

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Fasi geometriche: fase di Berry e angolo di Hannay

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Francesco Olivi

Anno Accademico 2017/2018

” Le primavere e i paesaggi hanno un grave difetto: sono gratuiti. L’amore per la natura non fornisce lavoro a nessuna fabbrica.”
(Aldous Huxley)

Sommario

In tale elaborato si presenta il concetto di fase geometrica, definendolo e studiandone le proprietà. Tale fase geometrica è un fattore del tipo $e^{i\gamma}$ che la funzione d'onda di sistemi quantistici accumula dopo una particolare evoluzione del sistema. La caratteristica principale di tali fasi è che dipendono soltanto dalla geometria del problema e non dalla sua dinamica. Verranno presentati esempi come l'effetto di Aharonov-Bohm e il caso di uno spin in un campo magnetico lentamente variabile. Verranno inoltre presentati argomenti precursori della fase di Berry come la fase di Pancharatnam e l'analogo classico per la fase di Berry che è l'angolo di Hannay. Le fasi geometriche emergono quando una certa grandezza viene trasportata parallelamente in un certo spazio. Il trasporto parallelo è un concetto che viene generalizzato e definito nella teoria dei fibrati per cui si spiegherà come tali fasi possano essere inglobate nella teoria matematica dei fibrati.

Indice

Introduzione	3
1 Concetti matematici	5
1.1 Concetti di Geometria differenziale	5
1.1.1 Vettori, covettori, forme differenziali	6
1.2 Gruppi, Algebra di Lie e spazi proiettivi	12
1.3 Teoria dei Fibrati	17
1.3.1 Connessione, Curvatura	21
1.3.2 Connessione e Curvatura locali	23
1.3.3 Sollevamento orizzontale e trasporto parallelo	25
1.3.4 Il monopolio Magnetico	29
1.4 Trasporto parallelo sulla sfera	31
2 Fasi geometriche e fase di Berry	37
2.1 Introduzione	37
2.2 Evoluzione Adiabatica in Meccanica Quantistica	37
2.2.1 La fase in Meccanica Quantistica	39
2.3 Trasporto parallelo in meccanica quantistica: la Fase di Berry	40
2.4 Interpretazione geometrica della fase di Berry	48
2.5 Esempi di fasi di Berry in meccanica quantistica	52
2.5.1 Spinori in campo magnetico	52
2.5.2 Effetto Aharonov-Bohm	54
2.6 Metodi di misura	61
2.7 Fase di Pancharatman	62
2.8 Fase geometrica per evoluzioni generali	65
3 Analogie classiche: angolo di Hannay	71
3.1 Introduzione	71
3.2 Invarianza adiabatica classica	71
3.3 Olonomia della variabile angolo: Angolo di Hannay	75
3.4 Connessione semiclassica tra angolo di Hannay e fase di Berry	78
3.5 Esempio di fase geometrica classica	80
3.5.1 "Spin" classico in un campo magnetico	80
4 Conclusioni	83
Bibliografia	86

Introduzione

In questa tesi cercherò di esporre il concetto di fase geometrica, con particolare riguardo alla fase di Berry e ad argomenti inerenti ad essa. Nell'ambito della meccanica quantistica la fase di Berry consiste in una fase $e^{i\gamma}$ acquisita dalla funzione d'onda, in aggiunta a quella dinamica $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, dopo che i parametri che la caratterizzano vengono fatti variare ciclicamente e adiabaticamente nel loro opportuno spazio. Si trova che tale fase dipende solo da come variano i parametri ed è di natura soltanto geometrica. Tale fase ha la proprietà di essere gauge invariante pertanto non rimovibile con una trasformazione di gauge.

Michael Berry nel suo lavoro del 1984 trovò che questo fattore di fase compare solo per sistemi con spettri non degeneri che dipendono da parametri che variano ciclicamente e adiabaticamente, mentre più tardi si scoprì che la fase di Berry può essere generalizzata anche per percorsi chiusi nello spazio dei parametri in regimi non necessariamente adiabatici (fase di Aharonov-Anand), per evoluzioni non cicliche e non adiabatiche (fase di Samuel e Bhandari) ed anche per spettri degeneri (fase di Wilczek-Zee). Anche l'effetto Aharonov-Bohm venne interpretato, dallo stesso Berry [6], come un esempio di fase di Berry.

Lo studio di tale argomento, nonostante possa sembrare molto semplice e intuitivo, è iniziato nel 1984 grazie all'articolo del fisico Berry, quasi mezzo secolo dopo la nascita della meccanica quantistica. Ciò è dovuto al fatto che in particolari situazioni è possibile avere una fase geometrica pari a 1 e i fisici non si sono mai preoccupati di dover generalizzare tale argomento a percorsi ciclici. In ogni caso la fase di Berry è diventata oggetto di studio in molti diversi contesti come la fisica molecolare e della materia condensata, nella polarizzazione della luce, nello studio di fasci di neutroni e particelle nucleari, nello studio dei momenti angolari e molti altri. Motivo di ciò è che gli esempi di fasi di Berry che si presentano in questi campi hanno tutte lo stesso linguaggio matematico: quello dei fibrati.

L'elaborato verrà organizzato in tal modo.

Nel capitolo 1 mi occuperò di introdurre e definire tutte quelle nozioni matematiche per poter affrontare e spiegare la teoria delle fasi geometriche. Tali nozioni riguarderanno la geometria differenziale, i gruppi, le algebre di Lie, calcolo differenziale e tensoriale, spazi proiettivi e teoria dei fibrati. La teoria dei fibrati assieme al concetto di connessione e curvatura occuperanno la maggior parte del capitolo in quanto costituiscono il contesto in cui viene interpretata matematicamente la fase di Berry. I fibrati di cui ci occuperemo saranno i fibrati principali. La fase di Berry può essere considerata come un effetto topologico di olonomia a cui è soggetta la fase degli autostati in un particolare fibrato principale quando i parametri che descrivono l'Hamiltoniana vengono fatti variare adiabaticamente in un percorso chiuso nel loro opportuno spazio dei parametri che costituisce lo spazio base del fibrato. I concetti di olonomia e trasporto parallelo

saranno gli elementi fondamentali per esporre la teoria generale delle fasi geometriche. Esempi di ologonomia si ritrovano anche in termodinamica, nel trasporto parallelo di vettori in spazi curvi e generalmente tutte le volte in cui si presenta una variazione di una certa grandezza dopo che i parametri hanno seguito un percorso chiuso. Un esempio molto importante di ologonomia lo si ritrova in Relatività generale. Infatti se si trasporta parallelamente un sistema di riferimento lungo un percorso chiuso nello spazio-tempo, il sistema di riferimento finale in generale non coinciderà con quello iniziale a causa della geometria (curvatura) della varietà dello spazio-tempo. Il sistema finale sarà legato al primo per mezzo di una trasformazione di Lorentz che coincide con un'ologonomia del gruppo $SO(3, 1)$. Se si vogliono conoscere le componenti del tensore di Riemann $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ occorre considerare un circuito chiuso C nel piano $\mu\nu$ che racchiude l'area infinitesima $dx^{\mu}dx^{\nu}$. Trasportando parallelamente il sistema di riferimento lungo C si ottiene l'ologonomia $M_{\beta}^{\alpha} \in SO(3, 1)$ data da

$$M_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \cdot dx^{\mu}dx^{\nu} \quad (0.0.1)$$

Alla fine del capitolo si mostrerà come il trasporto parallelo porti a un accumulo di fase anche su superfici curve come la sfera. Si proporrà di tale effetto un esempio: il pendolo di Foucault.

Il capitolo 2 è sicuramente il capitolo centrale della tesi in quanto in esso verrà ricavata la fase di Berry e ne verranno studiate le caratteristiche. Si cercherà anche di spiegare, utilizzando le nozioni del capitolo 1, come la fase di Berry possa essere interpretata geometricamente attraverso la teoria dei fibrati. Come esempi di tale fase si esporrà il caso di uno spin in un campo magnetico lentamente variabile e l'effetto Aharonov-Bohm. Di quest'ultimo si approfondirà il concetto di come tale effetto possa essere interpretato attraverso la teoria dei fibrati. Gli ultimi due paragrafi del capitolo consisteranno nell'esposizione del lavoro precursore di Pancharatnam che incappò in fasi geometriche studiando la variazione di polarizzazione della luce. Tale fase permette di introdurre l'ultimo paragrafo che riguarda il lavoro di Samuel e Bhandari riguardo la generalizzazione della fase di Berry per evoluzioni generali del sistema.

Il capitolo 3 riguarderà il fatto che in meccanica classica è possibile trovare un analogo della fase di Berry: l'angolo di Hannay. Questo consiste in una variazione extra della variabile Angolo, coniugata dell'Azione, quando, in regime adiabatico, i parametri che definiscono il sistema variano nel tempo per poi ritornare ai loro valori iniziali. L'angolo di Hannay è anch'esso una fase geometrica ed ha una precisa relazione con la fase di Berry quantistica che può essere trovata andando a studiare il limite semiclassico. Questa relazione tra fase classica e quantistica viene direttamente ricavata nell'esempio conclusivo del capitolo.

Capitolo 1

Concetti matematici

1.1 Concetti di Geometria differenziale

Le nozioni come varietà differenziale, forme differenziali, tensori sono molto utili e molto usate in fisica perchè permettono di generalizzare le nozioni di curva e superficie di \mathbb{R}^n a spazi più astratti. Ad esempio lo spazio-tempo descritto in Relatività, lo spazio delle fasi, lo spazio dei parametri e lo spazio degli stati quantici sono tutti esempi di varietà differenziali. In questo paragrafo verranno esposte alcune nozioni di geometria differenziale che serviranno poi più avanti. Si farà riferimento principalmente alla trattazione in [12].

Definizione 1.1.1. (Varietà differenziale) Una varietà topologica M n -dimensionale è uno spazio topologico che localmente si comporta come uno spazio euclideo \mathbb{R}^n . Più precisamente M sarà una varietà topologica se esiste un insieme di sottospazi aperti $(U_i, i = 1, \dots, m)$ tali che:

1. $\bigcup_i U_i = M$
2. $\forall i$ esiste una funzione continua e invertibile

$$\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.1.1)$$

La coppia (U_i, ϕ_i) è chiamata carta o sistema di coordinate. L'insieme di carte $\{\phi_i\}$ che ricoprono la varietà è detto atlante. Quindi si può rappresentare ϕ_i come $\phi_i = (x^1_i, x^2_i, \dots, x^n_i)$ dove $(x^1_i, x^2_i, \dots, x^n_i)$ vengono chiamate le coordinate locali dell'aperto U_i . Le carte devono essere compatibili tra loro, cioè le funzioni

$$\phi_{ji} \equiv \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \quad (1.1.2)$$

devono essere continue e invertibili per ogni i e j . Le ϕ_{ij} sono dette funzioni di transizione e se sono differenziabili allora la varietà M sarà detta differenziabile. Una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile se $f \circ \phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile per ogni carta.

Definizione 1.1.2. (Diffeomorfismo) Siano M con una carta ϕ e N con una carta φ due varietà differenziabili. Una funzione $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra M e N se la funzione

$$\phi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1.3)$$

è una funzione differenziabile, invertibile con inversa differenziabile.

1.1.1 Vettori, covettori, forme differenziali

Definizione 1.1.3. (Curva) Una curva in una varietà M è una mappa continua che ai punti di un intervallo di \mathbb{R} associa un punto della varietà M

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M \quad (1.1.4)$$

tale che, data una carta ϕ , si ha

$$\phi \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1.5)$$

ovvero tale che, a $\lambda \in I$ associa $x^i(\lambda)$ con $i = 1, \dots, n$.

Definizione 1.1.4. (Vettori) Data una curva γ su una varietà M e una funzione f definita in un intorno p di M , si definisce un vettore nel punto p come il vettore tangente alla curva γ , cioè il vettore è la funzione che associa a f la sua derivata lungo la curva:

$$V_\gamma : f \rightarrow V_\gamma(f) = \frac{df}{d\lambda}|_p \in \mathbb{R} \quad (1.1.6)$$

Pertanto data una carta (U, x^1, \dots, x^n) e una curva γ parametrizzata da λ è possibile definire in ogni punto p della varietà uno spazio vettoriale, lo spazio tangente $T_p M$, i cui vettori sono definiti da (utilizzando la convenzione di Einstein per la somma sugli indici)

$$V_p(f) = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (1.1.7)$$

per ogni funzione f differenziabile. Dato che la f è arbitraria si usa ometterla ottenendo

$$V_p = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = V_p^i e_i \quad (1.1.8)$$

dove i numeri (V_p^1, \dots, V_p^n) sono le coordinate del vettore V_p e le $\frac{\partial}{\partial x^i}$ formano la cosiddetta base coordinata di $T_p M$. Tale base $\{e_i\} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ definisce in ogni punto p un sistema di riferimento. Se ad ogni punto della varietà, o di un suo sottoinsieme, si associa univocamente un vettore si ottiene un cosiddetto campo vettoriale. I vettori agiscono linearmente sulle funzioni:

$$V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.1.9)$$

Data una curva γ in M è possibile trovare un campo vettoriale tale che in ogni punto della curva il vettore tangente a essa appartenga al campo vettoriale e viceversa dato un campo vettoriale su una varietà è possibile trovare una curva che abbia in ogni suo punto il vettore tangente appartenente al campo vettoriale. Tale curva si chiama curva integrale del campo vettoriale.

Definizione 1.1.5. (1-forme differenziali) Lo spazio duale di $T_p M$ è lo spazio cotangente di $T_p^* M$ ed è dato dai funzionali lineari ω dette 1-forme

$$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1.10)$$

tali che

$$\begin{aligned} \omega(aV_1 + bV_2) &= a\omega(V_1) + b\omega(V_2) \\ (\omega + \sigma)(V_1) &= \omega(V_1) + \sigma(V_1) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Data la base (e_1, \dots, e_n) di $T_p M$ è possibile definire una base $(\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n)$ in $T_p^* M$, detta base duale¹, tale che $\tilde{e}^i(e_j) = \delta_j^i$. Un elemento $\omega \in T_p^* M$ nella base $\{\tilde{e}^i\}$ si scrive come

$$\omega_p = \omega_i \tilde{e}^i \quad (1.1.12)$$

Dato un vettore $v = v^j e_j$ e una 1-forma nella base duale $\omega = \omega_i \tilde{e}^i$ si ha che $\omega(v) = \omega(v^j e_j) = v^j \omega(e_j) = v^j \omega_i \delta_j^i = v^i \omega_i$. La base duale della base coordinata $\{e_i\} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ è $\tilde{e}^i = \{dx^i\}$ e una 1-forma in tale base si scriverà come

$$\omega = (\omega(\mathbf{x}))_i dx^i \quad (1.1.13)$$

Gli elementi di $T_p M$ sono detti vettori e gli elementi di $T_p^* M$ sono detti covettori. Dalle definizioni sopra sembra che vettori e covettori dipendano dalla scelta delle coordinate x^i , in realtà ogni oggetto matematico definibile su una varietà risulta indipendente dalle coordinate scelte perchè in corrispondenza di un cambio di coordinate esso si trasforma per rimanere invariato.

Definizione 1.1.6. (Tensore): un tensore di tipo (k, l) è un prodotto di k covettori e l vettori definito come

$$M \ni p \rightarrow T_p^{(k,l)} : \overbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}^k \otimes \overbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}^l \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1.14)$$

Nella base coordinata e nella base duale si può scrivere il tensore T di rango (k, l)

$$T_p^{(k,l)} = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x_1^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_l^{i_l}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \quad (1.1.15)$$

La natura tensoriale di tali oggetti matematici è determinata dal modo in cui si trasformano per cambio di sistema di coordinate, ad esempio se un insieme di grandezze si trasforma come le componenti di vettore o un covettore sarà un vettore o un covettore rispettivamente.

Definizione 1.1.7. (k -Forma differenziale): una k -forma differenziale è un tensore $\tilde{\omega}$ di tipo $(0, k)$ lineare nelle sue k entrate e antisimmetrico:

$$\tilde{\omega}(v_1, v_2, \dots, \lambda_1 v'_i + \lambda_2 v''_i, \dots, v_k) = \lambda_1 \tilde{\omega}(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_k) + \lambda_2 \tilde{\omega}(v_1, v_2, \dots, v''_i, \dots, v_k) \quad (1.1.16)$$

$$\tilde{\omega}(v_i, v_j, \dots, v_n) = (-1)^p \tilde{\omega}(v_1, v_2, \dots, v_k) \quad (1.1.17)$$

dove

$$p = \begin{cases} 1 & \text{per permutazioni } i, j \dots n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per permutazioni } i, j \dots n \text{ pari} \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Lo spazio delle k -forme su M formano uno spazio vettoriale che si denota con $\Lambda^k(M)$.

Definizione 1.1.8. (Prodotto esterno): il prodotto esterno di una k -forma α e di una l -forma β è una $(k + l)$ -forma $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(M)$ definita da

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathbf{A}(\alpha \otimes \beta) \quad (1.1.19)$$

dove \mathbf{A} è l'operatore che seleziona la parte antisimmetrica del $(0, k + l)$ -tensore $\alpha \otimes \beta$. Il prodotto esterno rispetta le seguenti proprietà:

¹Si possono definire in $T_p^* M$ anche basi non duali.

1. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$

Per ogni k -forma ω vale la seguente rappresentazione:

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} \tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_k} \quad (1.1.20)$$

e a causa dell'antisimmetria delle componenti $\omega_{i_1 \dots i_k}$ solo $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ di queste sono indipendenti quindi lo spazio $\Lambda^k(M)$ è di dimensione C_k^n . Ad esempio una 2-forma è data da

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2!} \tilde{\omega}_{ij} \tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^j = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{ij} (\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j - \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^i) \quad (1.1.21)$$

Nella base duale coordinata la k -forma ω si scriverà come

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (1.1.22)$$

Se $\omega = \omega_i dx^i$ e $\eta = \eta_j dx^j$ sono 1-forme si ha

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{2} (\omega_i \eta_j - \omega_j \eta_i) dx^i \wedge dx^j. \quad (1.1.23)$$

D'ora in avanti si utilizzerà sempre la base duale.

Definizione 1.1.9. (Derivata esterna): la derivata esterna $d_M \omega$ di una k -forma ω definita su una varietà M è una $(k+1)$ forma definita come:

$$d_M \omega = \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (1.1.24)$$

per ogni k -forma rappresentata da (1.1.22).

La derivata esterna soddisfa le seguenti proprietà :

1. $d^2 \omega = d(d\omega) = 0$
2. $d(\omega \wedge \beta) = d\omega \wedge \beta + (-1)^{kl} \omega \wedge d\beta$

Ad esempio una funzione f definita su M è una 0-forma pertanto si avrà

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.1.25)$$

Esempio 1. In \mathbb{R}^3 , utilizzando le coordinate cartesiane (x^1, x^2, x^3) e la definizione precedente, è possibile esprimere una 1-forma A e una 2-forma F nel seguente modo:

$$A = A_i dx^i \quad F = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (1.1.26)$$

Dato che $F_{ij} = -F_{ji}$ e $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ si ha

$$F = F_1 dx^2 \wedge dx^3 + F_2 dx^3 \wedge dx^1 + F_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad (1.1.27)$$

Dalla (1.1.27) si trova che

$$d_M A = \psi_1 dx^2 \wedge dx^3 + \psi_2 dx^3 \wedge dx^1 + \psi_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad (1.1.28)$$

con

$$\psi_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \quad \psi_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \quad \psi_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \quad (1.1.29)$$

cioè le componenti cartesiane di $d_M A$ sono le componenti del rotore di $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. La derivata esterna di F diventa invece:

$$d_M F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (1.1.30)$$

la cui componente è la divergenza del vettore $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Esempio 2. In \mathbb{R}^4 un utile esempio si ritrova in elettromagnetismo. Infatti le componenti del potenziale vettore $A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$ si trasformano come le componenti di una 1-forma

$$A = A_\mu dx^\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.1.31)$$

Da cui

$$dA = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.1.32)$$

Sapendo che le componenti del tensore elettromagnetico F sono

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.1.33)$$

si trova che :

$$F = dA \quad (1.1.34)$$

Utilizzando la proprietà $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ si trova che

$$dF = d^2 A = 0 \quad (1.1.35)$$

che è detta equazione di Maxwell omogenea e ad assieme all'equazione di Maxwell disomogenea descrive ogni fenomeno elettromagnetico.

Altra importante proprietà è che per un cambio di sistema di coordinate $x \rightarrow x'$ si ha quella che viene detta una trasformazione di gauge:

$$A \rightarrow A' = A + d\lambda(x) \quad F \rightarrow F' = F \quad (1.1.36)$$

per cui F è detto invariante di gauge.

Definizione 1.1.10. Una mappa $f : M \rightarrow N$ induce una mappa anche tra gli spazi tangenti $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ tale che

$$[T_x f(v_x)](g) := v_x(f \circ g) \quad \text{con } g \in C^\infty, v_x \in T_x M \quad (1.1.37)$$

La mappa $f : M \rightarrow N$ permette di trasportare anche tensori tra M e N .

Definizione 1.1.11. (Mappa di pull-back) Sia ω un tensore $(0, k)$ in N , allora $f^*\omega$ è un tensore $(0, k)$ in M definito da

$$(f^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(x)}(T_x f(v_1), \dots, T_x f(v_k)) \quad (1.1.38)$$

per ogni $x \in M$ e $v_1, \dots, v_k \in T_x M$.

La funzione f induce quindi una mappa

$$f^* : \Lambda(N) \rightarrow \Lambda(M) \quad (1.1.39)$$

detta di pull-back.

Il pull-back f^* commuta con il prodotto esterno e la derivata esterna:

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \wedge \beta) &= f^*\alpha \wedge f^*\beta \\ f^*(d\alpha) &= d(f^*\alpha) \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

con α e β k -forme su N .

Definizione 1.1.12. (Mappa di push-forward) Sia U un tensore $(l, 0)$ in M , allora f_*U è un tensore $(l, 0)$ in N definito da

$$(f_*U)_{f(x)}(\alpha_1, \dots, \alpha_l) := U_x(f^*\alpha_1, \dots, f^*\alpha_l) \quad (1.1.41)$$

per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in T_{f(x)}^*N$.

Proposizione 1.1.13. Se $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo si ha

$$f_* = (f^{-1})^* \quad (1.1.42)$$

Integrazione di forme differenziali

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si può definire l'integrale n -dimensionale come

$$\int f dV = \int \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \quad (1.1.43)$$

con (x^1, \dots, x^n) coordinate di \mathbb{R}^n . Per un cambio di coordinate $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n)$ l'integrale di f non cambia:

$$\int f dV = \int f(y^1, \dots, y^n) d\tilde{V} = \int f J dV \quad (1.1.44)$$

con J determinante della jacobiana $(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$. Dal volume $dV = dx^1 \dots dx^n$ possiamo costruire una n -forma volume $dV = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ e si vede subito che

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = J dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (1.1.45)$$

Definizione 1.1.14. Una varietà n -dimensionale M è orientabile se e sole se esiste una n -forma di grado massimo τ , detta di volume, definita su M e diversa da zero in ogni suo punto.

Sia $(U, \phi = x^i)$ una carta di M , un insieme di n vettori linearmente indipendenti $(v_1, \dots, v_n) = (\Delta x^1 e_1, \dots, \Delta x^n e_n) \in T_x M$ con Δx^i piccoli e una n -forma differenziale $\omega = f \tilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n$, con $f \in \mathbb{R}$. Il volume infinitesimo del parallelepipedo formato da tali vettori sarà dato da

$$dV \equiv \omega(v_1, \dots, v_n) = f \Delta x^1 \tilde{e}_1(e_1) \Delta x^2 \tilde{e}_2(e_2) \dots \Delta x^n \tilde{e}_n(e_n) + \text{permutazioni} = f \Delta x^1 \dots \Delta x^n \quad (1.1.46)$$

avendo preso la base duale. Il volume finito di una regione $U \subset M$ coperto da una carta ϕ sarà dato pertanto dalla somma dei volumi infinitesimi

$$V(U) = \sum f \Delta x^1 \dots \Delta x^n \xrightarrow{\Delta x^i \rightarrow 0} V(U) = \int_U \omega = \int_{\phi(U)} f(x^i) dx^1 \dots dx^n \quad (1.1.47)$$

e per cambio di coordinate $x^i \rightarrow y^i(x^i) = \phi'$ in U si ottiene:

$$\int_U \omega = \int_{\phi'(U)} f(y) J(y) dy^1 \dots dy^n \quad (1.1.48)$$

con $J(y)$ determinante della matrica jacobiana $(\frac{\partial x}{\partial y})$.

Sia ora K una sottovarietà² k -dimensionale di M orientabile. Sia $j : K \rightarrow M$. Se α è una k -forma su M allora $j^* \alpha$ è una k -forma su K e si può definire un integrale su K come

$$(K, \alpha) \rightarrow \int_K j^* \alpha \quad (1.1.50)$$

Siano (y^1, \dots, y^k) coordinate locali in K . Si può scrivere allora

$$\begin{cases} x^1 = x^1(y^1, \dots, y^k) \\ x^2 = x^2(y^1, \dots, y^k) \\ \dots \\ x^n = x^n(y^1, \dots, y^k) \end{cases} \quad (1.1.51)$$

Dato che possiamo scrivere $\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ allora si ha

$$\int_K j^* \alpha = \frac{1}{k!} \int \dots \int \alpha_{i_1 \dots i_k} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^1} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^k} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k. \quad (1.1.52)$$

che è una generalizzazione degli integrali di linea e superficie in \mathbb{R}^3 .

Teorema 1.1.15. (di Stokes): Data una varietà M n -dimensionale con bordo e una forma differenziale $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ si ha:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (1.1.53)$$

dove ∂M indica il bordo di M .

²Un $K \subset M$ è una sottovarietà se e solo se per ogni $x \in K$ esiste una carta (U, φ) in M tale che

$$\varphi|_{U \cap K} : U \cap K \rightarrow (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) \quad (1.1.49)$$

1.2 Gruppi, Algebra di Lie e spazi proiettivi

Definizione 1.2.1. (Gruppo) Un gruppo G è un insieme di elementi $\{g\}$ in cui si definisce un'operazione binaria $\bullet : G \times G \rightarrow G$ tale che $g_1 \bullet g_2 \rightarrow g_3$ e che rispetti le seguenti proprietà:

1. Associatività : $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
2. Esiste un elemento neutro e tale che $g \bullet e = g$
3. Esiste un elemento inverso g^{-1} tale che $g^{-1} \bullet g = e$

Un esempio di gruppo è il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti reali $GL(n, \mathbb{R})$ con l'operazione di moltiplicazione fra matrici.

Definizione 1.2.2. (Gruppo di Lie) Un gruppo di Lie G è un gruppo munito di struttura di varietà differenziale e tale che le operazioni

$$G \times G \rightarrow G \quad (a, b) \rightarrow a \bullet b \quad (1.2.1)$$

$$G \rightarrow G \quad g \rightarrow g^{-1} \quad (1.2.2)$$

sono entrambe differenziabili.

Un gruppo di Lie (finito dimensionale) può anche essere definito come un gruppo i cui elementi sono determinati da un certo numero finito di parametri θ_i tali che ogni elemento g del gruppo può essere scritto:

$$g(\theta_i) = e^{\sum_{i=1}^n \theta_i T^i} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2.3)$$

dove i T^i sono detti i generatori del gruppo di Lie G .

Esempio 3. Sia M una varietà differenziabile. Allora gli insieme dei diffeomorfismi

$$\phi : M \rightarrow M \quad (1.2.4)$$

definisce un gruppo di Lie infinito dimensionale con l'operazione di composizione di funzioni denotato da $\text{Diff}(M)$.

Definizione 1.2.3. (Algebra di Lie) Un'algebra di Lie L è uno spazio vettoriale con un'operazione bilineare chiamata commutatore

$$[,] : L \times L \rightarrow L \quad (1.2.5)$$

tale che

1. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z] \quad [x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$
2. $[x, y] = -[y, x]$
3. $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$

per ogni $x, y, z \in L$.

Data una base (e_1, \dots, e_n) di L la relazione di commutazione

$$[e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k \quad (1.2.6)$$

definisce univocamente l'algebra di Lie e le costanti f_{ij}^k vengono chiamate costanti di struttura di L .

Definizione 1.2.4. (Algebra di Lie del gruppo G) A ogni gruppo di Lie (G, \bullet) si può associare un'algebra di Lie. Per ogni $g \in G$ si possono definire le seguenti applicazioni:

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G & \text{tale che } L_g(h) &= g \bullet h \\ R_g : G &\rightarrow G & \text{tale che } R_g(h) &= h \bullet g \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

chiamate traslazione sinistra (L_g) e traslazione destra (R_g) ³.

In G , in quanto varietà differenziabile, posso definire un campo vettoriale $X(G)$. Questo verrà detto *invariante a sinistra* se, dato $x \in X(G)$, si ha:

$$(L_g)_*x = x \quad \forall g \in G \iff [(L_g)_*x](h) = x(g \bullet h) \quad \forall g, h \in G \quad (1.2.8)$$

Analogamente si definiscono gli *invarianti a destra*. L'insieme dei campi vettoriale su G invarianti a sinistra forma uno spazio vettoriale denotato con $X_L(G)$. Dati $x, y \in X_L(G)$ si trova che lo spazio $X_L(G)$ è chiuso rispetto all'operazione commutazione

$$(L_g)_*[x, y] = [(L_g)_*x, (L_g)_*y] = [x, y] \quad \text{quindi} \quad [x, y] \in X_L(G). \quad (1.2.9)$$

La coppia $(X_L(G), [,])$ definisce un'algebra di Lie, l'algebra di Lie di G denotata con \mathfrak{g} . Ogni campo vettoriale su G invariante a sinistra è determinato univocamente dal valore che assume sull'elemento neutro e di G . Infatti ponendo $h = e$ nella (1.2.8) si ottiene

$$[(L_g)_*x](e) = x(g) \quad \forall g \in G \quad (1.2.10)$$

cioè ogni vettore $x(g)$ si ottiene spostando a sinistra il vettore $x(e)$ tramite L_g . Pertanto a ogni vettore $x \in X(G)$ invariante a sinistra si associa un unico vettore $x(e) \in T_e(G)$. A causa di tale corrispondenza si ottiene l'isomorfismo $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$.

Su $X(G)$ si può definire lo spazio delle forme differenziali $\Lambda(G)$. Si definiscono pertanto anche le forme differenziali invarianti a sinistra:

$$L_g^*\alpha = \alpha \quad \forall g \in G. \quad (1.2.11)$$

con $\alpha \in \Lambda(G)$. Come per i campi vettoriali anche per le forme differenziali si forma la corrispondenza $\Lambda_L(G) \ni \alpha \longleftrightarrow \alpha(e) \in T_e^*(G)$.

L'algebra di Lie del gruppo G è determinata univocamente dai commutatori dei generatori del gruppo T^i definiti precedentemente:

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k \quad (1.2.12)$$

Definizione 1.2.5. (Azione del gruppo su varietà) Sia G un gruppo di Lie e M una varietà. Si definisce *azione sinistra*⁴ di G su M la funzione $\Phi : G \times M \rightarrow M$ tale che:

³D'ora in avanti ogni moltiplicazione $g \bullet h$ tra due elementi di G verrà indicata con gh .

