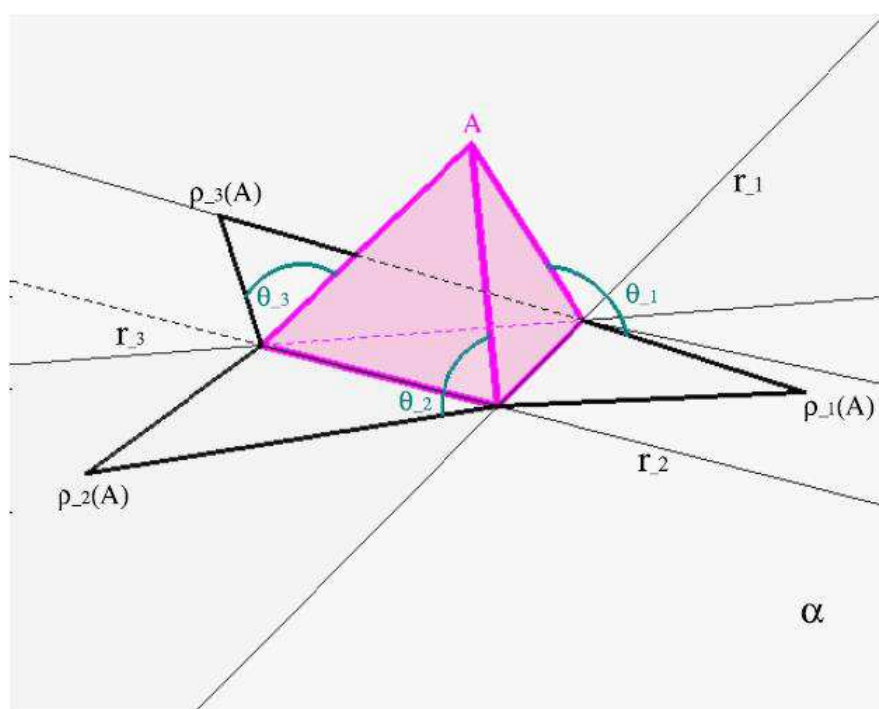


Fig. 2.7: Costruzione dello sviluppo piano di un tetraedro

Dalla figura si vede che lo sviluppo piano del tetraedro è ottenuto scegliendo come piano quello in cui giace la faccia F_4 (piano α), le altre tre facce F_1 , F_2 , F_3 del tetraedro vengono portate sul piano α attraverso le rotazioni ρ_1, ρ_2, ρ_3 di angoli rispettivamente $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e di assi r_1, r_2, r_3 . Lo sviluppo piano ottenuto del tetraedro si può vedere nella figura 2.8.



Fig. 2.8: Sviluppo piano di un tetraedro

Dopo aver visto quali sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché un grafo sia il diagramma di Schlegel di un poliedro, ci domandiamo ora se dato un tale grafo, e quindi se data la struttura combinatoria di un poliedro possiamo dire qualcosa dal punto di vista metrico sui vari poliedri che hanno questo diagramma. In particolare ci chiediamo quali siano le condizioni che ci garantiscono che a partire da uno stesso diagramma di Schlegel si possa individuare un unico poliedro (dal punto di vista metrico) che abbia quel diagramma. Una risposta è data dal seguente teorema ²:

Teorema 2.3.1 (di Cauchy). *Siano Π e Π' due poliedri combinatoriamente equivalenti e sia T un isomorfismo combinatorio fra Π e Π' ; supponiamo inoltre che, per ogni faccia f di Π , la faccia $T(f)$ di Π' sia isometrica ad f . Allora esiste un'isometria tra Π e Π' . In particolare gli angoli diedri formati da facce corrispondenti sono congruenti.*

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI CAUCHY

Supponiamo di costruire un poliedro con il cartoncino: ci sarà assegnato un determinato sviluppo piano, e quindi le facce del poliedro già tagliate nel cartoncino e le regole di assemblaggio (quali facce vadano unite in quali vertici)(vedi fig.2.9).

²Per la dimostrazione di questo teorema si può consultare il libro [14]

Ci accorgiamo che assegnate le facce e le regole di assemblaggio possiamo

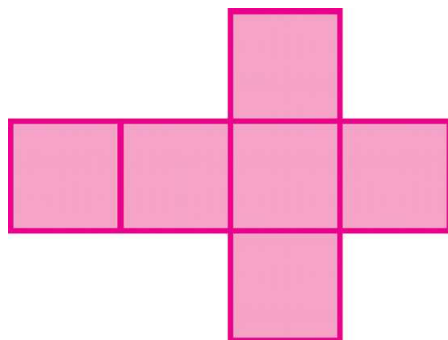


Fig. 2.9: Sviluppo piano di un cubo

ottenere un unico poliedro; se all'inizio della costruzione il poliedro parziale era flessibile, al termine della costruzione il poliedro è rigido (vedi fig. 2.10).

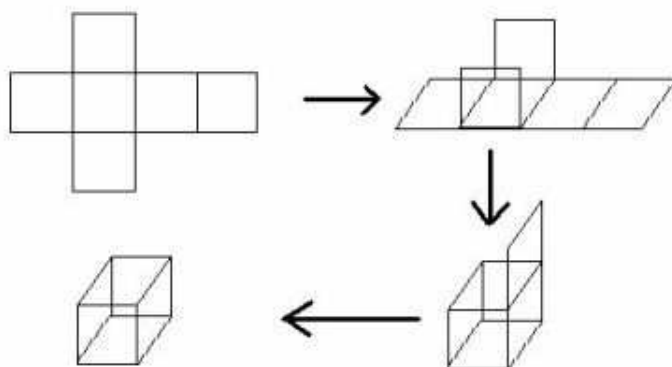


Fig. 2.10: Costruzione di un cubo

Questa situazione concreta corrisponde al teorema di Cauchy appena enunciato:

- assegnare le regole di assemblaggio significa assegnare il tipo di poliedro a meno di isomorfismo combinatorio;

- avere le facce di cartoncino (cioè avere determinati poligoni con una precisa estensione metrica) significa che le facce sono assegnate a meno di isometria;

quindi per il teorema di Cauchy non si possono ottenere due poliedri convessi non isometrici tra loro a partire da questi dati.

Esempio 2.4. Se consideriamo un cubo e un parallelepipedo, essi sono combinatoriamente equivalenti, cioè hanno le stesse regole di assemblaggio. Se inoltre abbiamo che le facce dei due poliedri sono isometriche allora i due poliedri hanno lo stesso diagramma di Shlegel e lo stesso sviluppo piano; si potrà quindi ottenere un unico poliedro.

Se costruiamo invece un poliedro dando solo lo scheletro degli spigoli (vedi fig. 2.11), utilizzando per esempio legnetti o cannuce, si otterranno dei modelli che sono flessibili, a meno che il poliedro abbia tutte le facce triangolari.



Fig. 2.11: Scheletro di un cubo

Questo ci mostra che non vale per i poligoni un analogo del teorema di Cauchy: se di un poligono sono assegnate le lunghezze dei lati e la struttura combinatoria (cioè il numero dei lati e le regole per assemblarli) allora il poligono non è univocamente determinato, a meno che non sia un triangolo. Infatti se si prova a costruire un poligono fissando delle cannuce, esso è

flessibile se le cannucce sono più di tre; questo mostra quindi che l'analogo del teorema di Cauchy è falso per i poligoni.

Quindi si può trasformare un poligono in un altro cambiando gli angoli e senza cambiare la lunghezza dei lati (vedi fig. 2.12).

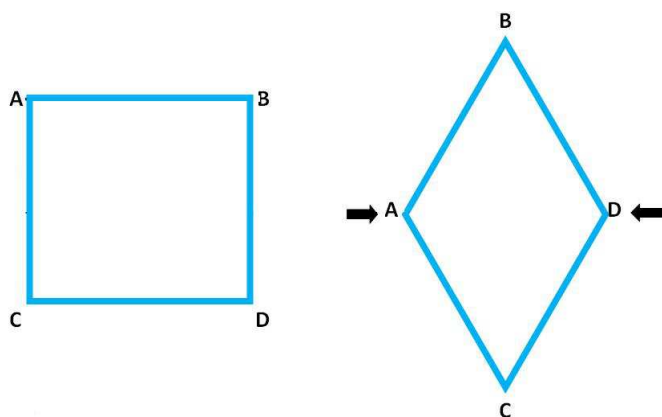


Fig. 2.12: Un quadrato diventa un rombo senza modificare la lunghezza dei lati

Quindi se le facce di un poliedro sono costituite da più di tre lati, e quindi se si utilizzano più di tre cannucce per ogni faccia, il modello del poliedro sarà flessibile e questo perché in ogni faccia, e cioè in ogni poligono, potranno variare gli angoli senza che varino anche le lunghezze dei lati [Dedò, 1999].

2.4 Poliedri regolari

Definizione 2.14. Un poliedro convesso Π si dice **regolare** se:

- (i) tutte le facce sono poligoni regolari;
- (ii) tutte le facce sono uguali fra loro;
- (iii) tutte le figure al vertice sono uguali fra loro;
- (iv) tutte le figure al vertice sono (il bordo di) poligoni regolari.

In realtà le condizioni date in questa definizione sono ridondanti e tre qualsiasi di esse sono sufficienti a garantire la quarta, e quindi a definire un poliedro regolare.

Due sole di queste condizioni, però, non sono sufficienti, con l'unica eccezione della coppia (i), (iv), come verrà in seguito dimostrato nel teorema 2.4.1.

In figura 2.13 si può vedere un controesempio:

il solido in figura è infatti un poliedro convesso ma non è regolare. Esso si ottiene unendo lungo una faccia due tetraedri regolari uguali fra loro, per cui le facce sono tutti triangoli equilateri uguali fra loro, e quindi il poliedro verifica le condizioni (i) e (ii).

Queste due condizioni non sono quindi sufficienti e occorre aggiungerne un'altra, che può essere formulata sulle figure al vertice oppure se si vuole evitare le figure al vertice è sufficiente aggiungere che tutti i vertici abbiano la stessa valenza.

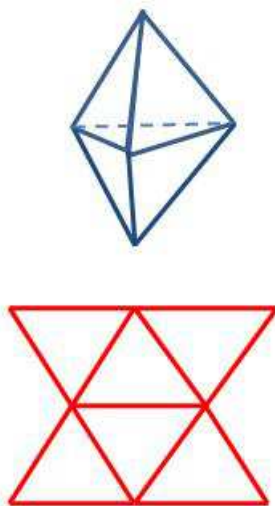


Fig. 2.13: Poliedro convesso non regolare

Teorema 2.4.1. *Sia Π un poliedro convesso tale che tutte le facce di Π siano regolari e tutte le figure al vertice siano regolari. Allora Π è un poliedro regolare.*

Dimostrazione. Tutti gli spigoli di Π hanno la stessa lunghezza: infatti tutti gli spigoli di una faccia hanno la stessa lunghezza perché le facce sono poligoni regolari e due facce adiacenti hanno spigoli della stessa lunghezza, perché hanno uno spigolo in comune.

Sia $2l$ la lunghezza comune a tutti gli spigoli del poliedro; consideriamo una figura al vertice ed un suo lato: questo lato sarà contenuto in una faccia del poliedro e, se questa faccia è un p -gono regolare, allora il lato della figura al vertice ha lunghezza $2l \cos \frac{\pi}{p}$: si veda figura 2.14 (a).

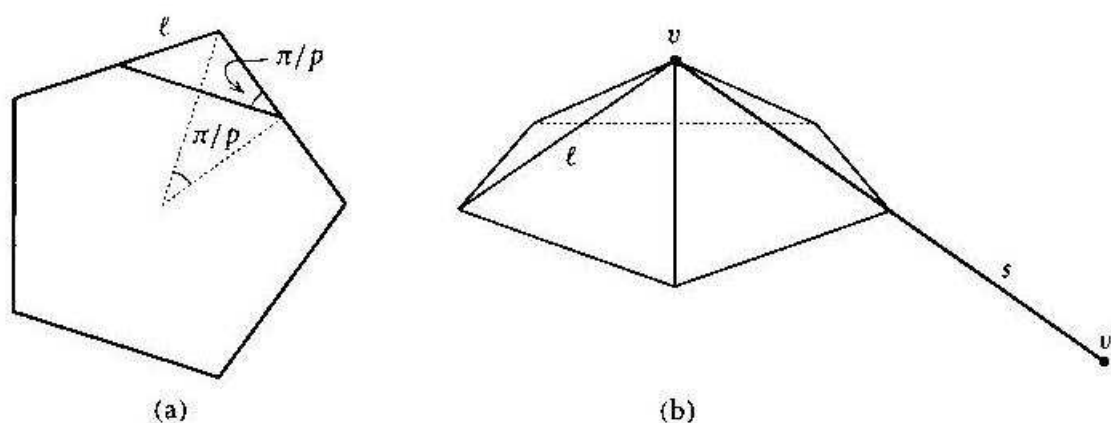


Fig. 2.14:

Da questo possiamo ricavare che tutte le facce sono uguali fra loro; infatti, se così non fosse, si troverebbero almeno due facce disuguali (un p -gono regolare e un p' -gono regolare, con $p \neq p'$) che hanno in comune un vertice v , e la figura al vertice relativa a v avrebbe un lato di lunghezza $2l \cos \frac{\pi}{p}$ e un altro di lunghezza $2l \cos \frac{\pi}{p'}$, cioè non sarebbe un poligono equilatero.

Resta da far vedere che tutte le figure al vertice sono uguali fra loro: se per assurdo così non fosse, esisterebbe uno spigolo s del poliedro i cui i cui due

vertici v e v' hanno figure al vertice diverse, diciamo un q -gono regolare per v e un q' -gono regolare per v' ; ma l'angolo diedro del poliedro Π relativo allo spigolo s si può vedere come l'angolo diedro di uno spigolo nella piramide regolare di vertice v , spigolo l e base la figura al vertice relativa a v : vedi figura 2.14 (b). Quindi q deve essere uguale a q' .

□

Si può associare ad un poliedro regolare una coppia di numeri naturali (≥ 3) p e q , dove p indica il numero di lati di ogni faccia e q indica la valenza di ogni vertice.

