

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Misura di ampiezza e fase in olografia digitale

Relatore:

**Prof. Marco Cuffiani**

Presentata da:

**Valerio Maiolo**

Correlatore:

**Dott. Alessandro Fuschi**

Anno Accademico **2017/2018**

## Sommario

L'olografia può essere pensata come un metodo di *imaging* tridimensionale, che non richiede un contatto con l'oggetto della misura e permette di delinearne il profilo nello spazio. La tecnica dell'olografia fuori asse è presentata nel quadro della teoria della comunicazione e del processamento ottico dell'informazione. Essa permette di risolvere il problema del disturbo portato dalla sovrapposizione dell'ordine zero di diffrazione e delle immagini gemelle. In questo modo, sarà possibile estrarre le informazioni della fase portate dall'oggetto per una sua ricostruzione nello spazio. Il metodo è basato sull'analisi nel dominio della frequenza delle frange di interferenza. Matlab sarà lo strumento per la sintesi digitale degli ologrammi su cui verranno svolte le misure oppure per la ricostruzione di ologrammi digitali acquisiti in laboratorio con un sensore *CCD*. Per la ricostruzione della fase, vengono presentati alcuni algoritmi di *unwrapping*. Questo tipo di algoritmi è molto usato negli ambiti più svariati, dai radar ad apertura sintetica alla tomografia a risonanza magnetica.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Principi fondamentali dell'olografia</b>	<b>5</b>
1.1 Equazione di d'Alembert . . . . .	5
1.1.1 Soluzione d'onda piana . . . . .	5
1.1.2 Soluzione d'onda sferica in approssimazione parassiale . . . . .	6
1.2 Teoria scalare della diffrazione . . . . .	8
1.2.1 Diffrazione di Fresnel . . . . .	10
1.2.2 Diffrazione di Fraunhofer . . . . .	11
1.3 Registrazione di figure di interferenza . . . . .	12
1.4 Ologramma di un oggetto puntiforme . . . . .	13
1.5 Registrazione e ricostruzione di ologrammi <i>fuori asse</i> . . . . .	14
<b>2 Misura della fase in olografia digitale e CGH</b>	<b>18</b>
2.1 <i>Computer Generated Holography</i> . . . . .	18
2.2 Olografia Digitale ( <i>DH</i> ) . . . . .	19
2.3 Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon . . . . .	19
2.4 Trasformata discreta di Fourier e sue implementazioni . . . . .	21
2.4.1 Calcolo della diffrazione - Metodo S-FFT . . . . .	22
2.5 Sintesi di ologrammi digitali in <i>MATLAB</i> . . . . .	24
2.5.1 Ologramma di un oggetto puntiforme . . . . .	24
2.5.2 Condizione per il campionamento della risposta all'impulso spaziale di Fresnel . . . . .	35
2.5.3 Condizioni per l'olografia fuori asse . . . . .	35
2.5.4 Figura di interferenza di due onde piane fuori asse . . . . .	38
2.5.5 Ricostruzione di ologrammi sintetizzati . . . . .	40
<b>3 Risultati sperimentali</b>	<b>43</b>
3.1 Ricostruzione della fase di ologrammi digitali . . . . .	43
3.1.1 Analisi spettrale e misura dell'angolo $\theta$ . . . . .	43
3.1.2 Metodi di unwrapping della fase . . . . .	47
3.2 Apparato sperimentale . . . . .	52
3.3 Ologrammi digitali realizzati in laboratorio . . . . .	55

<i>INDICE</i>	2
3.3.1 Risultati preliminari per la ricostruzione della fase . . . . .	56
<b>Bibliografia</b>	<b>64</b>

# Introduzione

L'olografia è una tecnica che consiste intrinsecamente di due passaggi: la registrazione di una figura di interferenza e la successiva ricostruzione del fronte d'onda per diffrazione. La natura ondulatoria della luce è alla base di questo processo e fu dimostrata nel 1801 da Thomas Young con un semplice quanto convincente esperimento. Nel 1947, attraverso i suoi studi per incrementare il potere risolutivo del microscopio elettronico, l'ingegnere ungherese Dennis Gabor concepisce la tecnica olografica, in un background che andava dalla microscopia a raggi X di Sir William Lawrence Bragg alla teoria della comunicazione di Claude Shannon. Questa invenzione gli valse il Premio Nobel per la fisica nel 1971 [1].

La differenza sostanziale rispetto alla fotografia consiste nella registrazione, oltre che dell'intensità, anche dell'informazione di fase dell'ampiezza complessa del segnale luminoso. Ciò è possibile attraverso la sovrapposizione dell'onda diffratta dall'oggetto e di un'onda di riferimento. La proprietà della luce di creare figure di interferenza è la coerenza. Al momento della scoperta dell'olografia, lo sviluppo della tecnologia non aveva ancora incontrato l'invenzione della luce coerente del laser, che avrebbe in seguito prodotto una proliferazione di studi e di tecniche nuove. Difatti Gabor trovò un compromesso fra coerenza e intensità utilizzando la luce verde di una lampada a vapori di mercurio ad alta pressione [2]. La scarsa coerenza spaziale della sorgente lo vincolava ad un processo che venne in seguito definito *in-line*: la luce di riferimento e quella dell'oggetto si propagano parallelamente sullo stesso asse, generando, in fase di ricostruzione, il disturbo dovuto alla sovrapposizione di immagine virtuale e immagine reale.

Nel 1961, i fisici Emmett N. Leith e Andjuris Upatnieks propongono un metodo per separare l'immagine dell'oggetto dall'*immagine gemella*, attraverso una reinterpretazione dell'olografia nel quadro della teoria della comunicazione [3]. Nasce così l'olografia *fuori asse*, oppure a *frequenza portante*, che consiste nell'inclinazione dell'onda piana del laser di riferimento di un angolo  $\theta$  rispetto al piano di osservazione.

Questa è una delle tecniche che verranno approfondite in questo elaborato, in quanto rappresenta la base delle misure svolte. L'apparato sperimentale è un ibrido analogico-digitale, in cui il segnale luminoso è acquisito digitalmente. In tal modo, sarà possibile ricostruire ed effettuare alcune misure sull'angolo  $\theta$  fra le direzioni di propagazione delle due onde. Il problema della ricostruzione della fase è centrale e verranno pertanto presentati alcuni algoritmi di *unwrapping* che si incontrano nella sua risoluzione.

Con l'incremento rapidissimo della potenza di calcolo degli elaboratori elettronici che si

è avuto negli ultimi decenni, si è assistito a un ritorno dell'olografia digitale nelle sue due forme principali della *Computer Generated Holography (CGH)* e della *Digital Holography (DH)*. Entrambe affondano le proprie origini a metà degli anni '60 [4][5] e designano, la prima, la sintesi di ologrammi attraverso il calcolatore e, la seconda, l'acquisizione dell'ologramma con un sensore matriciale digitale come un *CCD* o un *CMOS*. Entrambe sono di fondamentale importanza nel percorso sperimentale che si va a presentare.

# Capitolo 1

## Principi fondamentali dell'olografia

### 1.1 Equazione di d'Alembert

#### 1.1.1 Soluzione d'onda piana

L'ologramma più semplice che si possa registrare è la figura di interferenza fra due onde. Questo è un fenomeno basato unicamente sulla natura ondulatoria della luce e dipende dal grado di coerenza spaziale e temporale delle due onde. L'equazione che descrive la propagazione di un'onda elettromagnetica può essere ricavata a partire dalle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo.

In uno spazio privo di cariche, omogeneo e isotropo prendono la forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

dove

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

è la velocità della perturbazione elettromagnetica nel vuoto, ed  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono il campo elettrico e magnetico. Applicando il rotore alla relazione  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  si ottiene l'equazione d'onda omogenea, nota anche come *equazione di d'Alembert*, del campo elettrico:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \psi = E_x, E_y, E_z. \quad (1.1)$$

essendo

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

l'operatore laplaciano e  $\psi$  una delle componenti spaziali del campo elettrico.

L'onda piana è una delle sue soluzioni e, per un'oscillazione armonica di frequenza

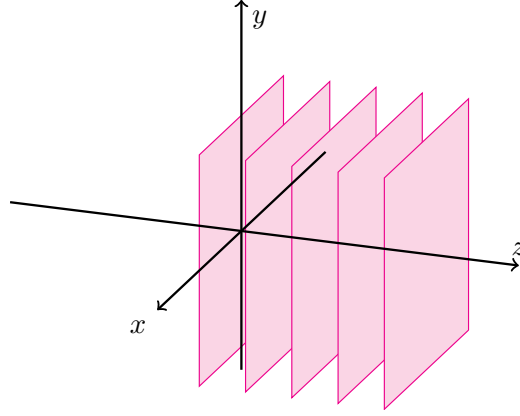


Figura 1.1: Propagazione di un'onda piana polarizzata linearmente.

angolare  $\omega_0$ , la sua equazione in coordinate cartesiane è

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp(i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{R})), \quad (1.2)$$

dove  $A$  è l'ampiezza,  $\vec{k}_0 = k_{0x}\hat{x} + k_{0y}\hat{y} + k_{0z}\hat{z}$  è il vettore d'onda e  $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  è il vettore posizione. Il modulo del vettore d'onda è chiamato numero d'onda

$$k_0 = |\vec{k}_0| = \sqrt{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2} \quad (1.3)$$

ed è proporzionale all'inverso della lunghezza d'onda. Infatti, nello spazio vuoto, valgono le importanti relazioni:  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{c}$ . Dunque, quella appena presentata è l'equazione di un'onda piana di ampiezza  $A$  che viaggia lungo la direzione  $\vec{k}_0$ .

Nel caso di un'onda polarizzata linearmente che si propaghi lungo l'asse  $z$  positivo, l'equazione (1.2) diventa

$$\psi(z, t) = A \exp(i(\omega_0 t - k_0 z)) \quad (1.4)$$

che è una soluzione dell'equazione d'onda scalare data da

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Soluzione d'onda sferica in approssimazione parassiale

Per la comprensione dei fenomeni di diffrazione che si hanno quando un'onda incontra un ostacolo, come avviene nella formazione dell'ologramma di un oggetto o nella sua ricostruzione, è importante conoscere l'equazione d'onda sferica, un'altra soluzione dell'equazione di d'Alembert.



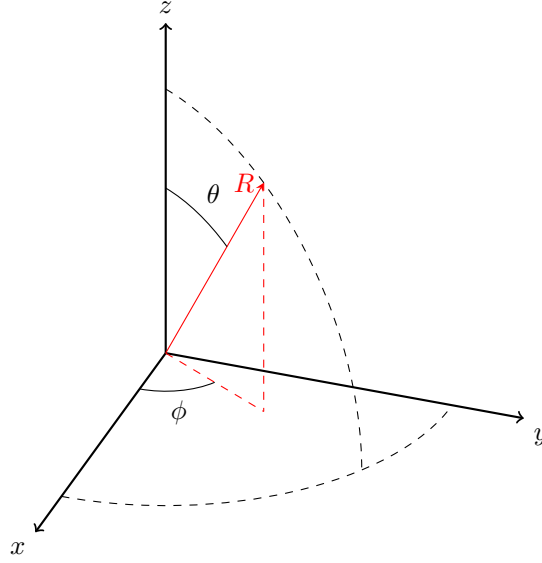


Figura 1.2: Sistema di coordinate sferiche.

Attraverso il metodo dei coefficienti di Lamè [6], si trova che l'operatore di Laplace in coordinate sferiche è

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Sfruttando la simmetria sferica della soluzione, l'equazione d'onda (1.1) diventa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $R$ , l'equazione prende la forma

$$\frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial t^2},$$

dalla quale è facile, attraverso un confronto con la (1.5), costruire la soluzione d'onda sferica

$$\psi(R, t) = \frac{A}{R} \exp(i(\omega_0 t - k_0 R)). \quad (1.6)$$

Nel seguito della trattazione, verranno prese in considerazione onde che si propagano lungo l'asse ottico  $z$ , formando piccoli angoli rispetto a tale asse. Per un'onda la cui sorgente sia all'origine degli assi, la distanza di osservazione è

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} = \pm |z - z_0| \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{(z - z_0)^2}}.$$

Quindi, per un'onda sferica divergente con valori positivi di propagazione, in *approssimazione parassiale*, tale distanza avrà il valore

$$R \simeq (z - z_0) \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0)^2} \right).$$

Nel caso in cui la sorgente sia posta in  $z_0 = 0$ , l'ampiezza complessa dell'onda sferica ad una distanza  $z$  sarà data da:

$$U(x, y, z) = \frac{A_0}{z} \exp\left(-ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2z}\right). \quad (1.7)$$

La soluzione dell'onda sferica completa è data dall'ampiezza complessa appena trovata moltiplicata per un termine di propagazione della fase lungo l'asse  $z$ .

## 1.2 Teoria scalare della diffrazione

Il fenomeno della diffrazione è presente nella tecnica olografica sia in fase di registrazione che in fase di ricostruzione dell'ologramma. In questa sezione viene affrontato il problema di conoscere il valore del campo d'onda diffratto da un ostacolo, a partire dalla funzione d'onda scalare incidente e da una funzione che modelli l'ostacolo. Quest'ultimo può essere rappresentato da uno schermo opaco con delle aperture su di esso, oppure dal caso complementare, rappresentato da uno schermo trasparente con alcune strutture opache su di esso. In particolare, l'approccio al problema sarà quello di individuare la condizione iniziale per un'onda piana che si propaga lungo l'asse  $z$  che illumina un'apertura in uno schermo posto sul piano  $z = 0$  e che sia descritto da una *funzione di trasmittanza*  $t(x, y)$ . Assumendo che lo spessore dello schermo sia infinitesimo, l'equazione d'onda incidente su di esso appena prima dell'apertura è, dalla (1.4),  $\psi(x, y; z = 0^-, t) = A \exp(i\omega_0 t)$ . Appena dopo l'apertura, la sua ampiezza è modulata dalla funzione  $t(x, y)$  e diventa

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z = 0^+, t) &= At(x, y) \exp(i\omega_0 t) = \\ \psi_p(x, y; z = 0^+) \exp(i\omega_0 t) &= \psi_{p0}(x, y) \exp(i\omega_0 t), \end{aligned}$$

dove  $\psi_{p0}(x, y) = At(x, y)$  è spesso chiamata, in ottica, ampiezza complessa dell'onda. A questo punto è possibile cercare la soluzione dell'equazione del campo diffratto ad una distanza arbitraria  $z_0$  dall'ostacolo

$$\psi(x, y, z = z_0, t) = \psi_p(x, y; z_0) \exp(i\omega_0 t), \quad (1.8)$$

a partire dalla condizione iniziale trovata. Sostituendo  $\psi(x, y, z_0, t)$  nell'equazione di d'Alembert, si ottiene l'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial z^2} + k_0^2 \psi_p = 0. \quad (1.9)$$

Per trovare la distribuzione del campo sul piano  $xy$  in  $z = z_0$  è possibile ricorrere alle trasformate di Fourier 2-dimensionali nelle variabili coniugate  $(x, y)$  e  $(k_x, k_y)$ , dove

quest'ultime sono le frequenze spaziali del segnale spaziale  $\psi(x, y; z_0)$ . Per una funzione  $f(x, y)$  la trasformata di Fourier è definita

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} = F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(i(k_x x + k_y y)) dx dy, \quad (1.10)$$

dove la sua antitrasformata è

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\} = f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) \exp(-i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y. \quad (1.11)$$

Applicando la proprietà delle trasformate di Fourier per cui

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2}\right\} &= (-ik_x)^2 \Psi_p(k_x, k_y; z) \\ \mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2}\right\} &= (-ik_y)^2 \Psi_p(k_x, k_y; z) \end{aligned}$$

con  $\mathfrak{F}\{\psi_p(x, y; z)\} = \Psi_p(k_x, k_y; z)$ , ottengo che la trasformata dell'equazione di Helmholtz è l'equazione differenziale con condizione iniziale  $\Psi_{p0}(k_x, k_y; z=0) = \mathfrak{F}\{\psi_{p0}(x, y; z=0)\}$ :

$$\frac{d^2 \Psi_p}{dz^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\right) \Psi_p = 0. \quad (1.12)$$

Un'equazione differenziale del secondo ordine della forma in questione  $\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \alpha^2 y(z) = 0$  ha soluzione  $y(z) = y(0) \exp(-i\alpha z)$ , dunque la soluzione è presto trovata:

$$\Psi_p(k_x, k_y; z) = \Psi_{p0}(k_x, k_y; z=0) \exp\left[-ik_0 \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} z\right]. \quad (1.13)$$

Questa soluzione fornisce una relazione fra lo spettro di frequenze spaziali dell'onda nell'origine e quelle nel piano a distanza  $z$  arbitraria da essa. Definendo la *funzione di trasferimento di propagazione delle frequenze spaziali*

$$\mathcal{H}(k_x, k_y; z) = \frac{\Psi_p(k_x, k_y; z)}{\Psi_{p0}(k_x, k_y; 0)} = \exp\left[-ik_0 \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} z\right], \quad (1.14)$$

l'ampiezza complessa  $\psi_p(x, y; z)$  può essere ora ricavata dall'antitrasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \mathfrak{F}^{-1}\{\Psi_p(k_x, k_y; z)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{\Psi_{p0}(k_x, k_y; 0) \mathcal{H}(k_x, k_y; z)\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp\left[-ik_0 \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} z\right] \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y, \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove con  $\Psi_{p0}$  è indicata la trasformata di Fourier della condizione iniziale, ovvero dell'ampiezza complessa dell'onda appena dopo l'apertura:  $\mathcal{F}\{\psi_{p0}(x, y)\} = \Psi_{p0}(k_x, k_y)$ .

Quest'equazione è fondamentale nello studio dell'olografia e della diffrazione in generale. Data la distribuzione del campo diffratto subito dopo l'ostacolo sul piano  $xy$  in  $z = 0^+$ , essa permette di conoscere la distribuzione del campo su un piano parallelo posto ad una distanza  $z$  arbitraria.

A questo punto, è illuminante ricostruire il significato fisico della (1.15). Nell'integrale, infatti, è possibile riconoscere due termini molto familiari, nella fattispecie lo spettro della distribuzione del campo  $\Psi_{p0}(k_x, k_y)$  subito dopo l'ostacolo, e l'onda piana stessa  $\exp(-ik_x x - ik_y y)$  nella medesima posizione. Dunque,  $\Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(-ik_x x - ik_y y)$  è una particolare componente dell'onda piana con ampiezza  $\Psi_{p0}(k_x, k_y)$ , delle tante prodotte dal fenomeno della diffrazione. Infatti, sommando su tutte le direzioni  $(k_x, k_y)$  si ottiene la distribuzione del campo diffratto in  $z = 0$

$$\psi_{p0}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y, \quad (1.16)$$

che non è altro che l'antitrasformata dello spettro. Confrontandola con la (1.15) e notando che

$$k_z = k_{z0} = \pm |k_0| \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}}, \quad (1.17)$$

si vede facilmente che il campo diffratto  $\psi_p$ , non è altro che una traslazione di fase, data dal termine  $\exp(-ik_z z)$ , che descrive la propagazione del campo  $\psi_{p0}$  per una distanza  $z$ . Studiando il termine che descrive questa traslazione, si possono fare alcune importanti approssimazioni che permettono di semplificare la (1.15) notevolmente.