⁴Analogamente si potrebbe definire un'azione destra.

1. $\Phi_e(x) = x, \quad \forall x \in M$
2. $\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}, \quad \forall g_1, g_2 \in G$

dove e è l'elemento neutro di G . Solitamente si usa la notazione $\Phi(g, x) := \Phi_g(x) := g \cdot x$. Un'azione è detta

1. transitiva se $\forall x, y \in M$ esiste un $g \in G$ t.c. $y = \Phi_g(x)$
2. efficace se $\Phi_g = id_M$ implica che $g = e$.
3. libera se $\Phi_g(x) = x$ implica che $g = e$.

Definizione 1.2.6. (Orbite) Data un'azione Φ su M si definisce un'orbita passante per $x \in M$:

$$O_x = \{\Phi_g(x) | g \in G\} \subset M \quad (1.2.13)$$

Definizione 1.2.7. (Sottogruppo di isotropia) Data l'azione Φ si definisce sottogruppo di isotropia di Φ in x come

$$G_x = \{g \in G | \Phi_g(x) = x\} \subset G \quad (1.2.14)$$

Definizione 1.2.8. (Sottogruppo di G a un parametro) Ogni $\eta \in \mathfrak{g}$ definisce un sottogruppo a un parametro di G .

Sia $X_\eta \in X_L(G)$ un campo vettoriale invariante a sinistra corrispondente a η , cioè tale che $X_\eta(e) = \eta$. Il sottogruppo a un parametro di G è una mappa $g_\eta : \mathbb{R} \rightarrow G$ tale che

$$\begin{cases} \dot{g}_\eta(t) = X_\eta & (g_\eta(t) \text{ è la curva integrale del campo vettoriale } X_\eta) \\ g_\eta(0) = e \end{cases} \quad (1.2.15)$$

con $t \in \mathbb{R}$. Questa mappa soddisfa le seguenti proprietà:

1. $g_\eta(s)g_\eta(t) = g_\eta(s+t)$
2. $g_\eta(ts) = g_{t\eta}(s)$

Teorema 1.2.9. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei sottogruppi a un parametro e gli elementi dello spazio tangente $T_e(G) \cong \mathfrak{g}$. La dimostrazione si può trovare in [12].*

A ogni $\eta \in \mathfrak{g}$ corrisponde un unico sottogruppo a un parametro $g_\eta(t)$ con $\dot{g}_\eta(0) \equiv \eta$ per l'isomorfismo tra \mathfrak{g} e $T_e(G)$.

Definizione 1.2.10. (Mappa esponenziale)

La mappa $\mathfrak{g} \ni \eta \rightarrow g_\eta(1) := \exp(\eta)$ è detta *mappa esponenziale*.

Sia ora la mappa

$$h : t \rightarrow g_\eta(st) \quad (1.2.16)$$

h è un sottogruppo perchè lo è g_η e si ha che $\dot{h}(0) = s\dot{g}_\eta(0) = s\eta$. D'altra parte $\dot{g}_{s\eta}(0) = s\eta$ pertanto si ha $h = g_{s\eta}$ che equivale a

$$g_\eta(st) = g_{s\eta}(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad (1.2.17)$$

Per $t = 1$ e $s \rightarrow t$ si ha

$$g_\eta(t) = e^{\eta t} \Big|_e \quad (1.2.18)$$

Pertanto la curva integrale in G individuata da η è proprio la curva $g_\eta(t) = e^{\eta t}$ che infatti soddisfa le condizioni di sottogruppo:

$$\begin{cases} g_\eta(t)g_\eta(s) = e^{\eta t}e^{\eta s} = e^{\eta(t+s)} = g_\eta(t+s) \\ g_\eta(0) = e \end{cases} \quad (1.2.19)$$

Teorema 1.2.11. *Sia $g_\eta : \mathbb{R} \rightarrow G$. Allora la funzione $g_\eta(t) = e^{\eta t}$ è un sottogruppo a un parametro per ogni $\eta \in T_e G$. In particolare si ha che*

(i) $g_\eta(t)^{-1} = g_\eta(-t)$

(ii) ogni sottogruppo a un parametro è della forma $g_\eta(t) = e^{\eta t}$.

Definizione 1.2.12. Sia data un'azione sinistra $\Phi : G \times M \rightarrow M$. Per ogni $\eta \in \mathfrak{g}$ si definisce

$$\mathbf{X}_\eta(x) := \frac{d}{dt}(\Phi(g_\eta(t), x)) \Big|_{t=0} \quad (1.2.20)$$

$\mathbf{X}_\eta(x)$ è un campo vettoriale su M chiamato il generatore infinitesimo dell'azione Φ corrispondente a η .

Proposizione 1.2.13. Sia Φ un'azione sinistra di G su M . Allora la mappa

$$\mathfrak{g} \ni \eta \rightarrow \mathbf{X}_\eta \quad (1.2.21)$$

definisce un'algebra di Lie con

$$[\mathbf{X}_\eta, \mathbf{X}_\xi] = -\mathbf{X}_{[\eta, \xi]}. \quad (1.2.22)$$

Definizione 1.2.14. (Rappresentazione di un gruppo di Lie) Una rappresentazione di un gruppo di Lie G su uno spazio vettoriale V è una funzione che a ogni elemento g di G associa un operatore lineare e invertibile $T_g : V \rightarrow V$.

Proposizione 1.2.15. Ogni gruppo di Lie ha una rappresentazione come trasformazioni lineari nell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Dimostrazione: L'azione destra e sinistra possono definire l'automorfismo:

$$I_g := L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G \quad (1.2.23)$$

tale che

$$(L_g \circ R_{g^{-1}})(h) = ghg^{-1} \quad (1.2.24)$$

Tale mappa trasforma una curva passante per e in una nuova curva passante anch'essa per e . Pertanto si può definire il seguente operatore tra gli spazi tangenti:

$$T_e I_g : T_e G \rightarrow T_e G \quad (1.2.25)$$

da cui si definisce la mappa

$$G \ni g \rightarrow T_e I_g := Ad_g \quad (1.2.26)$$

chiamata rappresentazione aggiunta di G .

Definizione 1.2.16. (Forme differenziali a valori in spazi vettoriali) Sia $\Lambda(M)$ lo spazio delle forme differenziali su M e V uno spazio vettoriale. Lo spazio $\Lambda(M) \otimes V$ è lo spazio delle forme differenziali a valori vettoriali in V definite sulla varietà M . Se $\alpha \in \Lambda(M) \otimes V$ allora

$$\alpha_x(v_1, \dots, v_k) \in V \quad (1.2.27)$$

per ogni $v_1, \dots, v_k \in T_x M$.

Sia (b_1, \dots, b_n) una base in V . Ogni $\alpha \in \Lambda(M) \otimes V$ si potrà scrivere come

$$\alpha = \alpha^i \otimes b_i \quad (1.2.28)$$

con $\alpha^i \in \Lambda(M)$. Il commutatore in $\Lambda(M) \otimes V$ diventa:

$$[,] : (\Lambda^k(M) \otimes V) \times (\Lambda^l(M) \otimes V) \rightarrow \Lambda^{k+l}(M) \otimes V \quad (1.2.29)$$

tale che

$$[\alpha, \beta] := \sum_{i,j=1}^n (\alpha^i \wedge \beta^j) \otimes [b_i, b_j] = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^k (\alpha^i \wedge \beta^j) \otimes b_k \quad (1.2.30)$$

A noi ci interesseranno forme differenziali a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Definizione 1.2.17. (Sfera in \mathbb{C}^{n+1}) La sfera unitaria in \mathbb{C}^{n+1} è definita come

$$S^{2n+1} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\} \quad (1.2.31)$$

Definizione 1.2.18. (Relazione di equivalenza) Dato un insieme D si definisce relazione di equivalenza tra due elementi x e y di D una relazione che soddisfa le seguenti proprietà

1. $x \sim x \quad \forall x \in D$
2. $x \sim y$ allora $y \sim x \quad \forall x, y \in D$
3. $x \sim y$ e $y \sim z$ allora $x \sim z \quad \forall x, y, z \in D$

Il sottoinsieme di D che contiene tutti gli elementi equivalenti si indica con la classe di equivalenza $[x]$ e l'insieme delle classi di equivalenza si chiama insieme quoziente di D e si indica con D/\sim .

Definizione 1.2.19. (Spazi omogenei) Una varietà M su cui un gruppo di Lie G agisce transitivamente è chiamata spazio omogeneo di G .

Se M è uno spazio omogeneo di G allora tutti i sottogruppi di isotropia sono isomorfi e si denota con H il sottogruppo di isotropia generale. Posso introdurre la seguente relazione di equivalenza in G :

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H : g_2 = hg_1 \quad (1.2.32)$$

Allora si ha che $M \cong G/H$.

Ad esempio esiste un'azione transitiva di $U(n+1)$ sulla sfera S^{2n+1} in \mathbb{C}^{n+1} con sottogruppo di isotropia $H \cong U(n)$. Per cui si ha

$$S^{2n+1} \cong \frac{U(n+1)}{U(n)} \quad (1.2.33)$$

Ciò permette di identificare S^{2n+1} con lo spazio quoziente $\frac{U(n+1)}{U(n)}$.

Definizione 1.2.20. (Spazi proiettivi) Lo spazio proiettivo n -dimensionale $\mathbb{K}P^n$ su un campo K (\mathbb{R} o \mathbb{C}) è l'insieme delle rette dello spazio K^{n+1} passanti per l'origine. In altre parole lo spazio proiettivo si identifica con l'insieme delle classi di equivalenza in K^{n+1} definite dalla seguente relazione di equivalenza: se $x, y \in K^{n+1}$ allora

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : y = \lambda x, \quad \lambda \neq 0 \quad (1.2.34)$$

Lo spazio proiettivo si indica anche con $\mathbb{K}P^n := K^{n+1} / \sim$.
Se z_1 e $z_2 \in S^{2n+1}$ allora

$$z_1 \sim z_2 \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad z_2 = e^{i\alpha} z_1, \quad \alpha \neq 0 \quad (1.2.35)$$

Pertanto le rette in S^{2n+1} formano le classi di equivalenza che a loro volta formano lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$ che coincide con lo spazio delle orbite dell'azione di $U(1)$:

$$\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1} / U(1) \quad (1.2.36)$$

1.3 Teoria dei Fibrati

La teoria delle fasi geometriche è stata elegantemente collegata a molti e differenti ambiti della fisica poichè alla base di essa vi è una teoria matematica generale: la teoria dei fibrati. I fibrati sono delle strutture matematiche utilizzate per descrivere varietà che, in breve, localmente somigliano al prodotto cartesiano di due spazi avendo globalmente una struttura più complessa.

Un fibrato è caratterizzato principalmente da 5 elementi fondamentali:

- **E** -spazio totale, varietà
- **M** -spazio base, varietà
- **F** -fibra standard, varietà di dimensione N . In ogni punto $x \in M$ è presente una copia di F chiamata fibra F_x , nel senso che ogni fibra è omeomorfa⁵ alla fibra standard.
- un **Gruppo di Lie G detto di struttura** tale che esiste una mappa

$$\Phi : G \times F \rightarrow F \quad (1.3.1)$$

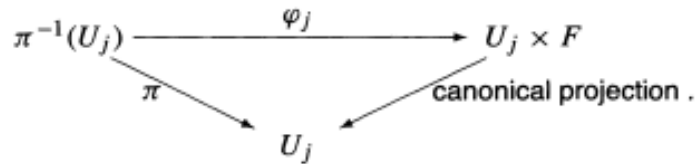
tale che se $\Phi_g(f) = f$ allora $g=e$, con e elemento neutro del gruppo G ,

- una **proiezione**

$$\pi : E \rightarrow M \quad (1.3.2)$$

Ogni spazio $F_x = \pi^{-1}(x) \subset E$ con $x \in M$ è una fibra. La proiezione π è una funzione continua, permettendo di associare a una curva continua in E una curva continua in M , e suriettiva, permettendo di attaccare ad ogni punto di M una fibra.

⁵L'omeomorfismo è una relazione di equivalenza tra spazi topologici, nel senso che due spazi omeomorfi godono delle stesse proprietà topologiche. In particolare implica l'esistenza di una funzione continua e invertibile con inversa continua tra i due spazi topologici tale che a ogni aperto di uno spazio associa univocamente un aperto dell'altro spazio.



Per ogni insieme di aperti $\{U_j\}$ che ricopre M esiste un insieme di funzioni

$$\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F \quad (1.3.3)$$

tale che $\varphi_j(p) = (\pi(p), \phi_j(p))$ dove

$$\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow F. \quad (1.3.4)$$

tale che il seguente diagramma commuta

In altre parole ogni porzione di E che corrisponde attraverso la proiezione π a $U_j \subset M$ si può identificare grazie a un diffeomorfismo con $U_j \times F$ e questa è la caratteristica principale che contraddistingue i fibrati. In altre parole ogni coppia (x, g) con $x \in M$ e $g \in G$ identifica un punto p di E , pertanto (x, g) sono dette coordinate del fibrato. L'insieme $\{(U_j, \varphi_j)\}$ si chiama trivializzazione locale. Ci interessa sapere cosa succede nell'intersezione degli aperti $U_i \cap U_j$ per poter incollare tra loro i vari $U_i \times F$ e ricoprire così tutto lo spazio E .

Per ogni $x \in U_j \cap U_k$ i diffeomorfismi

$$G_{ij} := \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F \quad (1.3.5)$$

sono dette funzioni di transizione. Dato che tali funzioni di transizione mandano (x, f) in (x, f') possiamo ridefinirle come

$$G_{ij}(x) : F \rightarrow F \quad (1.3.6)$$

Pertanto se si vuole passare da un punto f della fibra appartenente alla trivializzazione locale $\{(U_i, \varphi_i)\}$ al punto f' della fibra appartenente alla trivializzazione locale $\{(U_j, \varphi_j)\}$ bisogna usare le funzioni di transizione:

$$f'(x) = G_{ij}(x)f(x) \quad \text{con } x \in U_i \cap U_j \quad (1.3.7)$$

Proposizione 1.3.1. : *Le funzioni di transizione hanno le seguenti proprietà:*

1. $G_{jj}(x) = e$ con $x \in U_j$ (elemento neutro)
2. $G_{kj}(x) = G_{jk}^{-1}(x)$ con $x \in U_j \cap U_k$ (elemento inverso)
3. $G_{ik}(x)G_{kj}(x) = G_{ij}(x)$ con $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ (chiusura)

Tali proprietà garantiscono che le funzioni di transizione formano un gruppo di Lie con l'operazione di composizione di funzioni: il gruppo di struttura G del fibrato E . Pertanto le funzioni di transizione sono definite come

$$G_{ij} : (U_i \cap U_j) \rightarrow G \quad (1.3.8)$$

Ogni varietà di dimensione m localmente può essere identificata con \mathbb{R}^m pertanto le varietà m -dimensionali localmente sono identiche. Ciò che le contraddistingue sono le

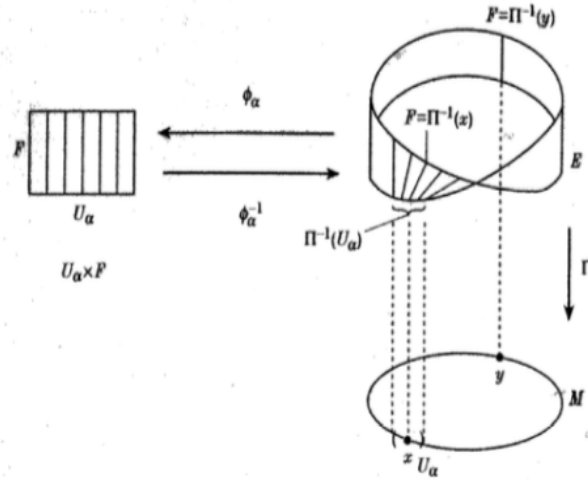


Figura 1.1: Rappresentazione di un fibrato utilizzando come esempio il nastro di Moebius: lo spazio base consiste nel cerchio S^1 e la fibra consiste nell'intervallo $(-1, 1)$. Immagine presa da [23].

proprietà globali. Queste sono completamente determinate dalle funzioni di transizione che specificano come gli aperti $U_j \times F$ si uniscono per ricoprire l'intera varietà. Ad esempio localmente un nastro di Moebius e un cilindro sono entrambi equivalenti al prodotto $S^1 \times (-1, 1)$ però globalmente differiscono in quanto per ricoprire il cilindro basta una sola funzione di transizione mentre per ricoprire il nastro di Moebius ne servono due (Fig. 1.1)

Definizione 1.3.2. (fibrato triviale) Un fibrato si dice triviale se $E \cong M \times F$, cioè se esiste un diffeomorfismo $h : M \times F \rightarrow E$ tale che $\pi(h(x, f)) = x \quad \forall x \in M, \forall f \in F$. Per tali fibrati occorre una sola funzione di transizione in quanto non occorrono più aperti $U_i \times F$ per ricoprire E .

A seconda del tipo di fibra F e di gruppo G , si avranno diversi tipi di fibrati. Noi ci occuperemo soltanto dei cosiddetti fibrati principali, cioè di quei fibrati in cui la fibra F è diffeomorfa al gruppo di struttura G e in cui G agisce su F per mezzo di traslazioni sinistre L_g . I fibrati principali sono molto importanti perchè ogni fibrato può essere costruito da alcuni fibrati principali. Essi ricoprono un'importanza immensa in fisica a causa della loro applicabilità. Ad esempio vengono usati nella teoria della relatività generale con gruppo di Lie $G = SO(3, 1)$ e nelle teorie di gauge di Yang-Mills con gruppi di Lie $G = SU(2)$ (interazione elettro-debole) e $G = SU(3)$ (interazione forte).

Esempio 4. (fibrato tangente) Sia M una varietà e $T_x M$ lo spazio tangente in $x \in M$. E' possibile ottenere un fibrato utilizzando come base M , come spazio totale $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ e come fibra $F = \mathbb{R}^n$. Il gruppo di struttura sarà $G = GL(n, \mathbb{R})$ che agirà sulla fibra con una moltiplicazione di matrici.[12]

Esempio 5. (fibrato coordinato) Sia M una varietà n -dimensionale e sia $F_x M$ l'insieme dei sistemi di riferimento (e_1, \dots, e_n) in $T_x M$. Ogni sistema di riferimento (v_1, \dots, v_n)

in $T_x M$ sarà definito a meno di una rotazione di (e_1, \dots, e_n) :

$$v^i = \sum_{k=1}^n A_i^k e_k \quad A \in GL(n, \mathbb{R}) \quad (1.3.9)$$

Pertanto è possibile ottenere un fibrato principale con base M e in cui la fibra si identifica con il gruppo

$$F \cong GL(n, \mathbb{R}) = G \quad (1.3.10)$$

Lo spazio totale sarà dato da $FM = \bigcup_{x \in M} F_x M$. [12]

Proposizione 1.3.3. *Per ogni fibrato Principale (E, M, π, G) esiste una funzione continua $R : G \times E \rightarrow E$, detta azione destra di G su E , tale che :*

$$R(g, p_1) := R_g(p_1) \quad \forall g \in G, \forall p_1 \in E \quad (1.3.11)$$

definita da

$$p_1 \rightarrow p_2 = R_g(p_1) := \Phi_j^{-1}(x)[\Phi_j[p_1] \cdot g] \quad (1.3.12)$$

dove $x = \pi(p_1)$. R ha le seguenti proprietà:

1. $R_e(p) = p, \forall p \in M, e = \text{elemento neutro del gruppo } G$.
2. $R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}$
3. in ogni punto $p_1 \in E$ l'azione di G su p_1 definisce un punto $R(g, p_1) = R_g(p_1) =: p_1 \cdot g = p_2 \in E$.⁶

Noi assumeremo che l'azione destra sia libera e transitiva.

La (1.3.12) si legge così: prima, tramite $\Phi_j(x)$ si mappa $p_1 \in F_x$ in $F = G$ ottenendo $\Phi_j[p_1]$. Si moltiplica quest'ultimo per l'elemento $g \in G$ e il risultato viene rimappato in F_x tramite $\Phi_j^{-1}(x)$. Pertanto l'azione destra R_g serve a muovere i punti su una stessa fibra per mezzo del gruppo G . Il gruppo G viene anche chiamato gruppo di Gauge in quanto viene usato nelle teorie di Gauge [10].

Le orbite corrispondenti all'azione destra coincidono con le fibre. Sia ora un fibrato con con gruppo di struttura G e con fibra F . Se si definisce un'azione di G su un'altra varietà F' si può costruire un altro fibrato a partire da quello originale cambiando F con F' ma mantenendo le stesse funzioni di transizione. Tale fibrato sarà detto fibrato associato al fibrato originale. Si nota pertanto che ogni fibrato può essere ottenuto come un fibrato associato a un certo fibrato principale, ulteriore motivo per cui studieremo solo fibrati principali.

Teorema 1.3.4. *Sia H un sottogruppo di G . Allora $(G, G/H, \pi, H)$ con una proiezione $\pi : G \rightarrow G/H$ definisce un fibrato principale con H gruppo di struttura [12].*

Definizione 1.3.5. (Fibrati di Hopf) *Si possono costruire fibrati aventi come spazio totale delle sfere.*

$$\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1}/U(1) \quad (1.3.13)$$

Per $n = 1$ si ha il cosiddetto fibrato di Hopf:

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \hookrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^1 \cong S^2/U(1) \end{array} \quad (1.3.14)$$

⁶Si dice azione destra proprio perchè l'elemento g del gruppo agisce sulla destra dell'elemento di E . Si potrebbe definire analogamente un'azione sinistra.

1.3.1 Connessione, Curvatura

L'intento principale della trattazione a seguire sarà duplice: data una curva nello spazio base M si vuole associare univocamente ad essa una curva nello spazio totale E e si vuole riuscire a trasportare parallelamente un vettore da una fibra a un'altra di E . Tale procedura si chiama Connessione e si ritroverà spesso quando studieremo la fase di Berry. Si possono trovare molte differenti connessioni [10] ma nella nostra trattazione ci interesserà la cosiddetta connessione adiabatica, cioè quella compatibile con un percorso in M che viene percorso adiabaticamente.⁷ Si possono dare più definizioni del concetto di connessione, noi ne presenteremo due.

Si consideri il fibrato principale (E, M, F, π) in cui $E = \bigcup_{x \in M} F_x$ e un vettore $v \in T_p E$. Quest'ultimo sarà chiamato verticale se $v \in T_p F_x$ con $x = \pi(p)$. L'insieme dei vettori verticali definisce il sottospazio verticale come

$$V_p \equiv \{v \in T_p E \mid T_p \pi(v) = 0\} \quad (1.3.15)$$

Definizione 1.3.6. (Connessione): si definisce Connessione una funzione continua che associa a ogni punto $p \in E$ un elemento di uno spazio $H_p \subset T_p E$, detto sottospazio orizzontale, tale che:

1. H_p è lo spazio complementare di V_p :

$$T_p E = V_p \oplus H_p \quad (1.3.16)$$

2. $T_p \pi : H_p \rightarrow T_{\pi(p)} M$ è un isomorfismo per ogni $p \in E$.
3. la mappa $p \rightarrow H_p$ è invariante sotto l'azione destra di G

$$R_{g*}(H_p) = H_{p \cdot g} \quad (1.3.17)$$

La Connessione permette quindi di decomporre un vettore $v \in T_p E$ in un vettore tangente alla fibra F (componente verticale) e in un vettore complementare a quest'ultimo (componente orizzontale) (Fig. 1.2). Pertanto ogni vettore si potrà scrivere come

$$v = ver(v) + hor(v) \quad (1.3.18)$$

Le componenti $ver(v)$ e $hor(v)$ dipendono dalla scelta di H_p .

Teorema 1.3.7. *Esiste un isomorfismo $\sharp : \mathfrak{g} \rightarrow V_p$ tra l'algebra di Lie \mathfrak{g} e lo spazio verticale V_p tale che $\mathfrak{g} \ni B \rightarrow B^\sharp \in V_p$.*

Dimostrazione: Sia $\eta \in \mathfrak{g}$ e sia \mathbf{X}_η il generatore infinitesimo dell'azione destra di G su E corrispondente a η . Dato che R_g agisce lungo la fibra ogni generatore infinitesimale deve essere tangente alla fibra corrispondente e quindi $\mathbf{X}_\eta(p) \in V_p \quad \forall p \in E$. Quindi la mappa $\mathfrak{g} \ni \eta \rightarrow \mathbf{X}_\eta(p) \in V_p$ definisce un isomorfismo tra l'algebra di Lie \mathfrak{g} e lo spazio verticale V_p . Il campo vettoriale $\mathbf{X}_\eta(p)$ viene chiamato campo vettoriale fondamentale.

In fisica si usa di solito definire la Connessione per mezzo di forme differenziali.

⁷Più avanti se ne preciserà il significato.

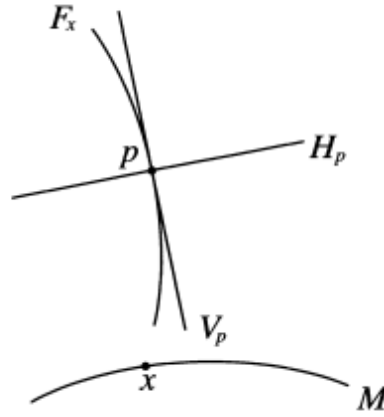


Figura 1.2: Decomposizione dello spazio $T_p E$ nello spazio orizzontale H_p e verticale V_p . Immagine presa da [21].

Definizione 1.3.8. (1-forma Connessione) La Connessione in un fibrato principale è definita come una 1-forma ω a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} definita dalla proiezione dello spazio tangente $T_p(E)$ nel sottospazio verticale $V_p(E)$ [19][10][12]

$$\omega : T_p(E) \rightarrow V_p(E) \cong \mathfrak{g} \quad (1.3.19)$$

tale che

1. $\omega(B^\sharp) = B, \quad B \in \mathfrak{g}$
2. $R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$

tale che per ogni $X \in T_p E$ si ha

$$R_g^* \omega_{p \cdot g}(X) = \omega_{p \cdot g}(R_{g*} X) = g^{-1} \omega_p(X) g \quad (1.3.20)$$

La 1-forma ω può essere considerata a valori in \mathfrak{g} a causa dell'isomorfismo \sharp .

Sul fibrato si possono definire differenti connessioni ω quindi non ci sarà un solo modo per scomporre lo spazio tangente in sottospazio verticale e orizzontale. Nonostante ciò tutte le connessioni contengono le stesse informazioni globali riguardo il fibrato. In ogni caso il sottospazio orizzontale si definisce come

$$H_p(E) = \{X \in T_p(E) | \omega(X) = 0\} \quad (1.3.21)$$

e una curva in E sarà detta orizzontale se in ogni suo punto il vettore tangente alla curva appartiene a H_p .

Definizione 1.3.9. (Curvatura) Si definisce Curvatura della connessione ω la 2-forma $\Omega \in \Lambda^2(E) \otimes \mathfrak{g}$ a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} ⁸ definita come [12]:

$$\Omega := D\omega \quad (1.3.22)$$

⁸Immediato il rimando alla (1.1.34). Anche Ω come ω ha valori nell'algebra di Lie.

dove D è la cosiddetta derivata esterna covariante $D : \Lambda^k(E) \otimes V \rightarrow \Lambda^{k+1}(E) \otimes V$

$$D\alpha(u_1, \dots, u_{k+1}) := d\alpha(\text{hor}u_1, \dots, \text{hor}u_{k+1}) \quad (1.3.23)$$

dove $\alpha \in \Lambda^k(E)$ e u_k, \dots, u_{k+1} sono campi vettoriali su E .

Teorema 1.3.10. *La 2-forma curvatura Ω soddisfa le seguenti proprietà [19][12]:*

1. $D\Omega(X, Y) = 0$ (identità di Bianchi)
2. $\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$. Se il gruppo G del fibrato è un gruppo di matrici si ha $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. Se G è abeliano si ha $\Omega = d\omega$.
3. $R_g^*\Omega = Ad_{g^{-1}}\Omega$

con $X, Y \in T_pE$.

1.3.2 Connessione e Curvatura locali

Definizione 1.3.11. (sezione locale) La funzione $f : U \subset M \rightarrow E$ tale che $\pi \circ f = id_U$ è detta sezione locale del fibrato. La sezione si dice globale se è definita su tutto M . L'esistenza di una sezione globale dipende dalla geometria globale di E .

Ogni sezione locale è detta gauge locale. Ogni gauge locale definisce una connessione locale (nel gauge f)

$$\mathcal{A} := f^*\omega \quad (1.3.24)$$

e una curvatura locale (nel gauge f)

$$\mathcal{F} := f^*\Omega \quad (1.3.25)$$

che corrispondono proprio al pullback tramite f delle relative forme differenziali⁹. Esiste anche la situazione inversa.

Teorema 1.3.12. *Data una connessione locale \mathcal{A}_i a valori nell'algebra \mathfrak{g} definita su U_i e data la sezione locale $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, possiamo costruire una connessione globale ω tale che $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$.*

La dimostrazione si trova in [19].

La curvatura locale si può esprimere in termini della connessione locale:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (1.3.26)$$

La connessione ω è definita globalmente mentre \mathcal{A} è definita localmente solo nella carta U pertanto solitamente ω può risultare più utile. Si fa notare inoltre che la connessione ω è definita sullo spazio totale mentre la connessione locale \mathcal{A} è definita nello spazio base. Data la sezione $f_i : U_i \rightarrow E$ si può restringere la connessione 1-forma nell'aperto U_i ottenendo $\omega|_{U_i} = \omega_i$. Date due sezioni f_i e f_j relative a U_i e a U_j si deve avere $\omega_i = \omega_j$ in $U_i \cap U_j$. Da tale condizione si ottiene una condizione anche sulle connessioni locali. Prima occorre spiegare tale proposizione:

⁹Una 1-forma α definita in E a valori in \mathfrak{g} è proiettata in M tramite il pull back $\Lambda(E) \otimes \mathfrak{g} \ni \alpha \rightarrow f^*\alpha \in \Lambda(M) \otimes \mathfrak{g}$.