Abbiamo già detto che i poliedri regolari sono un numero limitato; questo teorema ci mostra che essi sono solamente cinque.

Teorema 2.4.2. *I tipi di poliedri regolari convessi sono al più cinque.*

Dimostrazione. Sia Π un poliedro regolare di tipo (p, q) ; prendiamo in considerazione gli angoli della facce che arrivano in un vertice: ogni angolo è l'angolo di un p -gono regolare, ce ne sono q , e la loro somma deve essere minore di 2π (perché il poliedro è convesso).

Quindi:

$$\frac{q(p-2)\pi}{p} < 2\pi$$

da cui, dividendo per $2\pi q$, si ottiene

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q}$$

ovvero

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Le soluzioni intere dell'ultima relazione, soggette al vincolo $p, q \geq 3$, sono cinque: infatti almeno uno dei due deve essere uguale a 3 (perché $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$) e l'altro può assumere solo i valori 3, 4 o 5 (perché $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$). Quindi i

possibili valori delle coppie (p,q) sono

$$(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$$

e quindi vale la tesi. □

La seguente tabella riassume per ognuno dei cinque poliedri regolari il loro numero di facce F , di spigoli S , di vertici V e i valori di p e q .

p	q	S	F	V	NOME
3	3	6	4	4	TETRAEDRO
3	4	12	8	6	OTTAEDRO
4	3	12	6	8	CUBO
3	5	30	20	12	ICOSAEDRO
5	3	30	12	20	DODECAEDRO



Fig. 2.15: I cinque corpi regolari

Nella figura 2.16 viene mostrato per ognuno dei cinque poliedri regolari il relativo sviluppo piano e diagramma di Schlegel.

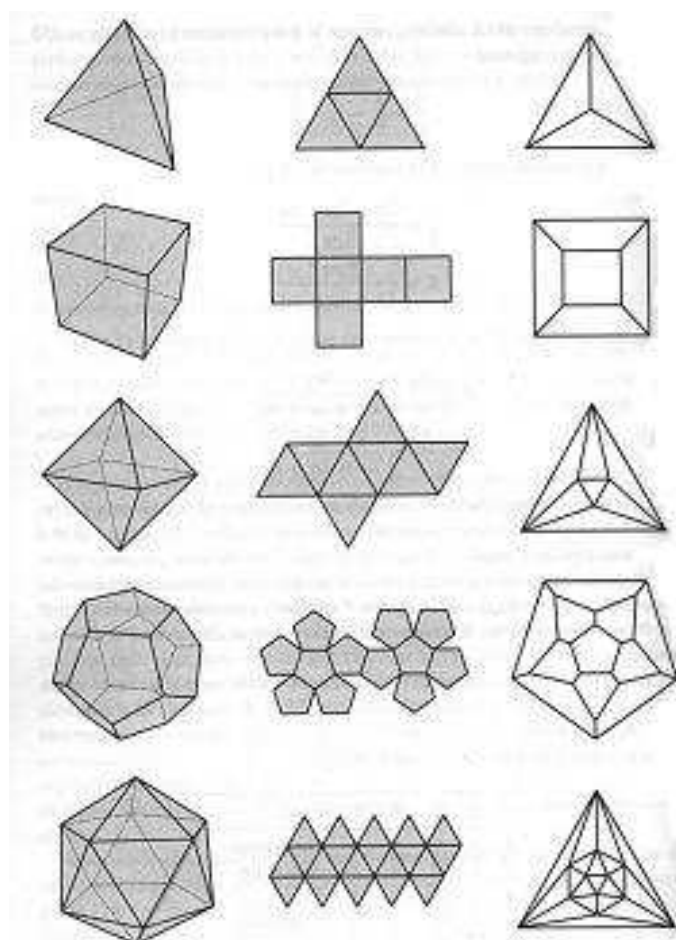


Fig. 2.16: Poliedri regolari con rispettivi sviluppi piani e diagrammi di Schlegel

RELAZIONI FRA I POLIEDRI REGOLARI

Possiamo dire che possiamo trovare due distinti tetraedri dentro un cubo, intendendo con questo che i vertici dei tetraedri sono un sottoinsieme dei vertici del cubo(vedi fig. 2.17).

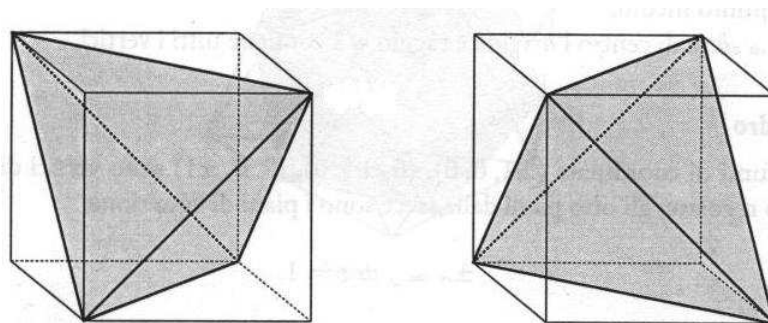


Fig. 2.17: Relazione tra cubo e tetraedro

Inoltre possiamo dire che esistono cinque diversi cubi dentro il dodecaedro, e lo spigolo di ognuno di questi cubi risulta essere una diagonale della faccia del dodecaedro. Quindi su ogni faccia del dodecaedro arrivano cinque spigoli uno per ognuno dei cinque cubi e formano su questa faccia la stella a cinque punte costituita dalle diagonali del pentagono regolare. Inoltre in ogni vertice del dodecaedro arrivano due cubi (vedi fig. 2.18).

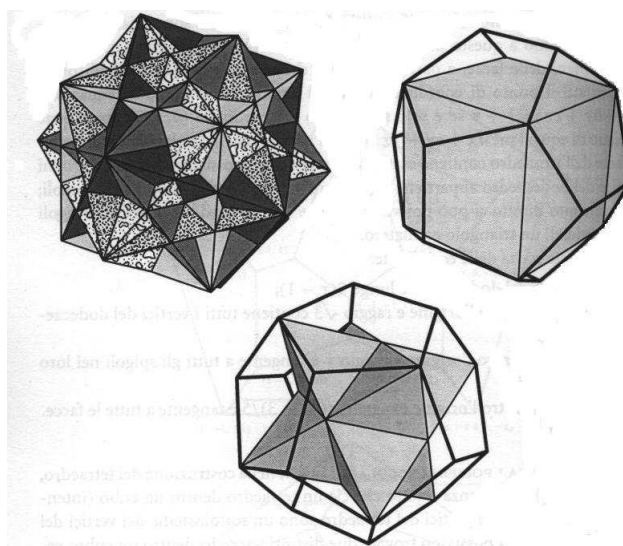


Fig. 2.18: Relazione tra cubo e dodecaedro

Ci sono quindi anche dieci tetraedri dentro un dodecaedro.

Inoltre esiste un ottaedro intorno all'icosaedro, nel senso che i piani delle

facce dell'ottaedro costituiscono un sottoinsieme dei piani delle facce dell'icosaedro. In realtà ci sono cinque distinti ottaedri intorno all'icosaedro (vedi fig. 2.19 e 2.20).

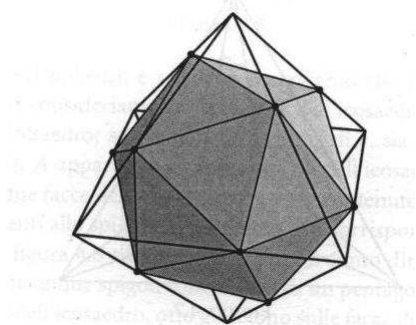


Fig. 2.19: Relazione tra ottaedro e icosaedro

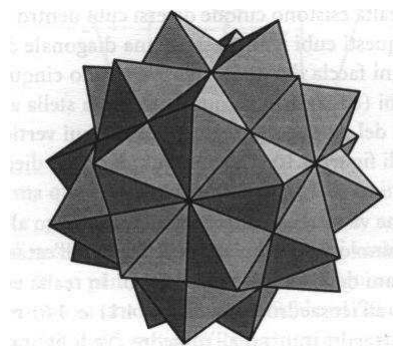


Fig. 2.20: Relazione tra ottaedro e icosaedro

Inoltre esistono due distinti tetraedri intorno all'ottaedro (vedi fig. 2.21) e ci saranno quindi anche dieci tetraedri intorno ad un icosaedro.

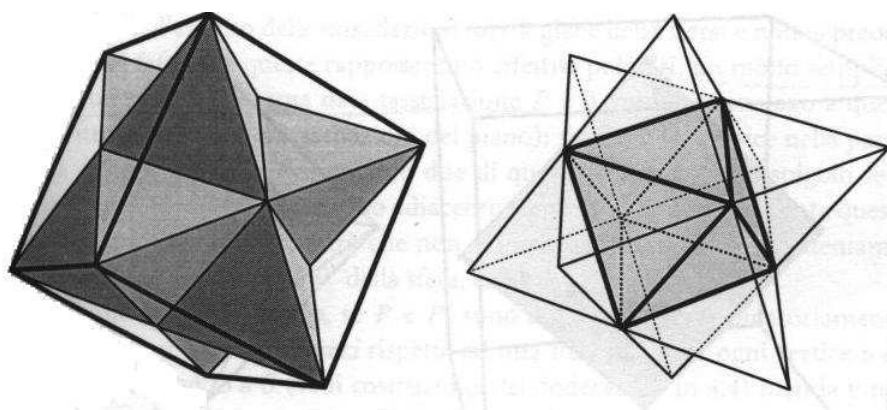


Fig. 2.21: Relazione tra tetraedro e ottaedro

Un'altra relazione che emerge tra i poliedri regolari è la **DUALITÀ**:

- I centri delle facce di un cubo sono vertici di un ottaedro e viceversa i centri delle facce di un ottaedro sono vertici di un cubo
- I centri delle facce di un icosaedro sono vertici di un dodecaedro e viceversa i centri delle facce di un dodecaedro sono vertici di un icosaedro
- Per quanto riguarda il tetraedro i centri delle sue facce sono vertici di un altro tetraedro (vedi fig. 2.22).

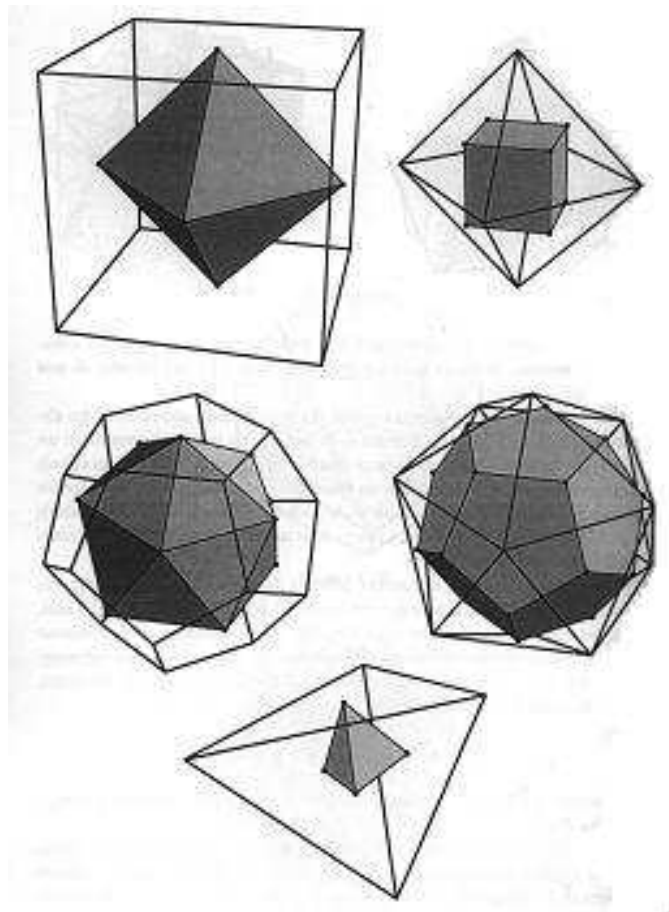


Fig. 2.22: Dualità dei poliedri regolari

Quindi vale che:

- il cubo è il duale dell'ottaedro e viceversa;
- il dodecaedro è il duale dell'icosaedro e viceversa;
- il tetraedro è il duale di se stesso.

Dal punto di vista combinatorio, si può definire la dualità fra due poliedri Π e Π' in modo analogo a come si era definito un isomorfismo combinatorio.

Definizione 2.15. Una **dualità combinatoria** fra Π e Π' è una corrispondenza biunivoca T tra gli insiemi A e A' di vertici, spigoli e facce dei due poliedri tale che

$$x < y \text{ in } A \Leftrightarrow T(y) < T(x) \text{ in } A'$$

Definizione 2.16. Due poliedri Π e Π' sono **combinatoriamente duali** se esiste una dualità combinatoria fra di essi.

Anziché richiedere che T rispetti le relazioni di incidenza, quindi, richiediamo ora che le inverta: in particolare, il numero dei vertici di Π è uguale al numero delle facce di Π' , gli spigoli di Π e di Π' sono in egual numero, e il numero delle facce di Π è uguale al numero dei vertici di Π' .

Vale che il duale di un poliedro regolare di tipo (p, q) è un altro poliedro regolare di tipo (q, p) ed è quindi univocamente definito a meno di similitudine [Dedò, 1999].

2.4.1 Simmetrie dei poliedri regolari

Descriviamo adesso le caratteristiche di simmetria dei poliedri regolari, i quali presentano la massima simmetria fra tutti i poliedri.

I poliedri regolari sono legati ai gruppi finiti di simmetrie nello spazio; per ogni poliedro regolare esiste un gruppo di trasformazioni finito, le quali riportano il solido in se stesso e lasciano fisso il suo centro (centro della sfera in cui può essere inscritto).

I gruppi finiti di simmetrie dei poliedri regolari costituiscono il punto di partenza di molti campi di ricerca attivi nella matematica e nella fisica teorica moderna. Vengono utilizzati per lo studio della classificazione di tutte le geometrie tridimensionali o per lo studio dei metodi di quantizzazione del campo gravitazionale attraverso l'uso di poliedri, unione di un numero elevato di tetraedri.