### 1.2.1 Diffrazione di Fresnel

Nel momento in cui l'onda si propaghi per piccoli angoli rispetto all'asse ottico  $z$ , allora vale l'approssimazione parassiale  $k_x^2 + k_y^2 \ll k_0^2$  e si ha:

$$\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}. \quad (1.18)$$

In tal caso, la *funzione di trasferimento* prende la forma:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(k_x, k_y; z) = \frac{\Psi_p(k_x, k_y; z)}{\Psi_{p0}(k_x, k_y; 0)} = \exp(-ik_0 z) \exp\left[i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0} z\right]. \quad (1.19)$$

Dunque, nella *diffrazione di Fresnel*, la distribuzione del campo diffratto è:

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \mathfrak{F}^{-1}\{\Psi_{p0}(k_x, k_y; 0) \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(k_x, k_y; z)\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp\left[-ik_0 z + i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0} z\right] \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Per semplificare il calcolo, essendo l'argomento dell'antitrasformata il prodotto di due spettri di frequenze, si può sfruttare il teorema di convoluzione. Infatti, conoscendo

la condizione iniziale  $\psi_{p0}(x, y; 0)$ , si può trovare l'espressione dell'antitrasformata della *funzione di trasferimento*, ovvero la *risposta all'impulso spaziale di Fresnel*:

$$h_F(x, y; z) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathcal{H}_F(k_x, k_y; z)\} = \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]. \quad (1.21)$$

In questo modo, è possibile calcolare immediatamente il prodotto di convoluzione che viene anche detto *formula di diffrazione di Fresnel*:

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \psi_{p0}(x, y) * h_F(x, y; z) \\ &= \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p0}(x', y') \exp\left\{\frac{-ik_0}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]\right\} dx' dy' \\ &= \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p0}(x', y') \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \exp\left[\frac{-ik_0}{z}(xx' + yy')\right] dx' dy' \\ &= \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \mathfrak{F}\left\{\psi_{p0}(x', y') \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x'^2 + y'^2)\right]\right\}_{k_x = \frac{k_0 x}{z}, k_y = \frac{k_0 y}{z}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Essa permette di trovare l'espressione del campo diffratto utilizzando un'equazione con singola trasformata, ammesso che alla fine vengano riscritti gli assi in questo modo:  $k_x = \frac{k_0 x}{z}$ ,  $k_y = \frac{k_0 y}{z}$ . Con  $(x', y')$  si indicano le coordinate del piano  $z = 0$ , su cui è collocata la *sorgente*, il cui ruolo è svolto dall'apertura, e viene chiamato *piano della sorgente*. Con  $(x, y)$  si indicano le coordinate del piano di osservazione, parallelo al precedente e posto a distanza  $z$  da esso. La distribuzione del campo diffratto dipende dall'integrale sul piano della sorgente, quindi dalla geometria dell'apertura. Da un confronto con la soluzione dell'onda sferica in approssimazione parassiale (1.7), si recupera il significato fisico del *principio di Huygens* per cui il fronte d'onda a distanza  $z$  è l'involuppo dato dalla sovrapposizione di onde sferiche secondarie coerenti poste nell'apertura dello schermo.

### 1.2.2 Diffrazione di Fraunhofer

La formula del campo diffratto può essere ulteriormente semplificata nel caso in cui il piano di osservazione sia molto lontano dalla sorgente. Quando ha luogo la situazione descritta vale la seguente approssimazione:

$$\frac{k_0}{2}[(x')^2 + (y')^2]_{max} = \frac{\pi}{\lambda}[(x')^2 + (y')^2]_{max} \ll z \quad (1.23)$$

Questo significa che il termine  $\exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x'^2 + y'^2)\right]$  che rappresenta l'onda sferica in approssimazione parassiale possa essere approssimato ad uno. Si ha la seguente *appros-*

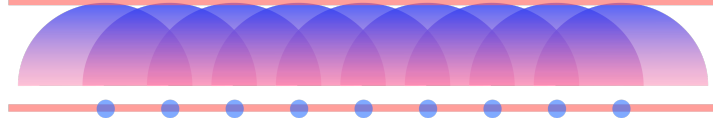


Figura 1.3: Principio di Huygens.

simazione di Fraunhofer di campo lontano:

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y, z) &= \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_{p0}(x', y') \exp\left[\frac{-ik_0}{z}(xx' + yy')\right] dx' dy' \\ &= \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \mathfrak{F}\{\psi_{p0}(x', y')\}_{k_x = \frac{k_0 x}{z}, k_y = \frac{k_0 y}{z}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Quest'equazione è un caso limite della diffrazione di Fresnel.

### 1.3 Registrazione di figure di interferenza

I fenomeni ottici della diffrazione e dell'interferenza sono di fondamentale importanza nell'olografia. La fase di registrazione, in particolare, altro non è che un loro momento di coesistenza. La prima è appena stata presentata ampiamente e può essere ricondotta alla seconda. Infatti, per il *principio di Huygens*, la diffrazione è riconducibile a un fenomeno di interferenza di fronti d'onda sferici secondari coerenti fra loro, il cui involuppo definisce il fronte d'onda in una posizione successiva. Inoltre, il processo che permette la registrazione dell'informazione di fase dell'onda dell'oggetto è proprio basato sul fenomeno dell'interferenza fra l'onda dell'oggetto e quella di riferimento. Essendo un'equazione differenziale lineare, la somma di due soluzioni dell'equazione d'onda è ancora una sua soluzione. Nell'interferenza di due onde polarizzate linearmente nella medesima direzione, con ampiezze complesse:

$$\begin{aligned} A_1(x, y, z) &= a_1 \exp(i\phi_1) \\ A_2(x, y, z) &= a_2 \exp(i\phi_2), \end{aligned}$$

l'ampiezza risultante è la somma delle due ampiezze  $A = A_1 + A_2$ . D'altra parte, la grandezza che può essere misurata da un sensore di luminosità, sia esso l'occhio umano

o un sensore CCD, è una media su epoche temporali di parecchi ordini di grandezza in più rispetto al periodo dell'onda. Tale grandezza è l'intensità dell'onda ed è una quantità proporzionale alla media temporale del quadrato del campo elettrico:

$$I \propto \langle E^2 \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E^2 dt.$$

Questo è anche il motivo per cui nella fotografia le informazioni di fase vengono perse completamente. Nel caso in esame, a partire dalle componenti spaziali dell'ampiezza complessa, si ha che l'intensità della somma delle due onde sarà uguale al quadrato dell'ampiezza risultante:

$$\begin{aligned} A^2 &= |A_1 + A_2|^2 = (A_1 + A_2)(A_1 + A_2)^* \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Oltre alla somma delle intensità delle due onde separate, vi è anche un termine di interferenza modulato dalla differenza di fase delle due onde. Si avranno quindi dei massimi in caso di interferenza costruttiva con:

$$\Delta(\phi) = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

e dei minimi, in caso di interferenza distruttiva:

$$\Delta(\phi) = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

L'olografia è il caso particolare in cui il fronte d'onda diffratto dall'oggetto, chiamata onda oggetto, interferisce con l'onda piana del laser di riferimento. In olografia, quindi, le informazioni di fase vengono recuperate, attraverso la registrazione del pattern di interferenza. Le modalità con cui possa essere impostata una situazione di questo tipo differenziano le varie tecniche olografiche.

## 1.4 Ologramma di un oggetto puntiforme

Dallo studio della teoria scalare della diffrazione, è emersa un'interpretazione del fenomeno secondo il principio di Huygens. In questo senso, è possibile guardare i principi basilari dell'olografia a partire dal caso più semplice dell'ologramma di un oggetto puntiforme. Essi possono essere estesi con naturalezza al caso di oggetti più complessi. Infatti, ogni singolo punto di un oggetto si comporta come sorgente di onde sferiche divergenti, coerenti fra loro. La loro interferenza determina il fronte d'onda dell'oggetto, che viene registrato completamente interferendo con il laser di riferimento [7].

Un'apertura puntiforme su uno schermo opaco può essere modellata matematicamente con una distribuzione  $\delta(x, y)$  di Dirac. Illuminando l'apertura con un'onda piana, si vedrà, dopo lo schermo e a piccoli angoli dall'asse ottico, un'onda sferica in approssimazione

parassiale. Infatti, ad una distanza  $z_0$  dallo schermo, studiando la risposta all'impulso della diffrazione di Fresnel si avrà per l'onda oggetto:

$$\begin{aligned}\psi_O(x, y; z_0) &= \delta(x, y) * h_F(x, y; z_0) = \delta(x, y) * \exp(-ik_0 z_0) \frac{ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{-ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] \\ &= \exp(-ik_0 z_0) \frac{ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{-ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right].\end{aligned}\quad (1.28)$$

Essa andrà ad interferire con un'onda piana con la medesima fase iniziale che si sia propagata per una distanza  $z_0$ . L'equazione dell'onda di riferimento sarà quindi:  $\psi_R(x, y; z_0) = A_0 \exp(-ik_0 z_0)$ . Come già visto in precedenza, l'ologramma che si andrà a registrare non è altro che il modulo quadro della somma delle due onde:

$$\begin{aligned}H(x, y; z_0) &= |\psi_O + \psi_R|^2 = A_0^2 + \left(\frac{k_0}{2\pi z_0}\right)^2 + \\ &+ A_0 \frac{ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{-ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] + A_0 \frac{-ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right].\end{aligned}\quad (1.29)$$

Applicando la formula di Eulero, si trova che la parte reale dell'ologramma è

$$H(x, y; z_0) = A + B \sin\left[\frac{k_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right],\quad (1.30)$$

dove  $A = A_0^2 + \left(\frac{k_0}{2\pi z_0}\right)^2$  è un termine costante e  $B = \frac{A_0 k_0}{\pi z_0}$ . Questa formula è spesso chiamata *Fresnel Zone Plate (FZP)* sinusoidale e descrive l'ologramma di un oggetto puntiforme.

Ora, è facile analizzare come cambia la frequenza spaziale localmente lungo una delle due dimensioni. Ad esempio, al variare di  $x$  avremo:

$$f_{locale} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{k_0}{2z_0} x^2 \right) = \frac{k_0 x}{2\pi z_0}.\quad (1.31)$$

Questa è una relazione molto importante. Innanzitutto, si vede immediatamente che le frange dell'ologramma diventeranno sempre più dense allontanandosi dal centro. Inoltre, proprio dalla densità locale fra le frange è possibile ricostruire la distanza  $z_0$  dell'oggetto puntiforme, dunque le informazioni di profondità sull'asse  $z$  dell'oggetto. Questa è una proprietà molto importante dell'olografia, nonché una delle più note, ovvero quella di restituire la tridimensionalità dell'immagine dell'oggetto.

## 1.5 Registrazione e ricostruzione di ologrammi *fuori asse*

Quella che viene descritta in questa sezione è una tecnica olografica pensata dai fisici E. N. Leith e A. Upatnieks nel 1961 per risolvere un problema abbastanza delicato che c'era nelle tecniche olografiche precedenti. Infatti nella tecnica originale di Dennis Gabor l'ologramma veniva registrato con un'unica onda e la parte diffratta dall'oggetto interferiva



con il “*background coerente*” della parte dell’onda non diffratta. Questa tecnica venne poi chiamata *in-line*, ad indicare che l’onda dell’oggetto e di riferimento erano precisamente allineate. Essa aveva il pregio di essere estremamente semplice, sebbene avesse il problema di disturbare l’immagine virtuale con la sovrapposizione, in fase di ricostruzione, anche dell’immagine reale e dell’ordine zero di diffrazione. Infatti, l’ologramma che viene registrato con questa tecnica è:

$$H(x, y) = |\psi_r + \psi_O(x, y)|^2 = |\psi_r|^2 + |\psi_O(x, y)|^2 + \psi_r \psi_O^*(x, y) + \psi_r^* \psi_O(x, y).$$

Si può vedere che, in fase di ricostruzione, i primi due termini andrebbero a rappresentare l’ordine zero di diffrazione. Il terzo e il quarto rappresenteranno invece due termini del primo ordine, l’immagine reale e l’immagine virtuale, rispettivamente.

Nell’olografia *fuori asse* il problema viene risolto con la tecnica di inclinare l’onda di riferimento di un angolo  $\theta$  rispetto al piano di osservazione. Il successo di questa tecnica fu dovuto alla nascita della luce coerente del laser ma è anche vero che la scoperta non sarebbe stata possibile senza la lunga preparazione teorica di Emmett Leith, che durava dal 1955. Infatti, in quel periodo, insieme ai collaboratori Cutrona, Palermo, Porcello e Vivian, conduceva i suoi studi sui *Radar ad Apertura Sintetica (SAR)*, una vera e propria olografia condotta con onde elettromagnetiche 100000 volte più lunghe delle onde luminose. L’interpretazione dell’olografia nel quadro della teoria della comunicazione e dei segnali fu sicuramente di enorme importanza per il concepimento dell’olografia *fuori asse* e per spostare quindi le immagini ricostruite non solo in profondità ma anche angolarmente.

Sia  $\psi_O(x, y) = A(x, y)e^{i\phi(x, y)}$  l’ampiezza complessa della luce sul piano di registrazione. La tecnica *off-axis* prevede che questa interferisca con una seconda onda  $\psi_R(x, y) = A_R e^{i\xi_c x}$ , inclinata rispetto al piano di osservazione di un angolo  $\theta$ . Per piccoli valori dell’angolo, si avrà un progressivo ritardo di fase dato dalla relazione  $\xi_c = \frac{2\pi\theta}{\lambda}$ . Il processo di registrazione è capace di registrare il quadrato dell’ampiezza della sovrapposizione delle due onde:

$$\begin{aligned} I &= \left| A_R e^{i\xi_c x} + A(x, y)e^{i\phi(x, y)} \right|^2 \\ &= A_R^2 + A^2(x, y) + A_R A(x, y)e^{i(\xi_c x - \phi(x, y))} + A_R A(x, y)e^{-i(\xi_c x - \phi(x, y))} \\ &= A_R^2 + A^2(x, y) + 2A_R A \cos(\xi_c x - \phi(x, y)) \end{aligned}$$

Dunque, il processo di registrazione produce un termine che descrive la parte reale della diffrazione di Fresnel. Nella teoria della comunicazione, il fenomeno olografico può essere interpretato come una modulazione in cui il segnale trasmesso è la *modulante* che porta l’informazione completa dell’oggetto. Questa informazione viene “caricata” su un segnale *portante*, il cui ruolo è svolto in olografia dall’onda di riferimento fuori asse. Per questo motivo, questa tecnica è anche conosciuta come olografia a *frequenza portante*. In questo quadro, più è aleatorio il segnale portato dall’onda dell’oggetto, maggiore è l’informazione trasmessa. Il caso più semplice è l’ologramma senza oggetto che si riduce ad essere la figura di interferenza fra le due onde, in cui non viene trasmessa alcuna informazione. Quando l’oggetto diffratto è presente, il quarto termine dell’espressione appena trovata,

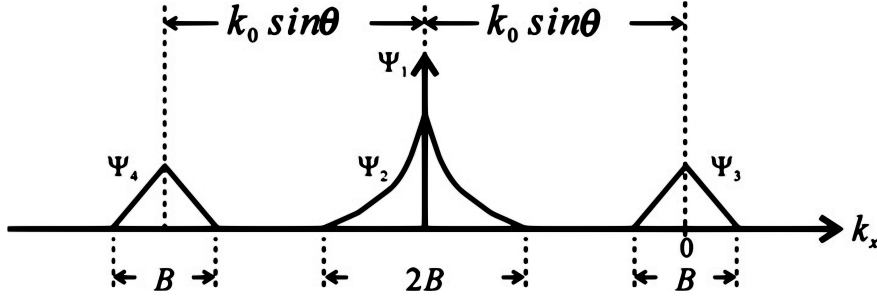


Figura 1.4: Bande laterali nell'olografia fuori asse.

descrive due fenomeni. Da una parte, la modulazione d'ampiezza delle frange di interferenza, dovuta al modulo dell'ampiezza. Dall'altra, la modulazione di fase delle frange, dovuta alla fase  $\phi(x, y)$  dell'onda dell'oggetto. Questo fenomeno si manifesta attraverso la variazione spaziale della frequenza locale delle frange. Si può dire quindi che l'informazione è registrata proprio in questa variazione della frequenza locale, che nel caso banale senza oggetto è infatti pari a zero.

Per essere più precisi, l'ologramma registrato dipende dalla caratteristica trasmittanza-esposizione del mezzo di registrazione:

$$T = T_0 - kI. \quad (1.32)$$

In fase di ricostruzione, il reticolo di diffrazione rappresentato dall'ologramma registrato viene illuminato nuovamente con il laser di riferimento. Per selezionare la parte che trasporta l'informazione totale dell'ampiezza complessa dell'oggetto possono essere usate diverse tecniche. Nel contesto delle misure che si andranno a presentare, sono state utilizzate due tecniche. Una permette di selezionare, attraverso un filtraggio spaziale, la componente dello spettro di interesse, che il processo di modulazione ha permesso di separare in due bande laterali. Infatti, in fase di ricostruzione si ha:

$$\begin{aligned} I A_R e^{i\xi_c x} &= A_R^2 (A_R e^{i\xi_c x}) + A^2(x, y) (A_R e^{i\xi_c x}) + \\ &+ A_R^2 A(x, y) e^{i(\xi_c x - \phi(x, y))} e^{i\xi_c x} + A_R^2 A(x, y) e^{-i(\xi_c x - \phi(x, y))} e^{i\xi_c x} \\ &= A_R^2 (A_R e^{i\xi_c x}) + A^2(x, y) (A_R e^{i\xi_c x}) + A_R^2 \psi_O^*(x, y) e^{i2\xi_c x} + A_R^2 \psi_O(x, y) \end{aligned}$$

Come già visto nell'olografia di Gabor, i primi due termini rappresentano la luce trasmessa, ovvero l'ordine zero di diffrazione; il terzo contribuisce alla ricostruzione dell'immagine virtuale e il quarto a quella della sua coniugata. Analizzando questa situazione dal punto di vista spettrale, nel dominio delle frequenze, si comprende come filtrare lo spettro per isolare la componente dell'oggetto. Per la linearità della trasformata di Fourier, essa viene applicata ai singoli termini che formano il segnale e si studia quale sia il

contributo frequenziale di ognuno di essi.

$$\begin{aligned}\Psi_1(k_x, k_y) &= \mathfrak{F}\{A_R^2 A_R e^{i\xi_c x}\} = \mathfrak{F}\{A_R^2 A_R\} * \delta(k_x + \xi_c, k_y) \\ \Psi_2(k_x, k_y) &= \mathfrak{F}\{A^2(x, y) A_R e^{i\xi_c x}\} = \mathfrak{F}\{A^2(x, y) A_R\} * \delta(k_x + \xi_c, k_y) \\ \Psi_3(k_x, k_y) &= \mathfrak{F}\{\psi_O(x, y) A_R^2\} \\ \Psi_4(k_x, k_y) &= \mathfrak{F}\{\psi_O^*(x, y) A_R^2 e^{i(2\xi_c x)}\} = \mathfrak{F}\{\psi_O^*(x, y) A_R^2\} * \delta(k_x + 2\xi_c, k_y)\end{aligned}$$

La situazione appare più chiara e si possono fare alcune importanti considerazioni. Lo spettro di frequenze spaziali dell'onda ricostruita è centrato in  $k_x = -\xi_c = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ , con due bande laterali in  $k_x = 0$  e  $k_x = -2\xi_c = -\frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta$ . Dunque, le bande laterali si distanzieranno al crescere di  $\theta$ . Il primo termine e il secondo si sovrappongono in un picco centrale. Il secondo è proporzionale alla funzione di autocorrelazione di  $\mathfrak{F}\{\psi_O(x, y)\}$ . Il terzo e il quarto sono proporzionali a  $\mathfrak{F}\{\psi_O(x, y)\}$  e  $\mathfrak{F}\{\psi_O^*(x, y)\}$ , rispettivamente. Per isolare l'informazione totale dell'ampiezza complessa dell'oggetto basterà isolare  $\Psi_4(k_x, k_y)$ , attraverso un filtraggio spaziale. Se le bande laterali avranno una larghezza  $B$  allora è vero anche che la banda centrale avrà larghezza  $2B$ . In tal senso, si ha presto un altro metodo per separare le immagini. Semplicemente imponendo che la frequenza portante abbia un angolo abbastanza grande da non creare una sovrapposizione delle bande. In particolare, se  $\xi_c \geq \frac{3}{2}B$  e si ha la formula per determinare un angolo minimo dell'onda di riferimento affinché l'immagine dell'oggetto possa essere risolta:

$$\theta_{min} = \arcsin\left(\frac{3}{2} \frac{B\lambda}{2\pi}\right). \quad (1.33)$$

## Capitolo 2

# Misura della fase in olografia digitale e *CGH*

Dalla scoperta iniziale dell'olografia di Gabor, le ricerche in questo campo avanzavano molto lentamente. I tentativi del fisico ungherese di eliminare l'*immagine gemella* erano basati sull'utilizzo di strumenti tipici della fisica ottica. Un avanzamento considerevole nell'olografia si ebbe, negli anni '60, attraverso le analisi e gli esperimenti di fisici come Emmett Leith e Adolf W. Lohmann che approcciarono il problema attraverso un cambio di paradigma. Essi non guardavano all'olografia come ad un problema di ottica. Per loro l'olografia era un problema di processamento ottico dell'informazione [4], dove l'immagine rappresentava l'informazione stessa.