Proposizione 1.3.13. Dato un fibrato principale (E, M, G) e due sezioni f_i e f_j relative a U_i e U_j , per $X \in T_p M$ con $p \in U_i \cap U_j$, si ha [19]:

$$f_{j*}X = R_{G_{ij}*}(f_{i*}X) + (G_{ij}^{-1}dG_{ij})(X)^\sharp. \quad (1.3.27)$$

Da tale proposizione e dalle proprietà di ω si ottiene la condizione di compatibilità [19]:

$$\begin{aligned} f_j^*\omega(X) &= R_{G_{ij}}^*\omega(f_{i*}X) + (G_{ij}^{-1}dG_{ij})(X) \\ &= G_{ij}^{-1}\omega(f_{i*}X)G_{ij} + G_{ij}^{-1}dG_{ij}. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

dove si è utilizzato il fatto che $R_h^*\omega(X) = h^{-1}\omega(X)h$ [19]. Dall'ultima relazione si ottiene

$$\mathcal{A}_j = G_{ij}^{-1}\mathcal{A}_iG_{ij} + G_{ij}^{-1}dG_{ij}. \quad (1.3.29)$$

Anche per le curvature locali \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j definite in U_i e U_j esiste una condizione di compatibilità in $U_i \cap U_j$:

$$\mathcal{F}_j = Ad_{G_{ij}^{-1}}\mathcal{F}_i = G_{ij}^{-1}\mathcal{F}_iG_{ij} \quad (1.3.30)$$

Per un cambio di trivializzazione $(U_i, \varphi_i) \rightarrow (U_j, \varphi_j)$ si ottiene una cosiddetta trasformazione di gauge locale g

$$g : U \rightarrow G \quad (1.3.31)$$

tale che, dati due gauge locali $f', f : U \rightarrow P$, essi saranno legati dalla trasformazione di gauge $f'(x) = g(x)f(x)$ con $x \in U$. Per ogni trasformazione di gauge g la Connessione e la Curvatura si riscrivono nel nuovo gauge locale f' in questo modo[12][19][10]:

$$\mathcal{A}' = g^{-1} \cdot \mathcal{A} \cdot g + g^{-1} \cdot dg \quad (1.3.32)$$

$$\mathcal{F}' = g^{-1} \cdot \mathcal{F} \cdot g \quad (1.3.33)$$

Cambiare il gauge locale coincide ad un cambio di coordinate con cui descrivere i punti dello spazio M . Infatti se il gruppo G è un gruppo di matrici la (1.3.33) coincide con lo scrivere \mathcal{F} nella nuova base coordinata. Se vale la (1.3.32) le connessioni \mathcal{A} e \mathcal{A}' sono equivalenti.

Esempio 6. (Elettromagnetismo) Sia M lo spazio-tempo e U un aperto di M . In un aperto U di M si possono definire il quadripotenziale A_μ e il tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. In tale contesto è possibile costruire un fibrato principale con gruppo abeliano $U(1)$ e base M . Il potenziale e il tensore elettromagnetico possono definire una connessione 1-forma e una curvatura locali a valori nell'algebra di Lie $u(1)$ di $U(1)$:

$$\mathcal{A} = iA_\mu dx^\mu \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}iF_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.3.34)$$

che differiscono da A e F per l'elemento i che coincide proprio con il generatore dell'algebra di Lie di $U(1)$. In tal caso le funzioni di transizione sono date da

$$G_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1) \text{ t.c. } G_{ij}(p) = e^{i\lambda(p)}. \quad (1.3.35)$$

Pertanto si avrà

$$\mathcal{A}_j(p) = G_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i(p)G_{ij} + G_{ij}^{-1}dG_{ij} = g^{-1} \cdot \mathcal{A}(p) \cdot g + g^{-1} \cdot dg = \mathcal{A}_i(p) + id\lambda \quad (1.3.36)$$

$$\mathcal{F}_j(p) = \mathcal{F}_i(p) \quad (1.3.37)$$

In componenti si ottiene $\mathcal{A}_{j\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + i\partial_\mu\lambda$ e $\mathcal{F}_{j\mu\nu} = \mathcal{F}_{i\mu\nu}$. Per questo motivo la connessione locale \mathcal{A} e la curvatura locale \mathcal{F} vengono anche chiamati potenziale di gauge e campo di gauge nel gauge locale f .

Esempio 7. (Teorie di Yang-Mills) Se al posto di $U(1)$ si considera il gruppo $SU(N)$ si hanno le cosiddette teorie di Yang-Mills. Siano

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.3.38)$$

la connessione e la curvatura locali definiti in U con coordinate x^μ . Questi sono legati dalla relazione

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad (1.3.39)$$

Dato che \mathcal{A}_μ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sono a valori in \mathfrak{g} si possono scrivere come

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a T_a \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^a T_a \quad (1.3.40)$$

con T_α base dell'algebra \mathfrak{g} che soddisfa $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$. Dalla (1.3.39) si ottiene pertanto la relazione

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu^a + f_{bc}^a \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c. \quad (1.3.41)$$

1.3.3 Sollevamento orizzontale e trasporto parallelo

Sia ora $\gamma(t)$ una curva in M

$$[0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in M \quad (1.3.42)$$

Si dirà che $\tilde{\gamma}(t)$, curva in E , è un **sollevamento** di γ se $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$, cioè se γ è la proiezione in M della curva $\tilde{\gamma}$ in E . E' chiaro che ad ogni γ si possono associare diversi sollevamenti. Un sollevamento orizzontale di γ sarà un sollevamento in cui il vettore tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ appartiene allo spazio $H_{\tilde{\gamma}(t)}E$. Il sollevamento pertanto risolve la richiesta di poter associare a una curva in M una curva in E in modo univoco (Fig. 1.3). Sia \tilde{X} il vettore tangente a $\tilde{\gamma}$. Allora si avrà $\omega(\tilde{X}) = 0$ per definizione di vettore orizzontale. Questa sarà un'equazione differenziale ordinaria la cui soluzione, data la condizione iniziale, esisterà e sarà unica.

Teorema 1.3.14. *Data una curva $\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in M$ e $p_0 = \pi^{-1}(\gamma(0))$. Allora esisterà un unico sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ tale che $\tilde{\gamma}(0) = p_0$. La dimostrazione si trova in [19].*

Sia U_i un aperto di M che contiene γ e su cui si definisce la sezione σ_i . Il sollevamento orizzontale si potrà scrivere come $\tilde{\gamma}(t) = (\sigma_i \circ \gamma(t))g_i(t)$ con $g_i(t) \in G$ e tale che $\sigma(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$. Quindi $g_i(0) = e$. Sia ora X il vettore tangente a γ in $\gamma(0)$. Allora si avrà che $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_*X$ è tangente a $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{\gamma}(0)$. Per definizione si avrà che $\omega(\tilde{X}) = 0$ pertanto riprendendo la (1.3.27) si ottiene

$$\tilde{X} = g_i(t)^{-1}\sigma_{i*}Xg_i(t) + [g_i(t)^{-1}dg_i(X)]^\sharp \quad (1.3.43)$$

Applicando ω

$$0 = \omega(\tilde{X}) = g_i(t)^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) + g_i(t)^{-1}\frac{dg_i(t)}{dt} \quad (1.3.44)$$

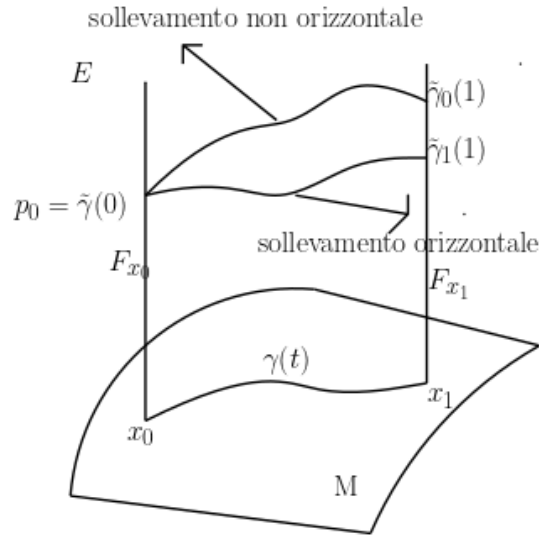


Figura 1.3: Rappresentazione di sollevamenti di γ . La curva $\tilde{\gamma}_0$ è un sollevamento non orizzontale mentre $\tilde{\gamma}_1$ è orizzontale.

Moltiplicando a sinistra per $g_i(t)$ si ottiene

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) \quad (1.3.45)$$

La soluzione di tale equazione differenziale, data la condizione iniziale $g_i(0) = e$, esiste ed è unica. Ora, sapendo che $\omega(\sigma_{i*}X) = \sigma_i^*\omega(X) = \mathcal{A}_i$ si può scrivere

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i g_i(t) \quad (1.3.46)$$

La connessione locale a valori nell'algebra di Lie si può scrivere in componenti, con x^i coordinate in M :

$$\mathcal{A}_i = -iA_i(x^i)dx^i, \quad A_i(x^i) \in \mathbb{R} \quad (1.3.47)$$

Pertanto la soluzione formale di (1.3.46) è

$$\begin{aligned} g_i(\gamma(t)) &= \exp\left(-\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_i\right) = \\ &= \exp\left(i \int_0^t A_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt\right) = \\ &= \exp\left(i \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} A_{i\mu} dx^\mu\right) \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

Proposizione 1.3.15. Sia $\tilde{\gamma}'$ un altro sollevamento orizzontale di γ tale che $\tilde{\gamma}'(0) = \gamma(0) \cdot g$. Allora $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t) \cdot g$. La dimostrazione in [19].

Pertanto abbiamo costruito il sollevamento orizzontale che sarà dato da $\tilde{\gamma}(t) = (\sigma_i \circ \gamma(t))g_i(t)$. Vediamo ora come la connessione ω permette di definire il concetto di trasporto parallelo sulla varietà E . Essa permette di legare matematicamente, quindi in un certo senso di trasportare, vettori appartenenti a diverse fibre del fibrato. Definire un modo per trasportare punti o vettori lungo una curva in una varietà diventa necessario

in quanto gli spazi vettoriali tangenti in ogni punto della varietà sono distinti e diversi cosicchè risulta difficile confrontare due vettori in due punti diversi per vedere se sono paralleli.¹⁰ La Connessione definirà una regola per trasportare parallelamente la fibra F lungo γ .

Definizione 1.3.16. *Il trasporto parallelo è una regola che a una curva $[0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in M$ con $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$ associa un' applicazione*

$$\mathbf{T}_\gamma : F_{x_0} = \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow F_{x_1} = \pi^{-1}(\gamma(1)) \quad (1.3.49)$$

con le condizioni

1. \mathbf{T}_γ sia continua lungo γ
2. $\mathbf{T}_{\gamma^{-1}} = (\mathbf{T}_\gamma)^{-1}$
3. $\mathbf{T}_{\gamma_1 * \gamma_2} = \mathbf{T}_{\gamma_1} \circ \mathbf{T}_{\gamma_2}$

Il trasporto parallelo dipende dalla scelta della curva pertanto non è unico. Sia $p_0 \in F_{x_0}$ e sia $\tilde{\gamma}(t)$ un lift orizzontale di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) = p_0$. La regola di trasporto parallelo \mathbf{T}_γ lungo γ si definisce come

$$\pi^{-1}(x_0) \ni p_0 = \tilde{\gamma}(0) \rightarrow \mathbf{T}_\gamma(p_0) \equiv \tilde{\gamma}(1) \equiv p_1 \in F_{x_1} \quad (1.3.50)$$

e rispetta le condizioni definite sopra. Sapendo che $\tilde{\gamma}(1) = p_1 = \sigma_i(\gamma(1)) \cdot g_i(1)$ si ha che

$$\tilde{\gamma}(1) = p_1 = \sigma_i(\gamma(1)) \exp\left(-\int_0^1 \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} dt\right) \quad (1.3.51)$$

Il trasporto parallelo commuta con l'azione destra di G su P [19]:

$$\tilde{R}_g \circ \mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T}_\gamma \circ \tilde{R}_g \quad (1.3.52)$$

cioè vale

$$p'_0 = p_0 \cdot g \implies \mathbf{T}_\gamma(p'_0) = \mathbf{T}_\gamma(p_0) \cdot g \quad (1.3.53)$$

Nel caso in cui γ sia una curva chiusa che inizia e finisce in $x_0 \in M$ il trasporto parallelo \mathbf{T}_γ ritornerà sulla stessa fibra F_{x_0} ma non necessariamente nello stesso punto, ma l'azione destra permette di muoversi verticalmente lungo la fibra. In questo caso il trasporto parallelo di p_0 si può trovare grazie alla (1.3.12) e risulta che

$$\mathbf{T}_\gamma(p_0) \equiv p_0 \cdot \Phi[\tilde{\gamma}] \quad (1.3.54)$$

dove $\Phi[\tilde{\gamma}]$ è un elemento del gruppo G del fibrato chiamato **Olonomia** della curva $\tilde{\gamma}$ data la connessione ω . L'insieme delle $\Phi[\tilde{\gamma}]$ forma il gruppo di Lie detto Gruppo di Olonomia, sottogruppo del gruppo del fibrato G .

$$\text{Hol}(p_0) = \{\Phi[\tilde{\gamma}] \in G : \gamma(0) = \gamma(1) = x_0, \tilde{\gamma}(0) = p_0 \text{ t.c. } \mathbf{T}_\gamma(p_0) = \tilde{\gamma}(1) = p_0 \cdot \Phi[\tilde{\gamma}]\} \quad (1.3.55)$$

In generale la curva $\tilde{\gamma}$ sarà aperta nonostante γ sia chiusa.

¹⁰Ciò non è vero in \mathbb{R}^n dove in ogni punto lo spazio tangente coincide con \mathbb{R}^n stesso pertanto il trasporto di vettori richiede soltanto che il vettore rimanga parallelo al vettore iniziale.

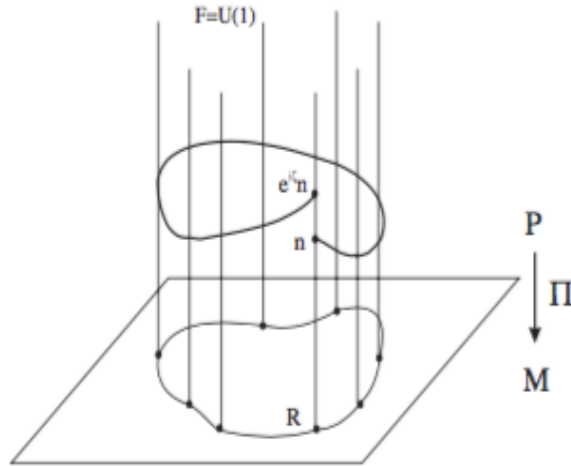


Figura 1.4: Fibrato per la fase di Berry.

Sia data una curva chiusa γ in $U \subset M$ tale che $\gamma(0) = \gamma(1)$. Scegliendo un gauge $f : U \rightarrow E$ possiamo sollevare la curva γ in una curva $f(\gamma)$ che sarà chiusa anch'essa: $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = p_0 \in E$. Se invece si sceglie un lift orizzontale $\tilde{\gamma}$ si otterrà che

$$\tilde{\gamma}(1) = p_0 \cdot \Phi[\tilde{\gamma}] \quad (1.3.56)$$

con $\tilde{\gamma}(0) = p_0$. Si dimostra [10] [19] che l'olonomia $\Phi[\tilde{\gamma}]$ è data da

$$\Phi[\tilde{\gamma}] = \exp\left(\oint_{f(\gamma)} \omega\right) = \exp\left(\oint_{\gamma} \mathcal{A}\right) := \Phi_f[\tilde{\gamma}] \quad (1.3.57)$$

con $\mathcal{A} = f^*\omega$ connessione nel gauge f . Tale definizione è gauge dipendente, in quanto se si fa una trasformazione di gauge $f'(x) = g(x)f(x)$ si ottiene

$$\Phi_{f'}[\tilde{\gamma}] = g(x_0)^{-1} \cdot \Phi_f[\tilde{\gamma}] \cdot g(x_0) \quad (1.3.58)$$

In realtà l'olonomia (1.3.57) è così definita per gruppi abeliani. Nel caso di gruppi non abeliani l'olonomia è data dai cosiddetti integrali di Wilson [21][10][19]

$$\Phi[\tilde{\gamma}] = P\exp\left(\oint_{f(\gamma)} \omega\right) = P\exp\left(\oint_{\gamma} \mathcal{A}\right) \quad (1.3.59)$$

dove P sta a indicare un path-order integral che dice come ordinare le matrici $A(x)$ non abeliane, componenti della 1-forma \mathcal{A} , nell'espandere l'esponenziale. In particolare se $x(t)$ è una parametrizzazione della curva γ l'espansione è data da

$$\begin{aligned} \Phi[\tilde{\gamma}] &= P\exp\left(\oint_{\gamma} A(x) \cdot \dot{x} dt\right) = \\ &= 1 + \int_0^1 dt A(x) \cdot \dot{x} + \int_0^1 dt \int_0^t dt' A(t) \cdot \dot{x}(t) A(t') \cdot \dot{x}(t') + \dots \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

Nel nostro caso lo spazio base M rappresenterà lo spazio dei parametri esterni di un sistema o lo spazio degli stati $|\Psi\rangle \langle\Psi|$, la fibra rappresenterà solitamente lo spazio dei

fattori di fase (gruppo $U(1)$) mentre E rappresenterà lo spazio degli autostati del sistema $|\Psi\rangle$. Una variazione ciclica dei parametri nel tempo coinciderà con un percorso chiuso C in M e la connessione permetterà di associare ad esso un percorso in E che rappresenterà l'evoluzione degli autostati nel tempo e che inizierà e finirà nella stessa fibra ma che generalmente non sarà chiuso. Dato che la curva in E inizia e finisce sulla stessa fibra è possibile, attraverso il gruppo G , calcolare l'olonomia $\Phi[\tilde{\gamma}]$ tra i punti iniziali e finali di tale curva. Nel caso la fibra sia il gruppo $U(1)$ l'olonomia corrispondente alla curva C sarà una fase $e^{i\gamma(C)}$. Tale sarà il caso della fase di Berry.

Definizione geometrica di derivata covariante

Il concetto di derivata covariante può essere definito anche geometricamente come limite di un certo rapporto incrementale definito dalla regola del trasporto parallelo [16]. Sia un fibrato $\pi : E \rightarrow M$ e sia $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva integrale in M di un certo campo vettoriale X . Siano date una sezione $s : M \rightarrow E$ e una regola di trasporto parallelo \mathbf{T}_γ . Allora si definisce la derivata covariante di una sezione nel punto $\gamma(0)$ lungo la direzione X come

$$\nabla_X s(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}_\gamma^{-1}(s(\gamma(t))) - s(\gamma(0))}{t} \in \pi^{-1}(\gamma(0)) \quad (1.3.61)$$

dove $p = \gamma(0)$.

Una sezione sarà trasportata parallelamente lungo γ se $\nabla_X s(p) = 0$.

1.3.4 Il monopolo Magnetico

Riportiamo qui l'idea di monopolo magnetico proposta da Dirac nel 1931 [13].

Si consideri un monopolo magnetico di carica g posto nell'origine di \mathbb{R}^3 . Esso produrrà un campo del tipo

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3.62)$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $|\mathbf{r}| = r$. L'origine deve essere esclusa pertanto \mathbf{B} sarà definito su $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. In tale spazio \mathbf{B} non ammette un potenziale vettore globale e continuo \mathbf{A} tale che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ma ne ammette uno singolare \mathbf{A}_+ del tipo (in coordinate sferiche)

$$A_r^+ = A_\theta^+ = 0 \quad A_\varphi^+ = \frac{g}{r} \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta} \quad (1.3.63)$$

tale che $\nabla \times \mathbf{A} = g\mathbf{r}/r^3$. Tale potenziale è singolare lungo la linea $\theta = \pi$ chiamata corda di Dirac. Ogni tentativo di definire un potenziale vettore globale porta una corda di Dirac con origine nel monopolo. Infatti definendo un nuovo potenziale \mathbf{A}_-

$$A_r^- = A_\theta^- = 0 \quad A_\varphi^- = \frac{-g}{r} \frac{(1 + \cos\theta)}{\sin\theta} \quad (1.3.64)$$

si ottiene una corda di Dirac lungo $\theta = 0$. I potenziali \mathbf{A}_+ e \mathbf{A}_- possono essere scritti come 1-forme

$$A_+ = g(1 - \cos\theta)d\varphi \quad A_- = -g(1 + \cos\theta)d\varphi \quad (1.3.65)$$

E' possibile definire due potenziali \mathbf{A}_+ e \mathbf{A}_- tali che non siano singolari in particolari regioni e tali che il loro rotore dia il campo magnetico nelle rispettive regioni. Tali regioni

sono

$$\begin{aligned} S^+ \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} + \epsilon\} \\ S^- \{(\theta, \varphi) : \frac{\pi}{2} - \epsilon < \theta \leq \pi\} \end{aligned} \quad (1.3.66)$$

con ϵ piccolo arbitrariamente. In S^+ il potenziale sarà del tipo (1.3.63), in S^- sarà del tipo (1.3.64) mentre nelle intersezione $S^+ \cap S^-$ i potenziale saranno legati da una trasformazione di gauge

$$A_+ = A_- + df \quad (1.3.67)$$

dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^1 \cong U(1)$ è definita da $f(\varphi) = 2g\varphi$. Dato che f deve essere a singolo valore si ha

$$f(2\pi) = f(0) \quad (1.3.68)$$

che implica che

$$g = \frac{n}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.3.69)$$

che è la famosa quantizzazione di Dirac¹¹ [13].

Pertanto abbiamo visto come un monopolo magnetico porti alla costruzione di un fibrato principale di Hopf, il fibrato di monopolo, con gruppo $U(1)$ sulla sfera S^2 . Quindi un elemento di tale fibrato sarà identificato dalla terna $(\theta, \varphi, e^{i\alpha\pm})$. Le funzioni di transizione g_{\pm} saranno del tipo

$$g_{\pm} : (\theta, \varphi, e^{i\alpha-}) \rightarrow (\theta, \varphi, e^{if} e^{i\alpha+}) \quad (1.3.71)$$

dove f è la funzione definita sopra. Tali funzioni di transizione definiscono una trasformazione di gauge del tipo (1.3.67).

Il flusso del campo magnetico attraverso una porzione di superficie Σ della sfera centrata nel monopolo, per la legge di Gauss sarà dato da

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Omega g \quad (1.3.72)$$

dove Ω è l'angolo solido definito dalla superficie Σ rispetto al centro. Tale flusso è gauge invariante. Si consideri ora una carica elettrica q che si muove lungo un percorso chiuso sulla superficie di una sfera con un monopolo magnetico posto nell'origine della sfera. Consideriamo che la carica si muova lentamente così da trascurare le forze classiche tra le due cariche. Dati i potenziali \mathbf{A}_+ e \mathbf{A}_- si trova che la funzione d'onda della carica q accumula una fase proporzionale al flusso Φ di \mathbf{B} attraverso l'area racchiusa dal percorso.

¹¹In realtà Dirac dimostrò che la condizione di quantizzazione per un monopolo magnetico è

$$g = \frac{n\hbar c}{2e} \quad (1.3.70)$$

Dato che $e^2/\hbar c = 1/137$ si ha $g = e(137/2)$ che è un numero molto grande. Pertanto si pensa che non si è mai riusciti ad isolare un monopolo perchè essi interagiscono molto fortemente, nonostante la loro esistenza sia prevista dalla meccanica quantistica.

Si supponga che il percorso si trovi interamente in S^+ . Allora la fase sarà [3][13]

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= \frac{q}{\hbar c} \oint \mathbf{A}_+ \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \frac{q}{\hbar c} \int (\nabla \times \mathbf{A}_+) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{q}{\hbar c} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\hbar c} \Phi\end{aligned}\tag{1.3.73}$$

Tale accumulo di fase è una proprietà completamente geometrica in quanto il flusso dipende dall'angolo solido sotteso dalla curva sulla sfera (per la legge di Gauss). Dato che il flusso è gauge invariante anche tale fase lo sarà. Si ritroverà più avanti anche con l'effetto Aharonov-Bohm un risultato simile.

1.4 Trasporto parallelo sulla sfera

Geometricamente parlando un oggetto matematico che sia un vettore, un tensore, una funzione d'onda etc. è, per definizione, trasportato parallelamente se le sue componenti rimangono invariate rispetto a un sistema di riferimento anch'esso trasportato parallelamente. La fase di Berry, come si vedrà, può essere interpretata anche geometricamente ed è legata al trasporto parallelo degli stati del sistema quantistico in un opportuno spazio. Pertanto in tale paragrafo si approfondirà il concetto di trasporto parallelo con un esempio generico in cui mostreremo che il trasporto parallelo lungo un percorso chiuso può portare a una ologonomia.

Se si immagina un vettore $\mathbf{v} = (x, y)$ nel piano bidimensionale \mathbb{R}^2 risulta facile trasportarlo parallelamente: in ogni punto p del piano è possibile definire un vettore \mathbf{v}' con origine in p che abbia le stesse coordinate cartesiane di \mathbf{v} , o equivalentemente che non sia ruotato rispetto a \mathbf{v} . Tale nozione di parallelismo è adeguata per spazi piatti. Il concetto di trasporto parallelo però risulta più complicato se ci si sposta in varietà a curvatura non nulla come la sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. In tali spazi si può ottenere un'ologonomia in quanto trasportando parallelamente un vettore lungo un percorso chiuso generalmente il vettore finale non coinciderà con il vettore iniziale ma avrà accumulato un'ologonomia rispetto a quest'ultimo (Fig. 1.5).

Si consideri una curva chiusa C in S^2 parametrizzata da $[0, 1] \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in S^2$, con $\mathbf{r}(t)$ vettore unitario radiale e con $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1) = p$. Sia \mathbf{e}_0 il vettore appartenente allo spazio tangente $T_p S^2$ alla sfera in p e tangente alla curva C e $\mathbf{e}(t)$ il vettore appartenente a $T_q S^2$ e che sia il trasporto parallelo del vettore \mathbf{e}_0 nel punto della curva q con raggio $\mathbf{r}(t)$. Dato che $\mathbf{e}(t)$ deve rimanere tangente alla sfera

$$\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0\tag{1.4.1}$$

In analogia con il trasporto parallelo in \mathbb{R}^2 si richiede che $\mathbf{e}(t)$ non ruoti rispetto al raggio $\mathbf{r}(t)$ e che la sua lunghezza rimanga invariata. Queste proprietà vengono riassunte nella legge del trasporto parallelo secondo cui [11]:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 0\tag{1.4.2}$$

dove

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}(t)\tag{1.4.3}$$

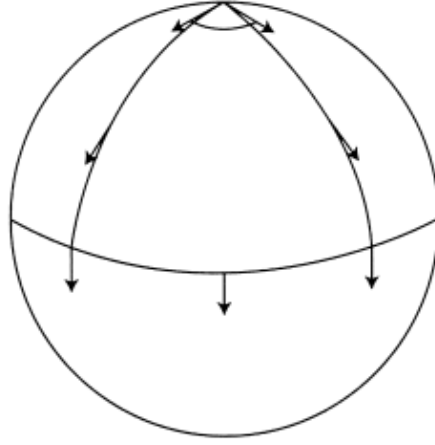


Figura 1.5: Rappresentazione di come il trasporto parallelo porti ad una ologonomia lungo un percorso chiuso su una sfera. Immagine presa da [3].

con Ω velocità angolare con cui ruota il vettore $e(t)$. In \mathbb{R}^3 la terna $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$ definisce una base ortogonale in ogni punto della sfera, pertanto:

$$\Omega = a\mathbf{r} + b\dot{\mathbf{r}} + c(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \quad (1.4.4)$$

Dato che $e(t)$ non ruota attorno a \mathbf{r} si ha che $\Omega \cdot \mathbf{r} = 0$ quindi $a=0$. Inoltre dalla (1.4.1) si ha

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (\Omega \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (-\Omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{r}} = b(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} - c\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (1.4.5)$$

da cui $b = 0$ e $c = 1$, quindi

$$\Omega = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (1.4.6)$$

Pertanto dal doppio prodotto vettoriale la (1.4.3) diventa

$$\dot{\mathbf{e}} = -(\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} \quad (1.4.7)$$

La soluzione $e(t)$ di (1.4.7) definisce il trasporto parallelo di $e(0)$ lungo la curva $C \in S^2$. Abbiamo pertanto costruito un fibrato coordinato FS^2 con gruppo di struttura $SO(2)$ [12]. Il trasporto parallelo definisce una connessione in tale fibrato e, a causa dell'equivalenza $SO(2) \equiv U(1)$, diventa la connessione nel $U(1)$ -fibrato di Hopf.

In ogni punto della sfera è possibile definire uno spazio vettoriale tangente con base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ che definisce quindi un certo sistema di riferimento che chiamiamo "fisso". Vogliamo ora sapere cosa succede trasportando tale base lungo un percorso C nella sfera. Per i due vettori varranno le regole definite sopra per il singolo vettore trasportato parallelamente ma è possibile utilizzare una formula più conveniente per definire il trasporto parallelo di $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Definendo il vettore complesso

$$\psi \equiv \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \quad \psi^* \psi = 1 \quad (1.4.8)$$

e usando la (1.4.7) la regola del trasporto parallelo diventa [11]

$$\boxed{Im(\psi^* \cdot \dot{\psi}) = 0} \quad oppure \quad \boxed{Im(\psi^* \cdot d\psi) = 0} \quad (1.4.9)$$

Per vedere se la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ruota nel muoversi lungo C bisogna fissare una base in ogni punto della sfera che sarà la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ trasportata parallelamente. La indicheremo con $(\mathbf{u}(\mathbf{r}), \mathbf{v}(\mathbf{r}))$ e chiaramente varierà da punto a punto e definirà a sua volta un sistema di riferimento in ogni punto. Dalla (2.8.4) si definisce

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}) + i\mathbf{v}(\mathbf{r})}{\sqrt{2}} \quad (1.4.10)$$

con $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n} = 1$. La relazione tra la base fissa e quella trasportata parallelamente sarà [11] [8]

$$\boldsymbol{\psi}(t) = e^{-i\alpha(t)} \mathbf{n}(\mathbf{r}(t)) \quad (1.4.11)$$

che corrisponde alla trasformazione

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

dove α è l'angolo con cui bisogna ruotare la base $(\mathbf{u}(\mathbf{r}), \mathbf{v}(\mathbf{r}))$ per farla coincidere con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dalla (1.4.9) si ottiene

$$-i\dot{\alpha}(\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}^* \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (1.4.12)$$

Dato che $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n} = 1$ si ottiene

$$\dot{\alpha} = \text{Im}(\mathbf{n}^* \cdot \dot{\mathbf{n}}) \quad (1.4.13)$$

da cui si ottiene finalmente l'angolo α , o ologonomia, relativo al percorso C

$$\alpha(C) = \text{Im} \oint_C \mathbf{n}^* \cdot d\mathbf{n} \quad (1.4.14)$$

Se si definisce una carta sulla sfera, cioè un sistema di coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, si può definire il campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (che corrisponde alla Connessione definita nel paragrafo dei fibrati) le cui componenti sono

$$A_i(\mathbf{x}) \equiv \text{Im} \left[n_j^*(\mathbf{x}) \frac{\partial n_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \quad (1.4.15)$$

con somma sugli indici j . Tali componenti possono definire la 1-forma $\mathcal{A} = A_i(\mathbf{x}) dx^i$. Pertanto si ottiene

$$\alpha(C) = \oint_C \mathcal{A} = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (1.4.16)$$

La 1-forma \mathcal{A} è chiaramente la connessione locale nel fibrato di Hopf in esame che permette di calcolare l'angolo di ologonomia α . In accordo col paragrafo precedente abbiamo trovato che l'ologonomia relativa a un percorso chiuso nello spazio base S^2 è data dall'integrale di una 1-forma connessione. Utilizzando il teorema di Stokes si può trasformare l'integrale di (1.4.16) in un integrale di superficie

$$\alpha(C) = \text{Im} \iint_{\Sigma} \mathcal{F} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4.17)$$

dove $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ ed è la 2-forma curvatura relativa alla connessione \mathcal{A} , $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ e Σ è qualsiasi superficie in S^2 tale che $\partial\Sigma = C$. Nel sistema di coordinate (x_1, x_2) la formula per α diventa

$$\alpha(C) = \text{Im} \iint_S dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial n^*}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial n}{\partial x_2} - \frac{\partial n^*}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial n}{\partial x_1} \right) = \iint_S dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.4.18)$$

Se ora si sceglie $x_1 = \theta$, $x_2 = \phi$ per le coordinate nella sfera la (1.4.18) diventa

$$\boxed{\alpha(C) = \iint_S \sin \theta d\theta d\phi = \Omega(C)} \quad (1.4.19)$$

dove $\Omega(C)$ è l'angolo solido sotteso dalla curva C rispetto al centro della sfera. Si vedrà più avanti che questo risultato è più generale rispetto al caso in questione. Altro risultato interessante è che se si prende un'altra base lungo il percorso C legata alla base precedente attraverso la trasformazione di gauge (rotazione)

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{n}'(\mathbf{r}) = e^{i\lambda(\mathbf{r})} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad (1.4.20)$$

la 1-forma \mathbf{A} diventa

$$A'_i(\mathbf{x}) = \text{Im} \left(n'_j(\mathbf{x}) \frac{\partial n'_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = A_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (1.4.21)$$

mentre \mathbf{F} rimane invariato

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \quad (1.4.22)$$

in analogia con il potenziale vettore e il tensore elettromagnetico. Pertanto dalla (1.4.22) anche l'angolo $\alpha(C)$ sarà indipendente dalla trasformazione di gauge ma non dal percorso C . Un facile esempio consiste nel considerare un vettore tangente alla sfera che partendo dal polo Nord viene trasportato parallelamente verso l'equatore lungo un meridiano e poi trasportato lungo l'equatore e infine trasportato nuovamente lungo un meridiano fino al polo Nord. Si vedrà che il vettore finale formerà un angolo (l'olonomia) rispetto al vettore di partenza. In realtà tali discorsi fatti per la sfera possono essere generalizzati a una generica superficie. Dalla (1.4.7) si vede che la traiettoria del vettore tangente a C trasportato parallelamente dipende soltanto dal vettore normale \mathbf{r} . Pertanto sarà possibile mappare ogni punto della curva su una superficie generica relativo a un certo vettore normale \mathbf{r} a un punto di una curva sulla sfera S^2 con lo stesso vettore normale \mathbf{r} . Nel caso le superfici non siano semplicemente connesse, cioè presentano dei buchi, la formula (1.4.17) diventerà

$$\alpha(C) = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i N_i(C) \alpha(C_i) \quad (1.4.23)$$

con $N_i(C)$ pari al numero di avvolgimenti di C attorno al buco i -esimo e dove

$$\alpha(C_i) = \oint_{C_i} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (1.4.24)$$

è l'integrale preso sulla curva C_i che fa da bordo al buco nella superficie.

