
Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA**

Tesi di Laurea Magistrale in
Meccanica delle Vibrazioni

***MODELLAZIONE DINAMICA DEL SISTEMA FRENANTE
DI UNA AUTOVETTURA SPORTIVA***

Tesi di laurea di:
ALESSANDRO ZUCCHINI

Relatore:
Prof. GIUSEPPE CATANIA

Correlatori:
Prof. ALFREDO LIVERANI
Prof. GIOVANNI NALDI

Sessione di laurea del 14/03/2019
Anno Accademico 2018-2019

A mio padre, Marco.

Indice

Capitolo 1: Introduzione.....	3
1.1 Il fischio dei freni.....	3
1.2 Obiettivi della tesi.....	6
Capitolo 2: Background sui sistemi frenanti	7
2.1 Struttura di un freno a disco.....	7
2.2 Dissipazione di energia.....	13
Capitolo 3: Analisi della letteratura precedente	15
3.1 Metodologie sperimentali per la quantificazione del fischio dei freni	20
3.2 Modello di Shin et al.....	21
3.3 Modello di Hoffmann e Gaul.....	24
3.4 Modello di Ouyang e Mottershead	28
3.5 Modello di Walsh.....	31
3.6 Modello di Hochlenert e Hardegon	34
Capitolo 4: Modellazione	49
4.1 Il modello dinamico di disco flessibile.....	49
4.1.1 Equazione costitutiva del disco	51
4.1.2 Scelta delle funzioni di forma	58
4.1.3 Metodo del minimo di energia potenziale.....	78
4.2 Il modello dinamico di disco rigido.....	95
Capitolo 4: Conclusioni.....	105
Bibliografia.....	113
Ringraziamenti.....	115

Capitolo 1: Introduzione

1.1 Il fischio dei freni

I freni sono uno dei componenti più importanti all'interno di un'autovettura in termini di performance e sicurezza.

Dall'avvento dell'automobile, lo sviluppo degli impianti frenanti si è focalizzato sull'aumento della potenza frenante dell'impianto e sulla sua affidabilità. Tuttavia, automobili sempre più raffinate in cui il comfort di guida e la rumorosità sono divenuti degli aspetti fondamentali della progettazione, hanno determinato un'importanza sempre maggiore dell'emissione acustica generata dal rumore dei freni.

Infatti, il rumore generato dal fischio dei freni può risultare fastidioso per il conducente del veicolo, il quale potrebbe essere portato ad associare tale rumore ad un difetto o ad un malfunzionamento del freno e a chiedere quindi un reclamo in garanzia, anche se l'impianto frenante stesse funzionando esattamente per come è stato progettato in tutti i suoi aspetti.

Per questo motivo, l'eliminazione del fischio dei freni è divenuto uno degli obiettivi fondamentali nella progettazione e produzione dei freni.

Come spiegato da H. Abendroth e B. Wernitz all'interno del loro testo [1], intorno agli anni 2000 i produttori di mescole frenanti delle pastiglie freno spendono circa il 50% delle loro risorse ingegneristiche per risolvere le problematiche riguardanti NVH¹.

Vi sono diversi nomi che descrivono i diversi fenomeni di rumorosità dei freni, il termine più generale è il "*fischio*", o "*brake squeal*" in inglese, in quanto è il più importante ed il più fastidioso dal punto di vista dei passeggeri ma anche il disturbo più costoso per i produttori di auto in termini di costo di garanzia.

¹ **NVH** (Noise Vibration and Harshness) è un tipo di ricerca/studio rivolto alla risoluzione di problemi sulle vibrazioni, rumorosità e durezza

Altre denominazioni associate ad altri fenomeni di rumorosità sono “*gemito*”, “*chatter*”, “*muggito*²” e “*squittio*” dei freni.

Al momento non è ancora presente una definizione univoca del fenomeno associato al fischio dei freni, tuttavia per “*fischio*” o “*brake squeal*” è comunemente inteso un fenomeno vibratorio ad alta frequenza (> 1000 Hz) dei componenti dell’impianto frenante durante la manovra di frenata che comporta una rumorosità udibile dai passeggeri dell’autovettura o da eventuali passanti esterni.