Parallelamente, il computer stava iniziando a diventare uno strumento sempre più essenziale nella ricerca scientifica e nell'industria. Così, in quegli anni, anche l'olografia vide un grande avanzamento che continua ancora oggi ed è basato sul calcolo digitale. Quelli che si delinearono sono due metodi ancora oggi fondamentali e centrali nella risoluzione i problemi basati sull'utilizzo dell'olografia. La prima è la *Computer Generated Holography (CGH)* che verrà affrontata nella prossima sezione. L'altra è la *Digital Holography (DH)*. Entrambe saranno gli strumenti fondamentali per le misure che verranno presentate in seguito.

### 2.1 *Computer Generated Holography*

L'olografia di Gabor quanto quella di Leith era una registrazione fotografica di una figura d'interferenza. Lohmann pensò che se avesse creato un modello numerico del fenomeno fisico della registrazione dell'interferenza, avrebbe potuto costruire un output fisico che funzionasse come un ologramma. Il calcolatore avrebbe quindi avuto la prerogativa di non rendere necessaria la realizzazione fisica degli esperimenti. Nel 1965, Lohmann e Byron Brown presentano il loro primo ologramma binario realizzato con la *Computer Generated Holography* e stampato con la stampante binaria *Calcomp*. Essa permetteva di stampare solo i due valori bianco-nero e gli ologrammi realizzati con questa tecnica sono chiamati *detour-phase holograms*. La *CGH* si differenzia dall'olografia analogica

per il fatto che con il computer è possibile realizzare ologrammi di oggetti non esistenti, sintetici o virtuali. Con questa tecnica, nel seguito della trattazione, verranno sintetizzati ologrammi riconducibili ai casi più semplici, a partire da quello dell'interferenza di due onde piane, senza alcun oggetto illuminato. Questi ologrammi saranno usati per iniziare ad affrontare il problema della ricostruzione della fase dell'ologramma, presentando gli algoritmi che verranno usati a questo scopo.

## 2.2 Olografia Digitale (DH)

Se con la CGH di Lohmann e Brown era stata portata all'interno del calcolatore la prima fase del processo olografico, quella che consisteva nella formazione dell'ologramma, è con il lavoro di J.W. Goodman e R.W. Lawrence che viene affrontata in termini computazionali la seconda fase del procedimento, quella di ricostruzione dell'immagine [5].

L'olografia digitale consiste nella registrazione del fronte d'onda con un dispositivo elettronico che permetta di convertire il segnale analogico del laser in un segnale digitale bidimensionale. Nella prassi sperimentale odierna, vengono usati dei sensori matriciali digitali come la camera CCD - *Charge-Coupled Device*, o CMOS - *complementary metal-oxide semiconductor*. Il dispositivo CCD è un circuito integrato formato da una griglia di elementi semiconduttori in grado di accumulare una carica elettrica proporzionale all'intensità della radiazione elettromagnetica che li colpisce. Ogni elemento semiconduttore è chiamato *pixel* e la distanza fra i centri di due pixel è chiamata *pixel pitch*, e determina la frequenza di campionamento dell'immagine. Nei dispositivi CCD i segnali provenienti dalla totalità dei pixel condividono uno o più amplificatori. I CMOS invece dedicano un amplificatore per ogni pixel; questo garantisce maggiore rapidità nel processamento dell'immagine ma può creare una distorsione dovuta alla mancanza di uniformità delle proprietà degli amplificatori.

Una volta campionato l'ologramma, la fase di ricostruzione può avvenire interamente attraverso il computer, a partire dal calcolo numerico della diffrazione che si ha quando l'onda di riferimento incontra l'ologramma. Per implementare le formule della diffrazione di Fresnel si ricorre all'algoritmo della *Fast Fourier Transform (FFT)* nel calcolo della trasformata discreta di Fourier.

Sia nel caso della CGH che della DH bisogna prestare particolare attenzione ad alcune limitazioni imposte dal teorema del campionamento per non incorrere nell'effetto dell'*aliasing* spaziale. Nella fattispecie, bisogna assicurare che valga una relazione fra l'intervallo di campionamento, determinato dal pixel pitch, e la distanza spaziale minima delle frange del segnale, affinché questo non subisca un sottocampionamento.

## 2.3 Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon

La digitalizzazione di un segnale analogico è la rappresentazione di una funzione continua attraverso una successione discreta di campioni del segnale. Il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon assicura che ciò è sicuramente possibile, nel caso di una funzione

continua  $h(t)$  che abbia una larghezza di banda limitata da una frequenza critica  $f_{NQ}$ , chiamata *frequenza di Nyquist*. Infatti, se  $\Delta$  è l'intervallo fra due campionamenti, in questo caso il segnale può essere rappresentato univocamente attraverso i suoi campioni:

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin[2\pi f_{NQ}(t - n\Delta)]}{\pi(t - n\Delta)}. \quad (2.1)$$

Dunque, la condizione necessaria per il campionamento sarà che  $\mathfrak{F}\{h(t)\} = H(f) = 0$  per ogni  $|f| \geq f_{NQ}$ , dove

$$f_{NQ} = \frac{f_s}{2}, \quad (2.2)$$

con  $f_s$  la frequenza di campionamento. Se da un lato questo teorema assicura la fattibilità del campionamento di un segnale, dall'altra pone la limitazione alla larghezza della banda. In altre parole, c'è una frequenza massima oltre la quale le frequenze del segnale sono traslate in maniera falsa all'interno della banda permessa dalla frequenza di campionamento. Ora, prendendo un segnale spaziale, limitandoci al caso unidimensionale senza perdita di generalità, esso potrà essere descritto in maniera discreta da:

$$f[n] = f(n\Delta_x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta_x) \delta([n - k]\Delta_x), \quad (2.3)$$

dove  $n \in [0, 1, \dots, N - 1]$  con  $N$  uguale al numero di campioni e  $\delta([n - k]\Delta_x)$  così definita:

$$\delta([n - k]\Delta_x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}. \quad (2.4)$$

Con  $\Delta_x$  si intende la distanza fra due campioni, ovvero l'intervallo di campionamento. La frequenza di campionamento è infatti  $f_s = \frac{1}{\Delta_x}$ .

Quando un segnale viene campionato, sia esso un segnale analogico o digitale, succede che il suo spettro assume un carattere periodico. Questo si vede in maniera semplice nel caso analogico:

$$\mathfrak{F}\{f(x) \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta_x)\} = 2\pi f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(k_x - 2\pi f_s n). \quad (2.5)$$

Lo spettro della funzione campionata è uguale allo spettro della funzione non campionata replicato ogni  $2\pi f_s$  rad/s. Questo significa che se queste copie dello spettro non si sovrappongono l'una con l'altra, allora è possibile avere l'informazione completa dello spettro del segnale selezionando una qualsiasi porzione dello spettro lunga  $2\pi f_s$ .

Quando il segnale viene campionato su una lunghezza di registrazione  $L_x = N\Delta_x$ , anche la trasformata di Fourier viene discretizzata e si ha una *frequenza di risoluzione*  $\Delta f$  data dall'inverso della porzione su cui viene effettuata la *DFT - Discrete Fourier Transform*. Applicando questa trasformata su un segnale di lunghezza  $L_x$ , si ha:

$$\Delta f = \frac{1}{L_x} = \frac{f_s}{N}. \quad (2.6)$$

Quindi, scegliendo il numero di campioni e la frequenza di campionamento su cui effettuare la DFT, si determina anche la risoluzione della frequenza che si avrà. È importante notare che analizzando il segnale su porzioni più piccole aumenta anche la risoluzione della frequenza, a discapito di un maggior numero di accessi alla memoria e di un maggiore costo computazionale. Infatti, se la trasformata discreta è stata effettuata su una finestra  $L_x$ , la sua estensione nel dominio spettrale sarà di  $L_f = N\Delta f = \frac{1}{\Delta x}$ . Nello specifico, lo spettro di una funzione continua campionata su un dominio  $L_x$  sarà:

$$\mathfrak{F}\left\{f(x) \times \text{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right)\right\} = F(k_x) * L_x \text{sinc}\left(\frac{k_x L_x}{2\pi}\right). \quad (2.7)$$

Per il fatto stesso di limitare il dominio della funzione, si ha che la risoluzione di frequenza sia definita dalla larghezza della funzione sinc. Infatti, dalla relazione sopra, è possibile guardare questa situazione come un sistema con risposta all'impulso dato dalla funzione sinc e che prende in input lo spettro della funzione continua. Si può conoscere la larghezza dell'impulso andando a studiare quando occorre il primo zero della funzione, ovvero in  $\Delta k = \frac{2\pi}{L_x} = \frac{2\pi}{N\Delta x}$ , che può anche essere espresso come  $\Delta f = \frac{1}{L_x} = \frac{1}{N\Delta x}$ . È interessante notare come questa relazione sia una conseguenza del *principio di indeterminazione* classico della teoria dei segnali, per cui

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 1, \quad (2.8)$$

nel caso specifico dell'uguaglianza.

Questa relazione mostra quanto il concetto di epoca e di frequenza di un segnale non possano essere definiti simultaneamente. In senso spaziale, si può dire che se la frequenza è definita in maniera precisa, allora il segnale sarà un'onda armonica infinita. Viceversa, una distribuzione impulsiva di Dirac ben definita nello spazio non sarà rappresentata da una frequenza definita; infatti la trasformata di Fourier della funzione  $\delta$  è una costante nello spazio delle frequenze.

## 2.4 Trasformata discreta di Fourier e sue implementazioni

Come si è visto nel primo capitolo, la trasformata di Fourier è lo strumento fondamentale per il calcolo della diffrazione. La sua versione discreta sarà al centro dei programmi usati nelle misure che verranno presto presentate. In particolare, l'algoritmo che verrà usato sarà quello della *Fast Fourier Transform - FFT*, che permette di ridurre il numero di operazioni per ottenere il risultato da un ordine  $O(N^2)$  a un ordine  $O(N \log_2(N))$ . Con i computer odierni, questa operazione avviene praticamente in tempo reale.

Si assuma l'intervallo  $[0, f_s]$  come dominio della trasformata di Fourier. La trasformata discreta di Fourier di una funzione discreta  $f[n]$  sarà allora:

$$F[m] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \exp\left(-i \frac{2\pi nm}{N}\right), \quad (2.9)$$

con  $m \in [0, \dots, N-1]$ . La trasformata discreta di Fourier, come già detto, sarà essa stessa una sequenza periodica di periodo  $N$ . Proprio come la versione analogica, per tornare dal dominio delle frequenze a quello spaziale, l'antitrasformata di Fourier discreta - *IDFT* sarà:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F[m] \exp\left(i \frac{2\pi nm}{N}\right), \quad (2.10)$$

dove si riconoscono le frequenze radiali discretizzate  $k_x \Delta_x = \frac{2\pi}{N} n$ . La banda frequenziale con frequenza massima  $f_B$ , per evitare l'*aliasing*, dovrà rispondere alla condizione già vista  $f_B = B/2\pi \leq f_s = 2f_{NQ}$ , dove  $B$  è l'ampiezza della banda. Nell'implementazione in *MATLAB* della *FFT* in 2 dimensioni e della sua inversa, verranno usati rispettivamente i comandi **fft2** e **ifft2**. Nell'olografia, quelli in gioco sono segnali complessi, così saremo interessati, non solo alla metà positiva dei valori dello spettro centrato in zero (figura), ma anche a quella negativa. Sarà proprio in questo modo che si avrà la possibilità di visualizzare la frequenza dell'immagine reale e quella della sua coniugata. D'altra parte, **fft2** restituirà quella che sarebbe la parte negativa dello spettro sull'intervallo che va da  $k_m = \frac{2\pi}{N}(N/2-1)\Delta_x$  a  $k_m = \frac{2\pi}{N}(N-1)\Delta_x$ . Bisognerà quindi operare uno *swap* della parte sinistra con la parte destra. Inoltre, poiché **fft2** darà la trasformata sul dominio  $[0, 2\pi f_s]$ , bisognerà centrarla nell'origine ogni volta. In *MATLAB* esiste il comando **fftshift** che permette di traslare la frequenza zero al centro dello spettro.

#### 2.4.1 Calcolo della diffrazione - Metodo S-FFT

Nella prossima sezione si andranno a sintetizzare ologrammi digitali che permettano di mostrare alcune proprietà fondamentali dell'olografia e di testare gli algoritmi di ricostruzione dell'ologramma e di misura della fase. Per generare la figura di diffrazione sul piano di osservazione, il modello sarà quello della diffrazione di Fresnel. Infatti, anche nel momento di acquisizione dell'ologramma digitale, il piano di osservazione sarà rappresentato da un sensore *CCD* di piccole dimensioni e sarà quindi pertinente studiare la diffrazione in approssimazione parassiale. Questo metodo richiederà inoltre di ricorrere alla *FFT* una sola volta, come si può vedere riportando la formula della diffrazione di Fresnel ricavata nel capitolo precedente:

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times \\ &\times \mathfrak{F} \left\{ \psi_{p0}(x', y') \exp\left[\frac{-ik_0}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \right\}_{k_x = \frac{k_0 x}{z}, k_y = \frac{k_0 y}{z}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Essendo sufficiente una sola *FFT* per il calcolo del campo diffratto, quello che si va a presentare è chiamato **metodo con trasformata singola**.

Alcune considerazioni possono essere fatte immediatamente osservando la formula. La trasformata di Fourier è un integrale doppio calcolato sul piano dell'oggetto. Essa è moltiplicata per il termine della traslazione di fase, calcolato, invece, sul piano di diffrazione.



Sul piano di osservazione si avranno  $M$  campioni lungo l'asse  $x$  ed  $N$  lungo l'asse  $y$ , con intervalli di campionamento rispettivamente  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ . Sul piano di diffrazione, bisognerà tenere conto di riscalarli gli assi come indicato nella formula. Il numero di campionamenti rimarrà invariato. La formula discreta di Fresnel sarà quindi data da:

$$\begin{aligned} \psi_p[p, q] = & \frac{ik_0}{2\pi z} \exp(-ik_0 z) \exp \left[ \frac{-ik_0}{2z} \left( (p\Delta_x^d)^2 + (q\Delta_y^d)^2 \right) \right] \\ & \times \text{fft2} \left\{ \psi_{p0}[m, n] \exp \left[ \frac{-ik_0}{2z} \left( (m\Delta_x)^2 + (n\Delta_y)^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove gli intervalli sono stati ridefiniti in questo modo:

$$\begin{aligned} \Delta_x^d &= \frac{\lambda z}{M\Delta_x} \\ \Delta_y^d &= \frac{\lambda z}{N\Delta_y}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Infatti, definito l'intervallo di campionamento e il numero di campioni totale, nello spazio delle frequenze si avrà:  $\Delta k_x = \frac{2\pi}{M\Delta_x}$  e  $\Delta k_y = \frac{2\pi}{N\Delta_y}$ . Se l'ologramma è posto al centro dello schermo, per gli indici si avranno i valori:  $-\frac{M}{2} \leq m \leq \frac{M}{2} - 1$ ,  $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ ,  $-\frac{M}{2} \leq p \leq \frac{M}{2} - 1$  e  $-\frac{N}{2} \leq q \leq \frac{N}{2} - 1$ . A questo punto, bisognerà fare attenzione alle limitazioni che impone il teorema del campionamento. Il massimo della frequenza che si avrà sul piano della diffrazione, per un ologramma al centro dello schermo, sarà data da:

$$\text{frequenza più alta in } \psi_{p0} + \text{frequenza più alta in } \exp \left[ \frac{-ik_0}{2z} (x'^2 + y'^2) \right] \leq \frac{1}{2\Delta_x} \quad (2.14)$$

Il secondo termine della somma è quello che dipende dalla distanza  $z$  e si vuole trovare una condizione per questa distanza, al fine di evitare l'*aliasing* dovuto al sottocampionamento. Si riconosce in questo termine la *Fresnel Zone Plate* e la frequenza locale sarà massima ai bordi dello schermo. Per cui, riportando la formula trovata nel primo capitolo, essa sarà

$$f_{locale} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{k_0}{2z_0} x^2 \right) = \frac{k_0 x}{2\pi z_0} \quad (2.15)$$

e sarà valutata sul bordo  $x = \frac{M\Delta_x}{2}$ . Poiché questo termine condivide metà della larghezza di banda, la frangia locale dovrà essere minore di  $\frac{1}{4\Delta_x}$ . Per avere un buon campionamento, si avrà quindi la condizione sulla distanza dei due piani:

$$\frac{M\Delta_x}{\lambda z} \leq \frac{1}{4\pi}, \quad (2.16)$$

ovvero

$$z \geq \frac{2M\Delta_x^2}{\lambda}. \quad (2.17)$$

Quindi, affinché non si verifichi un sottocampionamento, ci sarà un limite minimo per la distanza dell'oggetto dal piano di registrazione.

## 2.5 Sintesi di ologrammi digitali in *MATLAB*

Prima di sintetizzare gli ologrammi su cui si prenderanno le misure, verrà presentato il modo di procedere nell'implementazione, smembrando il problema dell'olografia nelle sue parti fondamentali. Si procede innanzitutto con il calcolo della diffrazione di un'onda piana attraverso uno schermo con un'apertura circolare, mostrando l'avvicinarsi delle zone luminose e oscure, note come *disco di Airy*. Dall'altro lato, viene implementato il fenomeno dell'interferenza fra due onde piane fuori asse, presentando la figura di interferenza che si crea sul piano di registrazione. Questo può essere considerato l'ologramma più semplice che si possa avere, un ologramma in cui non vi è oggetto diffrangente. Equivalentemente, si può guardare a questa situazione come ad un ologramma in cui l'oggetto è l'onda piana stessa; in tal caso, sono equivalenti l'onda piana di riferimento e quella dell'oggetto, e l'angolo di sfasamento diventa il parametro fondamentale da misurare.

### 2.5.1 Ologramma di un oggetto puntiforme

#### Disco di Airy

Quando un'onda piana incontra un'apertura circolare con un certo diametro essa si comporterà come una sorgente di onde sferiche posta nell'apertura. Questo è un fenomeno puramente diffrattivo e si manifesta sullo schermo di osservazione attraverso la formazione di quello che viene chiamato *disco di Airy*: una successione di frange luminose a geometria circolare disposte, per piccoli angoli dall'asse ottico, secondo la formula:

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}, \quad (2.18)$$

dove  $d$  è il diametro dell'apertura e i minimi sono dati dai valori  $m_1 = 1, 220$ ,  $m_2 = 2, 233$  e  $m_3 = 3, 238$ . In particolare, la scelta del seno dell'angolo è intesa nell'approssimazione per piccoli angoli, dove con  $D$  si indica la distanza di propagazione lungo l'asse  $z$  delle onde sferiche e con  $y$  la distanza dall'asse ottico nonché dal centro del disco:  $\frac{y}{D} = \tan \theta \simeq \sin \theta \simeq \theta$ . Dunque, il primo minimo si prevede che verrà trovato ad una distanza dal centro:  $y_1 = \frac{1.220\lambda}{d}D$ . Il *disco di Airy* è l'intensità della luce che viene registrata nel fenomeno di diffrazione descritto, in cui come già spiegato più volte si perderà l'informazione di fase, e il disco rappresenterà solo l'ampiezza dell'onda. Infatti, per registrare la fase sarà necessaria una modulazione di fase e quindi l'interferenza con un'onda di riferimento fuori asse. Nella prossima sottosezione, si va a presentare il caso in cui l'onda diffratta venga fatta interferire con un'onda piana di riferimento così da registrare in un ologramma le informazioni di fase della *Fresnel Zone Plate*, l'elemento di base di qualsiasi ologramma. Su di esso si faranno alcune considerazioni di carattere generale.