Tali ragionamenti saranno utilizzati nella trattazione quantistica del trasporto parallelo e si vedrà che i risultati che si otterranno saranno analoghi a quelli di questo paragrafo con la differenza che si utilizzeranno concetti quantistici come $|\psi\rangle$ e lo spazio di Hilbert \mathcal{H} .

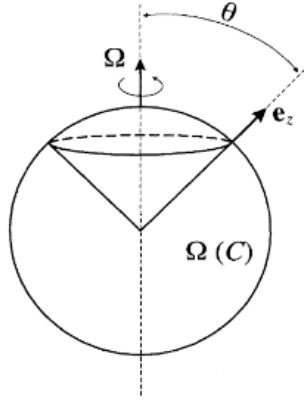


Figura 1.6: Pendolo di Foucault. Immagine presa da [21].

Pendolo di Foucault

Un esempio pratico di fase accumulata in un percorso chiuso su una superficie consiste nel famoso esperimento del pendolo di Foucault¹² con cui si dimostrò la rotazione della Terra.

Pertanto consideriamo un pendolo con piano di oscillazione perpendicolare alla superficie terrestre e posto a una latitudine θ rispetto al polo Nord. Nel punto in cui sta il pendolo costruiamo un sistema di riferimento $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ tale che \mathbf{e}_x e \mathbf{e}_y siano tangenti alla Terra e \mathbf{e}_z sia diretto lungo la direzione radiale (Fig. 1.6). La dinamica del pendolo corrisponde a quella di un oggetto in un sistema di riferimento non inerziale [12]

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} - m \left[\underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q})}_{\text{centrifuga}} \right] \quad (1.4.25)$$

dove $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare della Terra, \mathbf{F} è la forza di gravità e gli altri due termini sono la forza di Coriolis e la forza centrifuga. Sia ω la frequenza delle piccole oscillazioni, pertanto si avrà che

$$\omega \gg \Omega = |\boldsymbol{\Omega}|. \quad (1.4.26)$$

In regime di piccole oscillazioni si ha $\dot{z} \approx 0$ e si può trascurare la forza centrifuga perchè va come Ω^2 che è molto piccolo. In tale regime la dinamica del pendolo diventa:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + 2\dot{y}\Omega_z \\ \ddot{y} = -\omega^2 y + 2\dot{x}\Omega_z \end{cases} \quad (1.4.27)$$

dove $\Omega_z = \Omega \cos\theta$. Definendo la variabile complessa $w = x + iy$ dalla (1.4.27) si ottiene

$$\ddot{w} + 2i\Omega_z \dot{w} + \omega^2 w = 0 \quad (1.4.28)$$

Soluzioni generali di (1.4.28) sono date da $e^{i\lambda t}$ e sostituendo si ottiene che

$$\lambda = -\Omega_z \pm \sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2} \approx -\Omega_z \pm \omega \quad (1.4.29)$$

¹²Il primo pendolo di Foucault fu costruito nel 1851 ed era costituito da una sfera di 30 kg sospesa con un filo di 68 m alla cupola del Pantheon di Parigi. Dall'idea del suo pendolo Foucault nel 1852 inventò il giroscopio.

Pertanto soluzioni approssimate di (1.4.28) sono

$$w(t) = e^{-i\Omega_z t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \quad (1.4.30)$$

che corrispondono al moto di un oscillatore armonico di frequenza ω nel piano (x, y) e a una rotazione con velocità angolare Ω_z diretta lungo z . Pertanto il ruolo della forza di Coriolis è quello di ruotare il piano di oscillazione del pendolo con velocità angolare Ω_z e periodo $T_z = 2\pi/\Omega_z$. In una rotazione di 2π della Terra si avrà $T = 2\pi/\Omega = 24h$ e il piano di oscillazione sarà ruotato di un angolo

$$\Delta\varphi = \Omega_z T = 2\pi \cos\theta \quad (1.4.31)$$

Ai Poli Nord e Sud si avrà $\Delta\varphi = 2\pi$ mentre all'equatore si avrà $\Delta\varphi = 0$. Interessante è notare che $\Delta\varphi$ non dipende da Ω cioè non dipende da quanto velocemente giri la Terra ma dipende solo dalla latitudine θ , cioè da un parametro geometrico del problema. Ciò è dovuto al fatto che la forza di Coriolis è proporzionale alla velocità pertanto il suo effetto integrato non dipende da riscalamenti del tempo. Tale aspetto è una caratteristica tipica delle fasi geometriche come anche la fase di Berry. La fase $\Delta\varphi$ coincide con l'angolo solido (modulo 2π) rispetto al centro della Terra sotteso dalla curva chiusa C percorsa dal pendolo:

$$\Delta\varphi = \text{angolo solido}(C) \quad (1.4.32)$$

come si era trovato anche nel paragrafo precedente e come si ritroverà spesso più avanti, come nel caso di una particella carica nel campo di un monopolo magnetico.

Capitolo 2

Fasi geometriche e fase di Berry

2.1 Introduzione

Nel 1984 Michael Berry in un suo celebre articolo [6] dimostrò che in seguito a una variazione ciclica e adiabatica dei parametri che caratterizzano un sistema quantistico la funzione d'onda del sistema stesso acquisiva una fase geometrica in aggiunta alla fase dinamica $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. Tale fase è di natura soltanto geometrica in quanto dipende solo dal percorso che seguono i parametri nel loro spazio, cosa che la rende anche non integrabile. Altro fatto importante è che tale fase è un invariante di gauge pertanto non può essere eliminata per una trasformazione di gauge. Berry nel ricavare la sua fase geometrica utilizzò Hamiltoniane lentamente variabili ma nel caso di autovettori lentamente variabili l'approssimazione adiabatica della dinamica utilizzata da Berry non risulta più esatta e la fase di Berry è soltanto un'approssimazione della vera fase geometrica. Nel 1987 Aharonov e Anandan [1] trovarono l'esatta fase geometrica per evoluzioni cicliche non necessariamente adiabatiche e successivamente Samuel e Bhandari [9] generalizzarono la fase geometrica anche per evoluzioni non cicliche. La fase di Berry non è stata tuttavia una novità assoluta, infatti nel 1956 Pancharatnam [20] trovò un'analogia fase geometrica per fasci di luce polarizzati, nel 1959 Aharonov-Bohm [2] mostrarono che un potenziale vettore in assenza di un campo magnetico può portare a un accumulo di una fase geometrica e in fisica molecolare Higgins e altri [15] mostrarono che l'approssimazione di Born-Oppenheimer può portare a una fase geometrica per la funzione d'onda dell'elettrone nell'atomo. Dopo l'articolo di Berry, Simon [22] notò che la fase di Berry poteva essere vista come un'olonomia di un certo fibrato associata al trasporto parallelo degli stati quantici nello spazio di Hilbert \mathcal{H} e che il potenziale di gauge trovato da Berry corrispondeva a una connessione in tale fibrato ottenendo uno splendido collegamento tra meccanica quantistica e la teoria matematica dei fibrati.

In tale capitolo cercheremo di esporre tutte queste varie sfaccettature della fase geometrica, partendo dalla fase di Berry per poi trovare collegamenti con esempi e generalizzazioni.

2.2 Evoluzione Adiabatica in Meccanica Quantistica

Nel ricavare la sua fase geometrica Berry utilizzò il concetto di adiabaticità [18][12]. Esso è un concetto che sta a metà tra staticità e dinamicità. Con esso si intende rozzamente qualcosa che varia molto lentamente rispetto a qualcos'altro. Tipicamente quando si utilizza l'idea di adiabaticità si ha a che fare con sistemi che possono essere divisi in

sottosistemi lenti e sottosistemi veloci come nell'approssimazione di Born-Oppenheimer in cui si studia il sistema separando nucleo (pesante e lento) e elettroni (leggeri e veloci). Nel nostro caso ciò che varierà lentamente saranno i parametri esterni del sistema quantistico come la direzione del campo magnetico in cui viene immerso un elettrone. Occorre però quantificare l'aggettivo "lento". Per farlo occorre definire il teorema adiabatico. Consideriamo per semplicità un'hamiltoniana dipendente dal tempo $H = H(t)$ con spettro discreto e non degenerare per ogni t .

Teorema 2.2.1. (Teorema adiabatico in meccanica quantistica) *Sia a $t = 0$ un sistema quantistico nell' n -esimo autostato energetico di $H(0)$. Se una perturbazione agisce lentamente sul sistema o equivalentemente si variano i parametri esterni lentamente fino al tempo t , il sistema cambierà la forma dell'hamiltoniana $H(t)$ in accordo con l'equazione di Schrödinger ma rimarrà nell' n -esimo autostato energetico di $H(t)$ [12].*

In realtà il teorema adiabatico si generalizza per qualsiasi sistema quantistico, non necessariamente con spettro discreto e non degenerare, che contiene una parte dello spettro separata da un'altra parte dello spettro. In tal caso il teorema adiabatico dice che nella sua evoluzione, data una lenta perturbazione, il sistema rimarrà nella stessa parte dello spettro in cui era all'inizio a meno di un errore che dipende dal gap di separazione delle due parti dello spettro [21].

Sia ora

$$H(t) |n(t)\rangle = E_n(t) |n(t)\rangle \quad (2.2.1)$$

con $|n(t)\rangle$ base ortonormale di autostati. Dalla meccanica quantistica sappiamo che ogni osservabile è indipendente dalla trasformazione di base

$$|n(t)\rangle \longrightarrow |n'(t)\rangle = e^{i\lambda(t)} |n(t)\rangle \quad (2.2.2)$$

chiamata trasformazione di gauge. Se lo stato iniziale è un autostato $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$ di $H(0)$ allora per il teorema adiabatico si avrà che $|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |n(t)\rangle$. Inoltre ogni stato può essere ottenuto da una sovrapposizione di autostati

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(t') dt'\right) |m(t)\rangle \quad (2.2.3)$$

Inserendo la (2.2.3) nell'equazione di Schrödinger $i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$ si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{c}_m(t) = & -c_m(t) \langle m(t) | \frac{d}{dt} |m(t)\rangle - \\ & - \sum_{k \neq m} c_k(t) \langle m(t) | \frac{d}{dt} |k(t)\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_k(t') - E_m(t')) dt'\right] \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Ora, differenziando la (2.2.1), si ottiene

$$\dot{H} |k\rangle + H |\dot{k}\rangle = \dot{E}_k |k\rangle + E_k |\dot{k}\rangle \quad (2.2.5)$$

e moltiplicando per $\langle m |$ con $m \neq k$ si ha

$$\langle m | \dot{k}\rangle = \frac{1}{E_k - E_m} \langle m | \dot{H} |k\rangle \quad (2.2.6)$$

L'evoluzione verrà considerata adiabatica se

$$|\langle m|\dot{H}|k\rangle| \ll \frac{|E_k - E_m|}{\Delta T_{km}} \quad (2.2.7)$$

dove ΔT_{km} è il tempo caratteristico di transizione tra gli stati k e m . La (2.2.7) dice che la variazione di H è lenta rispetto al tempo di transizione tra autostati del sistema. Nel limite adiabatico si ha che $\Delta T_{km} \rightarrow \infty$ pertanto $|\langle m|\dot{H}|k\rangle| \rightarrow 0$ da cui

$$\langle m|\dot{k}\rangle \rightarrow 0, \quad m \neq k \quad (2.2.8)$$

Sapendo che $\langle m(t)|\frac{d}{dt}|k(t)\rangle = \langle m|\dot{k}\rangle$, dalla (2.2.4) si ha che

$$\dot{c}_m = -c_m \langle m|\dot{m}\rangle \quad \text{con condizione iniziale } c_m(0) = \delta_{nm} \quad (2.2.9)$$

La soluzione di tale equazione è del tipo $c_m(t) = e^{-\int \langle m|\dot{m}\rangle} c_m(0)$ per cui si ha $c_m(t) = 0$ per $m \neq n$. Pertanto dalla (2.2.3) si ha

$$|\psi(t)\rangle = c_n(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'\right) |n(t)\rangle \quad (2.2.10)$$

come previsto dal teorema adiabatico. Come detto prima si ha che

$$c_n(t) = e^{i\phi_n(t)} \quad \text{con} \quad \dot{\phi}_n = i \langle m|\dot{m}\rangle \quad (2.2.11)$$

Tale fase è stata ignorata fino al 1984 quando Berry scoprì che essa aveva un significato non banale [6]. Venne ignorata perchè se si usa la base

$$|n'(t)\rangle = e^{i\phi_n(t)} |n(t)\rangle \quad (2.2.12)$$

la formula per $|\psi(t)\rangle$ diventa

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'\right) |n'(t)\rangle \quad (2.2.13)$$

e in tal modo la fase $c_n(t) = e^{i\phi_n(t)}$ viene completamente rimossa. La nuova base soddisfa la relazione

$$\langle n'(t)|\frac{d}{dt}|n'(t)\rangle = 0 \quad (2.2.14)$$

chiamata condizione di gauge di Born-Fock. In realtà la rimozione di tale fase non è sempre possibile farla e in questi casi $e^{i\phi_n(t)}$ acquista un significato fisico come vedremo con la fase di Berry.

2.2.1 La fase in Meccanica Quantistica

In Meccanica Quantistica la fase $e^{i\alpha}$ non occupa un ruolo di primo piano in quanto ogni stato $|\psi\rangle$ è definito a meno di una fase. Infatti ogni stato è in corrispondenza biunivoca con una retta nello spazio di Hilbert \mathcal{H} da cui deriva che gli stati di un sistema quantistico sono le classi di equivalenza in \mathcal{H} [12]:

$$|\psi\rangle \sim |\phi\rangle \iff |\psi\rangle = e^{i\alpha} |\phi\rangle \quad (2.2.15)$$

Gli stati sono equivalenti perchè non cambiano i valori medi degli osservabili

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle A \rangle_\phi = \langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle \quad (2.2.16)$$

Pertanto l'insieme delle classi di equivalenza $[\psi]$ degli stati forma lo spazio proiettivo di Hilbert [12]

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} / \sim \quad (2.2.17)$$

che coincide con i raggi di \mathcal{H} . Le classi di equivalenza $[\psi]$ possono essere identificate per mezzo del proiettore

$$P_\psi =: |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.2.18)$$

che è chiaramente equivalente a $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Dato l'insieme degli stati normalizzati

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi | \psi \rangle = 1\} \quad (2.2.19)$$

possiamo definire un fibrato principale $\pi : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ con fibra $\pi^{-1}([\psi]) = \{e^{i\lambda}\psi, \lambda \in \mathbb{R}\}$ che si identifica con il gruppo di Lie $U(1)$. Dato che lo spazio di Hilbert $n + 1$ -dimensionale \mathcal{H} è isomorfo allo spazio \mathbb{C}^{n+1} , lo spazio $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ consisterà nelle sfere S^{2n+1} pertanto lo spazio $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ sarà lo spazio proiettivo complesso [17]:

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}P^n := S^{2n+1}/U(1) \quad (2.2.20)$$

Pertanto si avrà il fibrato di Hopf

$$\pi : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cong S^{2n+1} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{C}P^n \quad (2.2.21)$$

In Meccanica Quantistica ciò che conta tuttavia è le fase relativa tra gli stati. Dato uno stato definito dalla somma di due stati

$$\Psi = ae^{i\alpha}\psi_1 + be^{i\beta}\psi_2 \quad (2.2.22)$$

il valore medio di un osservabile \hat{A} sarà dato da

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \\ &= \langle ae^{i\alpha}\psi_1 + be^{i\beta}\psi_2 | \hat{A} | ae^{i\alpha}\psi_1 + be^{i\beta}\psi_2 \rangle = \\ &= |a|^2 \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle + |b|^2 \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_2 \rangle + \\ &+ a^* b e^{i(\beta-\alpha)} \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle + b^* a e^{-i(\beta-\alpha)} \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

e dipende dalla fase relativa $(\alpha - \beta)$. Tale fase relativa è importante nei fenomeni di interferenza.

2.3 Trasporto parallelo in meccanica quantistica: la Fase di Berry

Arriviamo finalmente al punto in cui deriviamo la fase di Berry.

Si consideri un sistema quantistico con hamiltoniana $H(\mathbf{R}(t))$ dipendente dal tempo attraverso dei parametri esterni $\mathbf{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_m(t))$ che variano adiabaticamente nel tempo. L'evoluzione del sistema sarà governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle \quad (2.3.1)$$

Si supponga che lo spettro di H sia completamente discreto e non degenerare:

$$H(\mathbf{R}(t)) |n, \mathbf{R}(t)\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) |n, \mathbf{R}(t)\rangle \quad (2.3.2)$$

con $\langle n, \mathbf{R} | m, \mathbf{R} \rangle = \delta_{nm}$. Gli autostati $|n, \mathbf{R}(t)\rangle$ non necessariamente sono funzioni a singolo valore per ogni $\mathbf{R}(t)$ ma per semplicità assumeremo che lo siano.¹

Si supponga che inizialmente il sistema si trovi nell' n -esimo autostato, cioè $|\psi(0)\rangle = |n, \mathbf{R}(0)\rangle$. Se si considera un'evoluzione adiabatica il sistema al tempo t sarà ancora nell' n -esimo autostato di $H(\mathbf{R}(t))$ pertanto si avrà che

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi_n} |n, \mathbf{R}(t)\rangle \quad (2.3.3)$$

Ci si potrebbe aspettare che quel fattore di fase sia il fattore di fase dinamico

$$e^{i\theta_n} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} \quad (2.3.4)$$

in realtà non è così perchè una $|\psi(t)\rangle$ di questo tipo non risolve l'equazione di Schrödinger. Nulla vieta pertanto di aggiungere una fase $e^{i\gamma_n}$ ottenendo

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\gamma_n} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'\right) |n, \mathbf{R}(t)\rangle \quad (2.3.5)$$

da cui

$$\phi_n = \theta_n + \gamma_n \quad (2.3.6)$$

D'ora in poi scriveremo \mathbf{R} al posto di $\mathbf{R}(t)$ per semplicità.

Inserendo la (2.3.5) nella (2.3.1) si ottiene

$$\frac{d}{dt} |n, \mathbf{R}\rangle + i \frac{d}{dt} \gamma_n(t) |n, \mathbf{R}\rangle = 0 \quad (2.3.7)$$

Moltiplicando per $\langle n, \mathbf{R} |$ si ottiene

$$\frac{d}{dt} \gamma_n(t) = i \langle n, \mathbf{R} | \frac{d}{dt} |n, \mathbf{R}\rangle \quad (2.3.8)$$

Integrando quest'ultima si ottiene

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= i \int_0^t \langle n, \mathbf{R}(s) | \frac{d}{ds} |n, \mathbf{R}(s)\rangle ds = \\ &= i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

dove $\nabla_{\mathbf{R}}$ indica il gradiente nello spazio dei parametri \mathbf{R} . Se i parametri variano ciclicamente nel loro spazio in un tempo T , cioè seguono un percorso chiuso C , si avrà $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$ per cui

$$\boxed{\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle d\mathbf{R}} \quad \text{fase di Berry} \quad (2.3.10)$$

¹Se si hanno $O_1 \subset M$ e $O_2 \subset M$ due zone di M , spazio dei parametri, parametrizzate da diverse coordinate, gli autostati nelle regioni di intersezione $O_1 \cap O_2$ sono legate tra loro da una trasformazione del tipo (2.2.2).

Tale $\gamma_n(C)$ è la famosa fase di Berry [6]. Tale quantità non è integrabile, cioè non dipende solo dai punti iniziali e finali del percorso C ma dall'intero percorso C . In aggiunta non è neanche a singolo valore in quanto in un percorso chiuso tale fase non si annulla. La fase di Berry è un esempio di fase geometrica in quanto, a differenza della fase θ_n , non dipende dalla dinamica del sistema nè dalla velocità con cui variano i parametri ma soltanto dalla geometria del percorso C nello spazio dei parametri.

La fase di Berry è inoltre reale. Infatti dato che $\langle n|n\rangle = 1$ si ha

$$\frac{d}{dt} \langle n|n\rangle = \langle \dot{n}|n\rangle + \langle n|\dot{n}\rangle = 0 \quad \implies \langle n|\dot{n}\rangle = -\langle \dot{n}|n\rangle = -\langle n|\dot{n}\rangle^* \quad (2.3.11)$$

quindi $\langle n, \mathbf{R}(t)|\frac{d}{dt}|n, \mathbf{R}(t)\rangle$ è immaginario puro pertanto si può scrivere

$$\gamma_n(t) = -Im \int_0^t \langle n, \mathbf{R}(s)|\frac{d}{ds}|n, \mathbf{R}(s)\rangle ds \quad (2.3.12)$$

oppure

$$\gamma_n(t) = -Im \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle n, \mathbf{R}|\nabla_{\mathbf{R}}|n, \mathbf{R}\rangle d\mathbf{R} \quad (2.3.13)$$

Riprendendo la (2.3.6) si ha che la fase totale sarà

$$\phi_n(t, C) = \theta_n(t) + \gamma_n(C) = \underbrace{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'}_{\text{dinamica}} \underbrace{-Im \int_0^t \langle n, \mathbf{R}(s)|\frac{d}{ds}|n, \mathbf{R}(s)\rangle ds}_{\text{geometrica}} \quad (2.3.14)$$

La fase $\gamma_n(t)$ può essere riscritta come integrale di una 1-forma a valori vettoriali

$$\gamma_n(C) = \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} A^n = \int_C A^n \quad (2.3.15)$$

con

$$A^n = A_i^n dR^i = -Im \langle n, \mathbf{R}|\frac{\partial}{\partial R^i}|n, \mathbf{R}\rangle dR^i = -Im \langle n, \mathbf{R}|d|n, \mathbf{R}\rangle dR^i \quad (2.3.16)$$

1-forma differenziale a valori vettoriali chiamata connessione 1-forma di Berry ed è definita nella stessa regione dello spazio dei parametri M in cui è definita la base di autostati $|n, \mathbf{R}\rangle$. Il simbolo "d" sta a indicare la derivata esterna nella varietà M .

Abbiamo visto in precedenza che gli autostati sono definiti a meno di una trasformazione di gauge

$$|n, \mathbf{R}\rangle \rightarrow |n', \mathbf{R}\rangle = e^{i\zeta_n(\mathbf{R})} |n, \mathbf{R}\rangle \quad (2.3.17)$$

con $\zeta_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione arbitraria a un sol valore, a meno di 2π , su M , spazio dei parametri. Abbiamo anche visto che, in evoluzione adiabatica, lo stato al tempo t è definito da

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\gamma_n} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'\right) |n, \mathbf{R}(t)\rangle \quad (2.3.18)$$

Pertanto si potrebbe pensare, come fece Fock nel 1928, che per una base di autostati che soddisfi la condizione, detta condizione di Born-Fock,

$$\langle n, \mathbf{R}(t)|\frac{d}{dt}|n, \mathbf{R}(t)\rangle = 0 \quad (2.3.19)$$

la fase geometrica $\gamma_n(t)$ si annulla portando a 1 il contributo di $e^{i\gamma_n}$. Fock però non considerò variazioni cicliche dei parametri dove invece il contributo della fase geometrica γ_n non può essere rimosso con una trasformazione di gauge. Si dovette aspettare fino al 1984 quando Berry ricavò la sua fase geometrica gauge invariante relativa a percorsi chiusi nello spazio dei parametri. Per una trasformazione di gauge (2.3.17) le componenti della connessione 1-forma di Berry si trasformano così:

$$\begin{aligned}
 A_i^n(\mathbf{R}) \rightarrow A_i^{n'}(\mathbf{R}) &= -Im \langle n', \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial R^i} | n', \mathbf{R} \rangle = \\
 &= -Im (\langle n, \mathbf{R} | e^{-i\zeta_n}) \frac{\partial}{\partial R^i} (e^{i\zeta_n} | n, \mathbf{R} \rangle) = \\
 &= -Im (\langle n, \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial R^i} | n, \mathbf{R} \rangle + e^{-i\zeta_n} \frac{\partial}{\partial R^i} e^{i\zeta_n}) = \\
 &= A_i^n(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial R^i} \zeta_n(\mathbf{R})
 \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Pertanto la connessione 1-forma si trasformerà come

$$A^n(\mathbf{R}) \rightarrow A^{n'}(\mathbf{R}) = A^n(\mathbf{R}) - d\zeta_n(\mathbf{R}) \tag{2.3.21}$$

che assomiglia molto alla solita trasformazione di gauge per il potenziale elettromagnetico motivo per cui la (2.3.17) è chiamata trasformazione di gauge. In tal caso la fase $\gamma_n(t)$ si trasformerà nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 \gamma_n(t) \rightarrow \gamma_{n'}(t) &= \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} A^{n'} = \\
 &= A^n - \zeta_n(\mathbf{R}(t)) + \zeta_n(\mathbf{R}(0))
 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Se si utilizza la base $|n', \mathbf{R}\rangle$ si ottiene

$$e^{i\gamma_{n'}(t)} |n', \mathbf{R}\rangle = e^{i\gamma_n(t)} e^{i\zeta_n} |n, \mathbf{R}\rangle \tag{2.3.23}$$

e se $\zeta_n(t)$ è a singolo valore modulo 2π si può trovare un valore di $\zeta_n(t)$ tale che il fattore $e^{i\gamma_{n'}(t)} e^{i\zeta_n}$ è pari a 1. Questo è il risultato trovato da Fock. Invece, se i parametri variano ciclicamente su una curva C tale che $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$, si trova che, per la natura a singolo valore di ζ_n

$$e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(T))} = e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(0))} \implies \zeta_n(\mathbf{R}(T)) = \zeta_n(\mathbf{R}(0)) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.3.24}$$

Pertanto la fase di Berry si trasforma come

$$\begin{aligned}
 \gamma_n(C) \rightarrow \gamma_{n'}(C) &= \oint_C A_i^{n'} dR^i = \\
 &= \oint_C A_i^n dR^i - 2\pi m = \\
 &= \gamma_n(C) - 2\pi m = \\
 &= \gamma_n(C) \quad \text{modulo } 2\pi
 \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Abbiamo così visto come la fase di Berry sia invariante modulo 2π per una trasformazione di gauge pertanto non è possibile eliminarla. Nonostante l'invarianza di gauge, la fase di

Berry non si presenta per ogni sistema quantistico. Quando non si presenta la connessione 1-forma non è nulla ma soltanto triviale

$$A^n = d\zeta_n \quad (2.3.26)$$

e porta a $\gamma_n(C) = \oint_C d\zeta_n = 0$ per il teorema di Stokes.

Data l'analogia con l'elettrodinamica è possibile definire un tensore campo di gauge F^n con componenti

$$F_{ij}^n = \frac{\partial}{\partial R^i} A_j^n - \frac{\partial}{\partial R^j} A_i^n \quad i, j = 1, \dots, \dim M \quad (2.3.27)$$

per cui si avrà la 2-forma

$$F^n = \frac{1}{2} F_{ij}^n dR^i \wedge dR^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial R^i} A_j^n - \frac{\partial}{\partial R^j} A_i^n \right) dR^i \wedge dR^j = dA^n \quad (2.3.28)$$

chiamata curvatura di Berry. Dalla (2.3.16)

$$F^n = -Im \left(d \langle n, \mathbf{R} | d | n, \mathbf{R} \rangle \right) = -Im \left(d | n, \mathbf{R} \rangle \right) \wedge \left(d \langle n, \mathbf{R} | \right) \quad (2.3.29)$$

La curvatura di Berry è gauge-invariante

$$F^n \rightarrow F^{n'} = dA^{n'} = dA^n - d^2\zeta_n = dA^n = F^n \quad (2.3.30)$$

dove si è usata la proprietà $d^2 = 0$. L'invarianza di gauge implica che la curvatura F^n è definita su tutto M a differenza della connessione A^n che è definita solo dove sono definiti gli autostati monodromi. Utilizzando il teorema di Stokes si può calcolare la fase di Berry come un integrale su una qualunque superficie $S \subset M$ che ha come bordo C , cioè $\partial S = C$:

$$\gamma_n(C) = \oint_C A^n = \int_S dA^n = \int_S F^n \quad \text{modulo } 2\pi \quad (2.3.31)$$

Si nota che se la curva C non racchiude nessuna area la fase di Berry si annulla.