Per via della sua variabilità, non esiste una soluzione generale per la soppressione del fischio dei freni. In generale, un impianto frenante affetto da fischio dei freni non manifesta la suddetta rumorosità ogni volta che il freno viene azionato; si è infatti notato che l’emissione acustica di un impianto frenante è un fenomeno intermittente e spesso casuale.

Ciò per via del fatto che vi sono una molteplicità di fattori sia a livello micro- che a livello macroscopico che influenzano il fenomeno del fischio e molti di questi, specialmente quelli a livello microscopico, non sono ancora stati chiaramente compresi. In generale, la difficoltà principale nella modellazione del fischio dei freni è quella delle scale dei vari fenomeni, infatti piccoli effetti su scale molto piccole in lunghezza e tempo (cioè fenomeni di contatto microscopici e vibrazioni ad alta frequenza) possono interagire in modo importante con effetti su scale di grandi dimensioni (come l’usura durante la vita dell’impianto frenante e la dinamica delle grandi sottostrutture del veicolo).

Per spiegarne il meccanismo sono state formulate numerose teorie e svariati studi hanno provato ad applicarle con lo scopo di prevedere la dinamica di un impianto frenante.

Ad oggi sono quindi pervenuti dalla letteratura moltissimi modelli per lo studio del fischio dei freni, tuttavia nessuno di questi è stato in grado di includere tutti gli effetti su tutte le scale menzionate prima.

² Il **muggito** dei freni è un tipo di rumorosità a bassa frequenza che è stato studiato recentemente da Ferrari nel 2017 poichè riscontrato sul modello Ferrari Portofino prima del lancio dell’autovettura sul mercato.

Questo ha portato a modelli matematici in grado di descrivere bene soltanto alcune caratteristiche del fenomeno del fischio dei freni mentre molte altre vengono ignorate. Analogamente, le prove sperimentale effettuate hanno applicabilità limitata in quanto forniscono un risultato che si riferisce specificatamente soltanto ad una particolare condizione di funzionamento o ad un tipo particolare di autovettura.

1.2 Obiettivi della tesi

Con questo lavoro si è voluto studiare il fenomeno alla base dell'emissione acustica generata da un disco rotante soggetto a forze esterne.

La seguente tesi di laurea è strutturata nel seguente modo: inizialmente vengono brevemente presentati e discussi i componenti che costituiscono un impianto frenante.

Quindi è stata eseguita un'analisi critica della letteratura presente riguardante lo studio del fischio dei freni.

Infine, viene presentato e discusso il modello matematico di un disco flessibile in rotazione soggetto a forze esterne.

Il fischio del freno è un fenomeno legato all'instabilità dell'impianto.

L'instabilità di un sistema è caratterizzata da autovalori positivi i quali portano la risposta del sistema a divergere.

Lo scopo di tale lavoro consiste nella costruzione di un modello matematico semplificato del disco del freno per la previsione del fischio dei freni.

Trattandosi di un modello molto approssimato, l'insorgere del fischio dei freni terrà conto solamente di alcuni fenomeni e non potrà definirsi come rappresentativo della realtà.

Il modello studiato è quello di un disco in rotazione, inizialmente tale disco verrà modellato come rigido, successivamente verrà presentato un modello più generale di un disco flessibile soggetto alle stesse condizioni.

I due modelli di disco rigido e disco flessibile verranno quindi confrontati per vedere come cambia la risposta nei due casi e come la modellazione affligge la previsione del fenomeno.

Dal confronto tra i due modelli verrà evidenziato anche cosa comporta approssimare il comportamento di un disco flessibile come fosse un disco rigido e quindi quanto questa approssimazione influenza la risposta del sistema.

Tutti i conti e le figure presentate in questa tesi sono stati realizzati tramite l'ausilio del software MATLAB R2018b.

Capitolo 2: Background sui sistemi frenanti

2.1 Struttura di un freno a disco

Lo scopo dei freni è quello di ridurre la velocità, e quindi l'energia cinetica del veicolo, grazie alla dissipazione di energia compiuta dal lavoro delle forze esterne agenti sul disco in rotazione del freno.