Qui di seguito viene presentato e spiegato lo script per generare la figura di diffrazione del *pinhole*. Ogni script che utilizzeremo per la sintesi di ologrammi includerà una parte in cui vengono dichiarati e inizializzati i parametri. Nella fattispecie avremo il numero di campioni della finestra che saranno sempre una potenza di due e uguali sui due assi. I

parametri fisici saranno indicati in millimetri e alcuni verranno dati in input dall'utente, come la larghezza massima dell'oggetto, la distanza dell'oggetto dal piano di registrazione, e il raggio del *pinhole*. La distanza fra le frange di un *disco di Airy* dipenderanno infatti dal diametro dell'apertura ma anche dalla distanza di propagazione: una maggiore separazione al crescere di  $z$  e per valori via via minori del diametro.

### Dichiarazione e inizializzazione dei parametri

---

```

1 clear; close all;
2
3 M = 1024;
4 N = M;
5 lambda = 0.00063;
6 k=2*pi/lambda;
7 L=input('massima estensione in x dell'oggetto (in mm): ');
8 z0=input('distanza tra il piano dell'apertura
9 e quello di registrazione (in mm): ');
10 R=input('inserire il raggio del pinhole (in mm): ');

```

---

Come visto a suo tempo, nell'implementazione del metodo S-FFT, il pixel pitch sul piano dell'apertura e quello sul piano di registrazione sono diversi, in quanto occorre una riscaltatura degli assi nel passare dall'uno all'altro, necessaria per il calcolo della trasformata di Fourier. È stata quindi creata la funzione *axis scaling* per ripetere questa operazione di riscaldamento degli assi, ogni volta che sarà necessario. Essa prende in input il numero di intervalli e l'intervallo di campionamento.

### Funzione *axis scaling* per riscaldare gli assi

---

```

1 function [scaled_axis]=axis_scaling(intervals, pixel_pitch)
2     for i=1:intervals
3         scaled_axis(i)=((intervals/(intervals-1))*
4             (pixel_pitch * (i-1)))-(pixel_pitch*intervals)/2;
5     end
6 end

```

---

L'ampiezza complessa rappresentata dalla funzione di trasmittanza definita dal *pinhole* è implementata utilizzando la seguente funzione per il calcolo della matrice che rappresenta l'apertura circolare di raggio  $R$ .

### Funzione *pinhole*

---

```

1 function [pinhole_matrix]=pinhole(M,N,X,Y,R)
2     for a=1:N;
3         for b=1:M;
4             if ((X(a)).^2+(Y(b)).^2).^(1/2)<=R;
5                 pinhole_matrix(b,a)=1;
6             else pinhole_matrix(b,a)=0;
7             end
8         end

```

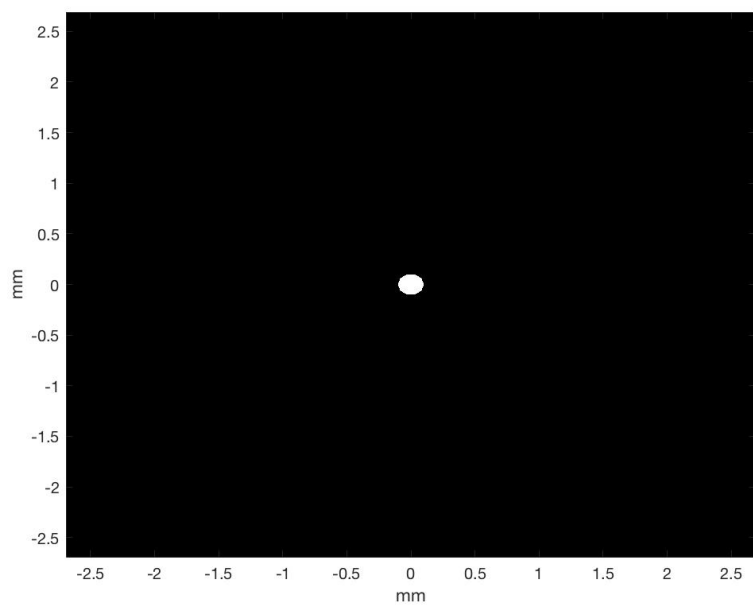


Figura 2.1: Pinhole di raggio  $R = 0.1$  mm.

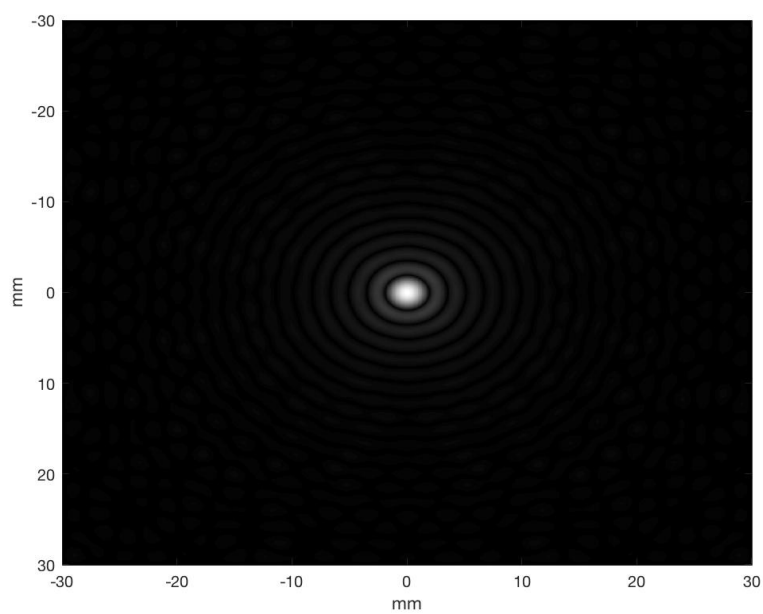


Figura 2.2: Disco di Airy.

```

9     end
10  end

```

Finalmente, qui di seguito il corpo dello script per il calcolo dell'ampiezza complessa dell'onda diffratta subito dopo il passaggio attraverso l'apertura e la sua propagazione lungo l'asse  $z$ , calcolata attraverso la funzione di trasferimento di Fresnel a distanza  $z_0$ .

### Ampiezza complessa e diffrazione di Fresnel

```

1  pix = abs(z0)*lambda/L; %Intervallo di campionamento sul piano
2  %dell'apertura.
3
4  X=axis_scaling(M,pix);
5  Y=axis_scaling(N,pix);
6
7  [x,y] = meshgrid(X, Y);
8
9  U0=pinhole(M,N,X,Y,R);
10
11 %calcolo della funzione di trasferimento
12 % e della formula di Fresnel per la diffrazione:
13 fresnel = exp(i*k/2/z0*(x.^2 + y.^2));
14
15 f = U0.*fresnel;
16 Uf = fftshift(fft2(f, M, N));
17
18 %calcolo del termine di propagazione della fase
19 pix_olo = lambda * abs(z0)/M/pix;
20
21 Xd=axis_scaling(M,pix_olo);
22 Yd=axis_scaling(N,pix_olo);
23 [xd,yd]=meshgrid(Xd,Yd);
24
25 phase = exp(i*k*z0)/(i*lambda*z0)*exp(i*k/2/z0*(xd.^2+yd.^2));
26
27 Uf= (Uf.*phase); %calcolo della diffrazione

```

In realtà, è importante notare che non essendo questo un ologramma ma una semplice figura di diffrazione, il termine di fase sarà del tutto ininfluenza in quanto verrà moltiplicato per il suo complesso coniugato per ottenere l'intensità registrata. Sarà proprio la somma con un'onda di riferimento che genererà dei termini misti che conserveranno l'informazione di fase dell'onda diffratta dall'oggetto.

Qui di seguito il calcolo e la visualizzazione del pattern di diffrazione e del grafico dell'intensità.

### Calcolo dell'intensità e visualizzazione

```

1  figure(1), imagesc(X,Y,U0), colormap('gray'), axis('tight','xy');
2  saveas(gcf,'percorso1.jpg')

```

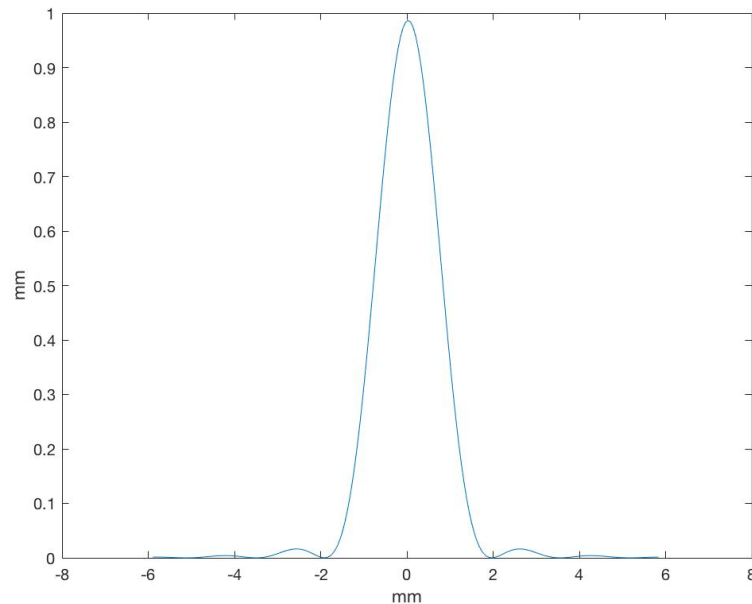


Figura 2.3: Grafico dell'intensità luminosa del disco di Airy.

```

3
4 Ufmax= max(max(Uf));
5 Uf = Uf./Ufmax;
6 IUf=abs(Uf).^0.75;
7 figure(2), imagesc(Xd,Yd,IUf), colormap(gray); ylabel('pixels');
8 saveas(gcf,'percorso2.jpg')
9
10 IUf=(Uf).*conj(Uf);
11
12 I1=IUf(412:612,412:612);
13 Xd1=Xd(412:612);
14 figure(3),plot(Xd1, I1(:, 100));
15 xlim([-8 8])
16 saveas(gcf,'percorso3.jpg')
17
18 disp('il primo minimo è atteso in: ');
19 disp( z0*1.22*lambda/(2*R) );
20
21 disp('il secondo minimo è atteso in: ');
22 disp( z0*2.233*lambda/(2*R) );

```

Come possiamo vedere nel grafico così ottenuto, la posizione dei minimi è coerente con il valore atteso. Infatti, nel caso di un'apertura circolare con raggio di 0.1 mm, posta a distanza  $z_0 = 500\text{mm}$ , il primo minimo è atteso in  $y_1 = z_0 \cdot \frac{1.220\lambda}{2R} = 1,9215\text{ mm}$ .

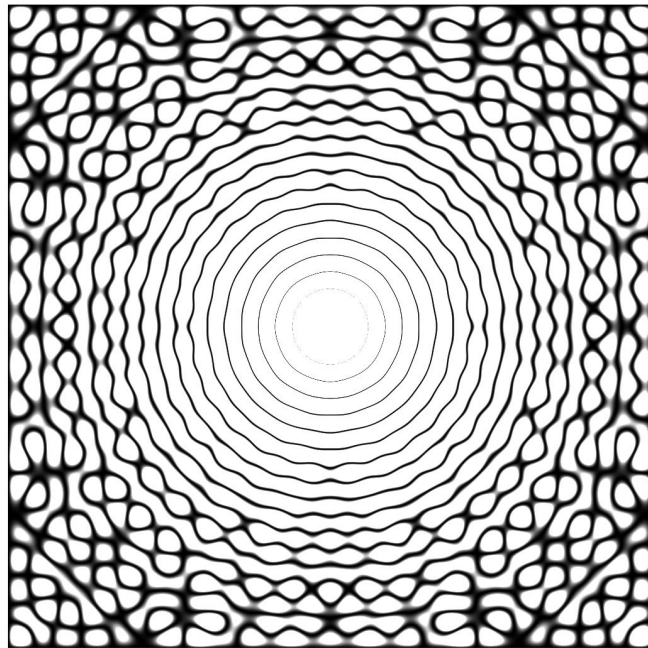


Figura 2.4: Figura di diffrazione per un valore dell'ampiezza dell'onda amplificato con un coefficiente moltiplicativo molto grande.

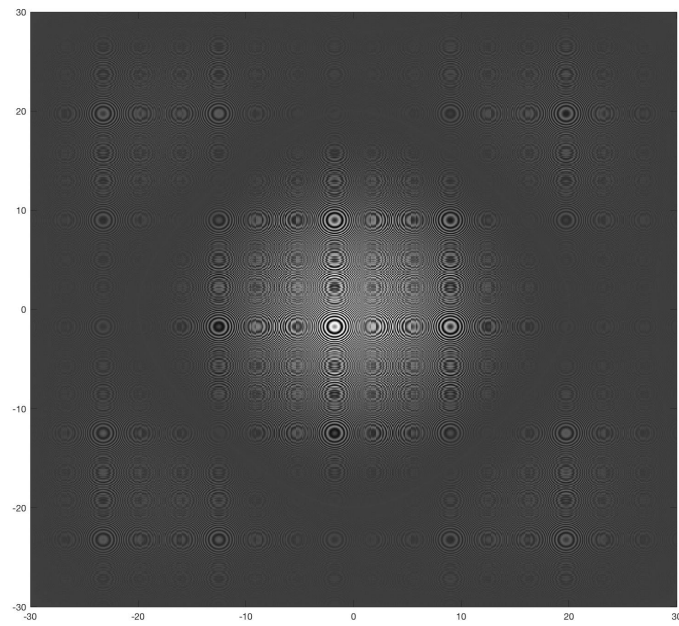


Figura 2.5: Ologramma di un'apertura circolare.

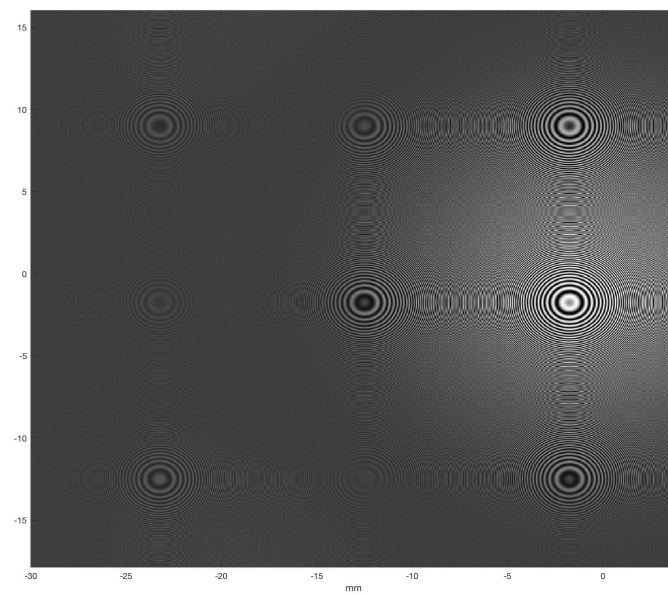


Figura 2.6: Dettaglio dell'ologramma precedente



## Registrazione dell'ologramma

Una volta calcolata la diffrazione dell'onda piana attraverso un'apertura circolare, si vuole registrare l'ologramma. Per fare questo, si va a calcolare l'onda piana di riferimento ed essa viene fatta interferire con l'onda diffratta. Le condizioni fondamentali per l'olografia digitale fuori asse verranno trattate in seguito. Verrà presentato qui di seguito l'ologramma *in line* e la sua implementazione, a completamento di quanto è stato appena spiegato per il disco di Airy.

### Interferenza con l'onda piana di riferimento e registrazione

---

```

1 %Onda piana di riferimento in line.
2 %(Le coordinate sono quelle sul piano di osservazione/diffrazione)
3 Ar = max(max(Uf));
4 Lx=M*pix;%questo è il pix sul piano oggetto, quello dell'eq. p q no
5 Ly=N*pix;
6 %ur=Lx/8/lambda/z0;
7 ur=1;
8 vr=1;
9 psi_r = Ar * exp(i*k*(ur*x + vr*y));
10
11 %Questa è l'interferenza con il laser di riferimento:
12 H = abs(Uf + psi_r).^2;
13 %H =double(H)-mean2(double(H));
14 Imax=max(max(H));
15 H=uint8(255*H/Imax);
16 % grafico l'intensità a dell'onda diffratta sugli assi riscalati
17 figure(1), imagesc(Xd,Yd,H), colormap('gray'), axis('tight','xy');
18 xlabel('mm'); ylabel('mm');
```

---

### FZP e ologramma di un oggetto puntiforme

Quando il raggio dell'apertura tende a zero si ritrova il caso dell'apertura circolare puntiforme, incontrato nel primo capitolo. In quel frangente, è stato possibile trovare l'onda oggetto come risposta all'impulso della diffrazione di Fresnel. L'apertura è descritta come una distribuzione  $\delta(x, y)$  di Dirac. Può essere utile riportare l'equazione dell'onda oggetto di un'apertura puntiforme, già incontrata nel primo capitolo:

$$\begin{aligned}
 \psi_O(x, y; z_0) &= \delta(x, y) * h_F(x, y; z_0) = \delta(x, y) * \exp(-ik_0 z_0) \frac{ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{-ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] \\
 &= \exp(-ik_0 z_0) \frac{ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{-ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right],
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

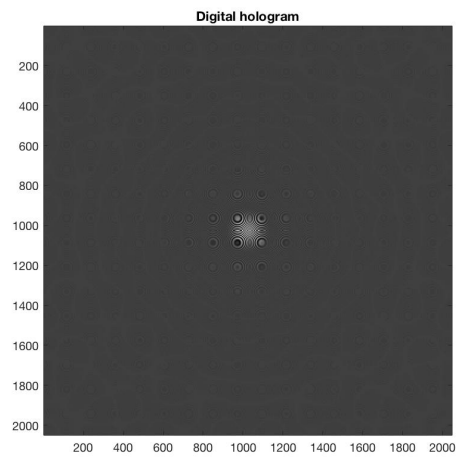


Figura 2.7: Ologramma *in line* di un'apertura circolare.

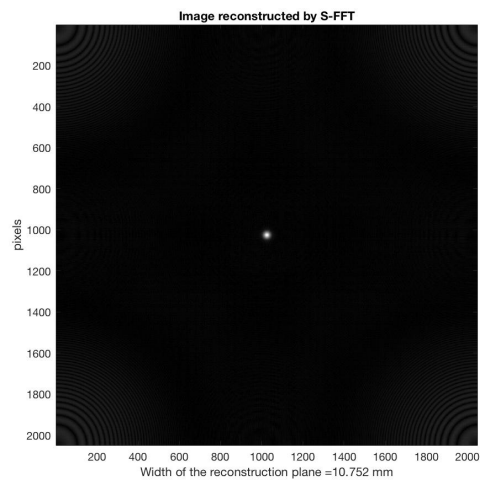


Figura 2.8: Ricostruzione dell'ologramma dell'apertura circolare.