Definizione 2.17. Il gruppo di simmetria $\Gamma(P)$ di un poliedro regolare P si definisce come $\Gamma(P) = \{g \in Iso(\mathbb{R}^3) : g(P) = P\}$.

Le possibili simmetrie di $\Gamma(P)$ possono essere *rotazioni*, *riflessioni* o *riflessioni rotatorie*, in quanto devono fissare almeno un punto, e l'*identità*.

Descrivendo i gruppi di simmetria dei cinque poliedri regolari non si trovano cinque gruppi ma solamente tre: infatti per esempio inscrivendo un ottaedro in un cubo in modo che ogni vertice dell'ottaedro sia posto nel centro di una faccia del cubo, un'isometria che riporta il cubo in se stesso riporterà anche l'ottaedro in se stesso. Quindi

$$\Gamma(CUBO) = \Gamma(OTTAEDRO)$$

$$\Gamma(DODECAEDRO) = \Gamma(ICOSAEDRO)$$

Analizziamo esplicitamente i gruppi di simmetria dei poliedri regolari.

GRUPPO DI SIMMETRIA DEL CUBO E DELL'OTTAEDRO

Sia P un cubo, $G=\Gamma(P)$ il suo gruppo di simmetria e $H=\Gamma^+(P)$ il sottogruppo di G costituito dalle sole isometrie dirette. H non coincide con G perché esiste in G almeno una riflessione.

Lemma 2.4.3. *Ogni gruppo d'isometrie o è costituito da isometrie dirette oppure metà sono dirette e metà sono inverse.*

Dato che esiste almeno una riflessione in G , per il lemma 2.4.3 in G ci saranno tante isometrie dirette quante inverse.

Tutti gli elementi di G fissano in centro O del cubo, e quindi le isometrie dirette in G sono rotazioni di asse una retta passante per il centro del cubo. Ci riferiamo quindi ad H come al gruppo delle rotazioni del cubo.

Sia g una rotazione in H di asse r e siano A e B i due punti in cui r interseca il cubo; dato che $g(P)=P$ possiamo dedurre che i punti A e B sono o due vertici opposti, oppure i punti medi di due spigoli opposti, oppure i centri di due facce opposte. Quindi abbiamo che:

- le rette passanti per due vertici opposti sono assi di una rotazione di periodo tre che fissa il cubo; ci sono quattro rette di questo tipo e per ognuna di esse abbiamo $3-1=2$ rotazioni diverse dall'identità che riportano P in se stesso: una di angolo 120° e una di angolo 240° ; in totale si hanno **otto** rotazioni (si veda fig. 2.23 (a));
- le rette passanti per i punti medi di due spigoli opposti sono assi di una rotazione di periodo due che fissa il cubo; ci sono sei rette di questo tipo e per ognuna di esse una sola rotazione diversa dall'identità che riporta P in se stesso: di angolo 180° ; in totale si hanno **sei** rotazioni (vedi fig. 2.23 (b));

- le rette passanti per i centri di due facce opposte sono assi di una rotazione di periodo quattro che fissa il cubo; ci sono tre rette di questo tipo e per ognuna di esse abbiamo tre rotazioni diverse dall'identità: di angoli 90° , 180° e 270° ; in totale ci sono **nove** rotazioni (vedi fig. 2.23 (c)).

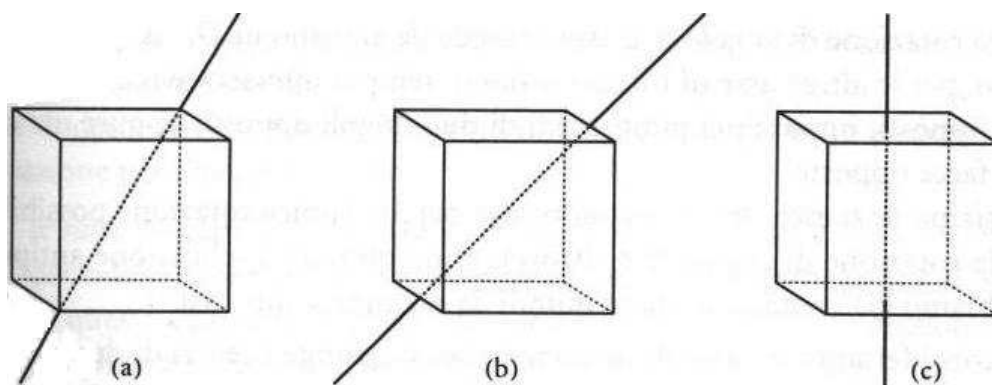


Fig. 2.23: Rotazioni del cubo

Quindi le **rotazioni** (ossi le simmetrie dirette) in H sono $1+8+6+9=24$ includendo l'identità.

Le isometrie inverse possono essere o una riflessione oppure una composizione di una riflessione in un piano passante per O con una rotazione di asse ortogonale a questo piano nel punto O .

Per individuare le riflessioni, basta trovare i piani di simmetria del cubo, che sono nove: tre piani paralleli a due facce opposte (vedi fig. 2.24 (a)) e sei piani contenenti due spigoli opposti (vedi fig. 2.24 (b)).

Si hanno quindi **9 riflessioni**.

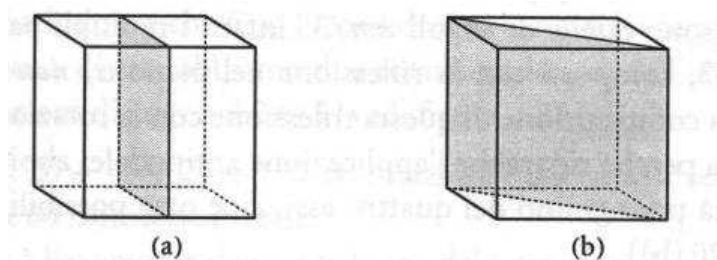


Fig. 2.24: Riflessioni del cubo

Per quanto riguarda le riflessioni rotatorie bisogna trovare tutte le possibili composizioni di una riflessione con una rotazione (diversa dall'identità) che riportano il cubo in se stesso ed escludere i casi che si ripetono.

Fra le isometrie inverse c'è l'**applicazione antipodale** (simmetria rispetto al centro O del cubo); essa è la composizione di una riflessione in un piano arbitrario per O e di una rotazione di angolo 180° ed asse ortogonale al piano in O .

Tutte le altre riflessioni rotatorie si cercano a partire dalle rotazioni del gruppo già viste prima, scartando però tutte quelle di angolo 180° perché componendole con una riflessione si tornerebbe al caso dell'applicazione antipodale. Per esse quindi abbiamo solo due casi:

- l'asse di rotazione dovrà intersecare il cubo nei centri di due facce opposte: il piano di riflessione è parallelo a queste due facce e le rotazioni possibili sono quelle di angoli 90° e 270° ; abbiamo quindi due possibilità per ognuno dei tre assi, cioè in totale **sei** isometrie di questo tipo (vedi fig. 2.25 (a));
- l'asse di rotazione dovrà intersecare il cubo in due vertici opposti v e v' : il piano di riflessione è un piano che taglia il cubo secondo un esagono regolare che ha vertici nei punti medi dei sei spigoli non adiacenti né a v né a v' ; le rotazioni possibili sono quelle di 120° e 240° ; abbiamo

quindi due possibilità per ognuno dei quattro assi, cioè **otto** possibili isometrie (vedi fig. 2.25 (b)).

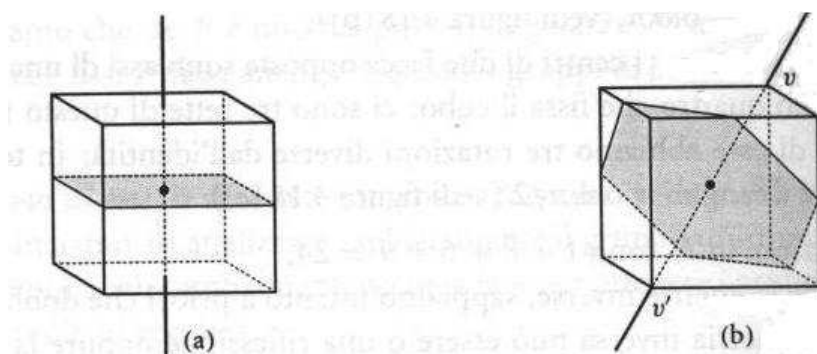


Fig. 2.25: Riflessioni rotatorie del cubo

In tutto abbiamo quindi **15 riflessioni rotatorie** tenendo conto anche dell'applicazione antipodale; sicché le isometrie inverse sono in totale 24.

Quindi abbiamo che $\Gamma(P) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 \text{ rotazioni;} \\ 9 \text{ riflessioni;} \\ 15 \text{ riflessioni rotatorie.} \end{array} \right.$$

e quindi $|\Gamma(P)| = 48$, cioè il cubo ha 48 possibili simmetrie.

Osservazione 1. Per l'ottaedro ritroviamo lo stesso gruppo G , con la sola differenza che gli assi di rotazione di ordine tre non sono più gli assi per due vertici opposti, ma gli assi per i centri di due facce opposte e gli assi di rotazione di ordine quattro sono ora gli assi per due vertici opposti.

Vogliamo ora dimostrare che il gruppo di simmetria G del cubo e dell'ottaedro è isomorfo a $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Indichiamo con H il sottogruppo costituito dalle sole isometrie dirette di G .

Consideriamo l'insieme X costituito dalle quattro diagonali del cubo e l'applicazione

$$T : H \rightarrow S_4$$

che associa ad una rotazione in H la permutazione che essa induce sulle diagonali del cubo.

T è un omomorfismo di gruppi; inoltre è iniettiva perché se un'isometria g fissa tutte le diagonali, può essere solo l'identità o l'applicazione antipodale ma quest'ultima non sta in H .

Per vedere che T è anche suriettiva basta osservare che gli scambi che generano S_4 appartengono all'immagine di T ; in effetti, per esempio, le rotazioni di 180° intorno agli assi che congiungono i punti medi di due spigoli opposti scambiano fra loro le due diagonali che si appoggiano ai quattro estremi di questi due spigoli e fissano le altre due (vedi fig. 2.23 (b)).

Quindi H è isomorfo a S_4 .

Consideriamo inoltre il sottogruppo $K = \{id, \alpha\}$ di G , dove α è l'applicazione antipodale, la quale genera K . Si ha che $|K| = 2$, inoltre $H \cap K = \{id\}$ e $|H| * |K| = 24 * 2 = 48$.

Quindi G si può vedere come prodotto diretto tra H e K : $G = H \times K$.

Dato che K è ciclico e finito allora K è isomorfo a \mathbb{Z}_2 , con $2 = |K|$.

Quindi otteniamo che:

$$G = H \times K \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$$

GRUPPO DI SIMMETRIA DEL DODECAEDRO E DELL'ICOSAEDRO

Gli assi di rotazione dell'icosaedro I sono:

- le rette passanti per due vertici opposti, che sono assi di una rotazione di periodo cinque che fissa l'icosaedro; ci sono dodici vertici e quindi

sei rette di questo tipo e per ognuna di esse abbiamo $5-1=4$ rotazioni diverse dall'identità: in totale si hanno 24 rotazioni di angoli $k * 72^\circ$ con $k = 1, 2, 3, 4$ (vedi fig. 2.26(a));

- le rette passanti per i punti medi di due spigoli opposti, che sono assi di una rotazione di periodo due che fissa l'icosaedro; ci sono trenta spigoli e quindi quindici rette di questo tipo e per ognuna di esse una sola rotazione diversa dall'identità: in totale ci sono 15 rotazioni di angolo 180° (vedi fig 2.26(b));
- le rette passanti per i centri di due facce opposte che sono assi di una rotazione di periodo tre che fissa I; ci sono dieci rette di questo tipo e per ognuna di esse abbiamo due rotazioni diverse dall'identità: in tutto si hanno 20 rotazioni di angoli 120° e 240° (vedi fig 2.26(c)).

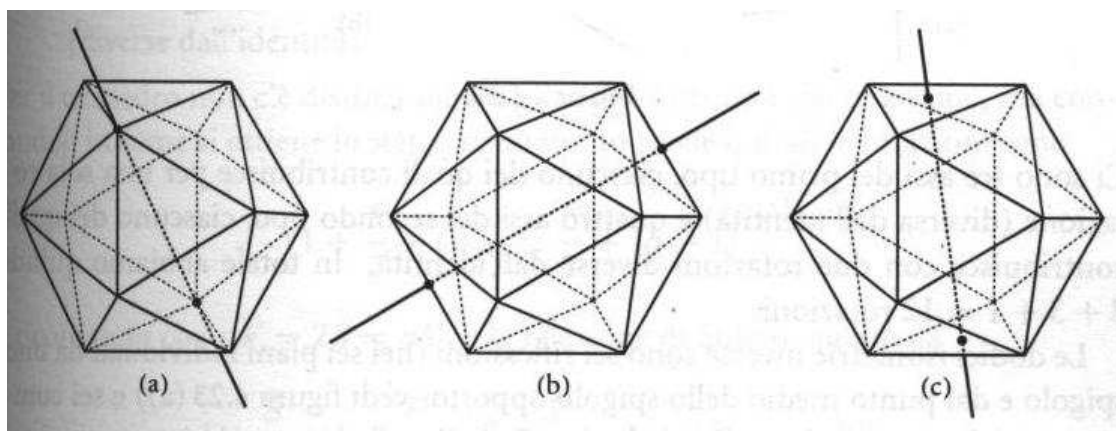


Fig. 2.26: Rotazioni dell'icosaedro

Abbiamo quindi $20+15+24+1=$ **60 rotazioni**.

Per quanto riguarda le simmetrie inverse si hanno:

- **15 riflessioni** rispetto ad un piano passante per il centro di due spigoli opposti e le coppie di spigoli opposti sono 15;

- **25 roto-riflessioni** di ordine cinque di asse passante per i centri di due facce opposte e di angolo $36^\circ + k * 72^\circ$ con $k=0,1,2,3,4$, tra cui l'applicazione antipodale per $k=2$; le coppie di facce opposte sono sei, occorre contare però una sola volta l'applicazione antipodale;
- **20 roto-riflessioni** di ordine tre di asse passante per due vertici opposti e di angolo di rotazione pari a $60^\circ + k * 120^\circ$ con $k=0,2$ (per $k=1$ si ha l'applicazione antipodale), le coppie di vertici opposti sono dieci.