Il primo modello di impianto frenante è il cosiddetto freno a tamburo sviluppato agli inizi del 1900 e consistente in due ganasce che, quando il freno veniva azionato, entrano in contatto con la superficie circolare esterna esercitando un'azione frenante.

Un esempio di freno a tamburo è riportato in Figura 1.



Figura 1 - Freno a tamburo

Con il passare degli anni Mercedes e Renault hanno introdotto delle varianti a questa tipologia di freno fino ad ottenere i moderni freni a tamburo [2], oggi montati sulle ruote posteriori di autovetture di piccola stazza e sulle ruote posteriori di alcuni ciclomotori.

Un breve cenno merita la tipologia di freni inventata da Sperry [3] in America intorno al 1890: trattasi di freni in cui vi è un disco attuato elettromagneticamente. La coppia frenante risultante deriva in parte dal contatto tra materiale frenante e disco ed in parte dalle correnti di Foucault.

Questa tipologia di freni è stata adottata nei carrelli degli aeroplani della Seconda guerra mondiale.

Dal 1950 in poi sono stati sviluppati i primi freni a disco che si sono mantenuti pressoché inalterati fino ai giorni nostri.

Il largo uso di questa tipologia di freno, specialmente sulle ruote anteriori dei veicoli³, è dovuto alle normative stradali sulla sicurezza sempre più stringenti in cui viene imposta una distanza massima di arresto, un mantenimento delle performance frenanti anche ad alte temperature, una certa resistenza all'acqua ed altre caratteristiche fondamentali per la sicurezza di un'autovettura.

Ciò ha favorito la diffusione dei freni a disco a discapito dei freni a tamburo ormai sulla quasi totalità dei veicoli destinati al trasporto terrestre.

I freni a disco infatti hanno una maggiore resistenza all'acqua e le performance non decadono per alte temperature.

Un esempio di tipologia di freno a disco ed il suo schema di funzionamento è riportato in Figura 2.

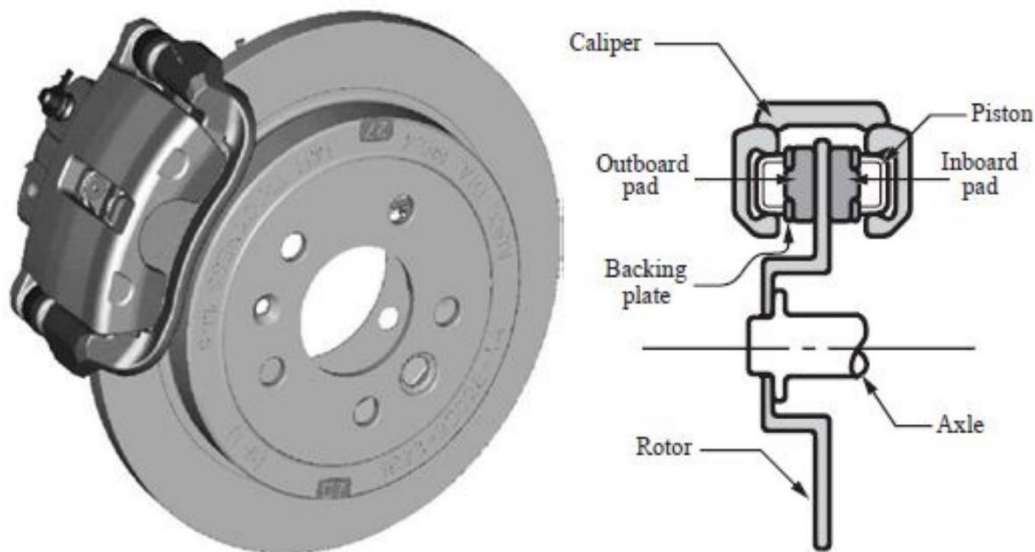


Figura 2 - Schema di un freno a disco

³ I freni posizionati sulle **ruote anteriori di un veicolo** solitamente costituiscono il 70-80% del potere frenante dell'autovettura. Per questo motivo il loro ruolo è fondamentale per soddisfare le norme sulla sicurezza stradale.

I componenti principali di un freno a disco sono il disco, la pinza, l'assemblaggio delle pastiglie freno ed un sistema di attuazione idraulico.