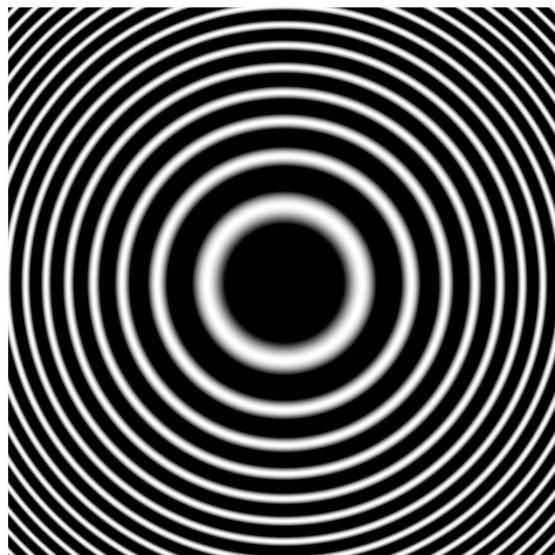


Figura 2.9: FZP a distanza  $z = z_0$

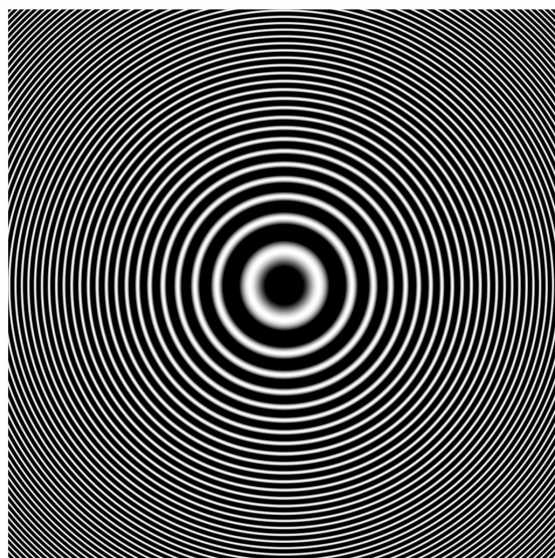


Figura 2.10: FZP a distanza  $z = 3z_0$

e quella dell'ologramma registrato per una distanza  $z_0$  dello schermo con l'apertura dal piano di registrazione:

$$H(x, y; z_0) = |\psi_O + \psi_R|^2 = A_0^2 + \left(\frac{k_0}{2\pi z_0}\right)^2 + \\ + A_0 \frac{ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{-ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] + A_0 \frac{-ik_0}{2\pi z_0} \exp\left[\frac{ik_0}{2z_0}(x^2 + y^2)\right]. \quad (2.20)$$

L'onda dell'oggetto, è quella che era stata presentata come *Fresnel Zone Plate* e ne viene di seguito riportato il grafico per diversi valori della distanza  $z$ . Come si vede dalle formule, l'implementazione del fenomeno è immediata, in quanto non bisogna calcolare la trasformata di Fourier e quindi non occorre nessun cambio di variabile. Questo è l'ologramma più semplice da implementare, la struttura di base di qualsiasi ologramma. Quindi può essere utile mostrare un semplice script e l'ologramma registrato e la sua ricostruzione.

### Ologramma di un oggetto puntiforme

---

```

1 % ologramma di dirac.
2 clear; close all;
3 M=1024;
4 N=1024;
5 lambda=0.00063;
6 z0 = 500;
7 L=60;
8 pix=abs(z0)*lambda/L;
9 k=2*pi/lambda;
10 a = -M/2:M/2-1; b = -N/2:N/2-1;
11 % calcolo della fase (sul piano dell'ologramma):
12 [x,y]=meshgrid(a*pix, b*pix);
13 phase = exp(i*k*z0)/(i*lambda*z0)*exp(i*k/2/z0*(x.^2+y.^2));
14 phase = phase./(max(max(phase)));
15
16 % laser di riferimento
17 Ar = max(max(phase));
18 Lx=M*pix;
19 Ly=N*pix;
20 ur=1;
21 vr=ur;
22 psi_r = Ar * exp(i*k*(ur*x + vr*y));
23
24 % ologramma
25 H = abs(phase + psi_r).^2;
26 Imax=max(max(H));
27 H=uint8(255*H/Imax);
28 nom='dirac_holo.tif';
29 imwrite(H,nom);
30 figure(1), imagesc(H), colormap('gray'), axis('tight','xy');
```

---

L'ologramma appena generato è sostanzialmente l'interferenza fra un'onda sferica e un'onda piana. Questo è un esperimento ideale che è possibile realizzare grazie alla *CGH* ma nella realtà sarebbe possibile ricreare solo una sua approssimazione, quella vista nel caso dell'apertura circolare.

### 2.5.2 Condizione per il campionamento della risposta all'impulso spaziale di Fresnel

Dal grafico della *Fresnel Zone Plate*, si vede come la frequenza vari localmente andando verso il bordo dello schermo. È naturale porre quindi una condizione per avere un corretto campionamento della frequenza spaziale, in quanto il valore della frequenza può raggiungere valori molto alti sui bordi. Questa è una condizione generale dal momento che ogni punto di un oggetto esteso si comporterà come una sorgente di onde sferiche. Dunque, il caso che possa mettere maggiormente sotto stress il teorema del campionamento è quello di una sorgente di onde sferiche posta nel bordo del piano dell'oggetto e che si propaghi fino al bordo opposto del piano di registrazione. Se la larghezza dell'oggetto è  $D_x$  e quella del sensore è  $L_X = M\Delta_x$ , ci si chiede quale sia la frequenza massima che viene raggiunta. Nel primo capitolo era stata trovata la formula che esprimeva la variazione della frequenza locale in funzione di  $x$ :

$$f_{locale} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{k_0}{2z_0} x^2 \right) = \frac{k_0 x}{2\pi z_0}. \quad (2.21)$$

Lo spostamento massimo trasversale sarà dato da  $\frac{D_x}{2} + \frac{M\Delta_x}{2}$  e la condizione per il corretto campionamento è immediatamente trovata:

$$\frac{D_x + M\Delta_x}{2\lambda z_0} \leq \frac{1}{2\Delta_x} \quad (2.22)$$

Dunque, si ha una condizione sulla distanza  $z_0$  ed essa avrà un valore minimo da rispettare:

$$z \geq \frac{\Delta_x}{\lambda} (D_x + M\Delta_x). \quad (2.23)$$

Infine, bisogna aggiungere l'effetto dell'onda di riferimento sulle frequenze spaziali:

$$z \geq \frac{\Delta_x (D_x + M\Delta_x)}{\lambda - 2 \sin \theta \Delta_x} \quad (2.24)$$

Una condizione equivalente sull'asse  $y$  assicura il corretto campionamento dell'ologramma. Di seguito, si andranno ad indagare invece alcune condizioni fondamentali nell'olografia fuori asse.

### 2.5.3 Condizioni per l'olografia fuori asse

Nel momento in cui si voglia implementare la tecnica olografica fuori asse è molto importante fare attenzione ad alcune condizioni. Bisogna prestare attenzione agli aspetti

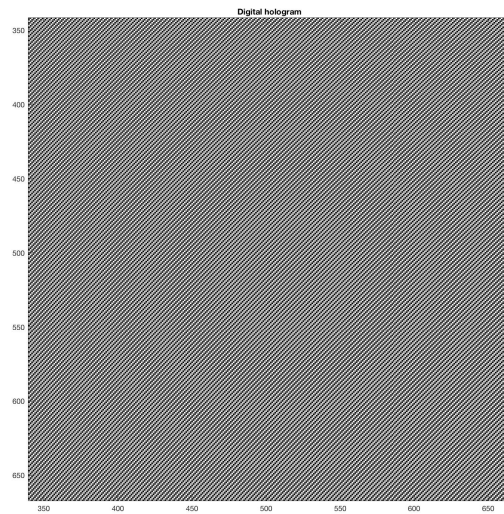


Figura 2.11: Dettaglio dell'ologramma dell'apertura puntiforme: è interessante notare come le frange di diffrazione dell'onda sferica vadano a modulare le frange diagonali dell'onda piana.

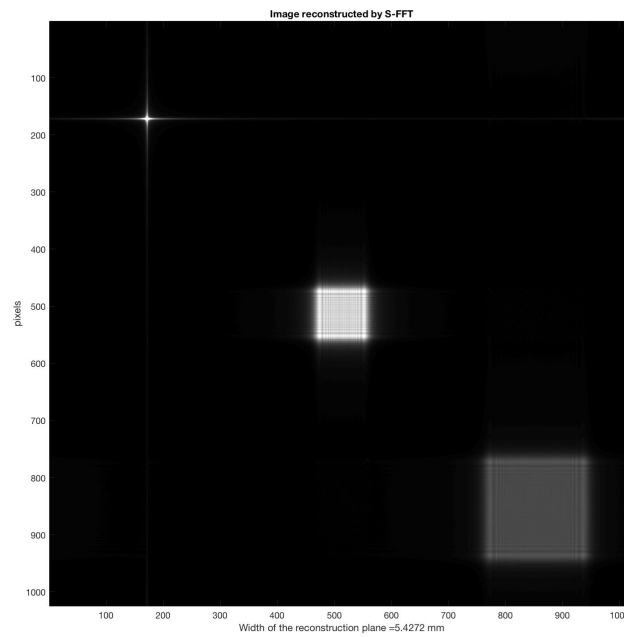


Figura 2.12: Ricostruzione dell'ologramma puntiforme.

intrinseci alla tecnica stessa, fondamentali nell'olografia analogica e che permangono nel passaggio al digitale. Altri aspetti sono invece legati alla digitalizzazione stessa. Nel primo capitolo, è stata presentata nei dettagli l'olografia fuori asse, e già in quel momento è stata ricavata una condizione fondamentale sull'inclinazione relativa fra le due onde. Infatti, quando l'onda dell'oggetto va a interferire con un'onda piana di riferimento inclinata di un angolo  $\theta$ , quest'ultima si comporterà come una frequenza portante che genererà le caratteristiche bande laterali frequenziali della modulazione. La distanza fra queste bande dipenderà dalla frequenza della portante, quindi dall'angolo. Si riporta il risultato che era stato trovato in quel contesto, il quale fornisce un'inclinazione minima dell'onda affinché le bande laterali e quella centrale non vadano a sovrapporsi:

$$\theta_{min} = \arcsin\left(\frac{3 B \lambda}{2 \cdot 2\pi}\right). \quad (2.25)$$

Questo valore minimo garantisce la possibilità di poter isolare in seguito, attraverso un filtraggio spaziale, la componente dello spettro che contiene l'informazione dell'onda oggetto. D'altra parte nell'implementazione digitale di questa tecnica bisognerà prestare attenzione alla frequenza massima che si ha quando è presente il contributo dell'onda piana di riferimento. Essa dovrà essere inferiore alla metà della frequenza di campionamento come stabilito dal teorema di Nyquist-Shannon. Osservando il grafico si vede che la frequenza massima sarà  $k \sin \theta + \frac{B}{2}$ , e la condizione cercata è:

$$k \sin \theta + \frac{B}{2} \leq \frac{2\pi}{2\Delta_x}. \quad (2.26)$$

A questo punto, è possibile esprimere un range ottimale per l'angolo affinché si abbia un'olografia digitale fuori asse ottimale. Esplicitando  $k = 2\pi$ , la condizione trovata diventa:

$$\frac{3 \lambda}{2 \cdot 2\pi} B \leq \sin \theta \leq \frac{\lambda}{2\pi \Delta_x} - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{B}{2} \quad (2.27)$$

Andando a sostituire il valore massimo della frequenza  $B = 2\pi \frac{D_x + M\Delta_x}{\lambda z_0}$ , è utile operativamente trovare una relazione fra la distanza  $z$  dell'oggetto dal sensore e l'angolo di inclinazione dell'onda. Si ha:

$$\frac{3}{2} \frac{D_x + M\Delta_x}{z_0} \leq \sin \theta \leq \frac{\lambda}{2\Delta_x} - \frac{1}{2} \frac{D_x + M\Delta_x}{z_0}. \quad (2.28)$$

Da questa, uguagliando i due estremi:

$$\frac{3}{2} \frac{D_x + M\Delta_x}{z_0} = \frac{\lambda}{2\Delta_x} - \frac{1}{2} \frac{D_x + M\Delta_x}{z_0}, \quad (2.29)$$

ottengo la distanza ottimale:

$$z_c = \frac{4\Delta_x(D_x + M\Delta_x)}{\lambda}. \quad (2.30)$$

Infine, sostituendo  $z_c$  in una delle due relazioni della (2.28), si ottiene l'angolo ottimale per l'olografia fuori asse:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{3\lambda}{8\Delta_x}\right). \quad (2.31)$$

Le ultime due equazioni sono le condizioni fondamentali per la registrazione di un ologramma fuori asse.

### 2.5.4 Figura di interferenza di due onde piane fuori asse

Ora, si vedrà l'altra metà, rispetto a quella appena presentata, del processo di registrazione di un ologramma: l'interferenza con l'onda piana di riferimento. La scelta, come già detto, è quella di portare il caso più semplice dell'interferenza di due onde piane. Questo permetterà di effettuare una misura dell'angolo di sfasamento fra le due onde fuori asse. Verrà qui di seguito presentato lo script che implementi questo fenomeno.

#### Parametri

---

```

1 clear;close all;
2 % Dichiarazione e inizializzazione dei parametri
3 M=2048;
4 N=M;
5 lambda=0.00063;
6 k=2*pi/lambda;
7 L=input('Maximum width of the object (mm): ');
8 z0=input(['Recording distance z0 (mm): ']);
9 pix=abs(z0)*lambda/L;
10 pix_olo = lambda * abs(z0)/M/pix;
11 Lx=M*pix;
12 Ly=N*pix;
13 disp(['Pixel pitch to fullfill sampling conditions: ',num2str(pix),'mm']);
14 disp(['Width of the object field= ',num2str(Lx),'mm x ',num2str(Ly),'mm']);

```

---

Una volta inizializzati i parametri e l'intervallo di campionamento, si procede con l'implementazione delle due onde piane che andranno a interferire. Si è scelto di sfasare le due onde di un angolo  $\theta$  soltanto lungo la componente  $x$ . Questa scelta non toglie di generalità al discorso e permette di cogliere in maniera chiara i tratti salienti del fenomeno.

#### Calcolo delle onde piane e loro interferenza

---

```

1 %-----Calcolo delle onde piane e loro interferenza
2 X=axis_scaling(M,pix);
3 Y=axis_scaling(N,pix);
4 [x,y] = meshgrid(X, Y);
5
6 % Onda piana di riferimento
7 ur=M*pix/lambda/z0/8; % Spatial frequencies
8 vr=ur;
9 Ar=0.5;% Ampiezza onda di riferimento

```



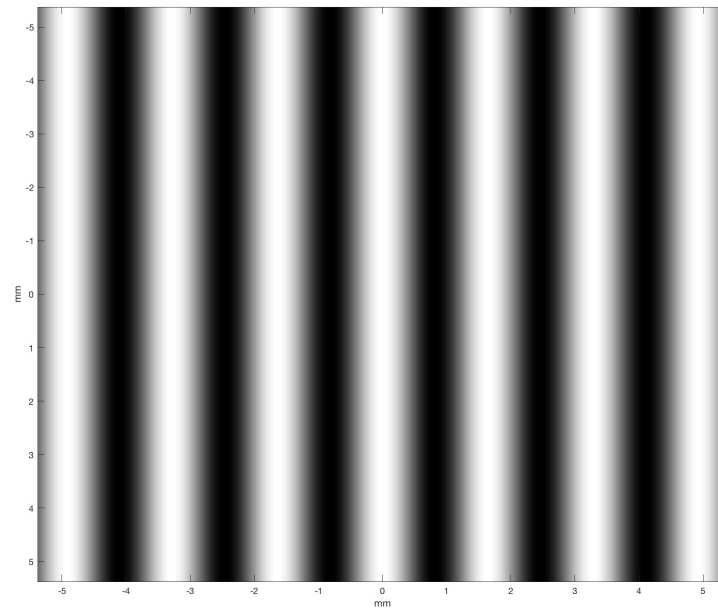


Figura 2.13: Figura di interferenza di due onde piane fuori asse

```

10 Ur=Ar*exp(2*i*pi*(ur*x));% Equazione onda di riferimento
11
12 % Onda piana "oggetto"
13 uf=8/7*ur; % Frequenze spaziali
14 vf=uf;
15 Af=0.5;% Ampiezza onda oggetto
16 Uf=Ar*exp(2*i*pi*(uf*x));% Equazione onda oggetto
17
18 % Intensità della loro interferenza
19 H = (Ur + Uf).*conj(Ur + Uf);

```

Ora è possibile salvare e mostrare la figura di interferenza ottenuta in questo modo. Si procede, innanzitutto, con la normalizzazione dell'intensità. Quindi, viene fatto un *mapping* dei valori di intensità su una scala di grigi espressi con numeri interi nel range che va da 0 a 255. La scala sugli assi è visualizzata in millimetri così da poter immediatamente osservare la distanza fra le frange per un calcolo dell'angolo di inclinazione fra le due onde. In seguito, questo risultato potrà essere confrontato con quello trovato attraverso un'analisi spettrale dell'ologramma nel dominio delle frequenze.

### Visualizzazione dell'ologramma

```

1 % 8-bit digitization
2 Imax=max(max(H));

```

```

3 Ih=uint8(255*H/Imax);
4 figure(1),imagesc(X, Y, Ih),colormap(gray);ylabel('mm');xlabel('mm');
5 saveas(gcf,'percorso/nome.jpg')
6 % Recording the hologram
7 title(['Digital_hologram_with_the_name:',nom]);
8 disp(['per_un_angolo_di:', num2str((uf-ur)*lambda),
9 'rad. E_in_gradi:', num2str((uf-ur)*lambda*180/pi)])

```

---

### 2.5.5 Ricostruzione di ologrammi sintetizzati

Il secondo passaggio fondamentale del processo olografico è quella della ricostruzione dell'ologramma. Finora è stata affrontata la parte di registrazione di ologrammi generati con il computer. Nel terzo capitolo, gli ologrammi verranno acquisiti con un sensore CCD e la parte di ricostruzione sarà uguale in tutto a quello che verrà spiegato di seguito per gli ologrammi generati. Per illustrare il metodo verrà utilizzato un ologramma più complesso dei precedenti. La funzione di trasmittanza è una fotografia che ritrae la mia mano che regge una sfera e da essa dipenderà l'ampiezza complessa dell'onda diffratta. La fase di ricostruzione è simmetrica a quella di registrazione, non verrà quindi riportato il codice. Semplicemente, l'ologramma avrà il ruolo di un reticolo di diffrazione che verrà illuminato con l'onda di riferimento. In questo modo, si andrà a ricostruire il fronte dell'onda diffratta dall'oggetto che sarà messo a fuoco ad una distanza  $z$  uguale a quella che vi era inizialmente fra il piano dell'oggetto e quello di registrazione. È importante precisare che il processo di formazione dell'ologramma è stato realizzato con la tecnica fuori asse, ovvero l'onda piana di riferimento avrà un certo angolo  $\theta$  di inclinazione rispetto al piano registrazione. In questo modo, come spiegato precedentemente, si otterrà una separazione dell'ordine zero di diffrazione e delle immagini gemelle.

La ricostruzione dell'ologramma consisterà quindi in una implementazione della diffrazione di Fresnel identica a quella implementata per la diffrazione dell'onda oggetto [8]. Attraverso le immagini sono mostrati i risultati ottenuti nel modo illustrato. I parametri che sono stati utilizzati sono la grandezza dell'oggetto  $L = 0,25mm$  e la distanza di registrazione, e successiva ricostruzione,  $z_0 = 300mm$ .

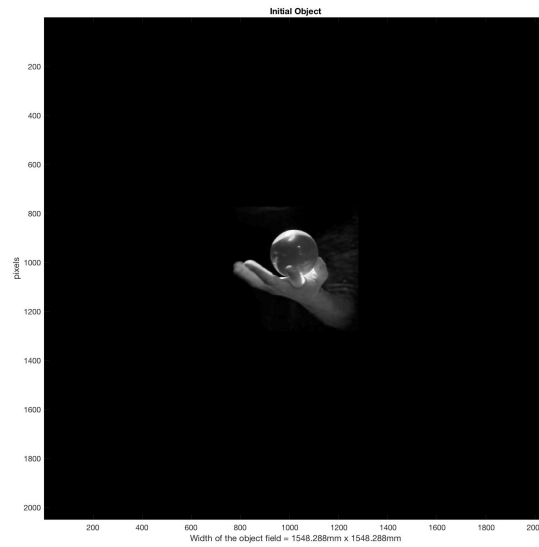


Figura 2.14: Oggetto di cui si vuole registrare l'ologramma: una mano che regge una sfera.