Quindi abbiamo che le **riflessioni** e le **riflessioni rotatorie** sono **60**.

Quindi il gruppo di simmetrie dell'icosaedro, così come quello del dodecaedro, ha 120 elementi, cioè $\Gamma(I) = 120$.

Si può verificare che il gruppo di simmetria del dodecaedro e dell'icosaedro è isomorfo a $A_5 \times \mathbb{Z}_2$, dove A_5 è il gruppo alterno su cinque elementi.

Per dimostrare questo basta verificare che il gruppo H delle rotazioni del dodecaedro è isomorfo ad A_5 e poi si conclude come nel caso del cubo.

Consideriamo il modello dei cinque cubi nel dodecaedro (vedi fig. 2.18); l'idea è di associare ad una rotazione del dodecaedro la permutazione che essa induce sui cinque cubi. Si verifica che:

- se una rotazione induce la permutazione identica, cioè fissa i 5 cubi, allora la rotazione fissa le diagonali (perché ogni vertice appartiene a due dei 5 cubi e ogni coppia di vertici opposti appartengono agli stessi due cubi) e quindi è l'identità; di conseguenza l'omomorfismo T che associa ad ogni rotazione del dodecaedro la permutazione che questa induce sui cinque cubi è iniettivo;
- le rotazioni il cui asse passa per due vertici opposti fissano i due cubi a cui questi vertici appartengono e permutano ciclicamente gli altri tre;
- le rotazioni il cui asse passa per i centri di due facce opposte permutano ciclicamente i 5 cubi;

- le rotazioni il cui asse passa per i punti medi di due spigoli opposti fissano un cubo e agiscono sugli altri 4 come il prodotto di 2 scambi.

L'immagine di T è quindi contenuta in A_5 , cioè nel sottogruppo delle permutazioni pari su 5 elementi; inoltre l'immagine di T coincide con tutto A_5 perché i suoi elementi sono solo o cicli di lunghezza 5 oppure cicli di lunghezza 3, oppure composizioni di due scambi. Quindi il gruppo delle rotazioni del dodecaedro è isomorfo ad A_5 .

Il fatto che si ritrovi un fattore $\times \mathbb{Z}_2$ nel gruppo di simmetria del cubo e in quello del dodecaedro corrisponde al fatto che in entrambi i gruppi c'è l'applicazione antipodale.

GRUPPO DI SIMMETRIA DEL TETRAEDRO

La situazione è un pò diversa per il tetraedro il cui gruppo di simmetria non contiene l'applicazione antipodale (non esistono vertici opposti o facce opposte: esistono però sempre spigoli opposti). I possibili assi di rotazione sono quindi di due tipi:

- passano per i punti medi di due spigoli opposti e sono assi di rotazione di periodo due; ci sono tre rette di questo tipo ciascuna delle quali contribuisce per una sola rotazione diversa dall'identità e quindi si hanno 3 possibili rotazioni di angolo 180° (vedi fig. 2.27(a));
- passano per un vertice ed il centro della faccia opposta e sono assi di rotazione di periodo 3; ci sono 4 rette di questo tipo ciascuna delle quali contribuisce con due rotazioni diverse dall'identità e quindi in totale ci sono 8 rotazioni di angoli 120° e 240° (vedi fig. 2.27(b)).

In totale abbiamo quindi $8+3+1=$ **12 rotazioni** inclusa l'identità.

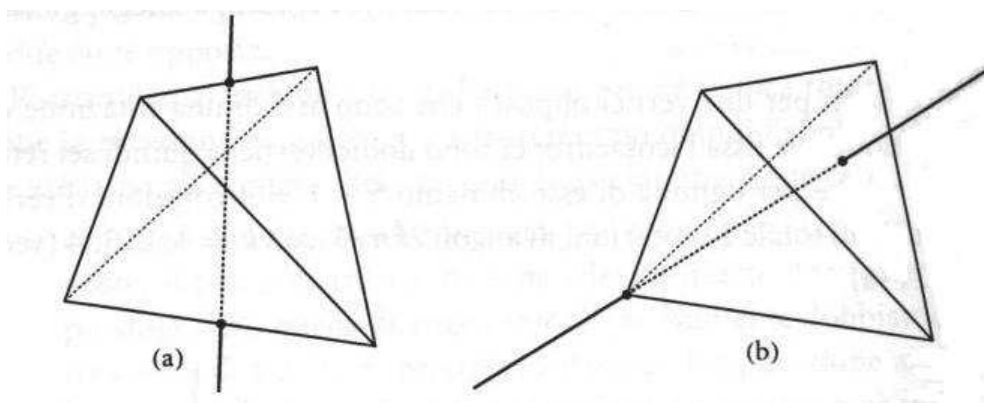


Fig. 2.27: Rotazioni del tetraedro

Le 12 isometrie inverse del tetraedro T sono:

- **6 riflessioni** nei sei piani individuati da uno spigolo e dal punto medio dello spigolo opposto (vedi fig. 2.28(a));
- **6 riflessioni roratorie**, composizioni di una rotazione di angoli 90° e 270° con la riflessione nel piano ortogonale all'asse di rotazione e passante per il centro del poliedro (vedi fig. 2.28(b)): qui l'asse di rotazione è la retta per i punti medi di due spigoli opposti, e quindi ci sono 3 assi di questo tipo ciascuno dei quali contribuisce con due isometrie inverse.

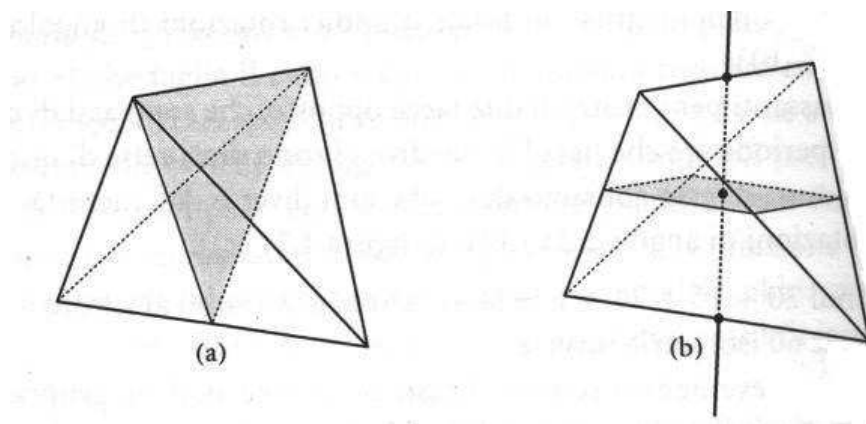


Fig. 2.28: Riflessioni del tetraedro

Quindi abbiamo che $\Gamma(T) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ rotazioni;} \\ 6 \text{ riflessioni;} \\ 6 \text{ riflessioni rotatorie} \end{array} \right.$$

e quindi $|\Gamma(T)| = 24$, cioè il tetraedro ha 24 possibili simmetrie.

Si può verificare che il gruppo di simmetria del tetraedro è isomorfo a S_4 .

Partiamo dall'intero gruppo G e associamo ad ogni isometria g in G la permutazione che induce sui vertici del tetraedro: si ottiene un omomorfismo di gruppi che è iniettivo perché se g fissa i 4 vertici di T allora g è l'identità; inoltre è suriettivo perché per esempio le riflessioni nel piano che contiene lo spigolo s e il punto medio dello spigolo s' fissano i due vertici di s e scambiano fra loro i due vertici di s' (vedi fig. 2.28(a)).

Quindi si ha che $G \cong S_4$ [Dedò, 1999].

Capitolo 3

Poliedri regolari nella didattica

In questo capitolo verrà analizzato come i poliedri regolari vengono insegnati a scuola, partendo dalle scuole elementari fino alle superiori, mostrando anche dei possibili laboratori che si possono fare in classe per comprenderli meglio.

Per quanto riguarda le scuole medie e superiori verranno anche analizzati alcuni libri di testo utilizzati in classe per l'insegnamento della matematica, per vedere se le definizioni date su concetti riguardanti i solidi platonici sono corrette o se ci sono eventuali imprecisioni; inoltre verrà presentato il software didattico Cabri 3D, il quale potrà essere utile agli studenti per studiare la geometria e i relativi oggetti.

3.1 Scuole elementari

Fin dai primi mesi d'età il bambino ha a che fare con oggetti tridimensionali a partire dai suoi giochi fino all'arredamento della sua casa. Anche nel periodo dell'infanzia dai zero ai tre anni il bambino può iniziare a prendere confidenza con i poliedri regolari, in particolare con il cubo. Infatti ci sono dei giochi a forma di cubo che permettono già al bambino di poter fare esperienza con gli oggetti geometrici (vedi fig. 3.1, 3.2).



Fig. 3.1: Cubo attività



Fig. 3.2: Cubi e animali

Ad esempio il gioco nella figura 3.1 è un cubo in cui in ogni sua faccia c'è una diversa attività che il bambino può fare tra udire, vedere e toccare; mentre il gioco in figura 3.2 consiste nel costruire, sovrapponendo i vari cubi e altre figure geometriche, varie situazioni che raffigurano gli animali. In questo modo, con l'intento di costruire una situazione con vari cubi o giocare con ogni faccia del cubo per vedere cose diverse o udire o toccare qualcosa, il bambino fa esperienza di un oggetto geometrico rendendosi già conto di alcune sue proprietà.

Nella prassi didattica nelle scuole elementari non viene insegnata la geometria solida ma solo quella piana; le figure in tre dimensioni vengono insegnate a partire dalle scuole medie. Dato che però l'esperienza concreta del bambino avviene, fin dai suoi primi mesi d'età, nello spazio tridimensionale è bene coinvolgere i bambini in attività in cui si considerano dapprima figure solide e poi quelle piane.

Nel presentare un argomento matematico non sempre è preferibile farlo in modo astratto, anzi, soprattutto alle elementari, se lo si presenta attraverso un gioco questo suscita nei bambini interesse e motivazione ed è un ottimo mediatore e produttore di conoscenze.

Una possibile attività per introdurre i poliedri convessi può essere quella di far portare a scuola dai bambini diversi tipi di solidi come scatole, contenitori, pezzi di costruzioni, con i quali i bambini possono giocare e osservare le loro diverse forme. I bambini poi si accorgeranno che questi solidi sono

caratterizzati da qualcosa al quale conviene dare un nome: sono gli spigoli, i vertici e le facce. Tra tutti i solidi a disposizione si può focalizzare l'interesse per i poliedri che sono caratterizzati dai vertici, dagli spigoli e dalle facce legati tra loro dalle seguenti relazioni: i lati delle facce sono gli spigoli, uno spigolo collega sempre due vertici, si ottiene un vertice se in esso concorrono almeno tre facce, in ogni spigolo concorrono sempre due facce.

Poi si possono costruire i poliedri convessi (poliedri senza buchi o rientranze) con stuzzicadenti di varie lunghezze e pongo (le palline di pongo rappresentano i vertici, mentre gli stuzzicadenti costituiscono gli spigoli) ottenendo così gli scheletri dei poliedri (vedi fig. 3.3): in questo modo si mette in risalto

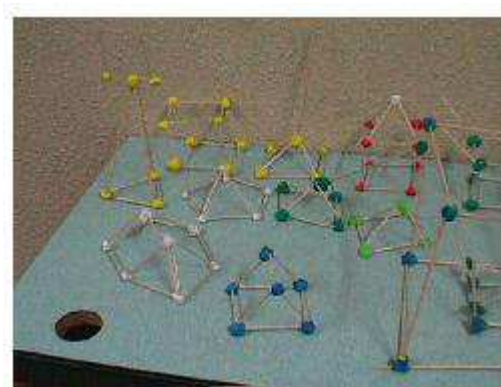


Fig. 3.3: Poliedri costruiti con pongo e stuzzicadenti

il numero di vertici e di spigoli del poliedro lasciando all'immaginazione il numero delle facce. Questa attività permette di osservare le differenze fra i vari poliedri: ad esempio si scopre che nel parallelepipedo gli spigoli hanno lunghezze diverse, mentre nel cubo gli stuzzicadenti usati hanno tutti la stessa lunghezza.

Si può affiancare a questa attività la costruzione dei solidi con la carta in cui l'attenzione è ora concentrata sul numero di facce. Avendo entrambi i modelli a disposizione i bambini possono trovare più facilmente il numero di elementi che caratterizzano i solidi realizzati.

Per ognuno dei poliedri costruiti si possono riportare, per esempio su un cartellone, il numero di vertici V , facce F e spigoli S . Si può ora chiedere ai

bambini se esiste una relazione tra V , F ed S , in modo che essi scoprano da soli la formula di Eulero per i poliedri. In questo modo lo studente si crea personalmente la conoscenza, l'insegnante propone un'attività senza rivelare gli scopi cognitivi. L'insegnante non introduce subito la formula di Eulero ma attraverso il gioco la fa scoprire allo studente (situazione a-didattica) [D'Amore, 1999]: sono in ballo gli studenti e l'oggetto della conoscenza, ma non l'insegnante.

Conoscere la formula di Eulero permette al bambino di sapere che non si può costruire un qualsiasi poliedro, ma solo quelli per cui vale la relazione di Eulero; in questo modo egli controllerà, prima di costruirlo, i valori di V , S ed F che gli sono stati forniti e potrà accorgersi se è o non è possibile farlo. Si può anche far vedere ai bambini che la relazione di Eulero non vale solo nello spazio ma anche nel piano. Se si realizza per esempio un cubo "scheletrato" in modo che gli spigoli siano costituiti da molle attaccate tra loro e successivamente si schiaccia sul tavolo in modo che tutte le molle vadano ad aderire su di esso, si otterrà la seguente immagine:

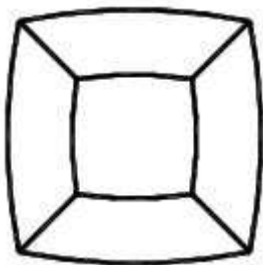


Fig. 3.4: Cubo schiacciato nel piano

Adesso quelle che erano facce nello spazio diventano regioni nel piano, i vertici nello spazio diventano nodi nel piano e gli spigoli diventano tratti di confine nel piano. Si possono quindi fare osservazioni cercando le analogie con lo spazio; se si contano il numero di regioni r , di tratti di confine c e di nodi n per la figura piana ottenuta si avrà che $r=6$ (va contata anche la regione esterna), $n=8$ e $c=12$, quindi vale l'uguaglianza: $r+n=c+2$.