Il disco è l'elemento rotante principale dell'impianto frenante (tale componente verrà chiamato anche rotore nei paragrafi successivi) ed è rigidamente collegato tramite cinque bulloni all'assale o mozzo dell'automobile, di conseguenza tale componente ruota insieme alle ruote del veicolo alla stessa velocità.

Le pastiglie dei freni sono montate a coppie sui due lati del disco e sono costituite da un particolare materiale che, quando schiacciato sul disco, produce attrito e da un retro-piatto metallico.

Quando i pistoni schiacciano le pastiglie contro il disco in rotazione viene generata una coppia dovuta all'attrito delle azioni frenanti che si oppone alla velocità di rotazione della ruota.

La pinza alloggia i pistoni idraulici che schiacciano le pastiglie al disco ed è collegata tramite una staffa (caliper) al veicolo. Un esempio di pinza freno è visibile in Figura 5. Quando il guidatore preme il pedale del freno, genera un aumento di pressione idraulica sui pistoni alloggiati all'interno della pinza. Il dispositivo che converte il moto del pedale del freno in pressione idraulica è noto come cilindro maestro.

La maggior parte dei dischi freno sono fatti in ghisa grigia in quanto tale materiale è molto resistente all'usura e relativamente economico.

Come spiegato in [4] da Spurr e Newcomb, per proteggere i cuscinetti del mozzo dalle alte temperature a cui sono soggetti i dischi dei freni, questi spesso possono avere una forma di cappello a cilindro (vedi Figura 2) con lo scopo di aumentare la superficie di scambio termico (migliorando il raffreddamento) ed aumentando la lunghezza del percorso che il calore deve attraversare per arrivare ai cuscinetti.

Alcuni dischi invece prevedono al loro interno dei canali di ventilazione: questa tipologia di dischi è costituita da due piatti circolari sottili uniti da una serie di spessori (detti anche "ribs" in gergo) come visibile in Figura 3.

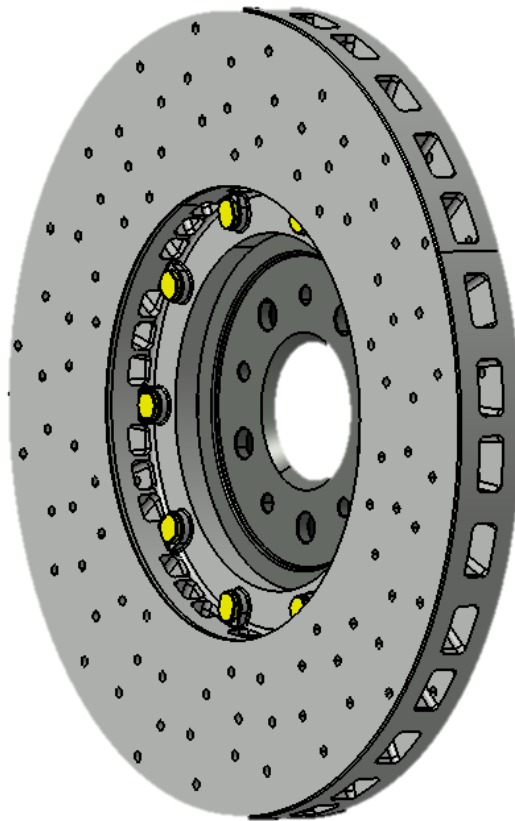


Figura 3 - Disco freno Ferrari 488

Tipicamente, con lo scopo di inibire modi di vibrare simmetrici del disco, viene usato un numero primo di ribs (solitamente 31, 37 o 41).

In vetture ad alte prestazioni, come nel caso riportato in figura, i dischi sono realizzati tramite macchina utensile e non sono necessariamente in ghisa.

Nelle ultime versioni di autovetture da competizione i dischi sono dischi carbon-ceramici.

Le pastiglie freno sono costituite da un piatto metallico su cui è attaccato un materiale d'attrito; il materiale d'attrito è collegato al piatto metallico tramite rivetti, incollaggio o direttamente colato sul piatto.

Le pastiglie sono solitamente differenziate tra interne o esterne a seconda della faccia del disco su cui vanno ad agire.