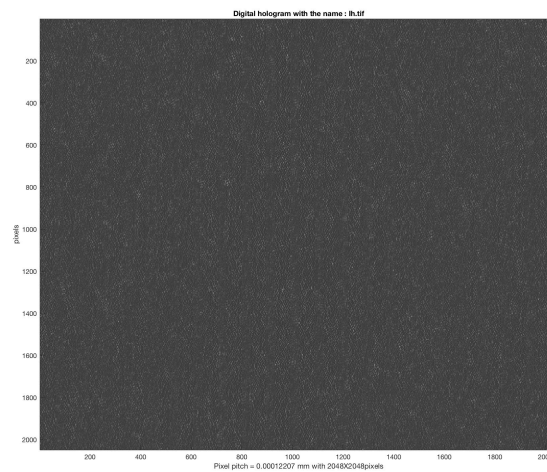


Figura 2.15: Ologramma dell'oggetto.

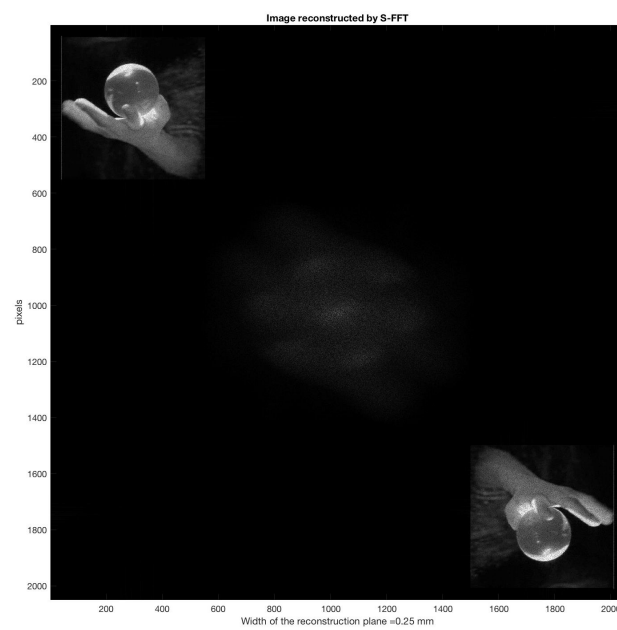


Figura 2.16: Ricostruzione dell'ologramma.

## Capitolo 3

# Risultati sperimentali

### 3.1 Ricostruzione della fase di ologrammi digitali

L'olografia può essere pensata come un metodo di *imaging* tridimensionale, che non richiede un contatto con l'oggetto della misura e permette di delinearne il profilo nello spazio. La tecnica fuori asse permette di risolvere il problema del disturbo portato dalla sovrapposizione dell'ordine zero di diffrazione e delle immagini gemelle. L'analisi nel dominio delle frequenze dell'ologramma permette di filtrare la banda laterale che trasporta l'informazione della fase dell'onda dell'oggetto. La ricostruzione della fase richiede l'implementazione di un algoritmo di *unwrapping* della fase. Verranno presentati alcuni algoritmi mostrandone le caratteristiche fondamentali. Essi sono molto usati in svariati ambiti, dai radar ad apertura sintetica alla tomografia a risonanza magnetica. Questi sono gli strumenti che potrebbero portare a svolgere delle misure di microscopia di oggetti molto piccoli. Vengono dunque presentate alcune superfici che portano con sé l'informazione dell'oggetto.

#### 3.1.1 Analisi spettrale e misura dell'angolo $\theta$

Nell'ambito delle misure che vengono di seguito svolte, la fase delle onde sarà il parametro di maggiore interesse e l'olografia fuori asse sarà lo strumento per inquadrare alcuni problemi interferometrici. Come introduzione al problema, si prenderà il caso dell'interferenza di due onde piane generate mostrato nel corso della sezione precedente, che avevano la seguente forma:

---

```
1 % Onda piana di riferimento
2 ur=M*pix/lambda/z0/8; % Spatial frequencies
3 vr=ur;
4 Ar=0.5;% Ampiezza onda di riferimento
5 Ur=Ar*exp(2*i*pi*(ur*x));% Equazione onda di riferimento
6
7 % Onda piana "oggetto"
8 uf=8/7*ur; % Frequenze spaziali
9 vf=uf;
```

```

10 Af=0.5;% Ampiezza onda oggetto
11 Uf=Ar*exp(2*i*pi*(uf*x));% Equazione onda oggetto
12
13 % Intensità della loro interferenza
14 H = (Ur + Uf).*conj(Ur + Uf);

```

Una prima misura dell'angolo di inclinazione fra le due onde può essere fatta immediatamente a partire dalla formula incontrata nello studio dell'interferometro di Michelson:

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\theta} \simeq \frac{n\lambda}{\theta} \quad (3.1)$$

Questo vuol dire che misurando la distanza  $d$  fra  $n$  frange è possibile risalire alla misura dell'angolo, nota la lunghezza d'onda. Sarà quindi possibile confrontare questa misura con quella che è stata fatta a partire dall'analisi spettrale della figura d'interferenza. Infatti, una maggiore inclinazione fra le due onde implicherà una maggiore distanza fra le bande laterali frequenziali dello spettro. In questo paragrafo, la misura avrà solo un valore esplicativo e di test del metodo, in quanto l'angolo è noto, essendo le onde generate arbitrariamente. Nel capitolo seguente, sarà possibile applicare lo stesso metodo per la figura di interferenza acquisita con un sensore CCD.

Entrando nel merito della misura, innanzitutto si fanno interferire due onde con frequenze spaziali  $\xi_c = \frac{L_x}{8\lambda z_0}$  e  $\xi_o = \frac{L_x}{7\lambda z_0}$ , con  $L_x = Kpix = K\frac{z_0\lambda}{L}$ , dove  $K = 2048$  e  $\lambda = 0.00063mm$ . Quella che si vuole misurare è l'inclinazione relativa delle due onde con angoli  $\theta_r = \frac{L_x}{8z_0}$  e  $\theta_o = \frac{L_x}{7z_0}$ , a partire dai parametri in input  $L = 60mm$  e  $z_0 = 500mm$ :

$$\Delta\theta = \theta_o - \theta_r = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right)\frac{L_x}{z_0} = \frac{1}{56}K\frac{\lambda}{L} = \frac{1}{56}2048\frac{0.00063}{60} = 38.4 \times 10^{-5}rad \quad (3.2)$$

Misurando la distanza fra i massimi della figura di interferenza si ha una prima misura dell'angolo. Nell'ologramma la distanza fra sette massimi consecutivi è pari a  $d = |d_6 - d_0|mm = 9.84mm$ . Quindi si ha che la distanza fra due massimi consecutivi è  $d = 1.64mm$ . Da questa, si calcola immediatamente l'angolo relativo:

$$\Delta\theta = n\frac{\lambda}{d} = 6\frac{0.00063}{d} = 38.42 \times 10^{-5}rad \quad (3.3)$$

Questo valore, in pieno accordo con quello atteso, può essere confrontato con quello che si va ora a cercare attraverso l'analisi spettrale della figura d'interferenza. Questa misura è svolta anche nell'ottica di verificare che la frequenza mostrata nello spettro sia quella corretta; infatti, il codice mostrato di seguito permetterà in seguito di andare ad operare un filtraggio per selezionare la frequenza dell'immagine virtuale, o reale, di un ologramma qualsiasi, per una successiva ricostruzione. In questo modo potrà essere isolata la parte dell'onda indisturbata dal rumore dell'immagine gemella e dell'ordine zero. Questa soluzione al problema è stata già esplicita nel primo capitolo e ora se ne vede una sua implementazione.

### Analisi spettrale e filtraggio

---

```

1  % Dati apparato
2  h = 0.63*10^-3; %lunghezza d'onda laser in millimetri
3  delta=abs(z0)*h/L; %grandezza pixel millimetri
4
5  %Ologramma in input
6  [FNAME, FPATH] = uigetfile('*..*','Quale immagine?');
7  I = imread([FPATH,FNAME]);
8  %I = rgb2gray(I);
9  I = I(:, 1:1038); % la ritaglio quadrata per essere sicuro di non
10                  % modificare gli intervalli in frequenze dopo la fft
11
12
13  % TRASFORMATA DI FOURIER
14  FI = fftshift(fft2(fftshift(I)));
15
16  % RITAGLIO la parte dello spettro che mi interessa
17  % Per selezionare la parte del piano uso la funzione imcrop di Matlab
18
19  %lo spettro
20  mod_FI = abs(FI).^2;
21
22  %riscalco tra 0 e 255 e li rendo interi siccome imcrop visualizza l'immagine
23  %con imshow che richiede la figura in questa maniera
24  mod_FI = (mod_FI./max(max(mod_FI))).*255;
25  mod_FI = uint8(10*mod_FI);
26
27  %applico imcrop salva l'immagine ritagliata in ROI e le cordinata del
28  %dettaglio in rect (le coordinate di rect mi serviranno per ritagliare
29  %lo spettro, non il modulo, ma quello COMPLESSO)
30  figure(1),[ROI, rect] = imcrop(mod_FI);
31  close(figure(1));
32  %-----%
33
34
35  %salvo le coordinate della regione di interesse ROI nelle variabili cr
36  %e salvo le coordinate della regione
37  cr_fX = round(rect(1));
38  cr_fY = round(rect(2));
39  cr_width = round(rect(3));
40  cr_height = round(rect(4));
41  [cr_Ymax, cr_Xmax] = find(ROI == max(max(ROI)));
42
43
44  %salvo in ROI_FI la regione di interesse dello spettro complesso
45  ROI_FI = FI( cr_fY : cr_fY+cr_height , cr_fX : cr_fX+cr_width);
46
47  %salvo la regione di interesse complessa con il suo massimo al centro

```

```

48 %di una immagine di 512*512 pixel complessa
49 %-----%
50 %immagine 512*512 complessa con tutti zeri
51 picco = zeros(2048);
52 picco = complex(picco,0);
53 %copio il picco con il massimo al centro
54 picco(1024-cr_Ymax : 1024+(cr_height-cr_Ymax) ,
55 1024-cr_Xmax : 1024+(cr_width-cr_Xmax)) = ROI_FI;
56
57 %trasformata inversa di fourier
58 %picco = picco*exp(i*2*pi/l*z);
59
60 ifft_picco = fftshift(ifft2(fftshift(picco)));
61
62 [ro,co]=size(ifft_picco);
63
64 I3=ifft_picco(:);
65
66 I3_phase = atan2(imag(I3), real(I3));
67
68 % Costruisco gli assi con la grandezza dei pixel del CCD
69 [Rows,Cols] = size(I);
70 X = linspace(0, Cols*delta, Cols);
71 Y = linspace(0, Rows*delta, Rows);
72 % Mostro la foto con gli assi scalati
73 figure(2);
74 imagesc(X,Y,I), colormap('gray');
75 axis('tight','equal','xy'), title('Immagine_Originale');
76 xticks(0.5:0.5:X(1038)); xlabel('X_(mm)');
77 yticks(0 :0.5:Y(1038)); ylabel('Y_(mm)');
78
79
80 % Costruisco gli assi nello spazio delle frequenze (1/mm)
81 fX=(1/delta)*((-Cols/2:Cols/2-1)/Cols);
82 fY=(1/delta)*((-Rows/2:Rows/2-1)/Rows);
83 % Mostro lo spettro, quindi opero il modulo quadro in scala
84 % logaritmica di FI (funzione complessa)
85 figure(3),
86 imagesc(fX,fY,mod_FI), colormap('gray');
87 axis('tight','equal'), title('Spettro_Immagine');
88 xlabel('frequenze_X_(1/mm)');
89 ylabel('frequenze_Y_(1/mm)');

```

Nella figura è possibile distinguere la frequenza centrale dell'ordine zero di diffrazione e le due bande laterali simmetriche rispetto alla prima. La frequenza delle bande laterali misurata è  $|\xi_c| = |\xi_o| = 0.56$  linee  $\text{mm}^{-1}$ . La medesima misura verrà svolta in dettaglio nel caso della figura di interferenza prodotta in laboratorio registrata con un sensore *CCD*.



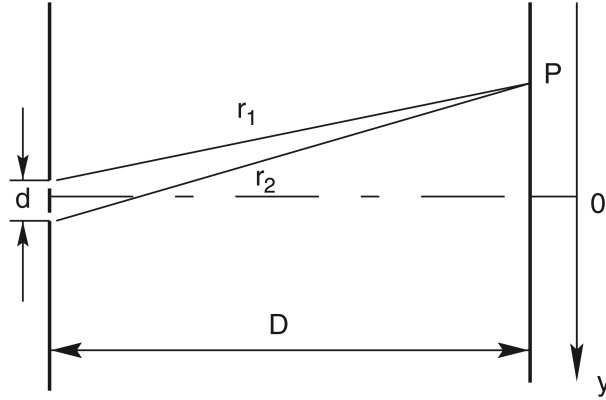


Figura 3.1: Geometria dell'interferometro di Young.

### 3.1.2 Metodi di unwrapping della fase

Quello che viene affrontato adesso è uno studio preliminare che suggerisca un possibile approccio al problema della ricostruzione della fase di ologrammi più complessi. Nel processamento digitale dei segnali, il calcolo della fase è una questione molto importante in molti ambiti. Nell'olografia, così come negli altri ambiti, quelle che vengono analizzate sono funzioni complesse e l'estrapolazione della fase coinvolge la funzione arcotangente. Molti sono gli esempi in cui il calcolo della fase è centrale: dai radar ad apertura sintetica, che ha molto a che fare con l'olografia, alle tecniche di *imaging* della risonanza magnetica all'analisi delle figure formate dalle frange d'interferenza [9]. Il problema sostanzialmente consiste nel fatto che la funzione arcotangente restituisce solo il valore principale nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . D'altra parte, la situazione più comune è che la fase ecceda questo intervallo, implicando degli *arrotondamenti* della fase attraverso salti discreti dell'angolo di  $2\pi$ . Recuperare il valore reale della fase dal valore principale è un problema noto come *phase unwrapping* [10]. Per comprendere meglio il problema, si pensi all'interferometro dell'esperimento di Young mostrato nella figura. In un certo punto  $P$  dello schermo, l'intensità dipenderà dalla differenza di cammino ottico  $r_1 - r_2$  fra i due raggi. È noto che l'interferenza costruttiva occorrerà per valori dell'angolo:

$$\phi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2k\pi. \quad (3.4)$$

Sostanzialmente, per la periodicità dell'interferenza stessa, la differenza di cammino ottico è un multiplo intero della lunghezza d'onda ma il valore intero rimane nascosto. Determinare l'esatto valore intero è l'obiettivo del *phase unwrapping*. Dato un valore principale della fase nell'intervallo  $-\pi \leq \psi < \pi$ , si vuole determinare il valore reale  $\phi$  relazionato in questo modo:

$$\psi = \mathfrak{W}(\phi) = \phi - 2\pi \left\langle \frac{\phi}{2\pi} \right\rangle, \quad (3.5)$$

dove con le parentesi angolari si intende l'operazione di arrotondamento dell'argomento all'intero più vicino.

Dunque, quando si procede al calcolo della fase dell'onda bisognerà dividere il problema in due parti. Innanzitutto, la determinazione della fase arrotondata, per poi implementare il suo srotolamento che dipenderà dal contesto spaziale e temporale. La prima parte può essere vista anche in un altro modo. Quello di estrapolare l'argomento, complesso, di una funzione esponenziale. Data un'onda di forma analitica  $z = re^{i\theta}$ , si va a cercare la parte immaginaria del logaritmo della funzione stessa:

$$\log(z) = \log(r) + i\theta. \quad (3.6)$$

Questa è una funzione polidroma, dove la polidromia è racchiusa nelle possibili scelte dell'angolo  $\theta$ . Volendo mettere nuovamente in evidenza i possibili valori del logaritmo scriveremo anche:

$$\log(z) = \log(r) + i\theta + 2k\pi i, \quad (3.7)$$

con  $k$  intero. Equivalentemente, come già accennato, l'angolo può essere determinato partendo dalla formula di Eulero  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ . In tal caso, si avrà:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right). \quad (3.8)$$

Nel caso specifico dell'olografia, la funzione complessa conterrà il contributo dell'ordine zero e delle immagini gemelle. L'olografia fuori asse permetterà di separare spazialmente i diversi contributi frequenziali e di selezionare attraverso il filtraggio, la componente dell'onda dell'oggetto specifica. Su di essa sarà possibile calcolare la fase arrotondata scegliendo alcune funzioni di Matlab. Guardando all'angolo come alla parte immaginaria del logaritmo dell'equazione d'onda, si userà la funzione **angle**. Alternativamente, si adopererà la funzione **atan2**, che implementa la funzione arcotangente tenendo conto delle problematiche che si incontrano sui quattro quadranti. Essa opererà infatti nel seguente modo:

$$\text{atan2}(\Im(z), \Re(z)) = \begin{cases} \arctan\frac{\Im(z)}{\Re(z)} & \text{se } \Im(z) > 0 \text{ e } \Re(z) > 0 \\ \arctan\frac{\Im(z)}{\Re(z)} + \pi & \text{se } \Im(z) > 0 \text{ e } \Re(z) < 0 \\ \arctan\frac{\Im(z)}{\Re(z)} - \pi & \text{se } \Im(z) < 0 \text{ e } \Re(z) < 0 \\ \arctan\frac{\Im(z)}{\Re(z)} & \text{se } \Im(z) < 0 \text{ e } \Re(z) > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Risolta la prima parte, si incontra quella più delicata che coinvolge gli algoritmi di *unwrapping*. Molti sono gli algoritmi che in vari campi sono stati proposti. Una ricerca ha portato a concentrare l'attenzione su due in particolare. Uno per la sua semplicità e l'altro per la sua efficacia.

### Algoritmo di Itoh unidimensionale

Per approssimare questo tipo di algoritmo si mostra innanzitutto il caso unidimensionale in cui un segnale periodico che eccede in ampiezza l'intervallo  $[-\pi, \pi]$  verrà utilizzato come fase di un altro segnale [11]. Viene immediatamente calcolata la fase attraverso la funzione `atan2`.

---

```

1 clear; close all;
2 %The number of samples in the signal
3 N=1024;
4 n=0:N-1;
5 f=1/1024;
6
7 Ar=6; %Ampiezza onda
8 Uf=Ar*exp(i*2*pi*(f*n)); %Equazione d'onda
9 Uf =imag(Uf); % segnale periodico unidimensionale
10 %che eccede l'intervallo [-pi,pi]
11
12 plot(Uf)
13 xlabel('Sample_index')
14 ylabel('Original_phase_in_radians')
15 axis([0 1024 -6.5 6.5])
16 title('The_signal_x_whose_amplitude_exceeds_the_range[-\pi,\pi]')
17
18 %Calculating the wrapped signal using the four quadrant arctangent function
19 xw = atan2(sin(Uf), cos(Uf));
20 figure, plot(xw)
21 xlabel('Sample_index')
22 ylabel('Wrapped_phase_in_radians')
23 axis([0 1024 -4 4])
24 title('The_wrapped_phase')
```

---

Dal grafico della fase arrotondata, si vedono immediatamente i salti che verranno colmati dall'algoritmo di unwrapping di Itoh. Esso andrà semplicemente a calcolare la differenza fra i valori di due campioni consecutivi, verificando se c'è stato un salto che eccede il valore del periodo; in questo modo:

---

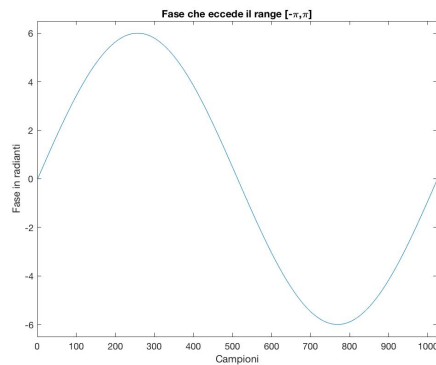
```

1 %Unwrap del segnale:
2 xu = xw;
3 for i=2:length(xw)
4     difference = xw(i)-xw(i-1);
5     if difference > pi
6         xu(i:end) = xu(i:end) - 2*pi;
7     elseif difference < -pi
8         xu(i:end) = xu(i:end) + 2*pi;
9     end
10 end
11
12 figure, plot(xu)
13 xlabel('Sample_index')
```

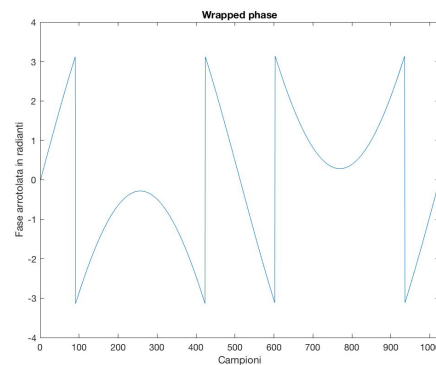
```

14 ylabel('Unwrapped phase in radians')
15 axis([0 512 -6.5 6.5])
16 title('The unwrapped phase')

```



*Fase che eccede l'intervallo  $[-\pi, \pi]$*



*Wrapping*

In questo modo, si otterrà nuovamente la funzione sinusoidale iniziale. In Matlab esiste una funzione dal nome, appunto, **unwrap**, che implementa questo semplice algoritmo. Senza entrare nei dettagli, si tenga conto che il rumore di fondo di un segnale può avere effetti catastrofici sulla ricostruzione della fase, così come anche è molto sensibile a un leggero sottocampionamento. In fondo, verrà proposto un utilizzo di questo algoritmo nel caso in due dimensioni della figura di interferenza di due onde piane.