E' possibile comunque trovare un'espressione per la curvatura F^n in termini degli autovalori energetici. Data la relazione di completezza $\hat{1} = \sum_m |m, \mathbf{R}\rangle \langle m, \mathbf{R}|$ si può espandere F^n nella base di autostati

$$\begin{aligned} F^n &= -Im \sum_m \left(d \langle n, \mathbf{R} | \right) |m, \mathbf{R}\rangle \wedge \langle m, \mathbf{R} | \left(d | n, \mathbf{R} \rangle \right) = \\ &= -Im \sum_{m \neq n} \left(d \langle n, \mathbf{R} | \right) |m, \mathbf{R}\rangle \wedge \langle m, \mathbf{R} | \left(d | n, \mathbf{R} \rangle \right) = \\ &= -Im \sum_{m \neq n} \overline{\langle m, \mathbf{R} | d | n, \mathbf{R} \rangle} \wedge \langle m, \mathbf{R} | d | n, \mathbf{R} \rangle \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

dove la barra orizzontale indica il complesso coniugato. Nella seconda uguaglianza il termine $m = n$ è stato eliminato in quanto dà un contributo nullo in quanto il termine $\langle n, \mathbf{R} | d | n, \mathbf{R} \rangle$ è immaginario puro e il prodotto esterno è antisimmetrico. Inoltre differenziando la (2.3.2) e moltiplicando per $\langle m, \mathbf{R} |$ si ottiene

$$\begin{aligned} (dH) |n\rangle + H(d|n\rangle) &= E_n(d|n\rangle) \\ \langle m | dH | n \rangle + \langle m | H | dn \rangle &= E_n \langle m | d | n \rangle = \\ = \langle m | dH | n \rangle + E_m \langle m | d | n \rangle &= E_n \langle m | d | n \rangle \\ \langle m | d | n \rangle &= \frac{\langle m | dH | n \rangle}{E_n - E_m} \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

per cui la (2.3.32) diventa

$$F^n = -Im \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, \mathbf{R} | dH(\mathbf{R}) | m, \mathbf{R} \rangle \wedge \langle m, \mathbf{R} | dH(\mathbf{R}) | n, \mathbf{R} \rangle}{(E_m - E_n)^2} \quad (2.3.34)$$

il cui flusso restituisce la fase di Berry. Dato che la curvatura definita in (2.3.34) non dipende da $d|n, \mathbf{R}\rangle$, che richiede una base di autostati monodromi, la scelta del fattore di fase per gli autostati sarà irrilevante e si ha che, a differenza della connessione che è definita solo dove sono definiti gli autostati a singolo valore, la curvatura è definita globalmente su tutto M e può essere usata per calcolare la fase di Berry anche dove gli autostati monodromi non esistono². Inoltre da notare è che tale curvatura è singolare nei punti di M che corrispondono a degenerazioni, cioè $E_n(\mathbf{R}^*) = E_m(\mathbf{R}^*)$.

Nel caso in cui lo spazio dei parametri sia tridimensionale $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ si ha la derivata esterna diventa il gradiente e il prodotto esterno diventa il prodotto vettoriale

$$\gamma_n(C) = -Im \oint_C \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R} \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (2.3.36)$$

e per il teorema di Stokes

$$\begin{aligned} \gamma_n(C) &= -Im \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R} \rangle = \\ &= -Im \iint_S d\mathbf{S} \cdot \langle \nabla_{\mathbf{R}} n, \mathbf{R} | \times | \nabla_{\mathbf{R}} n, \mathbf{R} \rangle = \\ &= -Im \iint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_n(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

con

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{R}) = -Im \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, \mathbf{R} | \nabla H(\mathbf{R}) | m, \mathbf{R} \rangle \times \langle m, \mathbf{R} | \nabla H(\mathbf{R}) | n, \mathbf{R} \rangle}{(E_m - E_n)^2} \quad (2.3.38)$$

Tale V_n è indipendente dalla trasformazioni di gauge ed è analogo al campo magnetico con potenziale vettore $Im \langle n | \nabla n \rangle$.

Degenerazioni

Dalla (2.3.38) si vede che la curvatura è singolare nei punti di degenerazione \mathbf{R}^* , motivo per cui la somma in m è fatta sugli stati diversi da n . Si consideri una degenerazione di due stati, chiamati (+) e (-) con energie $E_+(\mathbf{R}) \geq E_-(\mathbf{R})$. Per semplicità si consideri $E_{\pm}(\mathbf{R}^*) = 0$ e $\mathbf{R}^* = 0$. Per \mathbf{R} vicino a \mathbf{R}^* , posso espandere la curvatura al primo ordine in $\mathbf{R} - \mathbf{R}^*$ ottenendo

$$\mathbf{V}_+(\mathbf{R}) = -Im \frac{\langle + | \nabla H(\mathbf{R}^*) | - \rangle \times \langle - | \nabla H(\mathbf{R}^*) | + \rangle}{(E_m - E_n)^2} \quad (2.3.39)$$

²La dipendenza dalla fase degli autostati è di tale tipo: per $|n\rangle \rightarrow |n'\rangle = e^{i\mu(\mathbf{R})} |n\rangle$ si ha che

$$\langle n | dn \rangle \rightarrow \langle n' | dn' \rangle + id\mu(\mathbf{R}) \quad (2.3.35)$$

pertanto la fase di Berry si potrà calcolare come l'integrale di superficie della derivata esterna di $\langle n | dn \rangle$ e non dipenderà dalla fase scelta.

con $\mathbf{V}_-(\mathbf{R}) = -\mathbf{V}_+(\mathbf{R})$ e $\gamma_-(C) = -\gamma_+(C)$. Se siamo nella situazione con 3 parametri $\mathbf{R} = (x, y, z)$ l'hamiltoniana del sistema che rappresenta i due stati degeneri è una matrice hermitiana 2×2 di un sistema a due stati:

$$H(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & z \end{bmatrix} \quad (2.3.40)$$

con autovalori $E_+(\mathbf{R}) = -E_-(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}|\mathbf{R}|$. La degenerazione si ha quando tutti i parametri si annullano. Questo è un esempio di un generico risultato trovato da Von Neumann e Wigner (1929) secondo cui per una generica matrice hermitiana per generare una degenerazione è necessario variare almeno tre parametri. Data la forma dell'hamiltoniana si ha che

$$\nabla H(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \hat{\sigma} \quad (2.3.41)$$

con $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ matrici di Pauli. Non si perde alcun tipo di informazione se si allinea l'asse z al vettore \mathbf{R} . Così si ha [6]:

$$\sigma_1 |\pm\rangle = |\mp\rangle \quad \sigma_2 |\pm\rangle = \pm i |\pm\rangle \quad \sigma_3 |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle \quad (2.3.42)$$

per cui le componenti del vettore curvatura saranno

$$\begin{aligned} V_{x+} &= -Im(\langle +|\sigma_2|-\rangle \langle -|\sigma_3|+\rangle)/2R^2 = 0 \\ V_{y+} &= -Im(\langle +|\sigma_3|-\rangle \langle -|\sigma_1|+\rangle)/2R^2 = 0 \\ V_{z+} &= -Im(\langle +|\sigma_1|-\rangle \langle -|\sigma_2|+\rangle)/2R^2 = 1/2R^2 \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

Disallineando di nuovo \mathbf{R} rispetto all'asse z si trova che

$$\mathbf{V}_+(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{R}}{2R^3} \quad (2.3.44)$$

che consiste con il campo generato da un ipotetico monopolo magnetico di Dirac (1.3.62) [21] di carica $\frac{1}{2}$ posto nel punto di degenerazione. Per la (2.3.37) la fase di Berry sarà data dal flusso di \mathbf{V}_n attraverso una superficie con bordo C . Per il teorema di Gauss si ottiene

$$\gamma_{\pm}(C) = \mp \frac{1}{2} \Omega(C) \quad (2.3.45)$$

con $\Omega(C)$ angolo solido sotteso dalla curva C rispetto al punto di degenerazione in cui si trova il monopolo.

Esempio 8. Un esempio di ciò si ha quando la curva C si trova interamente nel piano $y = 0$ che corrisponde a un'hamiltoniana simmetrica completamente reale [6][21]. Quest'ultima si presenta per sistemi che hanno una simmetria di inversione temporale come le particelle in un campo elettrico o per sistemi in cui si ignora lo spin o in cui lo spin è intero. In tal caso gli autovalori E_{\pm} saranno due coni nello spazio (E, x, z) che si intersecano nel punto di degenerazione

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(x^2 + z^2) = \frac{1}{2}|\mathbf{R}| \quad (2.3.46)$$

Ogni punto di tale cono corrisponde a un autostato energetico che può essere sempre scelto reale. Variando ciclicamente i parametri esterni anche gli autostati corrispondenti

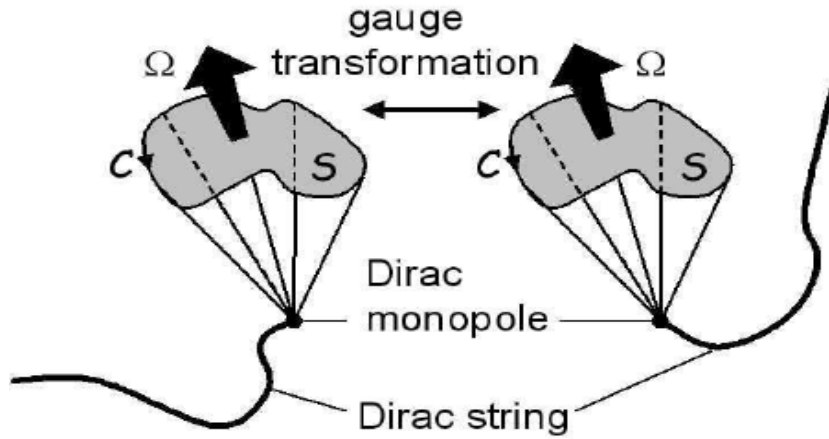


Figura 2.1: Due rappresentazioni del flusso del campo di un monopolo di Dirac attraverso la superficie S legate da una trasformazione di gauge. La corda in basso è la cosiddetta corda di Dirac i cui punti sono le singolarità del potenziale vettore \mathbf{A}_{\pm} , cioè i punti in cui gli autostati sono a multivalore. La corda di Dirac cambia posizione per una trasformazione di gauge pertanto non è un'osservabile e non è un invariante di gauge.

descrivono un ciclo sulla superficie del cono. Se tale ciclo racchiude la degenerazione si avrà $\Omega = \pm 2\pi$, altrimenti $\Omega = 0$. Gli autostati accumuleranno pertanto un fattore di fase del tipo

$$\begin{aligned} e^{i\gamma_n(C)} &= -1 && \text{se la curva } C \text{ racchiude la degenerazione} \\ &= +1 && \text{altrimenti} \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

In fisica un esempio di ciò si presenta nell'approssimazione di Born-Oppenheimer in cui il nucleo di una molecola viene considerato come parametro esterno lentamente variabile per la dinamica degli elettroni. Una configurazione nucleare che presenta simmetrie può dare luogo a degenerazioni energetiche per gli elettroni. Herzberg e Longuet-Higgins [15], in uno studio sulle molecole poliatomiche, trovarono infatti che variando ciclicamente la configurazione di un nucleo che presenta simmetrie e quindi degenerazioni, l'autofunzione elettronica subisce un cambiamento di segno alla fine di tale ciclo. Inversamente quando si osserva un cambio di segno della funzione d'onda elettronica in seguito a un ciclo nello spazio delle configurazioni nucleari si può concludere che all'interno del ciclo ci sia una degenerazione [21].

Mead e Truhlar [21] trovarono che in approssimazione di Born-Oppenheimer si può avere un cambio di segno della funzione d'onda elettronica anche nel caso di hamiltoniane complesse.

Il cambio di segno dell'autofunzione elettronica riflette la natura a multivalore di tale funzione. Questa tuttavia può essere resa a singolo valore per mezzo di una trasformazione di gauge la quale comporta l'aggiunta di un potenziale vettore del tipo potenziale di Berry nell'hamiltoniana nucleare.

Esempio 9. Altro esempio in cui si presenta degenerazione è dato dal caso di uno spin s in un campo magnetico \mathbf{B} la cui direzione varia nel tempo e nello spazio e con cui interagisce tramite [6]

$$H(\mathbf{B}) = -k\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}} \quad (2.3.48)$$

con k costante che tiene conto del rapporto giromagnetico e \hat{s} operatore di spin con autovalori n con degenerazione $2s + 1$. Gli autovalori energetici sono

$$E_n(\mathbf{B}) = -kBn \quad (2.3.49)$$

con n intero che sta nell'intervallo $[-s, s]$. Pertanto quando $B = 0$ c'è una degenerazione di stati di $2s + 1$ e per $s = 1/2$ si ritrova il caso appena esposto. Considerando le componenti di \mathbf{B} come parametri esterni \mathbf{R} si può calcolare la fase $\gamma_n(C)$ degli autostati di \hat{s} lungo la direzione del campo magnetico il quale varia la sua direzione lentamente su un percorso C nello spazio dei parametri. Seguendo i ragionamenti del paragrafo precedente si trova che il vettore curvatura è [6]

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{B}) = -n \frac{\mathbf{B}}{B^3} \quad (2.3.50)$$

che coincide proprio con il campo magnetico generato dal monopolo di carica $-n$ posta nell'origine dello spazio dei parametri. Pertanto la fase di Berry sarà

$$\gamma_n(C) = -n\Omega(C) \quad (2.3.51)$$

con $\Omega(C)$ angolo solido sotteso da C rispetto a $\mathbf{B} = 0$. La fase di Berry dipende solo da n e non dal modulo s dello spin. Per uno spinore $s = 1/2$ un intero ciclo di \mathbf{B} coincide con un angolo solido $\Omega = 2\pi$ e la fase è $\gamma_n(C) = -\pi$ che comporta un cambiamento di segno della funzione d'onda dello spinore dopo una rotazione di 2π , fatto noto.

2.4 Interpretazione geometrica della fase di Berry

Esiste una bellissima corrispondenza tra la fase geometrica di Berry e la teoria dei fibrati [12][10][18] che Simon [22] nel 1983 fu il primo a scoprire. Sia quindi M la varietà che descrive lo spazio dei parametri \mathbf{R} con coordinate locali (R_1, \dots, R_m) e $\hat{H}(\mathbf{R})$ l'hamiltoniana di un sistema con equazione agli autovalori

$$\hat{H}(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle \quad (2.4.1)$$

Assumiamo che lo spettro sia discreto e non degenerare. Non si perde di generalità se si assume $E_n(\mathbf{R}) = 0$ su tutto M . Come abbiamo visto, lo stato normalizzato è definito a meno di un fattore di fase $e^{i\alpha}$ pertanto lo stato fisico sarà dato da un raggio dello spazio di Hilbert \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{R}) = [|n(\mathbf{R})\rangle] = \{e^{i\alpha} |n(\mathbf{R})\rangle \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cong U(1) \quad (2.4.2)$$

Pertanto un elemento dello spazio di Hilbert $|n(\mathbf{R})\rangle$ sarà completamente determinato dalla coppia $(\mathbf{R}, e^{i\alpha})$.

Possiamo quindi costruire un fibrato principale $(\mathcal{H}, M, \pi, U(1))$ sullo spazio dei parametri con lo spazio di Hilbert come spazio totale, gruppo di struttura $U(1)$ e fibra costituita dai vettori che appartengono a un determinato raggio dello spazio di Hilbert che si può identificare con $U(1)$ (Fig. 2.2).

Fissare la base per $|n(\mathbf{R})\rangle$ significa scegliere una sezione nel fibrato. L'azione che ci permette di muovere sulla fibra è la moltiplicazione di $|n\rangle$ per un elemento di $U(1)$.

Se $|n(\mathbf{R})\rangle_i$ e $|n(\mathbf{R})\rangle_j$ sono le basi definite in aperti U_i e U_j di M allora le due basi saranno legate da una trasformazione di gauge

$$|n(\mathbf{R})\rangle_i = e^{i\alpha_{ij}} |n(\mathbf{R})\rangle_j \quad \text{per } \mathbf{R} \in U_i \cap U_j \quad (2.4.3)$$

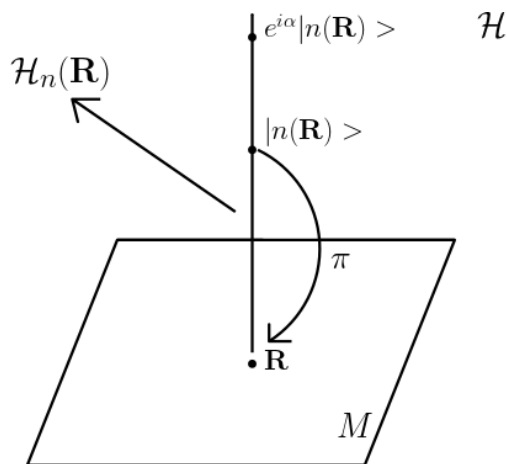


Figura 2.2: Fibrato principale sullo spazio dei parametri.

L'evoluzione del sistema sarà definita da una curva disegnata dagli stati nello spazio totale al variare nel tempo. I parametri variando nel tempo seguiranno una curva γ in M a cui si associa contemporaneamente una curva degli stati γ' in \mathcal{H} la cui proiezione coincide con γ . Abbiamo visto precedentemente che per associare una curva nello spazio base a una curva nello spazio totale occorre una connessione che a sua volta definisce il sottospazio orizzontale e la regola per il trasporto parallelo. L'approssimazione adiabatica utilizzata da Berry dice, assieme all'equazione di Schroedinger, come si evolvono gli autostati pertanto ci dicono come si muovono nello spazio \mathcal{H} . In evoluzione adiabatica si avrà la cosiddetta connessione adiabatica.

Sia $C : [0, 1] \ni s \rightarrow M$ una curva in M . Dato uno stato $|\psi(0)\rangle$ sulla fibra di $|n(C(0))\rangle$, cioè

$$|\psi(0)\rangle = e^{in(0)} |n(C(0))\rangle \quad (2.4.4)$$

una regola di trasporto parallelo è data quando si associa a $|\psi(0)\rangle$ un unico vettore $|\psi(s)\rangle$ sulla fibra di $|n(\gamma(s))\rangle$

$$|\psi(s)\rangle = e^{in(s)} |n(C(s))\rangle \quad (2.4.5)$$

che preserva la normalizzazione $\langle\psi(s)|\psi(s)\rangle = 1$. Tale procedura rispetta la proprietà di equivarianza

$$\eta(0) \rightarrow \eta(0) + \lambda \implies \eta(s) \rightarrow \eta(s) + \lambda \quad (2.4.6)$$

Sia data l'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{d}{ds} |\psi(s)\rangle = \hat{H} |\psi(s)\rangle \quad (2.4.7)$$

Se l'evoluzione è adiabatica e se il sistema inizialmente si trovava nell' n -esimo autostato $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$ si avrà

$$i\hbar \frac{d}{ds} |\psi(s)\rangle = \hat{H} |\psi(s)\rangle = 0 \quad \forall s \quad (2.4.8)$$

avendo imposto $E_n(s) = 0$ per ogni s . Moltiplicando per $\langle\psi(s)|$ si ottiene la regola di trasporto parallelo

$$\langle\psi| \frac{d\psi}{ds} \rangle = 0 \quad (2.4.9)$$

che equivale a richiedere $Im \langle\psi|d\psi/ds\rangle = 0$ in quanto $Re \langle\psi|d\psi/ds\rangle = 0$ per la condizione di normalizzazione. Si osservi l'analogia con la regola del trasporto parallelo (1.4.9)

definito sulla sfera. La (2.4.9) coincide anche con la condizione di Born-Fock (2.3.19). La (2.4.9) implica che

$$\langle \psi(s) | \psi(s + \delta s) \rangle = 1 + O(\delta s^2) \quad (2.4.10)$$

dove $|\psi(s + \delta s)\rangle := |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle$. Se il trasporto parallelo non è univoco allora ci sarà un altro vettore che soddisfa la (2.4.10) ma con $|\psi(s + \delta s)\rangle = |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle'$. Se la normalizzazione è preservata si ha che

$$|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle' = e^{i\mu}(|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle) \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.4.11)$$

con $\mu \rightarrow 0$ quando $\delta s \rightarrow 0$. Pertanto all'ordine più basso si ha

$$|\delta\psi\rangle' = i\mu |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle \quad (2.4.12)$$

Per la regola di trasporto parallelo $\langle \psi | \delta\psi \rangle = \langle \psi | \delta\psi \rangle' = 0$ pertanto, moltiplicando per $\langle \psi |$ la (2.4.12) si ha

$$i\mu \langle \psi | \psi \rangle = 0 \implies \mu = 0 \quad (2.4.13)$$

Pertanto il trasporto parallelo è unico.

Supponiamo che inizialmente lo stato sia l'autostato $|\psi(0)\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle$, pertanto richiedere la (2.4.5) equivale a richiede che il sistema evolva in maniera adiabatica, cioè che rimanga nell' n -esimo autostato. Differenziando la (2.4.5) si ha

$$\frac{d}{ds} |\psi(s)\rangle = i \frac{d\eta}{ds} |\psi(s)\rangle + e^{i\eta} \frac{d}{ds} |n(\mathbf{R}(s))\rangle \quad (2.4.14)$$

Dalla (2.4.9) si ha

$$\frac{d\eta}{ds} = i \langle n(\mathbf{R}(s)) | \frac{dn(\mathbf{R}(s))}{ds} \rangle \quad (2.4.15)$$

che definisce completamente la regola di trasporto parallelo compatibile con l'evoluzione adiabatica.

Occorre ora definire una connessione 1-forma a valori nell'algebra di Lie di $U(1)$ relativa al trasporto parallelo adiabatico. Data una sezione locale

$$\sigma_k : \mathbf{R} \in U_k \rightarrow |n(\mathbf{R})\rangle \quad (2.4.16)$$

possiamo definire la connessione 1-forma di Berry (2.3.16)

$$A_k = i \langle n, \mathbf{R} | d | n, \mathbf{R} \rangle \quad \mathbf{R} \in U_k \quad (2.4.17)$$

Nel fibrato che stiamo considerando possiamo definire una connessione locale a valori nell'algebra di Lie di $U(1)$, detta connessione adiabatica locale, come

$$\mathcal{A}_k = iA_k = - \langle n, \mathbf{R} | d | n, \mathbf{R} \rangle \quad \mathbf{R} \in U_k \quad (2.4.18)$$

Se $\mathbf{R} \in U_k \cap U_l$ abbiamo visto che esiste una trasformazione di gauge per gli autostati

$$|n\rangle_k \rightarrow |n\rangle_l = e^{i\alpha(\mathbf{R})} |n\rangle_k \quad (2.4.19)$$

che corrisponde a una trasformazione di gauge per la connessione adiabatica

$$\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_l = \mathcal{A}_k - id\alpha(\mathbf{R}) \quad (2.4.20)$$

Si può provare, come visto nel paragrafo sulle connessioni locali del primo capitolo, che esiste un'unica connessione 1-forma ω definita globalmente su tutto M il cui pullback rispetto alla sezione σ_k restituisce la connessione adiabatica locale \mathcal{A}_k . Possiamo anche definire una 2-forma curvatura locale

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}^i} \middle| \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}^j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}^j} \middle| \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}^i} \right\rangle \right) d\mathbf{R}^i \wedge d\mathbf{R}^j \quad (2.4.21)$$

che è gauge invariante e pertanto definita su tutto M .

Date queste premesse risulta facile riconoscere la corrispondenza tra la fase di Berry e un elemento del gruppo di ologonia della connessione adiabatica. Infatti se la curva C è chiusa, lo stato $|\psi(1)\rangle$ che viene trasportato parallelamente lungo γ , ritornerà sulla stessa fibra, cioè sullo stesso raggio di Hilbert, in cui si trovava nell'istante iniziale quando $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$. Dato che su una fibra gli elementi sono legati, tramite l'azione del gruppo di struttura del fibrato, da un elemento del gruppo di ologonia della connessione adiabatica, cioè in questo caso da un fattore di fase di $U(1)$, si ha

$$|\psi(1)\rangle = g \cdot |n(0)\rangle = e^{ih} |n(0)\rangle \quad (2.4.22)$$

Per la (1.3.57) l'ologonia è data da

$$g(\gamma) = e^{\oint_C \mathcal{A}} = e^{\oint_C iA} \quad (2.4.23)$$

Dato che la fase di Berry è data da

$$\gamma_n(C) = \oint_C A \quad (2.4.24)$$

si ha che

$$e^{i\gamma_n(C)} = g = \text{ologonia della curva } C \quad (2.4.25)$$

La fase di Berry è quindi una ologonia che si accumula dopo il trasporto parallelo su una curva chiusa di stati quantistici nello spazio di Hilbert.

Aharonov e Anandan generalizzarono la fase di Berry per percorsi non necessariamente adiabatici ottenendo una fase geometrica più generale [1][10][12]

$$\varphi_{geo} = \int_0^T \langle \psi(t) | i \frac{d}{dt} \psi(t) \rangle dt \quad (2.4.26)$$

Anche i ragionamenti di Aharonov e Anandan sono intrerpretabili con la teoria dei fibrati in cui la (2.4.26) rappresenta un'ologonia rispetto a una certa connessione. La differenza con la fase di Berry è che in tal caso il fibrato viene costruito sullo spazio proiettivo di Hilbert $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ e non sullo spazio dei parametri. Aharonov e Anandan quindi trovarono che si può associare una fase geometrica a un sistema anche in assenza di parametri esterni, richiedendo soltanto che il sistema evolva in maniera ciclica nello spazio proiettivo $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \cong |\psi\rangle \langle \psi|$. Nonostante tale differenza si trova che la fase di Aharonov-Anandan tende alla fase di Berry in presenza di parametri esterni che evolvono adiabaticamente.

2.5 Esempi di fasi di Berry in meccanica quantistica

2.5.1 Spinori in campo magnetico

Riproponiamo qui l'esempio di una particella di spin $1/2$ in un campo magnetico \mathbf{B} lentamente ruotante [12]. L'hamiltoniana è del tipo [12]:

$$H(\mathbf{B}) = \mu_B \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} \quad (2.5.1)$$

dove \mathbf{B} ha il ruolo di parametro esterno e $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$. Un campo magnetico che ruota nello spazio mantenendo costante il suo modulo può essere scritto in coordinate sferiche

$$\mathbf{B} = B(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.5.2)$$

Supponendo che a $t = 0$ la particella sia nell'autostato n -esimo se il campo magnetico varia lentamente, per il teorema adiabatico, la particella rimarrà nell' n -esimo autostato di $H(\mathbf{B})$ anche a istanti successivi.

L'equazione agli autovalori

$$H(\mathbf{B}) |n(t)\rangle = E_{n\pm}(B) |n(t)\rangle \quad (2.5.3)$$

viene risolta dalla teoria dei sistemi a due stati³ ottenendo [24]

$$\begin{aligned} |n_+(t)\rangle &:= |+(\theta, \phi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ |n_-(t)\rangle &:= |-(\theta, \phi)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

con autovalori

$$E_{\pm}(B) = \pm \mu B \quad (2.5.5)$$

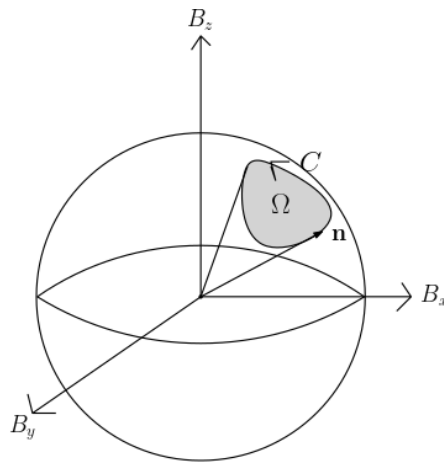


Figura 2.3: Traiettoria C descritta dalla direzione del campo magnetico \mathbf{n} nello spazio dei parametri S^2 . Ω è l'angolo solido sotteso da C rispetto al centro della sfera ($\mathbf{B}=0$).

Passiamo ora a calcolare connessione e curvatura. Dato che i parametri esterni sono le componenti di \mathbf{B} e dato che il campo magnetico varia soltanto la sua direzione muovendosi

³In tal caso i due stati possibili sono lo stato di spin "su" e spin "giù", cioè con terza componente dello spin pari a $+\frac{\hbar}{2}$ o $-\frac{\hbar}{2}$.

su una sfera, lo spazio dei parametri è identificato dalla sfera $M = S^2$ parametrizzata da (B, θ, ϕ) . Tuttavia gli autostati $|n_{\pm}\rangle$ non sono monodromi sulla sfera S^2 . Infatti per $\theta = 0$ dalla (2.5.4) si ha

$$\begin{aligned} |+(0, \phi)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |-(0, \phi)\rangle &= e^{i\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

e similmente per $\theta = \pi$ si ha

$$\begin{aligned} |-(\pi, \phi)\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |+(\pi, \phi)\rangle &= e^{i\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Affinchè gli autostati siano a singolo valore servono pertanto due mappe

$$|+\rangle : S^2 - \{(0, 0, -B)\} \rightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 \quad (2.5.8)$$

e

$$|-\rangle : S^2 - \{(0, 0, B)\} \rightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 \quad (2.5.9)$$

Il gradiente ∇_B nello spazio dei parametri si scrive come

$$\nabla_B = \frac{\partial}{\partial B} \hat{e}_B + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{B \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (2.5.10)$$

Inserendo la (2.5.10) in (2.3.16) si ottiene la connessione di Berry

$$\begin{aligned} A^+ &= i \langle +(\theta, \phi) | d | +(\theta, \phi) \rangle = \\ &= i \langle +(\theta, \phi) | \partial_\theta | +(\theta, \phi) \rangle d\theta + i \langle +(\theta, \phi) | \partial_\phi | +(\theta, \phi) \rangle d\phi = \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \cos \theta) d\phi \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

e analogamente

$$A^- = i \langle -(\theta, \phi) | d | -(\theta, \phi) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) d\phi \quad (2.5.12)$$

A^\pm coincidono con i potenziali 1-forme di un monopolo magnetico di carica $g = \mp 1/2$ posto in $\mathbf{B} = 0$. La curvatura di Berry è data da $F^\pm = dA^\pm$:

$$\begin{aligned} F^+ &= -\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ F^- &= \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Finalmente possiamo calcolare la fase di Berry

$$\begin{aligned} \gamma_\pm(C) &= \oint_C A^\pm = \\ &= \iint_S F^\pm = \mp \frac{1}{2} \iint_S \sin \theta d\theta \wedge d\phi = \mp \frac{1}{2} \Omega(C) \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

dove $\Omega(c)$ è il solito angolo solido sotteso da C sulla sfera S^2 in accordo con la (2.3.51) (Fig. 2.3).

In tale esempio si nota come la fase di Berry sia una fase geometrica piuttosto che topologica in quanto dipende solo dalla geometria del problema e non dalla sua topologia.