Nel caso specifico della Ferrari, vi sono delle pinze a 6 pistoni con 3 pastiglie interne e 3 pastiglie esterne agenti sul disco.

Le autovetture commerciali presentano solitamente soltanto una pastiglia per lato in quanto la potenza frenante richiesta è decisamente più bassa.

Le pastiglie possono essere alloggiare all'interno della pinza freno nei modi più svariati.

Il materiale di attrito delle pastiglie è un materiale composito costituito da:

- una matrice costituita da un legante ed altri materiali;
- delle fibre;
- del particolato metallico che agisce come modificatore di attrito;
- dei riempitivi minerali per migliorare il processo di produzione;
- dei lubrificanti solidi.

La matrice di materiale legante è solitamente composta da un polimero termoindurente con alcune possibili aggiunte di gomma e resina di anacardio.

Per quanto riguarda le fibre, come fatto notare da Anderson in [5], solitamente vi sono tre tipologie commercialmente diffuse: in amianto, in non-amianto organico e resine semimetalliche. A causa dei problemi dell'inquinamento legati alla salute e alla sensibilizzazione dell'opinione pubblica sulle polveri sottili, negli ultimi anni si è deciso di prestare molta attenzione alle fibre organiche.

Il particolato metallico all'interno delle pastiglie serve per controllare l'usura e le proprietà termiche del materiale di attrito, i lubrificanti solidi invece servono come stabilizzatori del coefficiente di attrito.

La maniera in cui questi cinque componenti fondamentali vengono uniti tra loro per creare il materiale di attrito delle pastiglie freno dipende dal campo di funzionamento in cui andrà a lavorare il freno (usura e range di temperature) e dal coefficiente di attrito richiesto.

Normalmente il range di temperature a cui può trovarsi a lavorare un freno è quello compreso tra i 0°C ed i 500°C; nel caso estremo delle auto da competizione Ferrari, un disco durante una frenata brusca e prolungata può raggiungere anche i 900°C.



Figura 4 - Prova al banco su un freno da competizione

In Figura 4 è illustrata la prova al banco di un freno da competizione, si noti come il disco in rotazione è in grado di raggiungere temperature estremamente elevate.

Per un freno a disco esistono poi diverse tipologie di pinze: lo scopo di tale oggetto illustrato in Figura 5 è quello di alloggiare i pistoncini attuati idraulicamente.

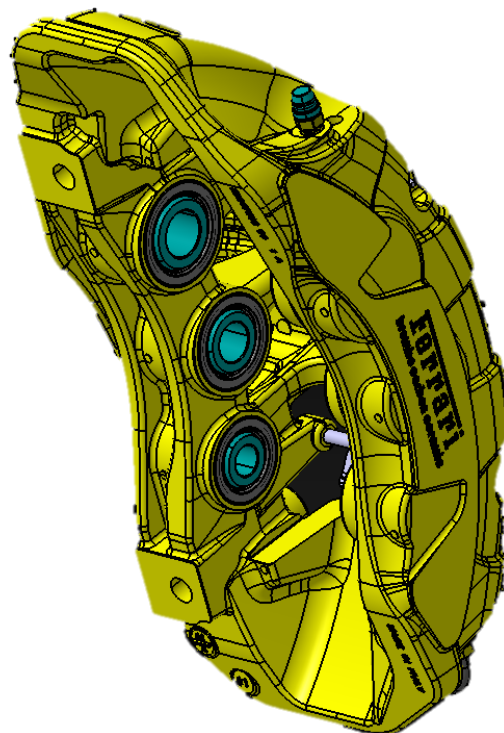


Figura 5 - Pinza freno Ferrari 488

La pinza è montata rigidamente a telaio in modo che possa trasmettere una coppia frenante negativa.

La coppia frenante è esercitata da un set di pistoni, i pistoni sul lato esterno e sul lato interno sono idraulicamente connessi in maniera tale da fare sì che la forza idraulica di attuazione sia auto-bilanciata.