I bambini scopriranno quindi che questa relazione non vale solo per il cubo schiacciato ma per tutte le mappe convesse del piano; questa relazione è chiamata “formula di Eulero per le mappe”.

Si può inoltre aprire le scatole tagliando in modo opportuno gli spigoli e distenderle in modo da ottenere gli sviluppi piani dei vari poliedri, passando così dalle tre dimensioni alle due dimensioni. Si può inoltre far costruire, partendo dallo sviluppo piano, i cinque poliedri regolari facendo analizzare ai bambini le loro particolari caratteristiche diverse da quelle degli altri poliedri (vedi fig. 3.5, 3.6, 3.7).

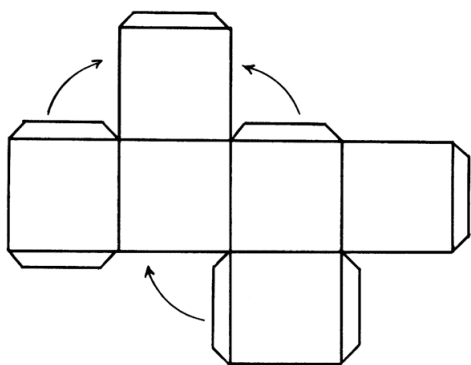


Fig. 3.5: Sviluppo piano del cubo

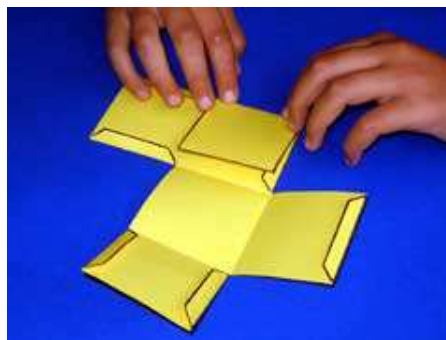


Fig. 3.6: Fase di costruzione del cubo



Fig. 3.7: Poliedri regolari costruiti con la carta

In questo modo il bambino diventa protagonista nella costruzione sia degli oggetti che delle conoscenze, in quanto queste attività favoriscono l’osservazione e la scoperta delle caratteristiche di figure piane e solide attraverso

il gioco, la discussione, il disegno coinvolgendo gli alunni in attività concrete e stimolanti. Questo tipo di approccio alla geometria sviluppa altresì l'immaginazione spaziale perché la costruzione di un oggetto comporta una preliminare rappresentazione mentale di ciò che si vuole costruire e permette di fare matematica divertendosi [Sbaragli, 2002].

3.2 Scuole medie

Come abbiamo già detto, è alle scuole medie che si inizia a studiare la geometria solida nei libri di testo; noi rivolgeremo la nostra attenzione sui poliedri regolari andando a vedere come sono definiti e presentati nei testi scolastici.

Nei programmi di geometria, prima di definire i poliedri regolari dovrà essere introdotta la nozione di angolo diedro e di angoloide. La nozione di angolo è molto delicata e spesso vengono date delle definizioni incomplete e imprecise; l'angolo è un ostacolo epistemologico in aula che causa molti errori negli studenti, il concetto di angolo ha creato nel tempo discussioni e problemi [D'Amore, 1999]. E' molto frequente, infatti, che nei testi scolastici venga definito l'angolo diedro come la regione di spazio compresa da due semipiani aventi l'origine in comune. Questa definizione è errata perché non si considera l'altra regione in cui lo spazio è diviso e non si dice nulla riguardo ai due semipiani. Per esempio nel libro [15], utilizzato una decina di anni fa in una scuola media, è presente la seguente definizione:

Definizione 3.1. Si dice *angolo diedro* ciascuna delle due regioni in cui lo spazio risulta diviso da due semipiani aventi l'origine in comune.

Questa definizione è incompleta perché, anche se si considerano entrambe le regioni in cui lo spazio è diviso, non si dice nulla se i due semipiani sono compresi oppure no. Inoltre, sempre in questo testo, manca la definizione di angoloide, fondamentale per definire i poliedri regolari.

Passando ai poliedri regolari, nel libro [15] viene data la seguente definizione:

Definizione 3.2. Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e se i suoi diedri sono congruenti.

Questa definizione non è corretta perché si definisce regolare un poliedro qualsiasi e non un poliedro convesso, inoltre sono soddisfatte le condizioni (i) e (ii) della definizione 2.14 presente nel capitolo 2, ma non è soddisfatta la condizione (iii) o (iv) sulle figure al vertice ovvero sugli angoloidi: infatti si richiede che i diedri devono essere congruenti, non gli angoloidi.

In questi casi dovrà essere quindi l'insegnante a far presente agli alunni che in realtà le definizioni date nel libro sono imprecise, sostituendole con definizioni corrette, perché altrimenti si formerebbero negli alunni delle concezioni erronee su questi argomenti che si porteranno dietro e che potrebbero causare dei gravi errori in futuro.

Nei vari testi scolastici si può notare che i solidi geometrici sono quasi sempre raffigurati come se fossero “appoggiati” su un tavolo: per esempio il cubo viene raffigurato sempre come in figura 3.8 e mai come in figura 3.9 un può ruotato.

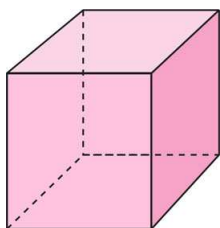


Fig. 3.8:

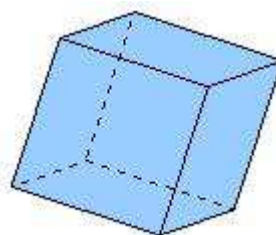


Fig. 3.9:

In questo modo si potrebbero formare in alcuni studenti delle immagini mentali sbagliate di solidi tridimensionali che in seguito diventeranno la causa di molti errori. Di solito gli alunni si immaginano il cubo con una

faccia orizzontale ma questo può causare un disagio nell'alunno quando esso si troverà davanti un cubo rappresentato da un'altra prospettiva, diversa da quella usuale. Per evitare tutto questo si potrebbe utilizzare in classe il software didattico Cabri 3D che permetterà agli studenti di poter visualizzare ogni tipo di solido da ogni angolazione e studiare le loro proprietà.

Con questo tipo di attività si vuole portare lo studente ad affrontare situazioni diverse da quelle solite in modo che esso possa riflettere sulla natura di ciò che si studia; è importante inoltre che sia l'allievo stesso a costruire, osservare e scoprire proprietà e relazioni.

Con Cabri 3D (Cahier de bruillon interactive) si possono studiare i poliedri regolari evidenziandone le loro proprietà, simmetrie e relazioni in modo interattivo. Si può iniziare con il costruire tutti e cinque i solidi platonici e, dato che si può cambiare il punto di osservazione, si può ricercare meglio le loro proprietà, per esempio il numero di vertici V , spigoli S e facce F ; ad esempio in figura 3.10 è riportato un dodecaedro costruito con Cabri 3D.

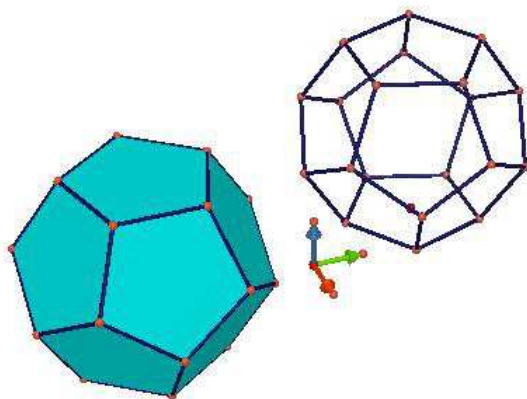


Fig. 3.10: Dodecaedro pieno e cavo

Cambiando quindi il tipo di angolazione gli studenti potranno contare meglio i valori di V , F e S per ciascuno dei corpi regolari e successivamente potranno scoprire da soli la relazione che li lega, la formula di Eulero.

Una volta trovata la relazione di Eulero, gli alunni potranno indagare su essa scoprendo poliedri per cui non vale e cercare quindi di caratterizzare esattamente i poliedri per cui è valida.

Si può inoltre passare da una rappresentazione tridimensionale dei poliedri regolari ad una piana in tempo reale (vedi fig. 3.11- 3.14) e analizzare le varie figure ottenute.

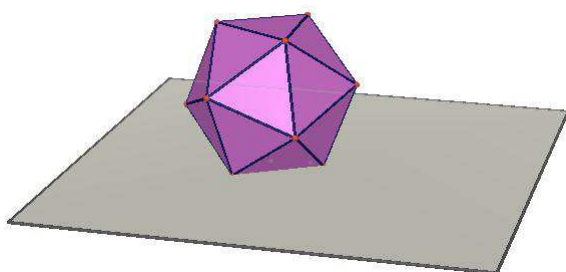


Fig. 3.11: Icosaedro

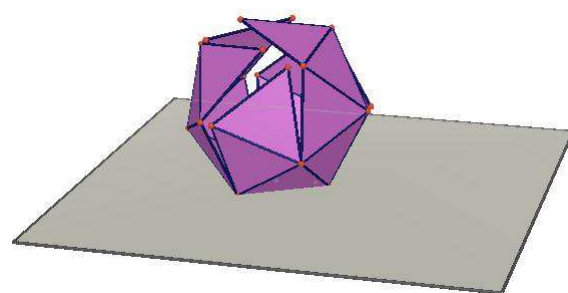


Fig. 3.12: Fase iniziale di apertura del solido

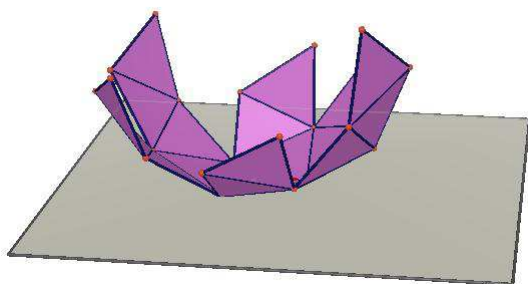


Fig. 3.13: Fase intermedia di apertura del solido

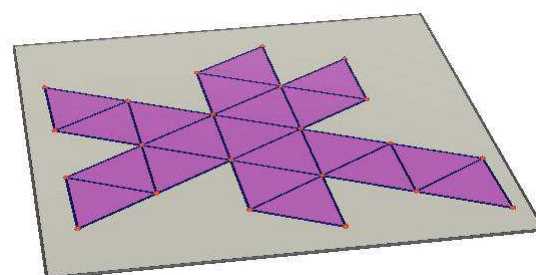


Fig. 3.14: Sviluppo piano dell'icosaedro

Con questo software è possibile studiare anche le sezioni di ogni solido in modo dinamico in modo da ottenere vari tipi di poligoni. Per esempio se consideriamo il cubo possiamo far fare agli alunni varie sezioni di esso con vari piani ottenendo vari tipi di poligoni come esagoni, parallelogrammi e

triangoli. Per esempio nella figura 3.15 si interseca il cubo con il piano che passa per i punti medi degli spigoli ottenendo così un esagono regolare.

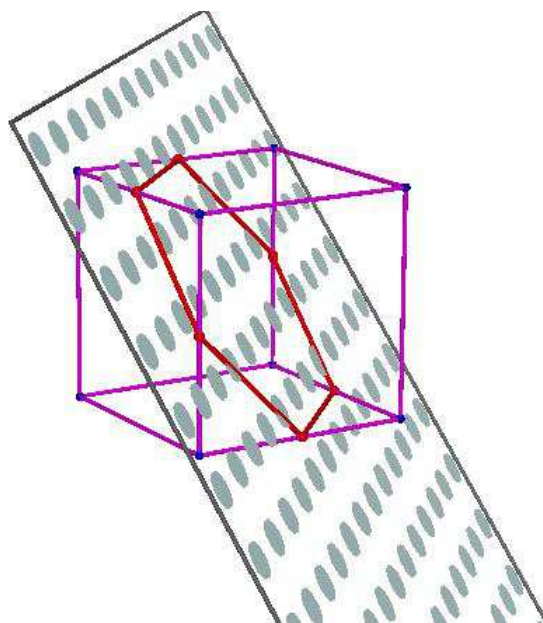


Fig. 3.15: Sezione di un cubo con un piano

Infine si può far scoprire agli studenti le varie simmetrie dei poliedri regolari utilizzando le funzioni presenti nel software come le rotazioni, le riflessioni rispetto ad un piano e le simmetrie centrali facendo varie prove.

In questo modo l'alunno andrà a controllare da solo quali tipi di simmetrie riporteranno il solido in se stesso. Ad esempio in figura 3.16 e 3.17 si può vedere che facendo una rotazione di 90 gradi di asse che passa per i punti medi di due spigoli opposti del tetraedro, questa non riporta il solido in se stesso; facendo varie prove si otterrà che solo rotazioni di 180 gradi riporteranno il tetraedro in se stesso.