2.5.2 Effetto Aharonov-Bohm

Invarianza di gauge

Sappiamo che classicamente una particella di carica e e massa m immersa in un campo elettromagnetico \mathbf{E} e \mathbf{B} è soggetta alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.5.15)$$

con i campi elettrico e magnetico definiti dal potenziale scalare ϕ e potenziale vettore \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.5.16)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.5.17)$$

Tali campi, come anche la forza di Lorentz, sono invarianti per una cosiddetta trasformazione di gauge

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \quad \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.5.18)$$

con $\chi(\mathbf{x}, t)$ funzione scalare delle coordinate e del tempo. I potenziali formano il cosiddetto quadripotenziale $\bar{A} = (\phi, \mathbf{A})$ che possono definire la 1-forma $A = A_\mu dx^\mu$ che riassume le (2.5.18) in

$$A \longrightarrow A - d\chi \quad (2.5.19)$$

Pertanto classicamente i potenziali venivano considerati solo degli utili strumenti matematici senza alcun significato fisico. L'hamiltoniana che riproduce la forza di Lorentz è del tipo [24]

$$H = \frac{1}{2m} \left(p^2 - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi \quad (2.5.20)$$

con equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{e}{mc} \nabla \mathbf{A} \cdot \left(p - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) - e\nabla\phi \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

dove il momento canonico diventa

$$\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \quad (2.5.22)$$

La Meccanica Quantistica richiede il formalismo hamiltoniano pertanto nelle equazioni fondamentali compariranno i potenziali piuttosto che i campi. Si vedrà infatti che in Meccanica Quantistica i potenziali non sembrano essere solo entità matematiche senza alcun significato fisico. L'hamiltoniana quantistica di una particella di carica e e massa m in un campo elettromagnetico è data da [24]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi \quad (2.5.23)$$

Tale hamiltoniana non è gauge invariante, in quanto dipende dai potenziali e non dai campi, tuttavia tutti i valori fisici misurabili associati a tale hamiltoniana devono essere indipendenti dai potenziali. Anche l'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.5.24)$$

deve essere invariante per una trasformazione di gauge per i potenziali e ciò viene soddisfatto richiedendo che $|\psi(t)\rangle$ si trasformi come [24]

$$|\psi'(t)\rangle = \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right) |\psi(t)\rangle \quad (2.5.25)$$

Come visto nel primo capitolo, è possibile costruire in elettromagnetismo un fibrato principale con lo spazio-tempo come base e con gruppo di struttura $U(1)$. Lo spazio totale è dato dallo spazio di Hilbert e le fibre sono date dai raggi dello spazio di Hilbert. In tale ottica gli stati $|\psi(x, t)\rangle$ sono sezioni locali del fibrato e la (2.5.25) può considerarsi un cambio di gauge locale. L'1-forma $\mathcal{A} = iA$ si può interpretare come connessione locale in tale fibrato. Pertanto anche i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} potranno identificarsi nella curvatura locale in tale fibrato che si ritrova nel tensore elettromagnetico

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.26)$$

Effetto Aharonov-Bohm

Analizziamo ora un effetto elettromagnetico che può essere spiegato mediante fasi geometriche [24].

Si consideri un solenoide di raggio R molto lungo che produce un campo magnetico solenoidale e uniforme non nullo solo al suo interno. Il campo \mathbf{B} nullo all'esterno richiede che $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ pertanto, dato che il rotore di un gradiente è nullo, \mathbf{A} sarà dato da

$$\mathbf{A} = \nabla\varphi \quad (2.5.27)$$

con φ campo scalare. Si trova pertanto dal teorema fondamentale del calcolo

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_L d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (2.5.28)$$

dove L è un percorso che connette un punto \mathbf{x}_0 , punto scelto liberamente a causa della libertà di gauge dei potenziali, e \mathbf{x} . Chiaramente scegliendo un altro percorso L' cambierà anche φ e se anche L' connette \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} si ottiene la curva chiusa $\gamma = L' - L$ e si ha

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi'(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{L'} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} - \int_L d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \\ &= \oint_{\gamma} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \int_{S(\gamma)} d^2\mathbf{x} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \int_{S(\gamma)} d^2 \cdot \mathbf{B} = \Phi(S) = \text{cost.} \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

dove $\Phi(S)$ è il flusso di \mathbf{B} attraverso la superficie S , cioè il flusso attraverso il solenoide. Il flusso non si annulla quando L e L' possono essere deformate con continuità l'una

nell'altra senza incrociare l'area in cui è presente il campo \mathbf{B} . In tal caso la φ non è univocamente definita ma è un campo scalare a multi valore. Solitamente si sceglie un potenziale in coordinate cilindriche (r, z, ϕ) e per la simmetria del problema [12] sarà del tipo $\mathbf{A} = A^\phi \mathbf{e}_\phi$ con

$$A^\phi = \frac{\Phi}{2\pi r} \quad r \geq R \quad (2.5.30)$$

Tramite una trasformazione di gauge il potenziale vettore così definito si può annullare in quasi tutta la regione esterna al solenoide ma non dappertutto in quanto deve soddisfare la (2.5.29). Inoltre il potenziale vettore teoricamente non può essere annullato da una trasformazione di gauge (2.5.18) con $\chi = -\varphi$ perchè sono ammissibili solo trasformazioni di gauge con χ a singolo valore. Tuttavia se si ammette una trasformazione di gauge a multivalore del tipo

$$|\psi'(t)\rangle = \exp\left(-\frac{ie\varphi}{\hbar c}\right) |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}} |\psi(t)\rangle \quad (2.5.31)$$

è possibile eliminare il potenziale vettore dalla (2.5.23). Infatti $|\psi'(t)\rangle$ risolve l'equazione di Schrodinger libera

$$i\hbar \frac{d|\psi'(t)\rangle}{dt} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} |\psi'(t)\rangle \quad (2.5.32)$$

Tuttavia non abbiamo completamente risolto il problema. La natura a multivalore di φ rende a multivalore anche $|\psi'(t)\rangle$. Pertanto solo per

$$\frac{e\Phi}{\hbar c} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.5.33)$$

lo stato $|\psi'(t)\rangle$ sarà a singolo valore. Tale condizione viene sempre rispettata dai superconduttori.

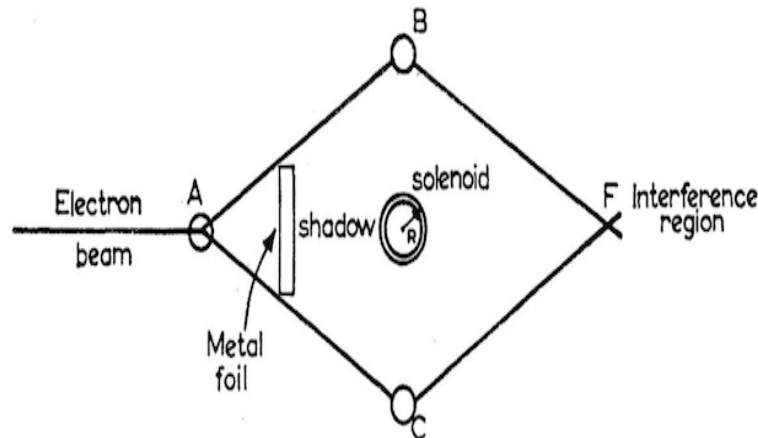


Figura 2.4: Fascio di elettroni che si divide, passa attorno al solenoide e poi si ricongiunge. Immagine presa da [2].

Aharonov e Bohm nel loro celebre articolo [2] proposero diversi esperimenti per misurare la differenza di fase $\Delta\varphi$. Uno di questi consiste nel prendere un fascio coerente di elettroni che si divide in due fasci ognuno dei quali gira attorno ad un solenoide e che poi si ricongiungono in un punto (Fig. 2.4). L'hamiltoniana del sistema è data da (2.5.23)

con $\phi = 0$ in quanto non sono presenti campi elettrici. Come già detto, le funzioni d'onda possono essere date da $\psi(t, \mathbf{x}) = e^{iS(\mathbf{x})}\psi_0(t, \mathbf{x})$ con ψ_0 soluzione in assenza di potenziali e campi⁴ e

$$S(\mathbf{x}) = \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (2.5.34)$$

che sono a singolo valore se lo spazio è semplicemente connesso. Tuttavia nell'esperimento proposto lo spazio non è semplicemente connesso (presenta un buco, cioè una zona impenetrabile, nella regione interna al solenoide) per cui tali funzioni non possono più essere soluzione dell'equazione di Schroedinger in quanto diventano a multivalore. Però lo stato del sistema è dato dalla somma $\psi_1 + \psi_2$ dove [2]

$$\psi_1(t, \mathbf{x}) = e^{iS_1(\mathbf{x})}\psi_{0,1}(t, \mathbf{x}) \quad \psi_2(t, \mathbf{x}) = e^{iS_2(\mathbf{x})}\psi_{0,2}(t, \mathbf{x}) \quad (2.5.35)$$

sono le soluzioni relativi ai due fasci di elettroni. Dato che i due fasci rimangono in regioni semplicemente connesse e dato che risolvono l'equazione di Schroedinger nelle rispettive regioni si può utilizzare la soluzione $\psi_1 + \psi_2$. L'interferenza tra i due fasci di elettroni dipenderà dalla differenza di fase [2]

$$\begin{aligned} \Delta S = S_2(\mathbf{x}) - S_1(\mathbf{x}) &= \frac{e}{\hbar c} \left(\int_{L_2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} + \int_{-L_1} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \right) \\ &= \frac{e}{\hbar c} \left(\oint_{L_2 \cup L_1} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \right) = \\ &= \frac{e}{\hbar c} \Phi \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

Tale differenza di fase è gauge invariante in quanto è proporzionale al flusso Φ gauge invariante. Pertanto variando il campo magnetico è possibile variare il flusso e di conseguenza anche spostare le frange di interferenza dell'esperimento. Si osservi come il risultato ottenuto sia simile al risultato ottenuto per la fase accumulata da una carica che si muove in un campo di monopolo magnetico. Infatti un campo centrale di monopolo può essere generato da un solenoide molto sottile con un'estremità che va all'infinito. All'interno del solenoide il potenziale vettore sarebbe singolare e quindi coinciderebbe con la corda di Dirac.

Studiando tale effetto si è visto come si possono avere effetti fisici misurabili in regioni dove il campo magnetico è nullo ma non il potenziale vettore. Nell'articolo Aharonov e Bohm proposero anche un analogo esperimento per il caso elettrico in cui si creava una differenza di fase dovuta alla presenza di un potenziale elettrico in assenza di campo elettrico. Pertanto si conclude che o i campi magnetici (e elettrici) agiscono non localmente, cosa che le attuali teorie relativistiche escludono, oppure i potenziali non sono solo oggetti matematici ma sono entità fisiche non banali. Forse i potenziali, in meccanica quantistica, sono le entità fisiche fondamentali da cui derivare per differenziazione i relativi campi. Tuttavia alcuni discordano con quest'ultima affermazione perchè, dato che le quantità fisiche osservabili sono invarianti per una trasformazione di gauge, non è possibile capire in quale tipo gauge ci troviamo.

Nel 1980 Mead [21] parlò di "effetto Aharonov-Bohm molecolare" per spiegare come la degenerazione dei livelli energetici degli elettroni provochi uno spostamento nello spettro

⁴Abbiamo invertito la situazione in (2.5.31).

vibrazionale dei nuclei. Egli trovò che in approssimazione Born-Oppenheimer l'hamiltoniana nucleare assomiglia all'hamiltoniana per una carica immersa in un potenziale magnetico come nel caso dell'effetto Aharonov-Bohm. Pertanto i nuclei si comportano come delle particelle cariche immerse in un campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Quando il nucleo compie un percorso chiuso la sua funzione d'onda accumulerà una fase geometrica proporzionale al flusso di tale campo magnetico.

Prove sperimentali dell'effetto di Aharonov-Bohm

Le prime prova sperimentali riguardanti l'effetto Aharonov-Bohm furono fatte nel 1960 da Chambers e successivamente da Tonomura nel 1986. Nell'esperimento di Chambers un fascio di elettroni incide su un biprisma realizzato con una fibra di quarzo alluminizzato con due placche metalliche ai lati collegate a massa. Il biprisma divide il raggio in due parti con un angolo che dipende dal potenziale a cui è tenuta la fibra e i due fasci poi vengono riuniti i due fasci e fatti interferire. Il campo magnetico viene creato da un filamento di ferro a punta conica che produce pertanto un flusso variabile nella direzione z . Chambers vide che le frange di interferenza si inclinano in corrispondenza della punta. Tonomura riuscì a migliorare l'esperimento di Chambers in quanto riuscì a eliminare quei campi residui che si creavano nelle zone in cui non ci sarebbero dovuti essere e a schermare più efficacemente il flusso del fascio. Per farlo utilizzò un solenoide toroidale in quanto in esso le linee di campo si richiudono all'interno del toro stesso. Per schermare il campo magnetico invece ricoprì il solenoide di uno strato di niobio, che si comporta da superconduttore al di sotto della temperatura critica di $T=9.3$ K e che per effetto Meissner permette di intrappolare il campo magnetico nel solenoide e da uno strato di rame che vieta agli elettroni di penetrare nel solenoide. Dei due fasci di elettroni uno veniva fatto passare internamente l'altro esternamente al solenoide e poi fatti interferire. Per i semiconduttori vale la quantizzazione del flusso

$$\Phi = \frac{nhc}{2e} \quad (2.5.37)$$

pertanto dalla (2.5.36) si ha che la differenza di fase sarà

$$\Delta S = \pi n \quad (2.5.38)$$

che implica uno spostamento delle frange per n dispari come Tonomura osservò.

Fase di Aharonov-Bohm come fase di Berry

L'effetto di Aharonov-Bohm come la fase di Berry può essere interpretato secondo la teoria dei fibrati nel senso che la differenza di fase che si crea nell'effetto Aharonov-Bohm può essere interpretata come una ologonomia in un certo fibrato principale. La differenza con il caso di Berry consiste nella base del fibrato: con Berry si aveva lo spazio dei parametri mentre con Aharonov-Bohm si ha lo spazio-tempo \mathbb{R}^4 .

Berry [6] propose il seguente esperimento per interpretare l'effetto Aharonov-Bohm. Si consideri un campo magnetico confinato in un solenoide di larghezza infinitesima diretto lungo l'asse z con flusso Φ e una carica q costretta a muoversi in una scatola che sta a una distanza radiale \mathbf{R} (identificata dal centro di massa della scatola) dal tubo.

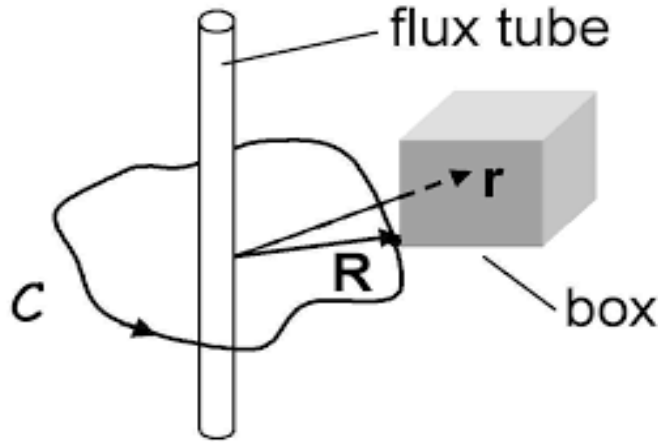


Figura 2.5: Scatola che ruota attorno al tubo. Immagine presa da [11].

Il potenziale elettrico $A_0 = 0$ in quanto è presente solo un campo magnetico e pertanto l'hamiltoniana del sistema sarà [11][6]

$$\hat{H} = \hat{H} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{R} \right) \quad (2.5.39)$$

In assenza di potenziale le funzioni d'onda di tale hamiltoniana saranno del tipo $\psi_n(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{R})$ con energie E_n indipendenti da \mathbf{R} , mentre per un potenziale non nullo le autofunzioni nella rappresentazione delle coordinate saranno del tipo

$$\langle \mathbf{r} | n, \mathbf{R} \rangle = e^{i \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')} \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (2.5.40)$$

per le (2.5.31). Gli autovalori relativi a tali funzioni d'onda sono le stesse del caso senza \mathbf{A} perchè è sempre possibile trovare una trasformazione di gauge che annulli il potenziale vettore nella scatola, ma non dappertutto. Le funzioni d'onda sono a singolo valore per \mathbf{r} e localmente per \mathbf{R} per cui possono essere delle buone soluzioni localmente. Supponiamo ora di trasportare la scatola su un percorso C (fig. 2.5) chiuso che contiene il flusso. Non c'è bisogno che tale trasporto sia adiabatico perchè si ha sempre $\langle m, \mathbf{R} | \frac{d}{dt} | n, \mathbf{R} \rangle = 0$ per $m \neq n$. Possiamo quindi supporre che alla fine del percorso la funzione d'onda abbia accumulato una fase geometrica del tipo della fase di Berry (2.3.36). Lo spazio dei parametri sarà chiaramente l'insieme delle posizioni \mathbf{R} della scatola che coinciderà con \mathbb{R}^3 con l'esclusione del tubo. La connessione sarà data da

$$\mathbf{A}^n(\mathbf{R}) = -Im \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \quad (2.5.41)$$

che espandendola nella rappresentazione delle coordinate $\mathbb{1} = \int_{scatola} d^3r |r\rangle \langle r|$ diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) &= -Im \int_{scatola} d^3r \langle n(\mathbf{R}) | r \rangle \nabla_{\mathbf{R}} \langle r | n(\mathbf{R}) \rangle = \\ &= -Im \int_{scatola} d^3r \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \left[\frac{iq}{\hbar c} A(\mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] = \\ &= \frac{q}{\hbar c} A(\mathbf{R}) - Im \int_{scatola} d^3r \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

Per la normalizzazione della funzione d'onda si ha

$$\int_{scatola} d^3r \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = 1 \quad (2.5.43)$$

pertanto

$$0 = \nabla_{\mathbf{R}} \int d^3r \psi_n^* \psi_n = \int d^3r [\psi_n^* \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n + \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n^* \psi_n] \quad (2.5.44)$$

da cui

$$\int d^3r \psi_n^* \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n = \frac{1}{2} \int d^3r [\psi_n^* \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n - \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n^* \psi_n] \quad (2.5.45)$$

Ora, utilizzando il teorema di Stokes si ha

$$\begin{aligned} \oint_C d\mathbf{R} \cdot \int d^3r \psi_n^* \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n &= \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \times \int d^3r \psi_n^* \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n = \\ &= \frac{1}{2} \int_S d\mathbf{S} \cdot \int d^3r \nabla_{\mathbf{R}} \times [\psi_n^* \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n - \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n^* \psi_n] = \\ &= \frac{1}{2} \int_S d\mathbf{S} \cdot \int d^3r [(\nabla_{\mathbf{R}} \psi_n^*) \times (\nabla_{\mathbf{R}} \psi_n) - (\nabla_{\mathbf{R}} \psi_n^*) \times (\nabla_{\mathbf{R}} \psi_n)] = 0 \end{aligned} \quad (2.5.46)$$

La fase di Berry sarà allora

$$\gamma_n(C) = \oint_C \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar c} \Phi \quad (2.5.47)$$

dove si ritrova la differenza di fase di Aharonov-Bohm (2.5.36). Tale fase vale anche per sovrapposizione di autostati e quindi per pacchetti d'onda. Essa è un esempio di fase topologica in quanto, a differenza della fase di Berry, non dipende dal percorso C ma solo dal numero di avvolgimenti N che il percorso fa attorno al tubo che è una caratteristica di natura solo topologica [12]:

$$\gamma_n(C) = \frac{q}{\hbar c} 2\pi N \Phi \quad (2.5.48)$$

L'equazione di Schroedinger viene risolta dalla funzione d'onda $\psi(t, \mathbf{x})$ definita su tutto lo spazio-tempo. Ricordiamo che in elettromagnetismo possiamo costruire un fibrato principale $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4, \pi, U(1))$ che ha come base \mathbb{R}^4 con gruppo $U(1)$ in cui le sezioni sono le $\psi(t, \mathbf{x})$, di cui prendiamo solo quelle corrispondenti allo spazio di Hilbert \mathcal{H} delle funzioni quadrato sommabili in \mathbb{R}^3 . Il potenziale elettromagnetico $A_\mu(t, \mathbf{x})$ definisce le componenti della connessione locale nel fibrato a valori nell'algebra di Lie di $U(1)$

$$\mathcal{A} = iA_\mu dx^\mu \quad (2.5.49)$$

Dalle teorie di gauge $U(1)$ [12] sappiamo che la derivata covariante associata a tale connessione locale si può scrivere come $\nabla = d + \mathcal{A}$. Consideriamo per semplicità che la scatola giri attorno al solenoide disegnando una circonferenza S^1 ($r = 1$) parametrizzata da θ . Pertanto dalla (2.5.30) la connessione si potrà scrivere come

$$\mathcal{A} = i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \quad (2.5.50)$$

Richiedendo che la funzione d'onda ψ venga trasportata parallelamente lungo S^1 per la (1.3.61) si ha

$$\nabla \psi(\theta) = \left(d + i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \right) \psi(\theta) = 0 \quad (2.5.51)$$

la cui soluzione è data da [19]

$$\psi(\theta) = e^{-i\Phi\theta/2\pi} \quad (2.5.52)$$

Il trasporto parallelo in tale fibrato sarà

$$\Gamma : \pi^{-1}(\theta = 0) \rightarrow \pi^{-1}(\theta = 2\pi) = \pi^{-1}(\theta = 0) \quad (2.5.53)$$

cioè

$$\Gamma : \psi(0) \rightarrow e^{-i\Phi} \psi(0) \quad (2.5.54)$$

in cui si vede che dopo un giro si crea un accumulo di fase fase proporzionale al flusso. Tale fase definisce univocamente un elemento del gruppo di ologonomia del fibrato

$$e^{i \oint_C \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}} = e^{i \frac{q}{\hbar c} \Phi}. \quad (2.5.55)$$

2.6 Metodi di misura

La fase di Berry è una caratteristica fisica di sistemi quantistici e può essere misurata, cosa che è stata fatta negli ultimi anni sempre attraverso esperimenti di interferenza [21][12].

Si consideri un sistema preparato nello stato $|n\rangle$ a $t = 0$. Si divida il sistema in due sottosistemi uno dei quali viene fatto evolvere ciclicamente e adiabaticamente mentre l'altro rimane immutato. Allora entrambi i sottosistemi acquisiranno una fase dinamica θ_1 e θ_2 ma il sottosistema ciclico acquisirà anche una fase di Berry $\gamma(C)$ che dipenderà dal percorso C seguito dai parametri nel loro spazio. Se dopo un certo periodo i due sottosistemi vengono fatti interferire l'intensità della loro sovrapposizione sarà

$$I^2 \propto |[e^{i(\theta_1 + \gamma(C))}] + e^{i\theta_2}|^2 \quad (2.6.1)$$

che dipenderà dalla fase geometrica $\gamma(C)$. Pertanto conoscendo le fasi geometriche si può misurare $\gamma(C)$ guardando gli spostamenti delle frange nella figura di interferenza. Tale metodo è del tipo "1 stato- 2 hamiltoniane".

Tuttavia è possibile anche utilizzare il metodo "2, o più, stati- 1 hamiltoniana" per misurare la fase di Berry. Sia a $t = 0$ lo stato iniziale

$$|\psi(0)\rangle = a_n |n\rangle + a_m |m\rangle \quad (2.6.2)$$

con $|n\rangle$ e $|m\rangle$ autostati dell'hamiltoniana del sistema $H(0)$. Se l'hamiltoniana viene fatta variare adiabaticamente e ciclicamente tale che $H(T) = H(0)$, lo stato al tempo T per il teorema adiabatico sarà ancora la sovrapposizione degli stessi autostati con l'aggiunta delle fasi geometriche e dinamiche

$$|\psi(T)\rangle = a_n e^{i(\theta_n + \gamma_n(C))} |n\rangle + a_m e^{i(\theta_m + \gamma_m(C))} |m\rangle \quad (2.6.3)$$

Sia dato ora un osservabile \hat{A} che non commuti con $H(T)$ e che viene misurato a $t = T$. Allora il suo valore medio sarà

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(T) | \hat{A} | \psi(T) \rangle = |a_n|^2 \langle n | \hat{A} | n \rangle + |a_m|^2 \langle m | \hat{A} | m \rangle + 2Re \left(a_m a_n^* \langle n | \hat{A} | m \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m + \gamma_n(C) - \gamma_m(C))} \right) \quad (2.6.4)$$

In tal modo è possibile misurare la differenza delle fasi di Berry $\gamma_n(C) - \gamma_m(C)$ conoscendo le fasi dinamiche θ_n e θ_m .

2.7 Fase di Pancharatman

Anche la luce accumula fasi geometriche. Ad accorgersene fu Pancharatnam che nel 1956 con il suo articolo [20] sulla polarizzazione della luce fu il primo a trovare un esempio di fase geometrica. Egli trovò che variando ciclicamente la polarizzazione di una fascio di luce lo stato finale accumulava una fase rispetto allo stato iniziale. Tale fase è di natura soltanto geometrica e può essere misurata in fenomeni di interferenza. In seguito Berry [7][5] riprese le idee di Pancharatnam per collegarle alla sua fase adiabatica.

Polarizzazione e sfera di Poincarè

Un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse z , è descritta da [12]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}) e^{i(\mathbf{kx} - \omega t)} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.7.1)$$

con $\omega = k/c$ e i valori $E_x, E_y \in \mathbb{C}$ determinano lo stato di polarizzazione dell'onda che consiste nel considerare come varia la direzione del campo elettrico⁵:

1. se $E_x, E_y \neq 0$ e se $E_x/E_y \in \mathbb{C}$ la polarizzazione è ellittica,
2. se $E_x, E_y \neq 0$ e se $E_x/E_y \in \mathbb{R}$ la polarizzazione è lineare,
3. se $E_x = 0$ o $E_y = 0$ la polarizzazione è circolare.

Si può definire il vettore polarizzazione unitario $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^2$

$$\mathbf{d} = (d_x, d_y) := \left(\frac{E_x}{|\mathbf{E}|}, \frac{E_y}{|\mathbf{E}|} \right) \quad \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{d} = 1 \quad (2.7.2)$$

o nella notazione di Dirac si ha

$$\mathbf{d} \rightarrow |d\rangle = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \quad \langle d|d\rangle = 1 \quad (2.7.3)$$

Per la normalizzazione $\langle d|d\rangle = 1$ si ha che $\mathbf{d} \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Lo stato di polarizzazione è univocamente definito dal vettore

$$\mathbf{s} := \langle d|\boldsymbol{\sigma}|d\rangle \quad (2.7.4)$$

con $\boldsymbol{\sigma}$ vettore operatoriale che ha come componenti le matrici di Pauli. Chiaramente si ha che

$$\langle d|d\rangle = 1 \implies |\mathbf{s}| = 1 \quad (2.7.5)$$

pertanto $\mathbf{s} \in S^2$. Dati due stati di polarizzazione definiti a meno di una fase

$$|d_1\rangle = e^{i\lambda} |d_2\rangle \quad (2.7.6)$$

essi definiscono lo stesso stato di polarizzazione, infatti

$$\langle d_1|\boldsymbol{\sigma}|d_1\rangle = \langle d_2|\boldsymbol{\sigma}|d_2\rangle \quad (2.7.7)$$

⁵Considerare il campo elettrico al posto del campo magnetico è solo una convenzione.

Pertanto gli stati di polarizzazione coincidono univocamente con un punto della sfera S^2 e sono quindi le classi di equivalenza appartenenti allo spazio quoziente

$$S^3/U(1) = \mathbb{C}P^1 \cong S^2 \quad (2.7.8)$$

Pertanto la mappa proiettiva

$$\mathbf{d} \in S^3 \rightarrow [\mathbf{d}] := \mathbf{s} \in S^2 \quad (2.7.9)$$

definisce il fibrato di Hopf. La sfera S^2 su cui sono definiti i vettori \mathbf{s} è chiamata sfera di Poincarè [18]. In tale sfera i punti dell'equatore coincidono con polarizzazioni lineari, i poli Nord e Sud coincidono con polarizzazioni circolari destrorsa e sinistrorsa, mentre tutti gli altri punti coincidono con polarizzazioni ellittiche.

Lo spazio degli stati di polarizzazione di un'onda piana monocromatica è isomorfo allo spazio di fase di un sistema a due stati. Infatti ogni punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ sulla sfera di Poincarè definisce l'hamiltoniana di un sistema a due stati [5]

$$H(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & z \end{bmatrix} \quad (2.7.10)$$

i cui autovettori $|A\rangle$ identificano la polarizzazione $|d\rangle$. La polarizzazione di un'onda, oltre alla fase e all'ampiezza, è un grado di libertà ulteriore di un sistema ondulatorio che può portare a effetti misurabili come quello della fase geometrica.

Connessione di Pancharatnam

Siano $|A\rangle$ e $|B\rangle$ due stati di polarizzazione di due onde piane monocromatiche. L'intensità della loro sovrapposizione sarà data da

$$I = (\langle A| + \langle B|)(|A\rangle + |B\rangle) = |A|^2 + |B|^2 + 2\text{Re} \langle A|B\rangle \quad (2.7.11)$$

Pancharatnam fu il primo a chiedersi come definire la fase relativa tra due stati di polarizzazione diversa non ortogonali. Per stati ortogonali tale scelta è arbitraria come la scelta di fase per stati ortogonali in meccanica quantistica in quanto l'intensità totale è la somma delle singole intensità. Egli definì la fase relativa tra due stati di polarizzazione $|A\rangle$ e $|B\rangle$ come la fase del prodotto scalare tra i due stati

$$\langle A|B\rangle = re^{i\alpha} \implies \alpha := \text{fase relativa tra } |A\rangle \text{ e } |B\rangle. \quad (2.7.12)$$

Pancharatnam definì anche il concetto di massimo parallelismo secondo cui due onde piane sono dette in fase se l'intensità della sovrapposizione è massima che equivale a richiedere che

$$\langle A|B\rangle > 0 \text{ e reale.} \quad (2.7.13)$$

Tale relazione tra due stati non ortogonali e non necessariamente vicini corrisponde a definire una procedura di trasporto parallelo nella sfera di Poincarè e quindi una connessione nel fibrato di Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. Tale connessione si chiama Connessione di Pancharatnam. Se si considera un percorso sulla sfera di Poincarè il problema del trasporto parallelo consiste nel trovare un modo per trasportare $|A\rangle$ lungo un percorso in S^3 tale che si proietti nel percorso dato nella sfera di Poincarè (spazio base). Siano $|A\rangle$ e $|A + dA\rangle$ due stati vicini. All'ordine più basso in dA la normalizzazione di $|A\rangle$ implica che $\langle A|dA\rangle + \langle dA|A\rangle = 0$

che implica, come abbiamo visto con la fase di Berry, che la regola di trasporto parallelo è definita da

$$\langle A|dA\rangle = 0 \quad (2.7.14)$$

in analogia con la (2.4.9). Pertanto il trasporto parallelo nel fibrato di Hopf è definito dalla condizione

$$\omega(|\dot{A}\rangle) = 0 \quad (2.7.15)$$

dove $|\dot{A}\rangle$ è il vettore tangente al percorso in S^3 e ω è la connessione 1-forma del fibrato

$$\omega = -i \langle A|dA\rangle \quad (2.7.16)$$

Se parametrizzo la sfera di Poincarè con gli angoli (θ, δ) il vettore polarizzazione lo posso scrivere come [18]

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\chi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\chi} e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (2.7.17)$$

dove χ è un angolo arbitrario.