### Algoritmo di unwrapping seguendo un cammino non continuo

Quando il problema dell'unwrapping coinvolge funzioni su due dimensioni, l'immunità dal rumore di fondo diventa ancora più rilevante. Specie per il fatto che il rapporto fra segnale e rumore è una questione che andrà trattata a livello locale e le vie di risoluzione possono essere molteplici. La soluzione a questo problema richiede un algoritmo robusto, efficace nella maggior parte delle situazioni. Molti sono gli algoritmi che sono stati proposti.

Le modalità di ordinamento dei pixel dell'algoritmo che viene presentato definisce innanzitutto una funzione di affidabilità dei pixel e non segue necessariamente un percorso continuo nell'operazione di *unwrapping*[12].

L'affidabilità dei pixel sarà definita a partire dal gradiente o le differenze fra un pixel e i suoi vicini. Il punto con i più bassi gradienti modulo  $2\pi$ , saranno etichettati come i migliori e saranno i primi ad essere processati. Partendo dal pixel  $(i, j)$  bisogna avere un criterio per calcolare le differenze. Il valore assoluto porterebbe a una serie di svantaggi. Quello che si farà invece sarà calcolare le differenze del pixel rispetto ai vicini orizzontali, quelli verticali e quelli diagonali, per poi calcolare il valore:

$$D(i, j) = [H^2(i, j) + V^2(i, j) + D_1^2(i, j) + D_2^2(i, j)]^{1/2}, \quad (3.10)$$

$(i-1, j-1)$	$(i, j-1)$	$(i+1, j-1)$
$(i-1, j)$	$(i, j)$	$(i+1, j)$
$(i-1, j+1)$	$(i, j+1)$	$(i+1, j+1)$

Figura 3.2: Calcolo delle seconde differenze nell'immagine.

dove

$$\begin{aligned}
 H(i, j) &= \gamma[\phi(i-1, j) - \phi(i, j)] - \gamma[\phi(i, j) - \phi(i+1, j)] \\
 V(i, j) &= \gamma[\phi(i, j-1) - \phi(i, j)] - \gamma[\phi(i, j) - \phi(i, j+1)] \\
 D_1(i, j) &= \gamma[\phi(i-1, j-1) - \phi(i, j)] - \gamma[\phi(i, j) - \phi(i+1, j+1)] \\
 H(i, j) &= \gamma[\phi(i-1, j+1) - \phi(i, j)] - \gamma[\phi(i, j) - \phi(i+1, j-1)],
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

con  $\gamma$  che indica un'operazione di unwrapping per rimuovere un salto di  $2\pi$  fra due pixel consecutivi. Un valore  $D$  può essere assegnato a qualsiasi pixel eccetto che sui bordi dell'immagine; per essi verrà impostato di default per un valore infinito, così che verranno considerati solo alla fine del processo. A partire da  $D$ , è possibile ora assegnare un valore di affidabilità ad ognuno dei pixel:

$$R = \frac{1}{D}. \tag{3.12}$$

Una volta assegnato il valore  $R$  ad ogni pixel, viene implementato il percorso di *unwrapping*. Due pixel saranno uniti dal bordo in comune verticalmente oppure orizzontalmente. Sul bordo superiore, inferiore, sul lato sinistro o destro verrà assegnato un coefficiente di affidabilità, come somma dei coefficienti  $R$  dei due pixel adiacenti. Il percorso che seguirà l'algoritmo dipenderà necessariamente dall'affidabilità assegnata ai bordi dei pixel: l'operazione di unwrapping verrà eseguita prima sui bordi con il valore maggiore. I pixel che condividono i bordi selezionati con questo criterio verranno raggruppati in coppie e poi in gruppi. In questo modo si andrà a eseguire l'operazione di srotolamento della fase in regioni separate e senza seguire un cammino continuo. Quando le varie regioni si incontreranno saranno ancora i valori di affidabilità dei bordi a decidere rispetto

a quale regione eseguire l'unwrapping. Il procedimento è portato avanti finché l'intera immagine è stata rielaborata. La differenza maggiore rispetto ad altri algoritmi è che il percorso seguito è discreto e l'operazione di unwrapping agisce interpretando l'immagine localmente. Per maggiori dettagli sul codice e sui particolari dell'algoritmo, si rimanda al lavoro pubblicato da Miguel Arevallilo Herráez, David R. Burton, Michael J. Lalor, e Munther A. Gdeisat su *Applied Optics*, Vol. 41, No. 35, pp. 7437, 2002.

## 3.2 Apparato sperimentale

Gli studi presentati in questo percorso sono stati fondamentali per le misure su ologrammi acquisiti in laboratorio. L'apparato sperimentale a disposizione ha permesso l'acquisizione di ologrammi analogici e digitali. L'osservazione sperimentale si è concentrata su questi ultimi. Per completezza e per una comprensione totale qualitativa vengono presentate alcune fotografie, ad angolazioni diverse, di ologrammi a riflessione analogici che sono stati realizzati in laboratorio dai miei colleghi negli ultimi anni. Quelle utilizzate sono lastre con un'emulsione fotosensibile di bromuro d'argento, sensibili alla regione spettrale di lunghezza d'onda 620 - 750 nm. La loro risoluzione è di 10000 linee/mm. Quello che è stato usato è un laser HeNe con lunghezza d'onda di 630 nm e una potenza nominale di 30 mW. La stabilità e l'isolamento dalle vibrazioni del banco ottico sarà un criterio non trascurabile nell'acquisizione dell'ologramma. Infatti, l'alta frequenza spaziale delle frange che può essere raggiunta in olografia comporta che il processo sia estremamente sensibile a sollecitazioni e vibrazioni esterne indesiderate.



*Sensore CCD*



*Interfaccia della camera*

Gli ologrammi digitali, su cui sono state fatte alcune considerazioni, vengono acquisiti con un sensore CCD - *Charge-Coupled Devices*. La casa produttrice del dispositivo *scA1390-17gc* è la *Basler*. Il sensore della camera è un *ICX267*. Esso è una matrice rettangolare di  $(1390 \times 1038)$  pixel, con ognuno di essi della dimensione di  $(4,65 \times 4,65)\mu m$ . La dimensione del sensore copre quindi un'area di  $(6,47 \times 4,84)mm$ .

L'apparato sperimentale rappresenta sostanzialmente un interferometro di Michelson nella configurazione di quattro specchi agli angoli di cui due semiriflettenti, con il ruolo di splittare il raggio laser nell'onda dell'oggetto e quella di riferimento. L'angolo delle due onde può essere variato attraverso le viti micrometriche che regolano l'inclinazione degli specchi. Inoltre, anche il cammino ottico dei due laser può essere variato grazie alle guide



Figura 3.3: Diaframma



Figura 3.4: Attenuatore

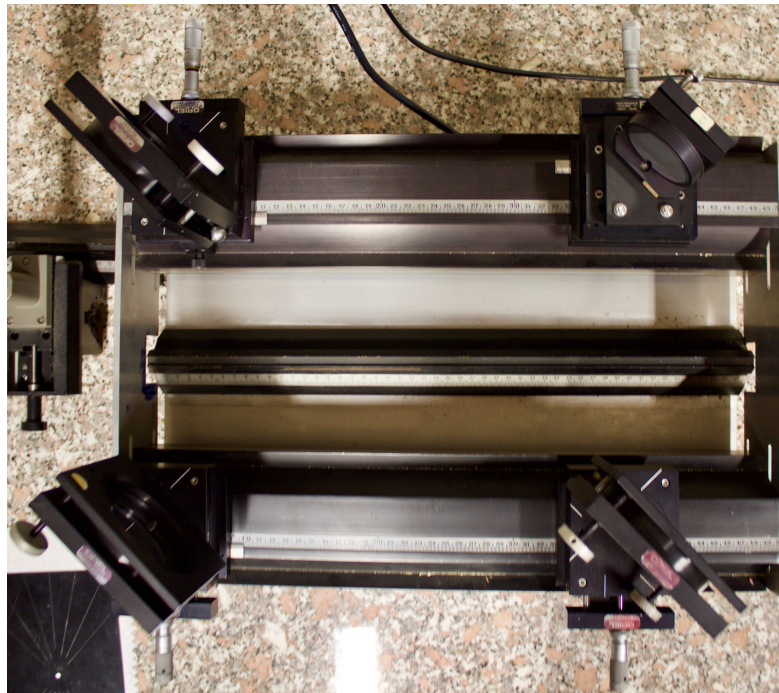


Figura 3.5: Configurazione dell'interferometro dall'alto.

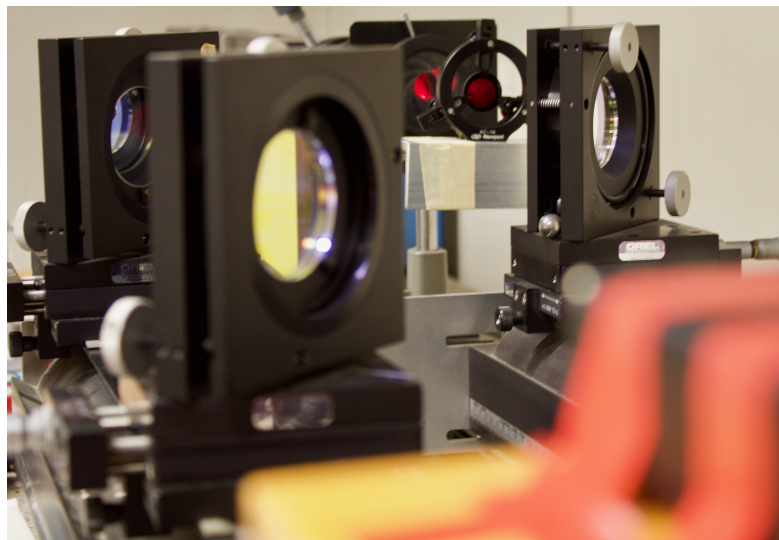


Figura 3.6: Configurazione dell'interferometro.



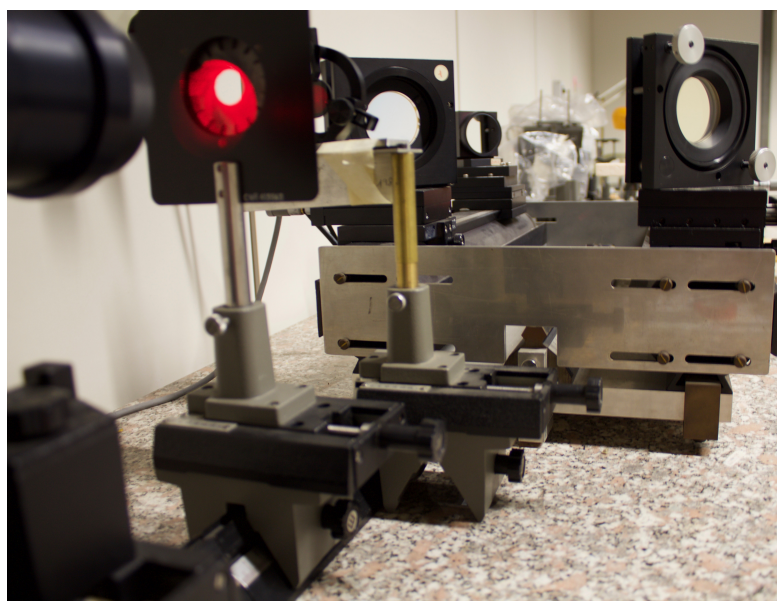


Figura 3.7: L'apparato sperimentale.

su cui sono poggiati i supporti degli specchi.

Prima di essere separato, il laser viene fatto passare per un diaframma e attraverso un filtro neutro attenuatore per diminuire l'intensità, così da evitare la saturazione dell'immagine acquisita.

Inoltre, è stato utilizzato un microscopio per misurare lo spessore dei fili di cui si andrà a registrare l'ologramma. Questo è un microscopio Primo Star della Zeiss dotato di obiettivi per diversi ingrandimenti 4x, 10x, 20x e 100x. Su di esso è montato un sensore CCD che permetterà di eseguire la misura dello spessore attraverso il conteggio dei pixel. La stessa misura verrà comparata con quella ottenuta attraverso un micrometro.

### 3.3 Ologrammi digitali realizzati in laboratorio

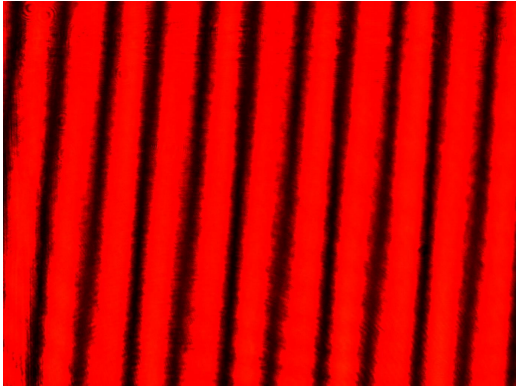
Gli ologrammi acquisiti in laboratorio con l'apparato descritto vengono presentati in ordine di complessità. Il primo è la semplice figura d'interferenza delle due onde, senza alcun oggetto. Il secondo ologramma è quello di un filo di cotone ed è stato acquisito a distanze diverse del filo dal sensore CCD. L'ultimo ologramma è quello di due fili posti ognuno a distanze diverse dal sensore.

Dalla figura d'interferenza si vede come una prima misura dell'angolo fra le due onde si ottiene a partire dalla distanza fra le frange di interferenza. L'immagine ha le dimensioni del CCD e l'intervallo di campionamento è quello del pixel del sensore, pari a  $0.00465\text{mm}$ . Un conteggio dei pixel ha mostrato che fra 10 massimi consecutivi vi è una distanza  $d_9 = 1165\text{pixel} \cdot 0.00465\text{mm} = 5.4172\text{mm}$ . Dunque, la distanza fra due frange consecutive sarà data da:  $d_1 = \frac{d_9}{9} = 0.6019$ . Da essa è possibile calcolare l'angolo che vi è fra le due

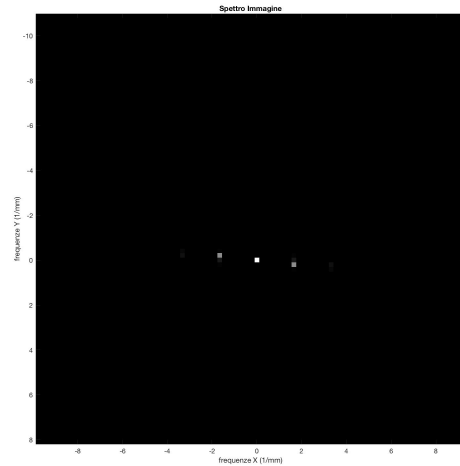
onde nella componente calcolata sull'asse  $x$ :

$$\Delta\theta = n\frac{\lambda}{d} = 9\frac{0.00063}{5.4172} = 0.0010rad. \quad (3.13)$$

La stessa misura può essere presa equivalentemente sull'asse  $y$ . Come è stato fatto precedentemente, si andrà a confrontare questo risultato con quello trovato dall'analisi spettrale. Dall'immagine dello spettro si vede che vi è una leggera inclinazione dell'onda anche rispetto all'asse  $y$ . Una misura dell'angolo potrebbe essere fatta allo stesso modo anche rispetto a questo asse. Le bande laterali hanno una frequenza  $|\xi| = 1.66\text{linee}/\text{mm}$ , che corrispondono a una distanza  $d = 0.6024\text{mm}$ , in accordo con la misura svolta precedentemente. Da questo valore della distanza è possibile calcolare l'angolo di inclinazione fra le due onde attraverso l'analisi delle frequenze:



*Interferenza di due onde piane.*



*Analisi spettrale della figura di interferenza registrata.*

$$\Delta\theta_{\text{spectrum}} = n\frac{\lambda}{d} = \frac{0.00063}{0.6024} = 0.0010rad. \quad (3.14)$$

Nella prossima sezione verrà presentato un tentativo di ricostruire l'onda piana di uno dei due laser, attraverso una sua ricostruzione della fase. Allo stesso modo, il metodo verrà applicato ad ologrammi più complessi.

### 3.3.1 Risultati preliminari per la ricostruzione della fase

Durante il percorso affrontato in questo elaborato, sono stati incontrati una serie di strumenti che suggeriscono la possibilità di ricostruire punto per punto l'informazione di fase portata dall'onda dell'oggetto. Infatti, come mostrato nel caso dell'interferenza di due

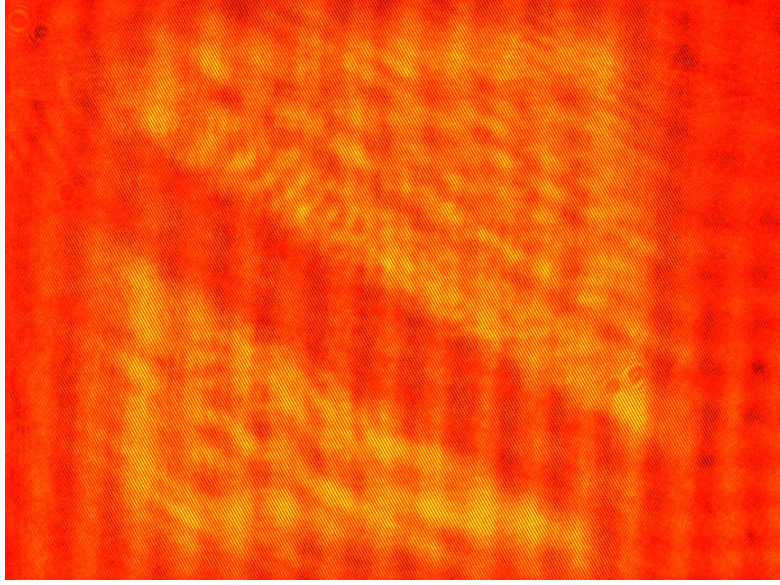


Figura 3.8: Ologramma di un filo di cotone a distanza  $z_0 = 500mm$

onde piane inclinate, l'analisi spettrale nell'olografia fuori asse permette di filtrare il contributo del segnale che descrive l'onda dell'oggetto [13]. Infatti, la modulazione dell'onda dell'oggetto con l'onda di riferimento genera la separazione delle bande laterali da quella centrale dell'ordine zero di diffrazione. Tale separazione dipenderà dall'angolo di inclinazione relativo fra le due onde. Un'analisi dettagliata è riportata nel primo capitolo e affrontata nella prassi sperimentale delle ultime sezioni.