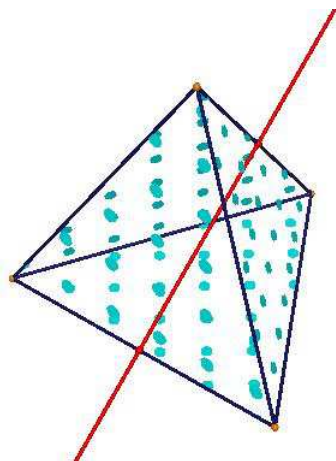


Fig. 3.16: Asse di rotazione che passa per i punti medi di spigoli opposti

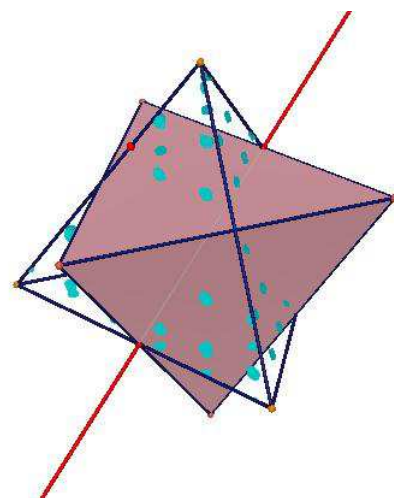


Fig. 3.17: Tetraedro ruotato di 90 gradi

3.3 Scuole superiori

Anche nei libri di testo utilizzati per le scuole superiori ci possono essere delle imprecisioni che possono causare negli alunni errori e concetti sbagliati su argomenti matematici. Tornando ad analizzare le definizioni di angolo diedro, ho trovato per esempio nel libro [2], utilizzato in un liceo classico una ventina di anni fa, la seguente definizione:

Definizione 3.3. Due piani che abbiano un punto in comune si intersecano in una retta e ovviamente ciascuno di essi viene da questa diviso in due semipiani; la parte di spazio limitata da due di questi si dice *angolo diedro*.

Inoltre, sempre in questo testo, vengono definite anche le facce e gli spigoli:

Definizione 3.4. I due semipiani si dicono *facce* del diedro ed appartengono ad esso, mentre la loro comune origine si dice *spigolo*.

Questa definizione di angolo diedro non è corretta perché si considera solo la porzione convessa di spazio compresa fra i due semipiani, mentre invece fa parte dell'angolo diedro anche l'altra regione di spazio.

Passando ad analizzare le definizioni di angoloide ho trovato anche qui delle imprecisioni per esempio nei libri [22], utilizzato in un liceo scientifico una decina di anni fa, e [3], utilizzato sempre in un liceo scientifico ma due anni fa. Nel libro [22] viene data la seguente definizione di angoloide:

Definizione 3.5. Dati un poligono convesso di un numero $n \geq 3$ qualsiasi di lati e un punto V esterno al suo piano, si chiama *angoloide* di vertice V la figura formata da tutte le semirette di origine V che passano per i diversi punti del dato poligono.

Mentre nel libro [3] si trova questa:

Definizione 3.6. Consideriamo un poligono convesso e un punto V non appartenente al suo piano. Chiamiamo *angoloide* il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.

In entrambe le definizioni si dice angoloide solo la porzione convessa di spazio escludendo quindi l'altra porzione, quella concava.

Infine andando poi ad analizzare le definizioni date dei poliedri regolari si trovano ancora degli errori; per esempio nel libro [22] si trova:

Definizione 3.7. Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono poligoni regolari isometrici e i suoi diedri sono tutti isometrici.

In questa definizione manca la condizione sugli angoloidi ed inoltre viene definito regolare un poliedro qualsiasi e non uno convesso. Dovrà essere quindi l'insegnante a far presente agli alunni gli eventuali errori ed imprecisioni che si trovano in molti libri fornendone eventualmente dei controesempi. Un possibile controesempio può essere il poliedro convesso non regolare presente in figura 2.13 costituito da facce tutte triangoli equilateri isometrici.

Una possibile attività didattica che si può fare alle scuole superiori può essere quella in cui si fa vedere agli studenti che, mentre nel piano non esiste alcun limite al numero delle figure regolari che si possono costruire, per lo spazio la situazione è diversa infatti esistono solamente cinque poliedri regolari.

Una eventuale argomentazione dalla quale è possibile dimostrare che i corpi regolari sono solo cinque, si basa sulle seguenti considerazioni:

- ad ogni vertice di un poliedro regolare devono convergere almeno tre facce;
- tali facce non possono stare sullo stesso piano, quindi la somma delle ampiezze degli angoli che convergono ad uno stesso vertice deve essere inferiore a 360 gradi.

Procediamo quindi prendendo in considerazione i vari poligoni regolari ed osserviamo cosa accade.

TRIANGOLO EQUILATERO

Ogni angolo di un triangolo equilatero misura 60° e per formare un solido, da ogni vertice è necessario che escano almeno 3 facce. Ogni angoloide misurerà quindi: $60^\circ \cdot 3 \text{ facce} = 180^\circ$ che è minore di 360° . Di conseguenza, il solido esiste e prende il nome di TETRAEDRO (vedi fig. 3.18).

Se invece di tre facce, facciamo partire da ogni vertice quattro triangoli equilateri, la misura di un angoloide sarà: $60^\circ \cdot 4 \text{ facce} = 240^\circ$ che è sempre minore di un angolo giro. Anche in questo caso il poliedro esiste, e prende il nome di OTTAEDRO (vedi fig. 3.19).

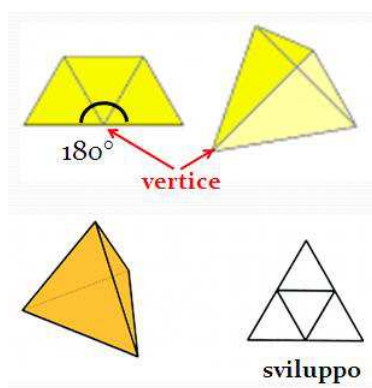


Fig. 3.18: Tetraedro

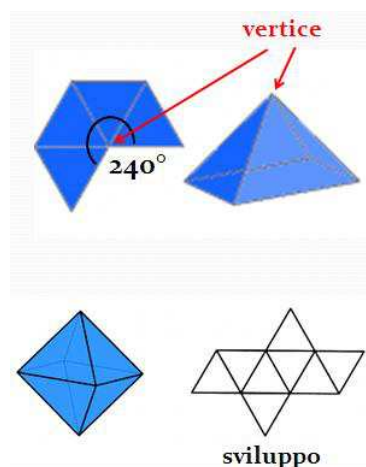


Fig. 3.19: Ottaedro

Facendo partire da ogni vertice invece 5 triangoli equilateri, la somma degli angoli delle facce che escono da ogni vertice è $60^\circ \cdot 5 \text{ facce} = 300^\circ$ che è ancora minore di 360° . Abbiamo così trovato un terzo poliedro che prende il nome di ICOSAEDRO (vedi fig. 3.20).

Provando invece a far partire da ogni vertice 6 facce, la somma di un angoloide sarebbe $60^\circ \cdot 6 \text{ facce} = 360^\circ$ che non è minore di un angolo giro (vedi fig. 3.21). Il poliedro si adagerebbe su un piano e non si otterrebbe una figura solida.

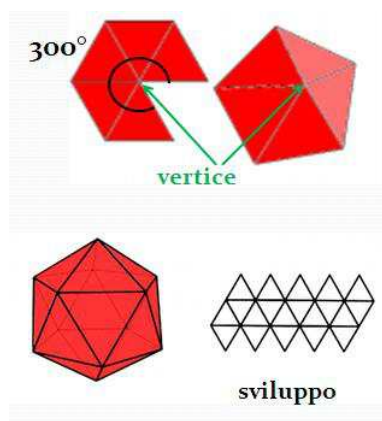


Fig. 3.20: Icosaedro

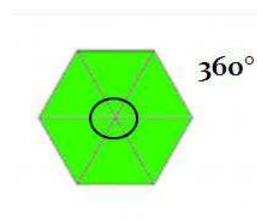


Fig. 3.21: Angolo giro

Di conseguenza possiamo concludere che non esistono ulteriori poliedri regolari aventi per facce triangoli equilateri.

QUADRATO

Facendo partire da ogni vertice almeno 3 facce, in questo caso quadrati, sapendo che l'angolo di un quadrato è di 90° , la misura di un angoloide diventa $90^\circ \cdot 3 \text{ facce} = 270^\circ$ che è minore di 360° . In questo caso il poliedro esiste e prende il nome di ESAEDRO o CUBO (vedi fig. 2.22).

Provando a far partire da un vertice 4 facce di forma quadrata, ogni angoloide misurerebbe $90^\circ \cdot 4 \text{ facce} = 360^\circ$ che non è minore di un angolo giro (vedi fig. 3.23).

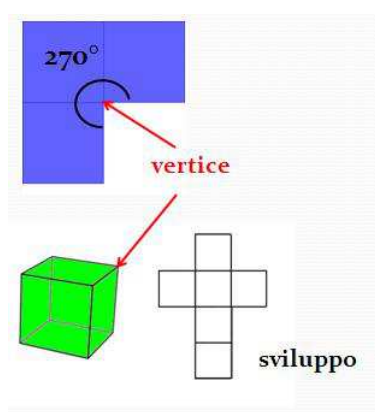


Fig. 3.22: Cubo

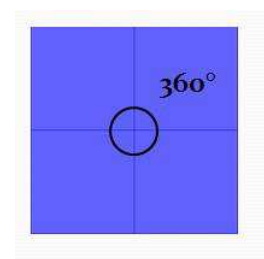


Fig. 3.23: Angolo giro

Di conseguenza possiamo concludere che non esistono ulteriori poliedri regolari aventi per facce quadrati.

PENTAGONO REGOLARE

Facendo partire da ogni vertice 3 pentagoni regolari, il cui angolo misura 108° , la misura di un angoloide sarà $108^\circ \cdot 3 \text{ facce} = 324^\circ$ che è minore di un angolo giro. Quindi esiste un quinto poliedro regolare che prende il nome di

DODECAEDRO (vedi fig. 3.24).

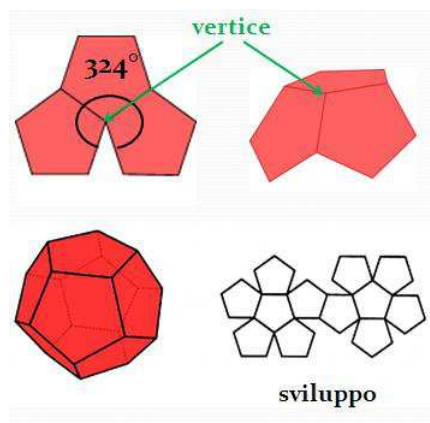


Fig. 3.24: Dodecaedro

Provando invece a far partire non 3 ma 4 facce costituite da pentagoni regolari, ogni angoloide misurerebbe $108^\circ \cdot 4 \text{ facce} = 432^\circ$ che è maggiore di un angolo giro. Di conseguenza possiamo concludere che non esistono ulteriori poliedri regolari aventi per facce pentagoni regolari.

Considerando adesso l'esagono regolare, il cui angolo misura 120° , proviamo a far partire da un vertice almeno tre facce. La misura di un angoloide sarebbe: $120^\circ \cdot 3 \text{ facce} = 360^\circ$ che non è minore di un angolo giro; quindi non esistono poliedri regolari aventi per facce esagoni regolari.

Poiché andando avanti, considerando facce costituite da poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati, la misura degli angoli aumenterebbe possiamo affermare che non esistono ulteriori poliedri regolari [Centro Studi "Mario Pancrazi", 2010].

Si può fare esperienza dei poliedri regolari anche con i dadi da gioco, infatti non esiste solo il dado a forma di cubo ma esistono anche dadi a forma di poliedri regolari (vedi fig. 3.25) utilizzati soprattutto nei giochi di ruolo.

Dadi tetraedrali di avorio e di lapislazzuli sono stati trovati nelle tombe reali sumeriche di Ur (circa 3000 a.C.), mentre dadi icosaedrici della dinastia tolemaica sono visibili al British Museum di Londra.



Fig. 3.25: Dadi poliedrali

I poliedri regolari per le loro simmetrie e bellezza hanno sempre avuto una connotazione magica; caratteristica essenziale per un buon dado deve essere la equiprobabilità delle sue facce, cioè non devono esistere facce privilegiate. Ciò è raggiunto se il materiale è omogeneo e il poliedro ha tutte facce uguali, simmetriche rispetto al suo baricentro [De Cecco, 2009].

Gli studenti possono quindi fare esperienza dei cinque corpi regolari anche con dei giochi, osservando le loro proprietà geometriche attraverso un'applicazione concreta. Anche con il Cubo di Rubik e il Cubo Soma¹ si può giocare e nel frattempo scoprire le varie proprietà e simmetrie del cubo, anche se entrambi sono adatti a ragazzi grandi, mentre i dadi da gioco sono adatti a tutte le età, anche ai bambini piccoli.

¹Il Cubo Soma è un rompicapo inventato da Piet Hein nel 1936: esso è costituito da sette pezzi (detti policubi), sei formati da quattro cubetti incollati tra di loro e uno formato da tre, con i quali si possono comporre il cubo 3x3x3 o altre svariate forme.

Capitolo 4

Poliedri nell'arte

In questo capitolo vedremo come il fascino e la perfezione dei poliedri regolari vengano ripresi più volte nella storia dell'arte a partire dall'antichità fino ai giorni nostri; verrà quindi analizzato come essi ed altri tipi di poliedri, come quelli stellati, sono stati rappresentati o utilizzati nella pittura, scultura o architettura dai vari artisti.