Se considero il trasporto parallelo lungo l'equatore della sfera di Poincarè ($\theta = \pi/2$) la (2.7.14) diventa

$$d\chi + \frac{1}{2}d\delta = 0 \quad (2.7.18)$$

mentre lungo un meridiano ($\delta = \text{const.}$) si ha

$$d\chi = 0 \quad (2.7.19)$$

Si consideri ora il trasporto parallelo tra due punti della sfera $|A\rangle$ e $|A'\rangle$ lungo una geodetica, che sulla sfera consiste nel cerchio di massimo diametro che connette i due punti. Per la simmetria della sfera posso prendere tali due punti lungo l'equatore identificati dalle coordinate $(\pi/2, \delta, \chi)$ e $(\pi/2, \delta', \chi')$. Dalla (2.7.18) si ha

$$\Delta\chi = \chi' - \chi = -\frac{1}{2}\Delta\delta = -\frac{1}{2}(\delta' - \delta) \quad (2.7.20)$$

Inoltre si ha [18]

$$\langle A|A'\rangle = \frac{1}{2}e^{i\Delta\chi} \left(1 + e^{i\Delta\delta} \right) = \cos\left(\frac{\Delta\delta}{2}\right) \quad (2.7.21)$$

Pertanto quando $\left(\frac{\Delta\delta}{2}\right) < \pi$, e ciò si verifica lungo l'arco più corto della geodetica, il prodotto scalare $\langle A|A'\rangle$ sarà reale e positivo e $|A\rangle$ e $|A'\rangle$ saranno in fase. Pertanto abbiamo visto come la condizione di massimo parallelismo di Pancharatnam coincide con il richiedere il trasporto parallelo di uno stato $|A\rangle$ lungo l'arco più corto di una geodetica.

Altra caratteristica importante della connessione di Pancharatnam è che essa non è transitiva, cioè se $|B\rangle$ è in fase con $|A\rangle$ e $|C\rangle$ è in fase con $|B\rangle$ allora in generale $|C\rangle$ non sarà in fase con $|A\rangle$.

Per vederlo consideriamo un percorso chiuso ABC nella sfera di Poincarè formato da tratti di geodetica tali che A e B stiano sull'equatore e C al polo Nord (Fig. 2.6). Dopo l'intero ciclo un'onda piana avrà acquistato una fase geometrica

$$\Delta\chi = -\frac{1}{2}\Delta\delta = -\frac{1}{2}\Omega_{ABC} \quad (2.7.22)$$

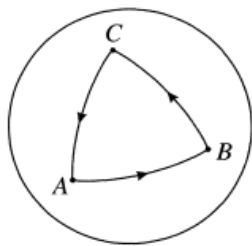


Figura 2.6: Triangolo ABC di geodetiche nella sfera di Poincaré. Immagine presa da [21].

con $\Delta\delta = \delta(B) - \delta(A)$. Ma allora $-\Delta\chi$ sarà l'angolo solido Ω_{ABC} sotteso dal triangolo. Lo stato $|C\rangle$ sarà in fase con il vettore $|A'\rangle$ che definisce lo stesso stato di polarizzazione di $|A\rangle$, cioè $|A'\rangle = e^{i\varphi} |A\rangle$. Allora dopo il ciclo la fase accumulata sarà

$$\langle A|A'\rangle := \varphi = -\frac{1}{2}\Omega_{ABC} \quad (2.7.23)$$

detta fase di Pancharatnam.

Tale fase in quanto dipende solo dall'angolo solido è una fase geometrica, e, come ogni fase geometrica, può essere osservata tramite interferenza. Infatti considerando un fascio di luce con polarizzazione $|A\rangle$ se dividiamo il fascio in due fasci di polarizzazione $|B\rangle$ e $|C\rangle$ che poi vengono riportati allo stesso stato di polarizzazione D e fatti interferire i vettori polarizzazione $|D\rangle$ e $|D'\rangle$ non coincideranno ma differiranno in fase per metà dell'angolo solido che il poligono ABCD disegna sulla sfera di Poincaré (Fig. fig. 2.7 on the following page). La figura di interferenza dipenderà da tale angolo solido. Questo esperimento è analogo all'effetto di Aharonov-Bohm in cui due fasci elettronici accumulano una fase geometrica proporzionale al flusso magnetico che circondano. Per la luce polarizzata l'analogo del flusso magnetico consiste nell'angolo solido sotteso dalla curva nella sfera di Poincaré in quanto equivale al flusso del campo di un'ipotetico monopolo di carica $-1/2$ situato al centro della sfera [12][7][5]. Abbiamo infatti visto che per un particella di spin $n\hbar$ la fase geometrica consisteva in $-n\Omega$ e corrispondeva al flusso del campo di un monopolo di carica $-n$. Il risultato da noi ottenuto per la fase di Pancharatnam tuttavia coincide con il risultato di una particella di spin $1/2$ nonostante i fotoni abbiano spin 1 e quindi dovrebbero portare a una fase geometrica pari a $\pm\Omega$. Tale contraddizione si risolve considerando il triangolo ABC formato dai punti A, B e C che stanno a una stessa distanza sull'equatore e che quindi corrispondono a polarizzazioni lineari ruotate di $\pi/3$. L'angolo solido di questo triangolo è 2π pertanto la fase relativa tra $|A\rangle$ e $|A'\rangle$ sarà π come dovrebbe essere perchè una rotazione di π della polarizzazione lineare coincide a un'inversione della stessa, analogamente all'inversione di uno spinore $1/2$ per una rotazione di 2π . In aggiunta a ciò si riporta che un angolo solido di $\pm\Omega$ è relativo allo spazio delle direzioni di propagazione della luce con una polarizzazione fissata mentre l'angolo solido $-\Omega/2$ è relativo alla sfera di Poincaré con una direzione di propagazione fissata per cui in tal caso ci sono solo due stati (le componenti di $|d\rangle$).

2.8 Fase geometrica per evoluzioni generali

Vediamo ora come sia possibile trovare una fase geometrica nella forma della fase di Berry anche per evoluzioni non cicliche e non adiabatiche [9]. Sia dato un sistema quantistico

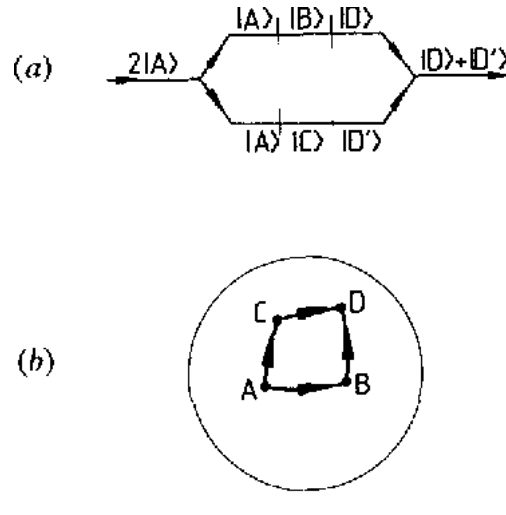


Figura 2.7: Effetto di Aharonov-Bohm per la luce polarizzata: a) due fasci di luce vengono divisi e poi fatti interferire; b) rappresentazione dello stesso problema sulla sfera di Poincarè. Immagine presa da [7].

il cui stato normalizzato $|\psi\rangle$ evolve secondo l'equazione di Schrodinger $i\hbar(d/dt)|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$. Si consideri il nuovo stato

$$|\phi(t)\rangle = e^{i \int_0^t h(t') dt'} |\psi(t)\rangle \quad (2.8.1)$$

con

$$h(t') = \text{Re} \langle \psi(t') | \hat{H}(t') | \psi(t') \rangle \quad (2.8.2)$$

Il ruolo di $|\phi\rangle$ è quello di eliminare attraverso una trasformazione di gauge la fase dinamica per poterci concentrare esclusivamente sulla fase geometrica. La $|\phi\rangle$ soddisfa la

$$i\hbar(d/dt)|\phi\rangle = (\hat{H}(t) - h(t))|\phi\rangle \quad (2.8.3)$$

che contratta con $\langle\phi|$ porta alla regola del trasporto parallelo per gli stati

$$\text{Im} \langle \phi(t) | \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = 0 \quad (2.8.4)$$

Tale regola di trasporto parallelo consente di definire una connessione, detta connessione naturale, nel fibrato principale $\pi : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ con gruppo di struttura $U(1)$, le cui fibre sono i raggi dello spazio di Hilbert. Come sappiamo, una connessione associa a ogni vettore in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ un vettore orizzontale. Un vettore $|X\rangle$ in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ è considerato orizzontale se perpendicolare, rispetto al prodotto scalare in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, al vettore $|\phi\rangle$ che genera la fibra in cui sta $|X\rangle$:

$$\langle \phi | X \rangle = 0 \quad (2.8.5)$$

Pertanto data una curva $t \rightarrow |\phi(t)\rangle \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ il vettore tangente sarà $|\dot{\phi}(t)\rangle$ e la curva sarà orizzontale se

$$\langle \phi(t) | \frac{d\phi(t)}{dt} \rangle = 0 \quad (2.8.6)$$

Per la normalizzazione $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ si ha $\text{Re} \langle \phi | \phi \rangle = 0$ quindi per avere una curva orizzontale basta richiedere

$$\text{Im} \langle \phi(t) | \frac{d\phi(t)}{dt} \rangle = 0 \quad (2.8.7)$$

Nonostante la connessione sia a valori nell'algebra di Lie definiamo per semplicità una connessione a valori reali [9]:

$$A_\phi = \text{Im} \langle \phi(t) | \frac{d\phi(t)}{dt} \rangle \quad (2.8.8)$$

con $|\phi(t)\rangle$ curva in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Per una trasformazione di gauge $|\phi(t)\rangle \rightarrow e^{i\alpha} |\phi(t)\rangle$ la connessione si trasforma come il solito potenziale [9]

$$A_\phi \rightarrow A_\phi + \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.8.9)$$

Se $|\psi(t)\rangle$ è una soluzione ciclica dell'equazione di Schrodinger, cioè ritorna sulla stessa fibra dopo un tempo T , nello spazio proiettivo si avrà una curva chiusa $r(t)$. Data tale curva in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ sappiamo che la curva $|\phi(t)\rangle$ corrispondente, cioè il sollevamento orizzontale, sarà quella lungo cui la connessione A_ϕ si annulla. Consideriamo l'integrale

$$\gamma = \oint A_\phi dt \quad (2.8.10)$$

lungo la curva $|\phi(t)\rangle$ in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ chiusa dal segmento verticale sulla fibra che unisce $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(T)\rangle$. γ sarà diversa da zero solo nella parte verticale perchè nel resto del percorso la connessione si annulla in quanto si ha un sollevamento orizzontale. Per la (2.8.9) la γ sarà un'invariante di gauge e rappresenterà la fase di Berry per qualsiasi evoluzione ciclica. Si noti che non è stata richiesta nessuna condizione sull'adiabaticità.

In un'evoluzione generale del sistema lo stato non ritornerà nel raggio iniziale. Abbiamo quindi bisogno di un metodo per confrontare stati appartenenti a diverse fibre. I ragionamenti di Pancharatnam sulla fase relativa hanno una controparte anche in meccanica quantistica, come fecero notare Samuel e Bhandari in [9].

Infatti dati due stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ non ortogonali la loro fase relativa sarà la fase del prodotto scalare $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ e saranno in fase se $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ è reale e positivo. Chiaramente tale relazione non è transitiva come nel caso precedente. Tale definizione di fase relativa definisce una connessione tra due qualsiasi stati non ortogonali nel fibrato costruito sullo spazio proiettivo $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ in aggiunta alla connessione definita da (2.8.8) [12].

Sia $|\phi(t)\rangle$ una curva in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ e $|u\rangle$ il suo vettore tangente. Sia $|u'\rangle$ la proiezione di $|u\rangle$ ortogonale alla fibra

$$|u'\rangle = |u\rangle - |\phi\rangle \frac{[\langle \phi | u \rangle - \langle u | \phi \rangle]}{2} = \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle - iA_\phi |\phi(t)\rangle \quad (2.8.11)$$

Il vettore $|u'\rangle$ può essere usato per definire una metrica in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$:

$$dl^2 = \langle u' | u' \rangle dt^2 \quad (2.8.12)$$

che coincide con la distanza tra i punti $\pi(|\phi(t)\rangle)$ e $\pi(|\phi(t+dt)\rangle)$. Tale metrica definisce le geodetiche in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ che si trovano utilizzando il principio di minima azione per l'integrale $\int \langle u' | u' \rangle dl$ con l come parametro affine. Si ottiene così l'equazione per le geodetiche nello spazio proiettivo [9]

$$\frac{d}{dl} |u'\rangle - iA_\phi |u'\rangle = 0 \quad (2.8.13)$$

Tale equazione è gauge covariante, cioè ogni geodetica rimane tale per ogni trasformazione di gauge. Ogni curva $|\phi\rangle$ che soddisfa tale equazione si proietta in geodetiche in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$

e tale curva verrà detta geodetica nello spazio di Hilbert $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Per ogni due elementi dello spazio proiettivo $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ relativi a stati non ortogonali esiste un'unica geodetica che li unisce, mentre i suoi lift saranno geodetiche in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ma non saranno uniche. Tali geodetiche permettono di esprimere la fase di Pancharatnam per mezzo di integrali di linea.

Teorema 2.8.1. *Siano due stati $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ non ortogonali con differenza di fase β secondo la regola di Pancharatnam. Se $|\phi(t)\rangle$ è una geodetica che unisce $|\phi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$ e $|\phi(1)\rangle = |\phi_2\rangle$ allora si ha*

$$\beta = \int_0^1 A_\phi dt \quad (2.8.14)$$

con A_ϕ data da (2.8.9).

Dimostrazione:

Sia $r(t)$ la geodetica in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ che unisce $\pi(|\phi_1\rangle)$ e $\pi(|\phi_2\rangle)$. Si consideri il sollevamento orizzontale $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ di tale geodetica, quindi si ha $|\tilde{\phi}(0)\rangle = |\phi_1\rangle$ e $\tilde{A}_\phi = 0$. L'equazione delle geodetiche allora diventa $(d^2/dt^2)|\tilde{\phi}(t)\rangle = 0$ che equivale a una retta in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Si definisca adesso $g(t) = \text{Im} \langle \tilde{\phi}(0) | \tilde{\phi}(t) \rangle$. Si ha $g(0) = 0$ e $\dot{g}(0) = 0$ in quanto $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ è un sollevamento orizzontale per cui $A_\phi = 0$. Adesso si ha $\ddot{g}(t) = \text{Im} \langle \tilde{\phi}(0) | d^2/dt^2 |\tilde{\phi}(t)\rangle = 0$ per cui $g(t) = 0$ lungo la curva $|\tilde{\phi}(t)\rangle$. Per cui $\langle \tilde{\phi}(0) | \tilde{\phi}(t) \rangle$ è reale e positivo⁶ che implica che $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ e $|\phi_1\rangle = |\tilde{\phi}(0)\rangle$ sono in fase.

Ora, se si fa una trasformazione di gauge $|\phi(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\tilde{\phi}(t)\rangle$ tale che $\alpha(0) = 0$ e $\alpha(1) = \beta$, $|\phi(t)\rangle$ è ancora una geodetica che unisce $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ in quanto è gauge covariante. Dato che la connessione $\tilde{A}_\phi = 0$ lungo $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ per la (2.8.9) si ottiene

$$\beta = \int_0^1 \frac{d\alpha}{dt} dt = \int_0^1 A_\phi dt \quad (2.8.15)$$

concludendo la dimostrazione.

In tale dimostrazione abbiamo visto come il trasporto parallelo per uno stato $|\tilde{\phi}\rangle$ lungo il più corto arco di geodetica mantenga $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ in fase con $|\tilde{\phi}(0)\rangle$, proprio come succedeva nella sfera di Poincaré per la fase di Pancharatnam. Pertanto ogni volta che l'evoluzione è non ciclica possiamo chiudere il percorso evolutivo del sistema nello spazio proiettivo di Hilbert con una geodetica e associare ad essa una fase geometrica. Vediamo ora come ottenere tale fase (Fig. 2.8).

1. Sia lo stato $|\phi(t)\rangle$ che evolve nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ lungo la curva orizzontale \tilde{C}_1 fino allo stato $|\phi(\tau)\rangle$, non ortogonale a $|\phi(0)\rangle$. La curva \tilde{C}_1 si proietta in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ nella curva $C_1 = \pi(\tilde{C}_1)$ che unisce i punti p_1 e p_2 .
2. In $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ i punti p_1 e p_2 vengono uniti da una geodetica C_2 tale che $C_2 \circ C_1$ è chiusa.
3. Si ottiene il sollevamento orizzontale di $C_2 \circ C_1$ rispetto alla connessione A_ϕ tale che il sollevamento orizzontale di C_1 sia \tilde{C}_1 . Tale sollevamento generalmente sarà una curva aperta nello spazio totale $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ con punti iniziale $|\phi(0)\rangle$ e finale $|\phi(T)\rangle$ appartenenti alla stessa fibra.
4. Possiamo ora chiudere la curva $\tilde{C}_2 \circ \tilde{C}_1$ con una curva \tilde{C}_3 lungo la fibra tale da unire $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(T)\rangle$.

⁶E' positivo se $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ è la più corta geodetica che connette $|\tilde{\phi}(0)\rangle$ e $|\tilde{\phi}(1)\rangle$. Lungo tale curva $\langle \tilde{\phi}(0) | \tilde{\phi}(t) \rangle$ non si annulla mai e dato che inizialmente era positivo rimane tale.

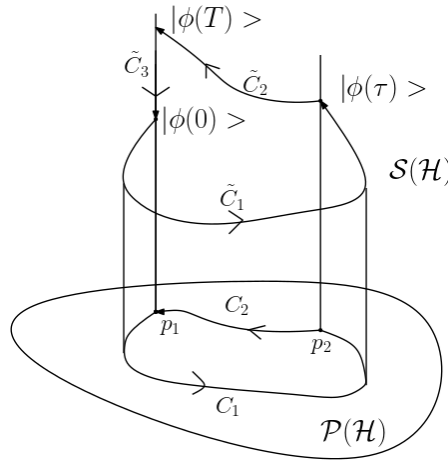


Figura 2.8: Rappresentazione schematica della fase geometrica per evoluzioni non cicliche. \tilde{C}_1 è il sollevamento orizzontale di C_1 e \tilde{C}_2 è il sollevamento orizzontale della geodetica C_2 . La curva $\tilde{C}_2 \circ \tilde{C}_1$ è chiusa dalla \tilde{C}_3 lungo la fibra. La fase geometrica per evoluzioni non cicliche è la fase relativa tra $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(T)\rangle$.

5. Si consideri la fase

$$\gamma = \oint A_\phi dt = \int_{\tilde{C}_1} A_\phi dt + \int_{\tilde{C}_2} A_\phi dt + \int_{\tilde{C}_3} A_\phi dt \quad (2.8.16)$$

Dato che \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 sono orizzontali si ha $\int_{\tilde{C}_1} A_\phi dt = \int_{\tilde{C}_2} A_\phi dt = 0$ lasciando

$$\gamma = \oint A_\phi dt = \int_{\tilde{C}_3} A_\phi dt \quad (2.8.17)$$

che per il teorema precedente rappresenta la fase relativa tra $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(T)\rangle$. Dato che, per il teorema precedente, gli stati $|\phi(\tau)\rangle$ e $|\phi(T)\rangle$ sono in fase in quanto uniti da una geodetica orizzontale, la fase relativa tra $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(T)\rangle$ coinciderà con quella tra $|\phi(0)\rangle$ e $|\phi(\tau)\rangle$ e sarà proprio γ . Siamo quindi riusciti ad associare ad una curva C_1 una fase geometrica γ .

Per concludere osserviamo che se un sistema inizialmente in $|\psi_1\rangle$ viene proiettato attraverso misure successive in $|\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ e infine di nuovo in $|\psi_1\rangle$ per la non transitività della fase di Pancharatnam lo stato finale accumulerà una fase rispetto allo stato iniziale e si avrà che [12]

$$|\psi_{finale}\rangle = e^{i\varphi} |\psi_1\rangle \quad (2.8.18)$$

con

$$e^{i\varphi} = \langle \psi_1 | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \psi_{n-1} \rangle \dots \langle \psi_3 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \quad (2.8.19)$$

Siano ora i proiettori

$$\hat{P}_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (2.8.20)$$

e sia $\gamma_{k,k+1}$ una geodetica tra \hat{P}_k e \hat{P}_{k+1} allora la fase relativa sarà

$$\varphi = \oint_C A \quad (2.8.21)$$

dove $C = \gamma_{1,2} \circ \dots \circ \gamma_{n-1,n} \circ \dots \circ \gamma_{2,1}$ e A è dato dalla (2.8.8) e la φ sarà detta fase di Pancharatnam.

Capitolo 3

Analogie classiche: angolo di Hannay

3.1 Introduzione

Se in meccanica quantistica si parla di fasi geometriche in meccanica classica si parla di angoli o di fasi di onde. Partendo da considerazioni solamente classiche è possibile trovare una variabile angolare per la quale si trovano risultati simili a quelli per la fase di Berry. Tale angolo è chiamato angolo di Hannay. L'angolo di Hannay è possibile generalizzarlo, come anche la fase di Berry, anche quando i parametri non variano ciclicamente, cioè seguono un percorso aperto sulla varietà a cui appartengono. Lo studio della fase geometrica classica è possibile splicarlo, a differenza della fase di Berry che si può presentare per ogni sistema quantistico, solo per quei sistemi che hanno un solo grado di libertà o più generalmente sono integrabili. Questi infatti possono essere descritti in termini delle variabili coniugate Azione-Angolo che vanno a sostituire la coppia momento-coordinate e che si rivelano essere molto utili nel ricavare le equazioni del moto. In tale contesto il moto nella variabile Angolo risulta periodico di periodo 2π e l'Azione rimane invariata in un percorso adiabatico. Per i sistemi non integrabili una variazione dei parametri può portare a moti caotici e il sistema passerà per traiettorie che non apparterranno più allo spazio delle fasi toroidale. In questi casi non si sa quale sia l'analogo classico della fase di Berry quantistica o se esista. Per sistemi integrabili adiabatici la relazione tra la fase di Berry e l'angolo di Hannay può essere trovata andando a studiare il limite semiclassico. In tale capitolo seguiremo principalmente la trattazione di [12], con alcuni riferimenti anche ai lavori [4] e [14].

3.2 Invarianza adiabatica classica

Sia $f(q, p, t)$ una funzione delle coordinate, degli impulsi e del tempo. Dalla meccanica hamiltoniana sappiamo che [24]

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (3.2.1)$$

Definizione 3.2.1. (Integrale del moto) In meccanica hamiltoniana un integrale del moto f per un sistema meccanico con hamiltoniana H è una funzione delle variabili

dinamiche che resta costante durante il moto del sistema:

$$\frac{df}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \quad (3.2.2)$$

e se f non dipende esplicitamente dal tempo basta richiedere $\{H, f\} = 0$.

Per sviluppare la teoria dell'angolo di Hannay occorre utilizzare particolari sistemi, i sistemi integrabili.

Definizione 3.2.2. Un sistema Hamiltoniano a n gradi di libertà è integrabile se ammette n integrali del moto indipendenti F_i tali che $\{F_i, F_j\} = 0$ $i, j = 1, \dots, n$. In tal caso gli F_i possono essere usati come nuove coordinate.

Teorema 3.2.3. (di Liouville) Per ogni sistema integrabile esistono n variabili θ_i definite nello spazio delle fasi tali che:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad e \quad \{\theta_i, F_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.2.3)$$

Le θ_i sono definite a meno della trasformazione:

$$\theta_i \rightarrow \theta_i + \frac{\partial K}{\partial F_i} \quad (3.2.4)$$

con un'arbitraria funzione $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Per cicli γ_i nello spazio delle fasi le θ_i si incrementano di 2π :

$$\oint_{\Gamma_i} d\theta_j = 2\pi\delta_{ij} \quad (3.2.5)$$

Per i sistemi integrabili esiste un set di momenti e coordinate coniugati $(I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$, dove le θ_i sono quelle definite nel Teorema di Liouville e sono dette variabili Angolo e le I_j sono dette variabili Azione e sono definite da [12]

$$I_j(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j} \mathbf{p}(t) \cdot d\mathbf{q}(t) \quad (3.2.6)$$

con Γ curva descritta dal sistema nello spazio delle fasi e Γ_j la proiezione di Γ nello spazio delle fasi della coppia (q_j, p_j) . L'azione quindi viene definita come $(2\pi)^{-1}$ volte l'area contenuta dalla traiettoria del moto nello spazio delle fasi (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Esiste allora una trasformazione canonica per cui

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad (3.2.7)$$

generata dalla funzione

$$S = S(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{q} \quad (3.2.8)$$

tale che

$$\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{q} \quad \theta = \partial S / \partial \mathbf{I} \quad (3.2.9)$$

dove $\partial/\partial\mathbf{x}$ indica il gradiente rispetto alla variabile \mathbf{x} . Nel sistema delle nuove variabili $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ le equazioni del moto diventano:

$$\dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}} = \text{costante} \quad (3.2.10)$$

da cui deriva

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0) = \text{costante} \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.2.11)$$

Si consideri ora un sistema Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Le equazioni di Hamilton risultano essere:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

. Se adesso si sostituisce $t = \epsilon\tau$ si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Il limite adiabatico classico, o il limite delle variazioni infinitamente lente dell'Hamiltoniana, si ottiene per $\epsilon \rightarrow 0$.

Definizione 3.2.4. (Invariante adiabatico) una quantità $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon t)$ è detta invariante adiabatico per il sistema (3.2.12) se $\forall k > 0$ esiste un $\epsilon_0 > 0$ tale che, $\forall \epsilon < \epsilon_0$ e $0 < t < 1/\epsilon$, vale la seguente disuguaglianza:

$$|F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), \epsilon t) - F(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0), 0)| < k. \quad (3.2.14)$$

Per definire il limite adiabatico bisogna aggiungere una sorta di piccola perturbazione all'Hamiltoniana e tale ruolo può essere ricoperto da una variazione adiabatica dei parametri. Si consideri inizialmente $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{R}(t))$ l'Hamiltoniana classica relativa a un sistema integrabile a n gradi di libertà che descrive un moto limitato nello spazio delle fasi in dipendenza di alcuni parametri $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, R_3, \dots, R_m)$. Questi parametri appartengono a una varietà differenziale m -dimensionale M , pertanto l'Hamiltoniana sarà definita sullo spazio $M \times P$, con P spazio delle fasi del sistema che consiste in un toro n -dimensionale T^n . In P il sistema descriverà una curva chiusa in quanto sistema integrabile. Se i parametri vengono fatti variare lentamente (adiabaticamente)¹ così come le coordinate $\mathbf{q} = \{q_j\}$ e gli impulsi $\mathbf{p} = \{p_j\}$ con $j=1,2,\dots, n$ dopo un certo tempo t' l'Hamiltoniana sarà cambiata in corrispondenza dei cambiamenti di \mathbf{q} , \mathbf{p} ed \mathbf{R} e sarà $H(\mathbf{q}(t'), \mathbf{p}(t'), \mathbf{R}(t'))$. Pertanto sarà cambiata anche la forma della traiettoria (sempre chiusa) nella spazio delle fasi. Qual'è la dipendenza della seconda curva dalla prima? La dinamica del sistema sarà governata dal seguente teorema adiabatico [12]:

Teorema 3.2.5. (Adiabatico) Sia $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{R})$ l'Hamiltoniana di un sistema a n gradi di libertà. Si assuma che il sistema sia integrabile e separabile per tutti i parametri \mathbf{R} . Un' orbita che inizialmente si trovi su un toro n -dimensionale immerso nello spazio di fase $2n$ -dimensionale con azioni $\mathbf{I} = \{I_j\}$ continuerà a rimanere nel toro con azioni $\mathbf{I}' = \{I'_j\}$ infinitesimamente vicine a quelle iniziali (invariante adiabatico), nonostante H possa cambiare in corrispondenza delle lente variazioni dei parametri \mathbf{R} . In altre parole l'Azione è un invariante adiabatico.

¹Un generico parametro λ che varia lentamente è un parametro la cui variazione in un periodo è molto piccola: $\frac{\Delta\lambda}{T} \ll \lambda$.

L'energia non è conservata, dato che il sistema non è isolato in quanto i suoi parametri variano nel tempo, mentre per il teorema adiabatico vengono conservate (adiabaticamente) le componenti dell'Azione definite come in (3.2.6).

D'ora in avanti per semplicità di esposizione considereremo soltanto sistemi a un solo grado di libertà che sono sicuramente integrabili, sebbene ogni formula potrà essere estesa al caso multidimensionali attraverso il formalismo vettoriale. Inoltre un sistema integrabile multidimensionale in coordinate azione-angolo può essere descritto da una collezione di sistemi unidimensionali indipendenti che corrispondono ai gradi di libertà del sistema e lo spazio delle fasi diventerà il prodotto diretto dei singoli spazi delle fasi. La dinamica del sistema può essere descritta utilizzando la variabile I come nuovo impulso e θ come nuova coordinata, entrambe dipendenti dai parametri \mathbf{R} . La funzione generatrice è la stessa di (3.2.8) solo che ora c'è una dipendenza anche dai parametri

$$S^\alpha(q, I, \mathbf{R}) = \int_{q_0}^q p^\alpha(q, I, \mathbf{R}) dq \quad (3.2.15)$$

tale che

$$p^\alpha = \partial S^\alpha / \partial q \quad (3.2.16)$$

$$\theta^\alpha = \partial S^\alpha / \partial I \quad (3.2.17)$$

L'esponente α sta ad indicare le diverse possibili funzioni per ogni scelta di I e q in quanto può capitare che la traiettoria nello spazio delle fasi restituisca diversi valori di p e θ per stessi q (Fig. 3.1).

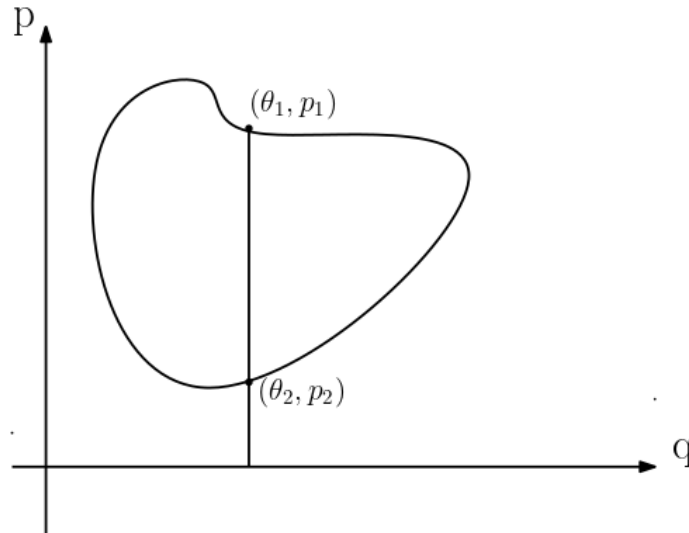


Figura 3.1: Natura a multivalore di θ per uno stesso q .