Per chiarire la situazione si riporta ancora una volta l'esempio della figura di interferenza di due onde piane, ripercorrendo il tipo di ragionamenti sviluppati nel primo capitolo, quando è stata affrontata l'olografia a frequenza portante. L'intensità della figura d'interferenza, sarà descritta da un'equazione di questo tipo:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[(k_{x_0}x + k_{y_0}y) + \phi(x, y)], \quad (3.15)$$

con  $k_{x_0, y_0}$  le frequenze spaziali della portante,  $a(x, y)$  il contributo dell'ordine zero e  $\phi(x, y)$  è la fase dell'interferenza che si vuole calcolare. Essa può essere riscritta in maniera completa in forma esponenziale come:

$$I(x, y) = a(x, y) + b_c(x, y) \exp[i(k_{x_0}x + k_{y_0}y)] + b_c^*(x, y) \exp[-i(k_{x_0}x + k_{y_0}y)], \quad (3.16)$$

dove  $b_c(x, y) = \frac{b(x, y)}{2} \exp[i\phi(x, y)]$ . Per individuare la parte dello spettro dalla quale estrapolare  $\phi$  si analizza la funzione nel dominio delle frequenze. La trasformata di Fourier di  $I(x, y)$  sarà:

$$\tilde{I}(k_x, k_y) = \tilde{a}(k_x, k_y) + \tilde{b}_c(k_x - k_{x_0}, k_y - k_{y_0}) + \tilde{b}_c^*(k_x + k_{x_0}, k_y + k_{y_0}). \quad (3.17)$$

Da questa si vedono i contributi della frequenza centrale e delle bande laterali. Selezionando il contributo di una delle due bande si ottiene la funzione cercata attraverso

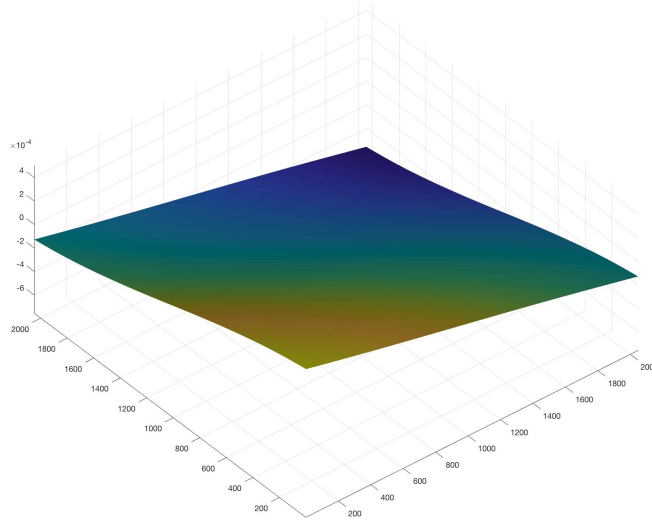


Figura 3.9: Ricostruzione dell'angolo relativo di due onde fuori asse.

l'antitrasformata di Fourier:

$$I'(x, y) = b_c(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp(i\phi(x, y)). \quad (3.18)$$

Questo è il punto del discorso in cui entrano in gioco gli algoritmi di *wrapping* e *unwrapping* appena presentati, a partire dalla misura dell'angolo:

$$\phi(x, y) = \arctan \frac{\Im(b_c(x, y))}{\Re(b_c(x, y))}. \quad (3.19)$$

Applicando l'analisi spettrale sulla figura d'interferenza acquisita in laboratorio, con il metodo descritto, si ottiene l'inclinazione relativa fra le due onde grazie alle informazioni spaziali contenute nella fase ricostruita. Allo stesso modo, l'olografia fuori asse permette attraverso il filtraggio spaziale di selezionare l'onda virtuale dell'oggetto, una volta ricostruito l'ologramma. La fase di ricostruzione infatti porterà a una separazione delle immagini reale e virtuale, e dell'ordine zero. Solo una volta eseguito il filtraggio, sarà possibile estrapolare la fase corretta che descriva il profilo dell'oggetto nello spazio. Questi sono soltanto risultati preliminari che potrebbero essere utilizzati con un adeguato apparato sperimentale per eseguire, ad esempio, misure di microscopia di oggetti molto piccoli attraverso i metodi dell'olografia fuori asse.

A questo punto è possibile applicare questi metodi al caso dell'ologramma del filo di cotone. Preliminarmente è stato misurato il diametro del filo con un micrometro e un microscopio ottico. La misura più precisa è quella con il microscopio, che si ha fotografando l'oggetto con un sensore CCD. Su tre misure svolte contando i pixel si hanno

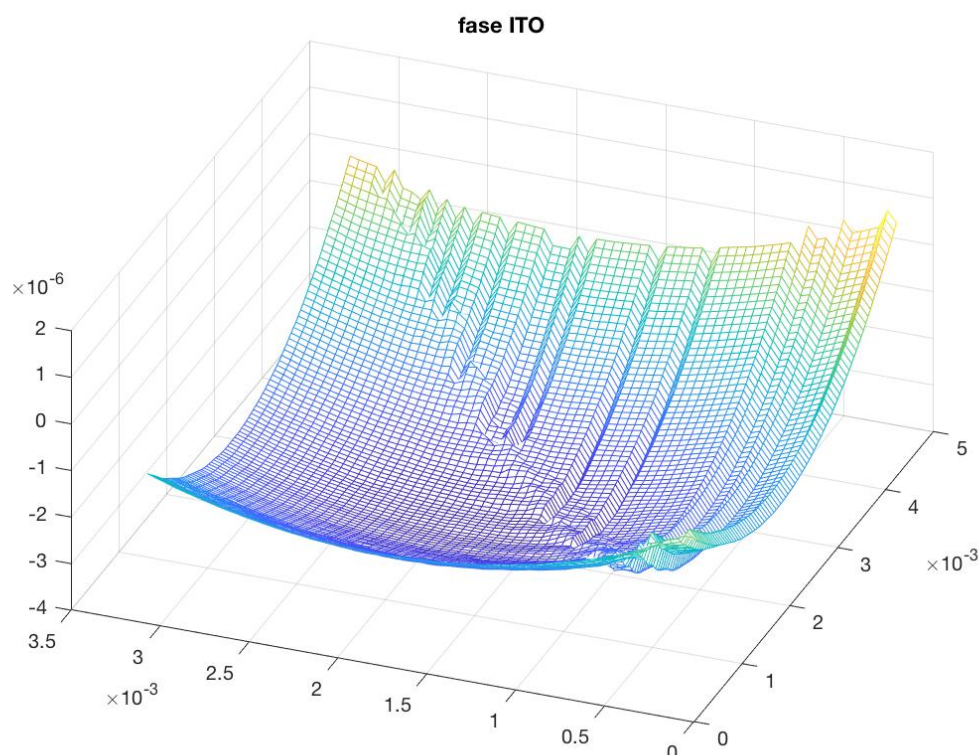


Figura 3.10: L'algoritmo di Itoh entra in crisi quando incontra il filo.

i valori:  $L_{1_{filo}} = (832 - 469)pix = 363pix$ ,  $L_{2_{filo}} = (841 - 480)pix = 361pix$ ,  $L_{3_{filo}} = (859 - 500)pix = 359pix$ . La loro media è  $L_{filo} = 361pix$ . Per ottenere la scala di misura si considera la distanza in pixel di 20 linee di un reticolo del quale è nota la distanza di  $200\mu m$ . Il corrispettivo in pixel è di  $L_{ret} = (1037 - 113)pix = 924pix$ . La misura per il reticolo è stata fatta con un fattore di ingrandimento di 10x, mentre per il filo l'ingrandimento era di 40x. Dunque, attraverso una proporzione si trova la larghezza del filo di cotone in micrometri, pari a  $L_{filo} = \frac{361pix \cdot 40 \cdot (200 \cdot 10^{-6})m}{924pix \cdot 10} = (3,1255 \cdot 10^{-4})m$ . Sarebbe stato interessante confrontare questa misura con una quella ottenuta con l'olografia fuori asse. È anche vero però che l'apparato utilizzato non ha permesso di risolvere accuratamente la profondità dell'oggetto sull'asse  $z$ . D'altra parte verrà suggerito un metodo per affrontare questo tipo di problema.

Selezionando la parte dell'onda dell'oggetto dall'ologramma ricostruito del filo, si procede con la ricostruzione della fase dell'onda diffratta dal filo, la quale porta con sé le informazioni spaziali del filo e quindi il suo profilo. L'algoritmo di Itoh fallisce nel momento in cui arriva ad analizzare proprio il profilo dell'oggetto come si vede dall'immagine. Per questo motivo, dopo una ricerca sugli algoritmi esistenti, è stato scelto l'algoritmo di unwrapping seguendo cammini non continui, prima presentato. Questo ricostruisce

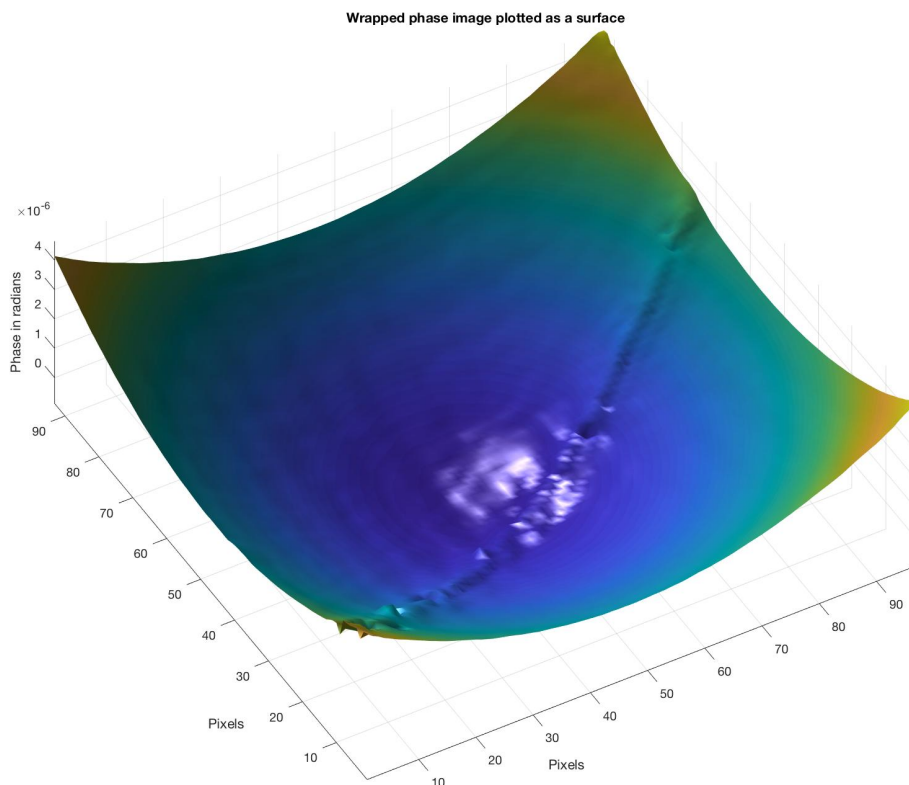


Figura 3.11: L'algoritmo di *unwrapping* seguendo cammini non continui.

perfettamente la fase, come si può vedere nell'immagine, la superficie porta con sé le informazioni dell'oggetto. Dunque, l'olografia fuori asse può essere un metodo da sviluppare molto efficace per misurare il profilo di un oggetto, essendo una tecnica che non richiede un contatto con l'oggetto e per la capacità di *imaging* tridimensionale che porta con sé. Questo tipo di apparato presenta però una sensibilità di una frazione della lunghezza d'onda e questo non permette di rivelare la profondità di oggetti più grandi. Vi sono alcune tecniche che permettono di sopperire a questo problema aumentando la sensibilità rispetto allo spessore e richiedono apparati leggermente diversi: la tecnica di *contouring* con due lunghezze d'onda e quella utilizzando sovrimpressioni dell'ologramma con due diversi angoli di inclinazione fra le due onde.

Per concludere, si presenta la ricostruzione della fase dell'ologramma registrato in laboratorio con due fili posti a distanze diverse dal sensore. Innanzitutto, l'ologramma fuori asse viene ricostruito simulando la sua illuminazione quindi la diffrazione di un'onda piana attraverso l'ologramma. In questo modo, viene individuata l'onda dell'oggetto che

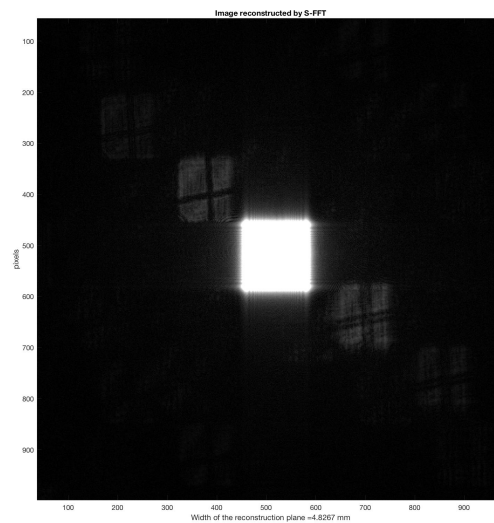


Figura 3.12: Ricostruzione dell'ologramma di due fili con la tecnica fuori asse.

avrà una distanza dalla luce dell'ordine zero che dipenderà dall'angolo fra le due onde in fase di registrazione. Da esso viene selezionata, o meglio filtrata spazialmente attraverso la funzione **imcrop** di Matlab. Solo adesso è possibile estrarre l'informazione della fase che verrà ricostruita attraverso l'algoritmo di *unwrapping*.

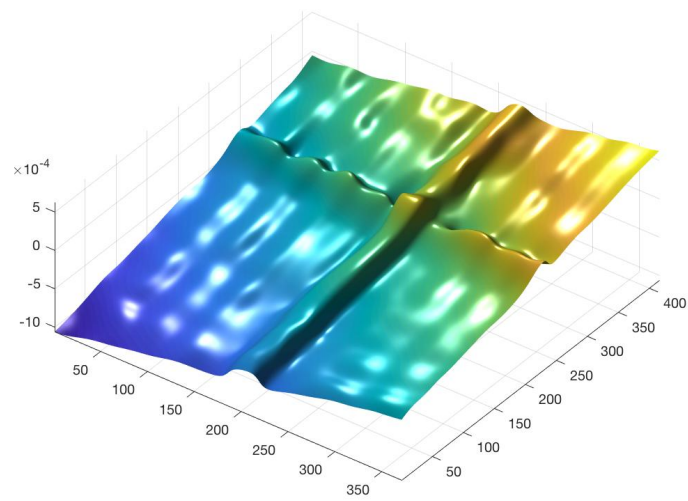


Figura 3.13: Ricostruzione della fase dei due fili



# Conclusioni

L'implementazione digitale dell'olografia rende agevole il processamento delle informazioni registrate nell'ologramma. I metodi sviluppati hanno permesso di estrarre le informazioni spaziali di un oggetto attraverso la misura della fase. Lo studio della teoria scalare della diffrazione è il punto di partenza per la descrizione dei fenomeni che coinvolgono i due passaggi fondamentali dell'olografia: la registrazione e la ricostruzione dell'ologramma.

Una certa importanza è stata data agli sviluppi storici che hanno portato alla tecnica fuori asse e al calcolo digitale degli ologrammi. Storicamente, l'olografia fuori asse è concepita attraverso un'interpretazione nel quadro del processamento ottico dell'informazione e della teoria della comunicazione. Questa è la tecnica fondamentale che ha permesso di filtrare il contributo specifico dell'onda dell'oggetto. Infatti, l'onda di riferimento in fase di registrazione si comporta in questo ambito come una frequenza portante che, attraverso una modulazione, trasporta l'informazione dell'oggetto nelle bande laterali, superando i disturbi incontrati nella prima tecnica sviluppata da Dennis Gabor. Il processo di ricostruzione può essere quindi visto come una demodulazione del segnale. L'angolo relativo fra l'onda dell'oggetto e l'onda di riferimento genera una separazione delle bande laterali per una selezione, attraverso un filtraggio, della frequenza che trasporta l'informazione dell'oggetto. Sono state presentate le condizioni sull'angolo affinché non ci fosse una sovrapposizione fra le bande laterali e quella centrale, a partire dalla sintesi di ologrammi digitali molto semplici, come la figura di interferenza di due onde piane fuori asse.

Questi sono gli strumenti che hanno permesso di affrontare la misura della fase dell'oggetto. Questo passaggio porta con sé alcune problematiche relative all'uso della funzione arcotangente di un segnale complesso. Infatti, questa restituisce solo il valore principale della fase nell'intervallo  $]-\pi, \pi]$  mentre la fase vera spesso eccede questo intervallo. Il problema di ricostruire il valore della fase nella sua interezza è noto come *unwrapping* della fase. Una ricerca degli algoritmi sviluppati negli ultimi anni, ha portato a presentarne alcuni. Quello che ha dato i risultati più interessanti segue cammini non continui sull'immagine, iniziando il processo di ricostruzione della fase su regioni di pixel discrete e separate fra loro.

In laboratorio sono stati acquisiti alcuni ologrammi con un apparato interferometrico della tipologia dell'interferometro di Michelson. Attraverso l'olografia fuori asse, la ricostruzione dell'ologramma, l'analisi spettrale delle frequenze e gli algoritmi di *unwrapping* è stata ricostruita la fase e, quindi, il profilo spaziale tridimensionale degli oggetti.

# Bibliografia

- [1] Dennis Gabor. “A new microscopic principle”. In: *Nature Publishing Group* 161 (1948), pp. 777–778.
- [2] Dennis Gabor. “Holography, 1948-1971 [Nobel Lecture, December 13, 1971]”. In: *Soviet Physics Uspekhi* 16 (1973), pp. 5–30.
- [3] Emmett N Leith e Juris Upatnieks. “Reconstructed wavefronts and communication theory”. In: *JOSA* 52.10 (1962), pp. 1123–1130.
- [4] Adolf W Lohmann. “A pre-history of computer-generated holography”. In: *Optics and Photonics News* 19.2 (2008), pp. 36–47.
- [5] Joseph W Goodman e RW Lawrence. “Digital image formation from electronically detected holograms”. In: *Applied physics letters* 11.3 (1967), pp. 77–79.
- [6] Fabio Ortolani. “Appunti di Metodi matematici”. In: (2014).
- [7] Ting-Chung Poon e Jung-Ping Liu. *Introduction to modern digital holography: with MATLAB*. Cambridge University Press, 2014.
- [8] Marco Cuffiani e Alessandro Fuschi. “Calcolo di ologrammi con Octave e Matlab”. In: *Università di Bologna* (2016/2017).
- [9] JA Quiroga, A Gonzalez-Cano e E Bernabeu. “Phase-unwrapping algorithm based on an adaptive criterion”. In: *Applied optics* 34.14 (1995), pp. 2560–2563.
- [10] Leslie Ying. “Phase unwrapping”. In: *Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering* 24 (2006), pp. 1–11.
- [11] Munther Gdeisat e Francis Lilley. “One-dimensional phase unwrapping problem”. In: *signal* 4 (2011), p. 6.
- [12] Miguel Arevallilo Herráez et al. “Fast two-dimensional phase-unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a noncontinuous path”. In: *Applied optics* 41.35 (2002), pp. 7437–7444.
- [13] S De Nicola e P Ferraro. “A two-dimensional fast Fourier transform method for measuring the inclination angle of parallel fringe patterns”. In: *Optics & Laser Technology* 30.3-4 (1998), pp. 167–173.
- [14] William H Press et al. *Numerical recipes*. 1989.
- [15] Emmett N Leith e Juris Upatnieks. “Wavefront reconstruction with diffused illumination and three-dimensional objects”. In: *Josa* 54.11 (1964), pp. 1295–1301.

- [16] Claude Elwood Shannon. “A mathematical theory of communication”. In: *Bell system technical journal* 27.3 (1948), pp. 379–423.