La presenza dei poliedri nell'arte la ritroviamo soprattutto a partire dal primo Rinascimento, periodo in cui l'artista scopre che la matematica è fondamentale a garantire all'opera d'arte bellezza, armonia, equilibrio, perfezione universale, rigore. Un primo utilizzo dei poliedri regolari si può vedere in Filippo Brunelleschi (1377-1446) nell'Ospedale degli Innocenti e nella Sagrestia Vecchia della Basilica di San Lorenzo a Firenze. Nell'Ospedale degli Innocenti, infatti, lo spazio intercorrente tra due colonne è pari all'altezza delle colonne e alla profondità del portico (vedi fig. 4.1), ciò significa che lo spazio contenuto entro ogni arcata è formato da un cubo. Brunelleschi scopre così un modulo che dà unità (cubo) e che è l'elemento al quale tutti gli altri si proporzionano. L'uso del cubo si ritrova anche nella Sagrestia Vecchia della Basilica di San Lorenzo (vedi fig. 4.2); infatti la Sagrestia è un vano perfettamente cubico sormontato da una cupola a base circolare; nella fig. 4.3 si può notare la forma geometrica di questo ambiente cubico basato sulla proporzione armonica. Al centro di una parete si apre la tribuna quadrata,



Fig. 4.1: Ospedale degli Innocenti, Firenze

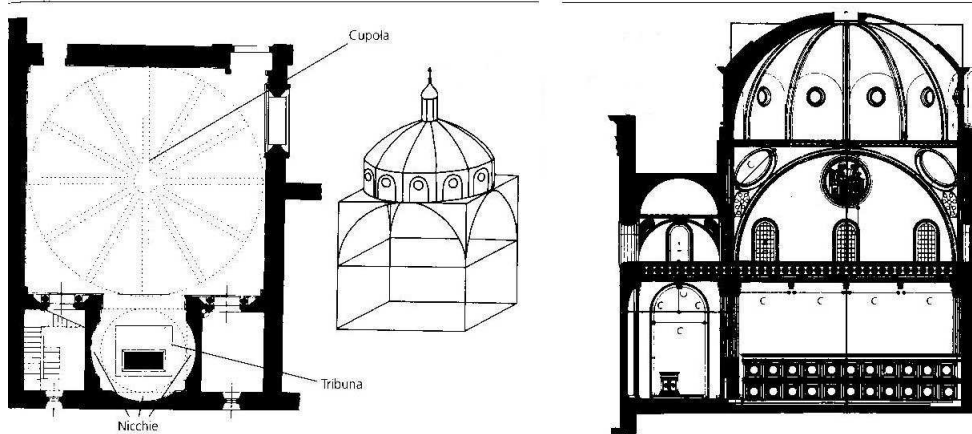


Fig. 4.2: Pianta e schema dell'alzato della Sagrestia Vecchia

costituita in alzato da tre cubi, sul terzo dei quali si imposta la cupoletta [Adorno, Mastrangelo, 2008].

L'immagine di un poliedro compare con il pittore e mosaicista fiorentino Paolo Uccello (1397- 1475) sul pavimento della basilica di San Marco a Venezia: si tratta di un piccolo dodecaedro stellato realizzato a mosaico (vedi fig. 4.3). Questa immagine è divenuta famosa nel 1986 perché è stata scelta come simbolo della Biennale d'Arte a Venezia dedicata al tema Arte e Scienza.

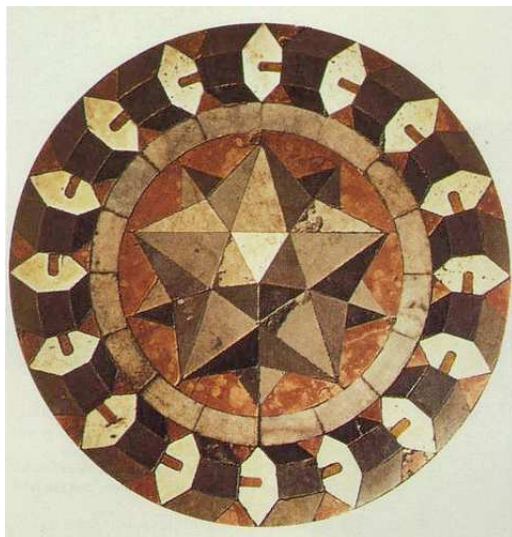


Fig. 4.3: Paolo Uccello, *Ruota prospettica con poliedro inscritto*, Basilica di San Marco, Venezia

Un *poliedro regolare stellato* si ottiene trascurando la convessità nella definizione 2.14 di poliedro regolare, richiedendo solo le condizioni (i) e (iv). Quattro fra questi poliedri sono stati studiati per la prima volta da un punto di vista matematico da Keplero e Poincot (1777- 1859): questi sono il piccolo dodecaedro stellato, il grande dodecaedro stellato, il grande dodecaedro e il grande icosaedro (vedi fig. 4.4- 4.7). Essi si possono ottenere mediante la *stellatura*¹ di ciascuna faccia del dodecaedro e dell'icosaedro. Questi quattro

¹Per un approfondimento si veda il libro [12]

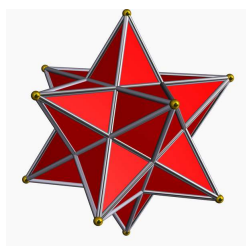


Fig. 4.4: Piccolo dodecaedro stellato

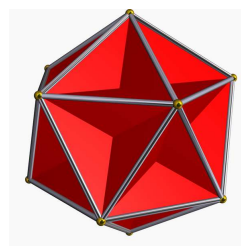


Fig. 4.5: Grande dodecaedro stellato

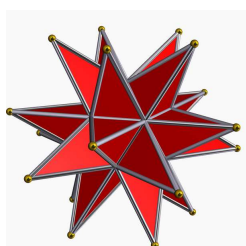


Fig. 4.6: Grande dodecaedro stellato

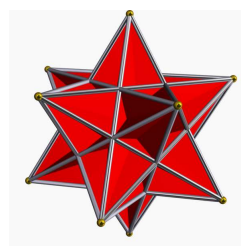


Fig. 4.7: Grande icosaedro stellato

poliedri stellati sono gli unici poliedri regolari aventi come facce poligoni stellati ma non sono gli unici poliedri regolari stellati: se ne possono costruire degli altri in cui le facce sono poligoni regolari che si intrecciano tra loro, cioè possono avere in comune dei segmenti che non sono lati delle facce [Gario, 1979].

Successivamente si occupò dei cinque corpi regolari anche Piero della Francesca nel suo *Libellus de quinque corporibus regularibus*, il quale applica le teorie sulla perfezione e sulle simmetrie dei poliedri regolari nello sviluppo delle sue opere pittoriche. Si può infatti notare in due dei suoi affreschi più celebri, come la *Madonna del Parto* e la *Resurrezione*, che la prima opera si sviluppa attorno all'ideale costruzione di un dodecaedro mentre la seconda di un icosaedro (vedi fig. 4.8- 4.11).

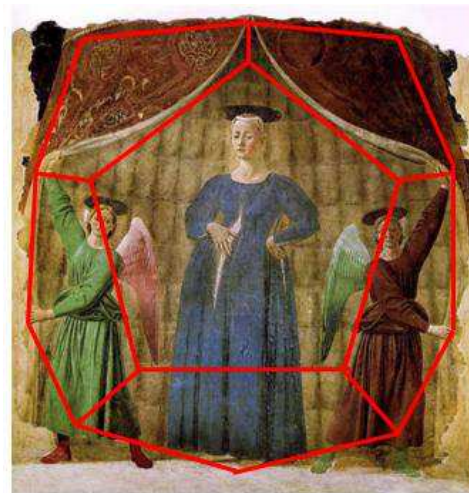
Fig. 4.8: *Madonna del parto*

Fig. 4.9: Dodecaedro ideale

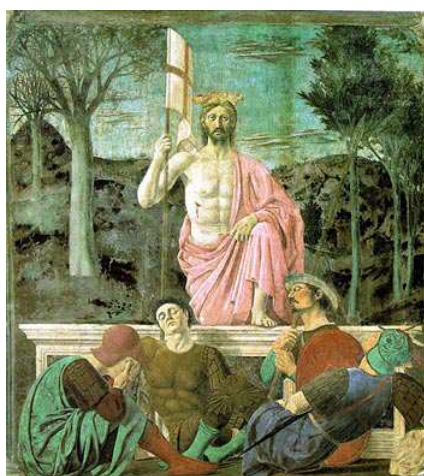
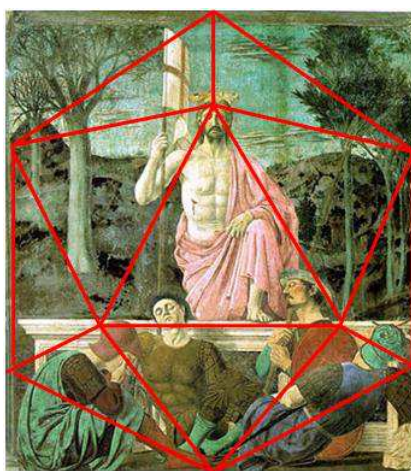
Fig. 4.10: *Resurrezione*

Fig. 4.11: Icosaedro ideale

Sempre in Piero della Francesca troviamo nell'opera *Flagellazione* l'utilizzo del cubo in prospettiva; l'ambiente sottostante alla sala, in cui è posta la colonna della tortura, è infatti diviso da tre cubi delineati dalle colonne e dal soffitto decorato a cassettoni (vedi fig. 4.12-4.13).



Fig. 4.12: Piero della Francesca, *Flagellazione*, 1450-1460, Urbino

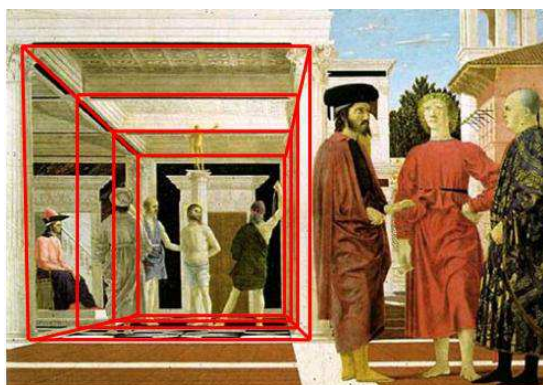


Fig. 4.13: Cubi in prospettiva

Anche in Jacopo dei Barbari (1445- 1516) troviamo l'immagine di alcuni poliedri nel suo *Ritratto di Luca Pacioli* (vedi fig. 4.14), nel quale il testo degli *Elementi* è affiancato da un dodecaedro ligneo appoggiato sopra la *Summa*, mentre si vede alla destra del frate, un corpo di 26 basi appeso per un filo, come i solidi delle tavole di Leonardo viste nel primo capitolo. Questo corpo

è il rombicubottaedro ed è riempito a metà di acqua, mentre il personaggio a sinistra di Pacioli sembra si possa identificare nel giovane Guidubaldo da Montefeltro (1472- 1508), al quale il frate dedicò la *Summa* [Centro Studi “Mario Pancrazi”, 2010].



Fig. 4.14: Jacopo de' Barbari, *Ritratto di Luca Pacioli*, Napoli

Tra gli artisti di questo periodo emerse il tedesco Albrecht Dürer (1471-1528) che, nel suo trattato dedicato in parte ai solidi platonici, disegnò per primo il loro sviluppo piano. Nella sua nota incisione *Melancholia I* (1514), illustrata in figura 4.15, Dürer introdusse un misterioso poliedro, che potrebbe essere un cubo con due vertici troncati. In quest'opera sono presenti anche simboli come quello del lavoro, della misura della geometria e quelli della distanza; in secondo piano vi è anche la presenza di un quadrato magico [Sala, Cappellato, 2003].



Fig. 4.15: Dürer, *Melancholia I*

Progredendo nel tempo, il mondo artistico del primo Novecento ebbe un movimento di breve durata che si è basato su forme cubiche e poliedriche, che rivoluzionò il linguaggio figurativo: il Cubismo (1907- 1914).

Questo movimento consiste nella scomposizione delle forme in poliedri multipli; gli oggetti sono ridotti alla loro struttura geometrica come poliedri, coni e cilindri. Nei quadri di Picasso (1881- 1973) l'oggetto viene rappresentato da una molteplicità di punti di vista così da ottenere una rappresentazione "totale" dell'oggetto. Le figure 4.16 e 4.17 illustrano rispettivamente *Ambroise Vollard* di Picasso e *Case all'Estaque* di Braque (1882- 1963), e in entrambe le opere si può notare che le immagini sono scomposte mediante vari poliedri.



Fig. 4.16: Picasso, *Ambroise Vollard*



Fig. 4.17: Braque, *Case all'Estaque*

Nell'arte contemporanea si possono trovare tracce di principi geometrici simili a quelli che affascinarono Platone. Ne è un esempio il pittore Maurits Cornelis Escher (1898-1972), il quale ha dimostrato un forte interesse alla geometria e all'armonia che i poliedri regolari esprimono, rappresentando oltre ai solidi platonici anche poliedri regolari stellati.

La figura 4.18 illustra la sua litografia intitolata *Rettili* del 1943, in cui il piccolo drago soffiato su un dodecaedro, il quale rappresenta l'apice del suo viaggio fantastico. Mentre nella figura 4.19 appare la riproduzione della sua opera *Stelle* realizzata nel 1948: in essa è rappresentato un universo occupato da poliedri e quello in primo piano, vuoto, ha all'interno camaleonti.

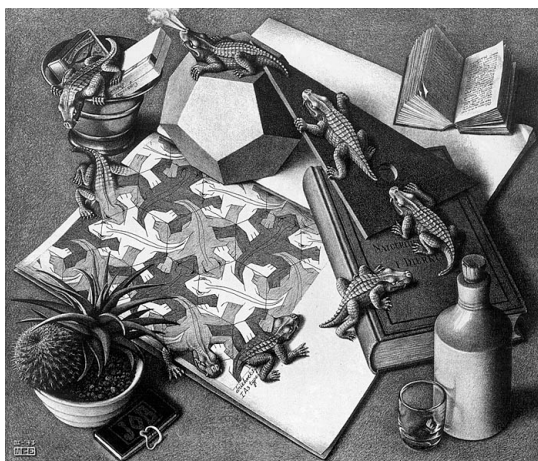


Fig. 4.18: Escher, *Rettili*, National Gallery of Art, Washington

Escher era interessato al problema della divisione ciclica del piano: essa consiste in un motivo che si ripete ad intervalli regolari; egli utilizzò come motivi persino elementi che rappresentassero figure riconoscibili in natura e figure fantastiche ². Egli utilizzò i suoi motivi periodici anche per strutturare la superficie di oggetti tridimensionali, compresi i poliedri regolari. Nei suoi esperimenti Escher ha incollato vari modelli di carta con diversi disegni, anche se solo uno di questi solidi è effettivamente stato realizzato in forma definitiva.