La nuova Hamiltoniana sarà [12]:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(I, \theta, \mathbf{R}(t)) &= H(I(t), \theta(t), \mathbf{R}(t) \text{ fissato}) + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{R}} = \\ &= H(q(\theta, I, t), p(\theta, I, t), \mathbf{R}(t)) + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{R}} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Se adesso si definisce la funzione

$$X(\theta, I, \mathbf{R}) \equiv S^\alpha(q(\theta, I, t), I, \mathbf{R}) \quad (3.2.19)$$

si ottiene

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial S^\alpha}{\partial q} = \frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \quad (3.2.20)$$

Sostituendo

$$\tilde{H}(I, \theta, \mathbf{R}(t)) = H(I, \theta) + \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \quad (3.2.21)$$

La funzione X dopo un periodo della variabile θ si incrementa di

$$X(\theta + 2\pi, I, \mathbf{R}) - X(\theta, I, \mathbf{R}) = \oint_{\Gamma} p dq = 2\pi I. \quad (3.2.22)$$

La coppia $(I(t), \theta(t))$ descrive nello spazio delle fasi una traiettoria Γ che al variare del tempo si deforma in maniera continua sempre rimanendo sul toro 1-dimensionale e mantenendo un'area costante $2\pi I$ se i parametri che descrivono l'Hamiltoniana vengono fatti variare lentamente.

3.3 Olonomia della variabile angolo: Angolo di Hannay

Tenendo conto della (3.2.18) le equazioni canoniche di Hamilton del sistema nelle variabili (Azione-Angolo) sono:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = -\left[\frac{\partial H}{\partial \theta} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \right] \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} = \frac{\partial H}{\partial I} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

con θ variabile angolare coniugata di I . Da queste si trova quindi che, se si considera costante la frequenza istantanea $\omega = \frac{dH(q(t), p(t), t)}{dI}$, l'Angolo dopo un periodo T sarà semplicemente:

$$\theta(T) - \theta(0) = \theta(T) = \underbrace{\int_0^T \omega dt}_{\text{dinamica}} + \underbrace{\Delta\theta}_{\text{geometrica}} \quad (3.3.2)$$

avendo imposto $\theta(0) = 0$ e con

$$\Delta\theta = \int_0^T dt \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - p^\alpha \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} \right). \quad (3.3.3)$$

Il risultato per l'Angolo θ differisce dal risultato che si ottiene per sistemi isolati² per un termine $\Delta\theta$, chiamato Angolo di Hannay, in quanto adesso bisogna tenere conto anche della variazione dell'angolo causata dalla variazione dei parametri. L'integrale per $\Delta\theta$ risulta difficile, così per rendere evidente la variazione sistematica di una certa grandezza viene presa una media su un intero periodo.

Si trova quindi:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 - \dot{\mathbf{R}} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \right\rangle = 0 \\ \dot{\theta} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial I} \right\rangle + \dot{\mathbf{R}} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \right\rangle \end{cases} \quad (3.3.4)$$

²Senza parametri esterni variabili.

dove i primi addendi sono i risultati per sistemi isolati con parametri costanti mentre i secondi addendi nelle (3.3.4) sono i tassi di variazione dell'azione e angolo nella varietà dei parametri \mathbf{M} a un fissato punto (q, p) dello spazio delle fasi. Integrando nel tempo l'equazione per θ , si ottiene al primo addendo l'angolo per sistemi isolati che è un fattore dinamico, mentre al secondo addendo si ottiene un fattore angolare puramente geometrico in quanto dipende dal percorso seguito dai parametri. La media dei secondi addendi nella prima delle (3.3.4) dà 0 in quanto quella tra parentesi come tutte le funzioni monodrome della variabile θ è periodica in θ e poichè si è portato fuori dalla media $\dot{\mathbf{R}}$ perchè si sta considerando una lenta variazione dei parametri. Si potrebbe dimostrare tale risultato anche con il teorema di Liouville³. Ne consegue quindi che I mediamente si conserva nonostante la variazione di $\mathbf{R}(t)$ coerentemente con il teorema adiabatico. Invece per la seconda equazione se dopo la media si integra in un periodo temporale si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta\theta(I, C) &= \int_0^T dt \frac{d\mathbf{R}}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial I} \frac{1}{(2\pi)} \oint d\theta \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \right] = \\ &= \oint_C d\mathbf{R} \left[\frac{\partial}{\partial I} \frac{1}{(2\pi)} \oint d\theta \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

dove

$$\left[\frac{\partial}{\partial I} \frac{1}{(2\pi)} \oint d\theta \left(\frac{\partial X}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right) \right] = - \left[\frac{\partial}{\partial I} \frac{1}{(2\pi)} \oint d\theta \frac{\partial q}{\partial \mathbf{R}} p^\alpha \right] = - \langle \partial\theta / \partial \mathbf{R} \rangle \quad (3.3.6)$$

dove la media consiste in

$$\langle \rangle = \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} d\theta. \quad (3.3.7)$$

Se fossimo nel caso multidimensionale si avrebbe avuto:

$$\oint d\boldsymbol{\theta} = \prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi} d\theta_j \quad (3.3.8)$$

e

$$\langle \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n. \quad (3.3.9)$$

Si noti che in (3.3.5) si è passati da un'integrazione nel tempo a una nello spazio dei parametri per la (3.3.3). Il primo termine si annulla perchè contiene $\partial X / \partial \mathbf{R}$ che è un gradiente. $\Delta\theta$ quindi si può scrivere come un integrale di linea nello spazio dei parametri:

$$\Delta\theta(I, C) = - \oint_C d\mathbf{R} \cdot \langle \partial\theta / \partial \mathbf{R} \rangle \quad (3.3.10)$$

Dalla (3.3.10) tramite il teorema di Stokes si può scrivere:

$$\Delta\theta(I, C) = - \iint_S d\mathbf{S} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \wedge \langle \partial\theta / \partial \mathbf{R} \rangle \right) \quad (3.3.11)$$

con $\partial S = C$.

La (3.3.10) dipenderà dalla scelta delle coordinate in $\mathbf{R}(T)$ e $\mathbf{R}(0)$ e dal percorso C seguito dai parametri. A causa dell'arbitrarietà nella loro definizione, le variabili angolo

³**Teorema di Liouville:** l'area racchiusa da una curva chiusa nello spazio delle fasi è conservata in ogni circostanza, sia che l'Hamiltoniana sia statica, lentamente o velocemente variabile.

appartenenti a distinte Hamiltoniane iniziali e finali non possono essere comparate, cioè non se ne può fare la differenza. Tuttavia è possibile un confronto quando il moto è ciclico e adiabatico nello spazio dei parametri cosicchè l'Hamiltoniana ritorna a quella di partenza ($\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$). In questo caso però il teorema adiabatico non esaurisce completamente il problema in quanto, nonostante la variabile Azione rimanga adiabaticamente invariante, la variazione della variabile angolo non è soltanto l'integrale nel tempo della frequenza istantanea $\omega = \frac{dH(I, \mathbf{R}(t))}{dI}$ ma bisogna aggiungere a quest'ultima un fattore angolare chiamato angolo di Hannay che dipende solo dal percorso seguito dai parametri nel loro spazio e non dalla durata del processo o dalla velocità con cui si fanno variare i parametri. Tale fattore è puramente geometrico e risulta essere una 2-forma.

Riprendendo la (3.3.5) la si può riscrivere in questo modo:

$$\Delta\theta(I, C) = \frac{\partial}{\partial I} \oint_C \langle d_M X - p d_M q \rangle = -\frac{\partial}{\partial I} \oint_C \langle p d_M q \rangle = -\frac{\partial}{\partial I} \oint_C A(I) \quad (3.3.12)$$

con

$$A(I) = \langle p d_M q \rangle \quad (3.3.13)$$

L'angolo $\Delta\theta$ è chiamato angolo di Hannay e dipende dalla curva C nello spazio dei parametri. La (3.3.12) ha la forma di un integrale di linea e tramite il Teorema di Stokes può essere trasformato in un integrale su una qualunque superficie S contornata da C :

$$\Delta\theta(I, C) = -\frac{\partial}{\partial I} \iint_S W(I) \quad (3.3.14)$$

dove la 2-forma $W(I)$ associata a θ è

$$W(I) = d_M A(I) = \frac{1}{(2\pi)} \oint d\theta (d_M p \wedge d_M q) = \langle d_M p \wedge d_M q \rangle \quad (3.3.15)$$

e tale 2-forma è definita nello spazio dei parametri, non nello spazio di fase. Si ricorda che per il teorema di Liouville la variabile angolare θ è definita a meno di una trasformazione del tipo

$$\theta \rightarrow \theta + \lambda(\mathbf{R}) \quad (3.3.16)$$

con $\lambda(I, \mathbf{R})$ monodroma nello spazio dei parametri. Sotto tale trasformazione $A(I)$ e $W(I)$ si trasformano così [12]:

$$\frac{\partial A}{\partial I} \rightarrow \frac{\partial A(I)}{\partial I} + d_M \lambda \quad (3.3.17)$$

$$\frac{\partial W(I)}{\partial I} = d_M \left(\frac{\partial A(I)}{\partial I} \right) \rightarrow d_M \left(\frac{\partial A(I)}{\partial I} \right) + d^2_M \lambda = d_M \left(\frac{\partial A(I)}{\partial I} \right) \quad (3.3.18)$$

A causa dell'invarianza della $W(I)$ anche la $\Delta\theta$ sarà invariante per tali trasformazioni. Tale fatto è in analogia con il potenziale vettore \mathbf{A} e il campo magnetico \mathbf{B} che sono rispettivamente dipendente e indipendente dalle trasformazioni di gauge. Già da qui è possibile vedere un'analogia con la fase di Berry in quanto l'invarianza per la (3.3.16) corrisponde all'invarianza di gauge della fase di Berry.

Nel caso in cui lo spazio dei parametri sia 3-dimensionale, si ha:

$$\Delta\theta(I, C) = -\frac{\partial}{\partial I} \iint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{W}(I, \mathbf{R}) \quad (3.3.19)$$

dove $d\mathbf{S}$ è l'elemento infinitesimo di area nello spazio dei parametri e $\mathbf{W}(I, \mathbf{R})$ ha come componenti

$$\mathbf{W}_i(I, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)} \oint d\theta \left(\nabla_{\mathbf{R}} p(\theta, I, \mathbf{R}) \times \nabla_{\mathbf{R}} q(\theta, I, \mathbf{R}) \right)_i \quad (3.3.20)$$

in cui il prodotto esterno \wedge è diventato il prodotto vettoriale \times e i differenziali sono diventati i gradienti rispetto ai parametri. Per concludere, se si volesse generalizzare al caso n -dimensionale si troverebbe:

$$\begin{cases} A(I) = \sum_{i=1}^n \langle p_i d_M q_i \rangle \\ W(I) = d_M A(I) \\ \Delta \theta_j(I, C) = -\frac{\partial}{\partial I_j} \oint_C A(I) = -\frac{\partial}{\partial I_j} \oint_S W(I) \end{cases} \quad (3.3.21)$$

Sebbene la fase di Berry sia stata generalizzata anche per sistemi non adiabatici e non ciclici, l'angolo di Hannay è stato generalizzato per sistemi non ciclici ma non si è riusciti per sistemi non adiabatici.

3.4 Connessione semiclassica tra angolo di Hannay e fase di Berry

Percorsi chiusi nello spazio dei parametri

Si vuole ora cercare di trovare un collegamento matematico tra i risultati per la fase quantistica di Berry e l'angolo di Hannay quando i parametri seguono un percorso ciclico e adiabatico nel loro spazio [4][12]. Si vedrà che la teoria semiclassica permetterà di ottenere il risultato voluto. Per farlo occorrerà tornare al caso multidimensionale. Precedentemente si è trovato che la funzione d'onda di un sistema nell' m -esimo stato accumula un fattore di fase geometrica $\exp(i\gamma_m(C))$ dopo che i parametri hanno percorso un circuito chiuso nel loro spazio, con

$$\gamma_m(C) = - \int_S V(m, \mathbf{R}) \quad (3.4.1)$$

e dove la 2-forma $V(m, \mathbf{R})$ è la cosiddetta Curvatura di Berry:

$$V(m, \mathbf{R}) \equiv Im \left\{ d_M \langle m; \mathbf{R} | d_M | m; \mathbf{R} \rangle \right\} \quad (3.4.2)$$

La (3.4.1) e (3.4.2) corrispondono alle (3.3.19) e (3.3.15) trovate nel paragrafo precedente. Nella rappresentazione delle coordinate, la (3.4.2) assume la forma:

$$V(m, \mathbf{R}) = Im \left\{ d_M \left[\int d^n \mathbf{q} \psi_m^*(\mathbf{q}; \mathbf{R}) d_M \psi_m(\mathbf{q}; \mathbf{R}) \right] \right\} \quad (3.4.3)$$

dove

$$\psi_m(\mathbf{q}; \mathbf{R}) \equiv \langle \mathbf{q} | m; \mathbf{R} \rangle \quad (3.4.4)$$

è la funzione d'onda nella rappresentazione delle coordinate. Le regole di Bohr-Sommerfeld per la quantizzazione dell'azione sono [24]

$$I_j = (n_j + \sigma_j) \hbar \quad (3.4.5)$$

con σ_j sono delle costanti poco importanti in questo contesto. Nel limite semiclassico ($\hbar \rightarrow 0$ e $n_j \rightarrow \infty$) le azioni diventano $I_j = \hbar n_j$, rimanendo finite. Nel limite semiclassico la funzione d'onda diventa [24][4]:

$$\psi_m(\mathbf{q}; \mathbf{R}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{q}; \mathbf{I}; \mathbf{R}) \exp [i\hbar^{-1} S^{\alpha}(\mathbf{q}; \mathbf{I}; \mathbf{R})] \quad (3.4.6)$$

dove S^{α} è la funzione generatrice (3.2.15) e l'ampiezza è data da

$$a_{\alpha}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \det \left(\frac{d\theta_i^{\alpha}}{dq^j} \right) \quad (3.4.7)$$

Si fa la somma in α per considerare tutti i contributi degli \mathbf{p}^{α} per uno stesso \mathbf{q} . Inserendo la (3.4.6) in (3.4.3) ed espandendo in potenze di \hbar si ottiene al termine di ordine zero [12]:

$$V(m, \mathbf{R}) = \frac{1}{\hbar} d_M \left[\int d^n \mathbf{q} \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha} \det \left(\frac{d\theta_i^{\alpha}}{dq^j} \right) d_M S^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{I}; \mathbf{R}) + O(\hbar) \right] \quad (3.4.8)$$

Poichè le \mathbf{q} dipendono dalle $\boldsymbol{\theta}$, utilizzando le (3.2.19) e (3.2.20), si ottiene

$$V(m, \mathbf{R}) = \frac{1}{\hbar} d_M \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \oint d^n \boldsymbol{\theta} \left(d_M X - \sum_{k=1}^n p_k d_M q^k \right) \right] \quad (3.4.9)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2\pi)^n} \oint d^n \boldsymbol{\theta} (d_M p_k \wedge d_M q^k) \quad (3.4.10)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \sum_{k=1}^n \langle d_M p_k \wedge d_M q^k \rangle = -\frac{1}{\hbar} W(\mathbf{I}, \mathbf{R}) \quad (3.4.11)$$

La (3.4.11) è importante in quanto mette in relazione la 2-forma di fase quantistica con la 2-forma angolare classica (3.3.20). Pertanto ora, dalla (3.4.11) e ricordando la (3.3.14) è possibile ricavare finalmente una relazione tra l'angolo di Hannay $\Delta\theta_j$ e la fase di Berry γ_m :

$$\frac{\partial \gamma_m(C)}{\partial I_j} = -\frac{1}{\hbar} \left(\Delta\theta_j(\mathbf{I}, C) + O(\hbar) \right) \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.4.12)$$

Considerando la quantizzazione di Bohr-Sommerfeld e considerando n una variabile continua si ottiene

$$\frac{\partial \gamma_m(C)}{\partial n_j} = -\Delta\theta_j(\mathbf{I}, C) + O(\hbar) \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.4.13)$$

Abbiamo così compreso che se un sistema classico possiede un angolo di Hannay non nullo il sistema quantistico corrispondente (se esiste) avrà una fase di Berry non nulla, mentre è possibile avere una fase di Berry diversa da zero ma un angolo di Hannay nullo in quanto in (3.4.13) posso avere il termine di ordine zero nullo mentre termini di ordine superiore diversi da zero.

Percorsi aperti nello spazio dei parametri

Nel paragrafo precedente si è trovato quello che è l'analogo classico per la fase di Berry partendo esclusivamente da ragionamenti classici. In seguito si è riusciti a relazionare i risultati tra meccanica classica e quantistica per mezzo del limite semiclassico. Tuttavia, quando il percorso dei parametri non necessariamente torna al suo punto iniziale classicamente non è chiaro cosa significhi confrontare variabili angolari per diversi parametri, motivo per cui non si è ancora trovata una ologonomia classica analoga a quella per la fase di Berry per percorsi aperti. Una connessione tra l'angolo di Hannay e la fase di Berry in questo contesto si potrebbe trovare partendo dalla fase quantistica e cercando di ottenere l'analogo classico utilizzando il limite semiclassico e le relazioni tra commutatore e parentesi di Poisson. Tale campo è ancora un ambito di ricerca aperto pertanto non si svilupperà nessun tipo di ragionamento o calcolo.

3.5 Esempio di fase geometrica classica

3.5.1 "Spin" classico in un campo magnetico

Con spin classico si può intendere un momento magnetico \mathbf{S} . Se lo si immerge in un campo magnetico $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ costante si ottiene un moto di precessione dello stesso momento intorno a \mathbf{B} . Pertanto si avrà:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S} = \mathbf{B} \times \mathbf{S} \quad (3.5.1)$$

Il modulo del momento magnetico rimarrà costante mentre la sua direzione varierà su una superficie bidimensionale dato che precessa rimanendo a un'altezza costante. Pertanto delle componenti di \mathbf{S} solo 2 variano pertanto lo spazio di fase del sistema sarà dato dalla sfera bidimensionale S^2 . Sia $(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ una base ortonormale di \mathbb{R}^3 tale che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^4$ è una base del piano perpendicolare a \mathbf{e}_3 .

La grandezza

$$I = \mathbf{S} \cdot \mathbf{b} \quad (3.5.2)$$

rimane chiaramente costante e assieme alla

$$\varphi := \text{angolo azimutale nel piano } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad (3.5.3)$$

definiscono le variabili azione-angolo nello spazio delle fasi S^2 .

L'energia di interazione tra \mathbf{S} e \mathbf{B} è data da

$$E(B, S) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (3.5.4)$$

pertanto l'hamiltoniana del sistema è

$$H(I, \mathbf{B}) = IB \quad (3.5.5)$$

Si supponga ora che \mathbf{B} ruoti lentamente. Esso ricoprirà il ruolo di parametro esterno e dato che ciò che varia è la sua direzione nello spazio tridimensionale lo spazio dei parametri può essere identificato dalla sfera S^2 in quanto a ogni direzione di \mathbf{B} corrisponde

⁴Chiaramente tale base sarà definita a meno di rotazioni $SO(2)$.

un punto della sfera. Dopo un ciclo C completo di \mathbf{B} , \mathbf{S} sarà ritornato nel cerchio di precessione con una variabile angolare variata di

$$\varphi(T) - \varphi(0) = \int_0^T B(t)dt + \Delta\varphi(I; C) \quad (3.5.6)$$

dove $\Delta\varphi(I; C)$ consiste nell'angolo di Hannay. Calcoliamo ora la 2-forma $W(I)$:

$$W(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(d_B p(\varphi, I, \mathbf{B}) \wedge d_B q(\varphi, I, \mathbf{B}) \right) \quad (3.5.7)$$

dove d_B è chiaramente la derivata esterna sullo spazio dei parametri S^2 . Per calcolare $W(I)$ tuttavia ci manca la dipendenza della coppia (q, p) da \mathbf{B} . Pertanto si definiscano:

$$\begin{cases} p := S_z \\ q := \arctan(S_y/S_x) \end{cases} \quad (3.5.8)$$

mentre le componenti di \mathbf{S} sono

$$\begin{cases} S_x = \sqrt{S^2 - p^2} \cos q \\ S_y = \sqrt{S^2 - p^2} \sin q \\ S_z = p \end{cases} \quad (3.5.9)$$

Da ciò si trova che

$$d_B p(\varphi, I, \mathbf{B}) \wedge d_B q(\varphi, I, \mathbf{B}) = \frac{d_B S_z \wedge (S_x d_B S_y - S_y d_B S_x)}{S_x^2 + S_y^2} \quad (3.5.10)$$

Si prendano ora gli assi x, y, z lungo la terna $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1) \quad (3.5.11)$$

Da ciò si ottiene

$$\begin{aligned} d_B \mathbf{e}_1 &= (0, d_B e_{1y}, d_B e_{1z}) \\ d_B \mathbf{e}_2 &= (d_B e_{2x}, 0, d_B e_{2z}) \\ d_B \mathbf{b} &= (d_B \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times d_B \mathbf{e}_2 = (-d_B e_{1z}, -d_B e_{2z}, 0) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Il vettore momento magnetico può essere scritto nella seguente forma:

$$\mathbf{S} = I\mathbf{b} + \sqrt{S^2 - I^2} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sqrt{S^2 - I^2} \sin \varphi \mathbf{e}_2 \quad (3.5.13)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} d_B S_x &= -I d_B e_{1z} + \sqrt{S^2 - I^2} \sin \varphi d_B e_{2x} \\ d_B S_y &= -I d_B e_{2z} + \sqrt{S^2 - I^2} \cos \varphi d_B e_{1y} \\ d_B S_z &= \sqrt{S^2 - I^2} (\cos \varphi d_B e_{1z} + \sin \varphi d_B e_{2z}) \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Inserendo quest'ultime in (3.5.10) e mediando in φ si ottiene

$$W(I) = \langle d_B p \wedge d_B q \rangle = -I d_B e_{1z} \wedge d_B e_{2z} \quad (3.5.15)$$

Per un set di assi generale si ha invece

$$W(I) = -I \sum_{k=1}^3 d_B e_{1k} \wedge d_B e_{2k} \quad (3.5.16)$$

e da ciò si ottiene che

$$-\frac{\partial}{\partial I} W(I) = \sum_{k=1}^3 d_B e_{1k} \wedge d_B e_{2k} \quad (3.5.17)$$

Per calcolare quest'ultima equazione serve una dipendenza di \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 da \mathbf{B} . Una possibile scelta può essere:

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{z}}|} \quad \mathbf{e}_2 := \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{B} \times \mathbf{e}_1|} \quad (3.5.18)$$

cioè

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(B_y, -B_x, 0)}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{(B_x B_z, B_y B_z, -B_x^2 - B_y^2)}{B \sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \quad (3.5.19)$$

Inserendo tali espressioni in (3.5.17) si ottiene

$$-\frac{\partial}{\partial I} W(I) = \frac{1}{|\mathbf{B}|^3} \sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{klm} B^k dB^l \wedge dB^m = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \quad (3.5.20)$$

con (θ, φ) angoli polare e azimutale della sfera S^2 .

Siamo ora in grado di calcolare l'angolo di Hannay che è dato da [12]

$$\Delta\varphi(I; C) = \Omega(C) \quad (3.5.21)$$

dove $\Omega(C)$ è l'angolo solido sotteso dalla curva C nello spazio dei parametri S^2 .

Riprendendo l'esempio dello spin quantistico in un campo magnetico (2.3.51) si nota che la relazione tra fase di Berry e angolo di Hannay è:

$$\Delta\varphi(I; C) = -\frac{\partial \gamma_n(C)}{\partial n} \quad (3.5.22)$$

come previsto dalla (3.4.13).

Capitolo 4

Conclusioni

In tale trattazione è stato esposto il concetto di fase geometrica di cui la fase di Berry è sicuramente l'esempio più famoso. La fase di Berry consiste in un fattore di fase non integrabile che la funzione d'onda di un sistema acquista al termine di un'evoluzione ciclica in regime adiabatico. Tale fase è indipendente dalla dinamica ma dipendente dalla geometria del problema, in particolare dalla geometria dello spazio dei parametri che caratterizzano il sistema. Infatti in quasi tutti gli esempi che sono stati riportati la fase geometrica risultava pari (a meno di una costante moltiplicativa) all'angolo solido sotteso dalla curva nello spazio dei parametri:

$$\gamma(C) = \Omega(C) \tag{4.0.1}$$

La scoperta di tali fasi dal carattere esclusivamente geometrico ha fatto nascere un grande entusiasmo riguardo lo studio di sistemi variabili nel tempo dipendenti da parametri esterni. Con la fase geometrica la dinamica viene completamente ignorata per concentrarsi sulle proprietà topologiche e appunto geometriche degli spazi riguardanti il problema in esame. La fase di Berry ha portato a nuovi studi riguardanti le generalizzazioni di fasi geometriche: Aharonov e Anandan generalizzarono la fase di Berry per evoluzioni non adiabatiche, Samuel e Bhandari trovarono una fase geometrica per evoluzioni non adiabatiche e non cicliche, Wilczek e Zee trovarono che per sistemi con spettri degeneri la funzione d'onda accumula una "fase" non abeliana, nel senso che per spettri degeneri la funzione d'onda finale accumula un fattore moltiplicativo $g \in U(N)$ rispetto alla funzione d'onda iniziale. La fase di Berry diede grandi contributi anche nello studio di molecole in approssimazione Born-Oppeneheimer in cui la funzione d'onda degli elettroni accumula una fase geometrica quando i nuclei variano lentamente nel tempo. In ambito nucleare Mead e Truhlar[21] mostrarono che è proprio l'approssimazione di Born-Oppeneheimer che fa emergere nell'hamiltoniana nucleare una sorta di potenziale di gauge elettromagnetico simile al potenziale di Berry a cui si può associare un campo magnetico il cui flusso restituisce una fase geometrica.

La fase di Berry e le sue generalizzazioni sono un utile risultato in quanto sono uno strumento che arricchisce la conoscenza del sistema permettendo di apprendere informazioni aggiuntive sull'evoluzione del sistema senza risolvere le equazioni dinamiche del moto.

Abbiamo visto che la fase geometrica viene generalizzata nella teoria matematica dei fibrati in cui occupa il ruolo di ologonomia in un certo fibrato principale in seguito al trasporto parallelo degli stati lungo la curva determinata dalla loro evoluzione. Tale

olonomia è data dall'integrale di linea di una certa 1-forma connessione locale \mathcal{A} lungo la curva nello spazio base

$$\gamma = \oint_C \mathcal{A} \quad (4.0.2)$$

Tale connessione si comporta matematicamente come un potenziale elettromagnetico, motivo per cui viene chiamato potenziale di gauge. Abbiamo visto quindi, come anche nell'effetto Aharonov-Bohm, che i potenziali di gauge, nonostante non siano gauge invarianti, possono portare a fenomeni osservabili.

Si vuole anche aggiungere che l'argomento delle fasi geometriche non sia di natura soltanto quantistica sebbene sia nato in tale campo. Abbiamo infatti visto come si può accumulare un'olonomia semplicemente trasportando parallelamente vettori su superfici curve (pendolo di Foucault) o come anche in meccanica classica si possa trovare un accumulo della variabile angolare in approssimazione adiabatica. Abbiamo anche visto che esiste una relazione tra fase quantistica di Berry e fase angolare classica.

L'argomento delle fasi geometriche è molto vasto in quanto può spiegare una vasta gamma di fenomeni in diversi campi. Infatti le fasi geometriche, in particolare la fase di Berry, hanno trovato applicazioni in fisica molecolare, in quantum computing, in meccanica classica, ottica, fisica della materia condensata, teorie di gauge e altri ancora. Pertanto in tale elaborato non ho esposto tutte le idee riguardanti le fasi geometriche ma solo che quelle che, secondo me, consentivano un'esposizione abbastanza generale del tema e che permettessero di capire il motivo della loro grande applicabilità. Nel corso degli anni sono stati fatti e si continuano a fare molti esperimenti in diversi campi per misurare la fase di Berry e la maggior parte di questi ha confermato le aspettative teoriche [21][12].

Ringraziamenti

Si ringrazia gentilmente la prof.ssa Ercolessi per l'aiuto e la disponibilità dimostrati.

Bibliografia

- [1] Y. Aharonov e J. Anandan. «Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution». In: *Phys.Rev. Lett.* 58 (1986), pp. 1593–1596.
- [2] Y. Aharonov e D. Bohm. «Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory». In: *The Physical Review.* 115.3 (1959), pp. 1401–1407.
- [3] R.W. Batterman. «Falling cats, parallel parking, and polarized light». In: *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* (2003).
- [4] M. V. Berry. «Classical Adiabatic Angles and Quantal Adiabatic Phase». In: *J. Phys.* A18 (1984), pp. 15–27.
- [5] M. V. Berry. «Pancharatnam, virtuoso of the Poincarè sphere: an appreciation». In: *Current Science* (1994).
- [6] M.V. Berry. «Quantal phase factors accompanying adiabatic changes». In: *Proc. R. Lond.* A392 (1984), pp. 45–57.
- [7] M.V. Berry. «The Adiabatic Phase and Pancharatnam’s Phase for Polarized Light». In: *J. Mod. Opt.* 34.11 (1987), pp. 1401–1407.
- [8] M.V. Berry. «The Quantum Phase, Five Years After». In: *Geometric phase in physics 1* (1988). A cura di F. Wilczek A. Shapere, pp. 7–28.
- [9] R. Bhandari e J. Samuel. «General Settings for Berry’s Phase». In: *Phys. Rev. Lett.* (1988).
- [10] D. Bohm et al. *The Geometric Phase in Quantum Systems*. Berlin, Verlag, Heidelberg: Springer, 2003.
- [11] P. Bruno. «Berry Phase effects in magnetism». In: *Magnetism goes nano* (1984).
- [12] D. Chruscinski e A. Jamiolkowski. *Geometric phase in Classical and Quantum Mechanics*. Boston, Basel, Berlino: Birkhauser, 2003.
- [13] P.A.M. Dirac. «Quantised Singularities in the Electromagnetic Field». In: *Proc. Roy. Soc* (1931).
- [14] J.H. Hannay. «Angle Variable Holonomy in Adiabatic Excursion of an Integrable Hamiltonian». In: *J. Phys.* A18 (1984), pp. 221–230.
- [15] G. Herzberg e Longuet-Higgins. «Intersection of Potenzial Energy Surfaces in Polyatomic Molecules». In: *Disc. Farad. Soc.* (1963).
- [16] C. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. Singapore: World Scientific, 1999.
- [17] L. Lyre. «Berry Phase effects and quantum structure». In: *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* (2014).

- [18] G. Morandi. *The role of topology in classical and quantum physics*. Germany: Springer-Verlag, 1992.
- [19] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Osaka: Institute of Physics Publishing, 2003.
- [20] S. Pancharatnam. «Generalized theory of Interference, and its Applications». In: *Proc. Ind. Acad. Sci. Ser. XLIV.5* (1956), pp. 247–262.
- [21] A. Shapere e F. Wilczek. *Geometric phase in physics*. Singapore: World Scientific, 1989.
- [22] B. Simon. «Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry’s Phase». In: *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983), pp. 2167–2170.
- [23] A. Trautman. *Differential geometry for physicist*. Napoli: Bibliopolis, 1984.
- [24] R. Zucchini. «Quantum Mechanics: Lecture Notes». 2018.