²Per un approfondimento su questo tema si veda il libro [20]

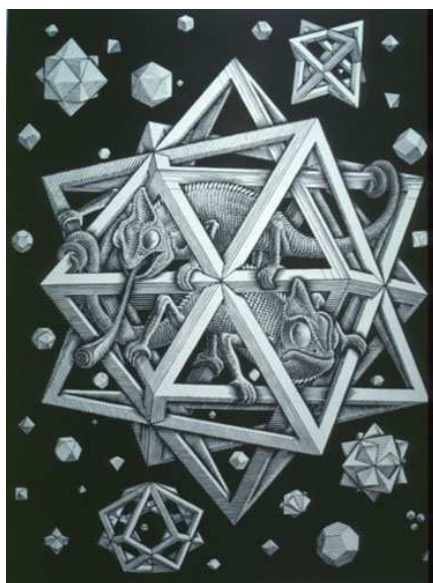


Fig. 4.19: Escher, *Stelle*, National Gallery of Art, Washington

Si tratta di un icosaedro in metallo con motivo smaltato di conchiglie e stelle marine (vedi fig. 4.20), che è stato realizzato da una ditta olandese per una scatola di cioccolatini; ora è conservato alla National Gallery of Art a Washington [Schattschneider, Walker, 2008].



Fig. 4.20: Icosaedro in metallo smaltato

Salvator Dalì (1904- 1989) fu anch'egli affascinato dai solidi platonici; egli elaborò delle composizioni in cui Matematica e Cristianesimo si confrontano e si completano simbolicamente.

Ne sono esempio i quadri *Ultima cena* e *Corpus Hypercubicus* (vedi fig. 4.21 e 4.22). Nella prima opera un dodecaedro vacuo, simbolo della quintessenza, sovrasta Gesù e i discepoli, mentre nella seconda la croce del Cristo è formata da otto cubi.

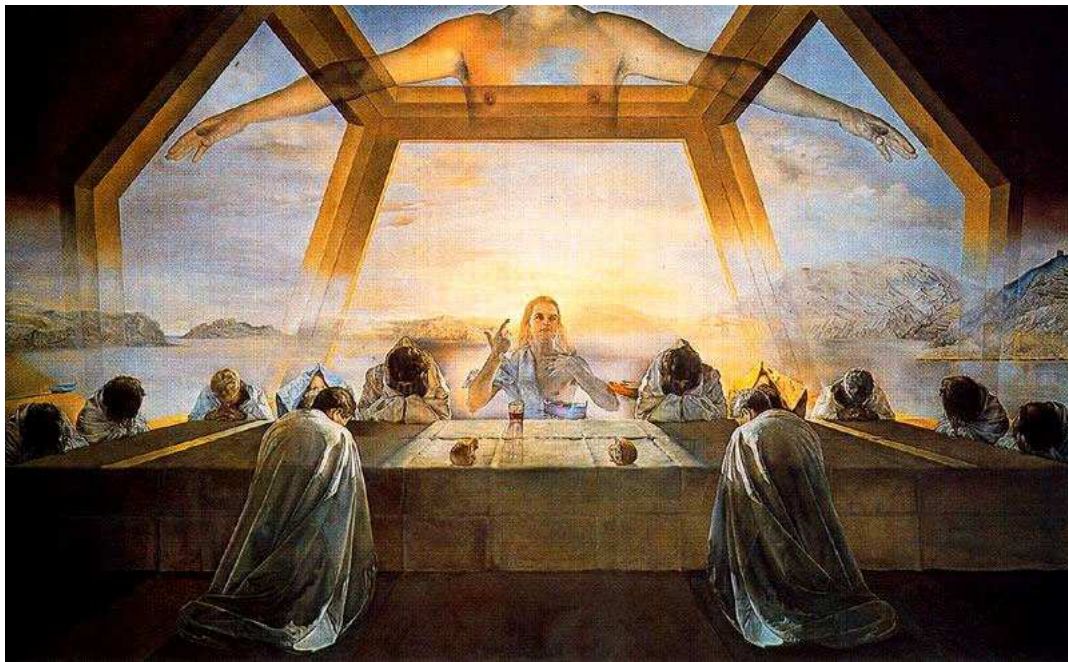


Fig. 4.21: Dalì, *Ultima cena*, 1955



Fig. 4.22: Dalí, *Corpus Hypercubicus*, 1953

Lucio Saffaro (1929- 1998), artista e scienziato, si è appassionato allo studio della geometria dei poliedri; egli ha pubblicato molti articoli su nuove classi di poliedri. Nelle figure 4.23 e 4.24 si possono vedere due delle sue più celebri opere.



Fig. 4.23: Lucio Saffaro, *Il piano di Orfeo*

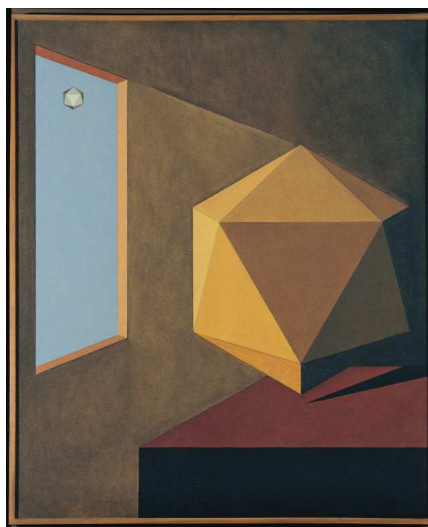


Fig. 4.24: Lucio Saffaro, *Ritratto di Keplero*

In campo artistico i poliedri regolari hanno trovato un'altra ideale applicazione nella scultura contemporanea; un esempio è la scultura di Arnaldo Pomodoro (1926) in figura 4.25 che rappresenta un tetraedro spezzato.

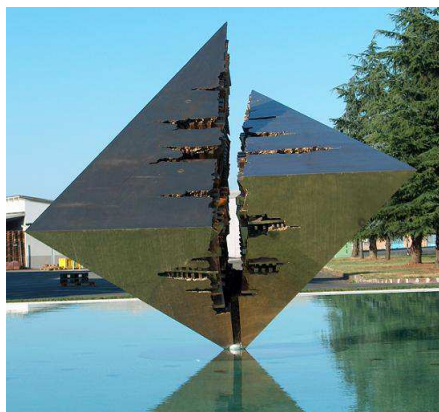


Fig. 4.25: Pomodoro, scultura di un tetraedro in bronzo

Anche l'architettura ha subito il fascino dei poliedri come forme a cui fare riferimento per la realizzazione di costruzioni. Fin dai tempi antichi le forme poliedriche hanno influenzato l'architettura, basti pensare alle piramidi (vedi fig. 4.26).



Fig. 4.26: Piramidi di Giza, Egitto (IV Dinastia, 2680- 2565 a.C.)

Un altro esempio di opera architettonica che ha avuto spunto dai poliedri è *Castel del Monte*, che si trova ad Andria in Puglia. La sua particolare forma poliedrica si può vedere in figura 4.27: essa è costituita da una struttura centrale con otto lati e da una torre ottagonale ad ogni angolo.



Fig. 4.27: *Castel del Monte*

I poliedri appaiono anche come motivi ornamentali; un poliedro stellato si trova infatti tra la croce e il tetto della sagrestia della *Cattedrale di San Pietro* nella Città del Vaticano (vedi fig. 4.28); mentre dei solidi platonici vuoti, sullo stile di Leonardo, abbelliscono la tomba di Sir Thomas Gorges e di sua moglie Helena Marchioness di Northampton. Quest'opera è stata realizzata nel 1635 e si trova nella *Cattedrale di Salisbury* (vedi fig. 4.29).

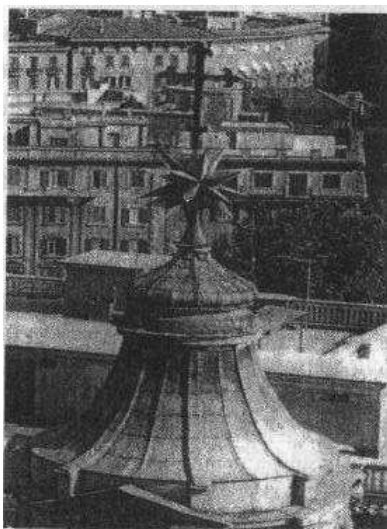


Fig. 4.28:



Fig. 4.29:

I poliedri sono stati utilizzati anche nella realizzazione delle cupole geodetiche: reticoli poliedrici di strutture in acciaio ricoperte da elementi metallici o di materie plastiche oppure di cartone, che permettono di ricoprire notevoli superfici senza bisogno di pilastri. Un esempio è riportato in figura 4.30 realizzata dall'ingegnere-architetto Richard Buckminster Fuller.



Fig. 4.30: Biosfera di Montreal, Buckminster Fuller, Isola di Sainte-Hélène

Le forme poliedriche sono presenti anche nell'architettura del XX secolo; l'architetto svizzero Le Corbusier, pseudonimo di Charles-Edouard Jeanneret (1887-1965), uno degli esponenti più importanti dell'architettura e dell'urbanistica moderne, ha impiegato pure forme geometriche, tra cui dei poliedri, nel *Convento dei Domenicani* di Sainte Marie de la Tourette a Evieux sur-Arbresie in Francia.

Egli cercò delle soluzioni architettoniche che potessero in parte riflettere le regole e i principi dell'ordine dei Domenicani; è per questo motivo che egli utilizzò forme molto semplici e scarse.

Le figure 4.31 e 4.32 illustrano rispettivamente la visione aerea del convento e un particolare della cappella [Sala, Cappellato, 2003].

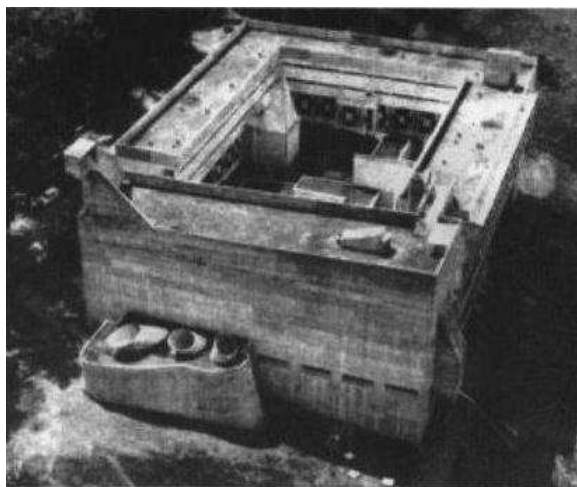


Fig. 4.31: Convento dei Domenicani di Sainte Marie de la Tourette a Evieux

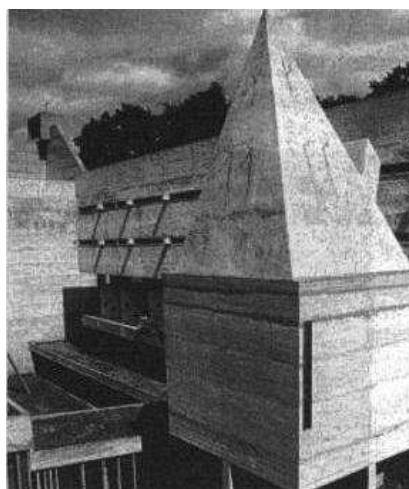


Fig. 4.32:

Abbiamo quindi visto come attraverso i secoli i solidi platonici e i poliedri hanno affascinato gli artisti di svariati ambiti artistici, dall'architettura alla pittura e alla scultura, offrendo all'arte quel rigore e quell'armonia di cui l'uomo ha da sempre avuto la necessità, trasformando così l'arte in scienza e la scienza in arte.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo visto come i poliedri regolari hanno avuto nella storia della matematica una grande importanza; erano considerati simboli che possedevano profonde implicazioni filosofiche (Platone), religiose (Dali) e alchemiche.

Con i solidi platonici si è cercato di spiegare i fenomeni naturali (Keplero) e la loro perfezione e armonia è stata fonte di ispirazione di scienziati e artisti fin dall'antichità. Anche oggi molti campi di ricerca attivi nella matematica e nella fisica teorica sfruttano i gruppi di simmetria dei poliedri regolari; i solidi platonici vengono inoltre utilizzati per lo studio della classificazione di tutte le geometrie tridimensionali.

Abbiamo visto anche come questo argomento è delicato nell'insegnamento, proponendo varie attività da fare in classe che possano aiutare gli studenti a comprendere correttamente il concetto di poliedro regolare.

Bibliografia

- [1] Adorno, P., Mastrangelo, A., *Dell'arte e degli artisti 2*, G. D'anna, 2008
- [2] Belli, I., Lupo Perricone, A., Pagni, L., Pallini, S., *Osservare e dedurre, geometria del piano e dello spazio*, SEI, 1989
- [3] Bergamini, M., Trifone, A., Barozzi, G., *Geometria euclidea nello spazio*, Zanichelli, 2009
- [4] Boyer, C.B., *Storia della matematica*, Milano, 1976
- [5] Centro Studi "Mario Pancrazi", *Pacioli fra arte e geometria*, tipografia l'Artistica, 2010
- [6] D'Amore, B., *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice Bologna, 1999
- [7] De Cecco, G., *La regolarità per i poliedri e i dadi da gioco*, articolo Numero 9 da matematicamente.it, maggio 2009
- [8] Dedò, M., *Forme, simmetria e topologia*, Zanichelli, 1999
- [9] Emmer, M., *La perfezione visibile*, Edizioni Theoria, 1991
- [10] Frajese, A., Maccioni, L., *Gli Elementi di Euclide*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1970
- [11] Gardner, M., *Enigmi e giochi matematici*, vol. (1-5), Sansoni, 1967

-
- [12] Gario, P., *L'immagine geometrica del mondo (storia dei poliedri)*, Stampatori Editrice Torino, 1979
- [13] Kepler, J., *Mysterii Cosmographici*, Opera Omnia, 1858
- [14] Lyusternik, L., A., *Convex figures and polyhedra*, Dover, 1963
- [15] Mariscotti, M., Canobbio., M., *Classe di matematica, Geometria, B*, Petrini Editore, 2000
- [16] Masi, G., *Il Timeo*, Clueb, 2001
- [17] Pacioli, L., *De Divina Proportione*, Roma, 2000
- [18] Sala, N., Cappellato, G., *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, Franco Angeli, 2003
- [19] Sbaragli, S., *Nel mondo quotidiano dei poliedri. La vita scolastica*, Giunti, 2002
- [20] Schattschneider, D., Walker, W., *M.C. Escher caleidocicli*, Evergreen, 2008
- [21] Sernesi, E., *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1992
- [22] Zwirner, G., Scaglianti, L., *Esponenziali, logaritmi, algebra lineare*, Cedam, 1998