Lo spostamento compiuto dai pistoni durante la frenata è molto piccolo. In sostanza, i gruppi di pastiglie sono sempre in contatto visivo con il rotore. Tra la parte di pinza che guida i pistoni ed i pistoni stessi sono presenti diverse guarnizioni. Tra le varie funzioni, le guarnizioni fungono da regolatori di usura e prevengono la fuoriuscita del liquido dei freni.

Quando il pedale del freno viene schiacciato e, di conseguenza, la pressione idraulica sui pistoni è aumentata, l'azione dei pistoni provoca lo schiacciamento del materiale di attrito delle pastiglie contro il rotore. Quindi, quando il piede del guidatore viene rimosso dal pedale del freno e la pressione esercitata sul pistone viene ridotta al suo valore nominale, le pastiglie del freno a contatto con il pistone vengono retratte usando le guarnizioni appena citate.

2.2 Dissipazione di energia

Come succitato, lo scopo di un impianto frenante è quello di ridurre l'energia cinetica di un veicolo tramite una dissipazione di energia.

In [6] viene proposta una tabella contenente dei dati pertinenti ricavati da 3 produttori di automobili contenente il valore di energia dissipata durante una frenata con decelerazione costante.

I valori fanno riferimento ad una frenata con velocità iniziale di 70 mph. e sono riportati in Tabella 1.

Come detto precedentemente, considerando che il 70-80% della potenza frenante è data dai freni anteriori, durante una frenata ogni singolo freno può tranquillamente trovarsi a dover dissipare oltre 50 kW di energia in un'interfaccia della dimensione delle pastiglie dei freni.

Tabella 1 - Dissipazione di energia durante una frenata

Marca e modello	Energia cinetica iniziale [kJ]	Spazio di frenata [m]	Dissipazione media [kW]	Dissipazione massima [kW]
Ford Explorer	1031.6	61.3	134.4	526.9
Porsche Boxter	656.2	48.8	139.6	434.9
Honda Civic LX	529.6	59.4	73.4	278.8

Tipicamente, questi meccanismi di dissipazione si tramutano in generazione di calore all'interfaccia di contatto.

Tuttavia, suoni di oltre 100 db (misurati da una distanza opportuna) rappresentano una dissipazione energetica di un ordine di grandezza inferiore rispetto alla dissipazione meccanica: come spiegato in [6], un rumore di 100 db misurato ad una distanza di 2 m presenta una potenza acustica di soli 0.25 W.

Si noti che tale potenza sonora è trascurabile rispetto alla potenza dissipata durante la frenata.

Per questo motivo, qualsiasi meccanismo che trasforma anche una minuscola quantità dell'energia dissipata in rumore rappresenta una potenziale fonte di emissione sonora e quindi una potenziale problematica di fischio dei freni.

La Tabella 1 mette in evidenza anche alcuni motivi per cui i freni a disco ci hanno messo così tanto a surclassare i freni a tamburo; rispetto ai freni a tamburo, l'area di contatto dei freni a disco è molto più piccola, ciò comporta delle temperature all'interfaccia più alte a parità di potenza dissipata. Tale problematica ha portato alla diffusione dei freni a disco ventilati.

Inoltre, i freni a tamburo richiedono una forza di attuazione minore rispetto ai freni a disco, per i quali si è dovuto sviluppare un sistema di canali idraulici in grado di resistere ad elevate pressioni e tensioni.

Per via di queste ed altre ragioni ci è voluto molto tempo affinché i freni a disco venissero incorporati all'interno delle automobili.

Capitolo 3: Analisi della letteratura precedente

Uno dei principali fattori del fischio deriva dalle caratteristiche di attrito del materiale frenante: il materiale delle pastiglie è di fondamentale importanza sia dal punto di vista delle prestazioni frenanti e del costo che dal punto di vista del comfort acustico.

Spesso il fischio dei freni non è ripetibile in quanto vi sono molti potenziali modi instabili di vibrare ed a ognuno di questi corrisponde una propria frequenza naturale.

I modi di vibrare che generano il fischio sono modi di vibrare accoppiati, ovvero non corrispondono ai singoli modi di vibrare dei diversi componenti ma derivano dall'interazione di questi e dal modo in cui sono assemblati.

Risulta infatti che le forze di attrito aggiungono dei termini di rigidità extra diagonali all'interno della matrice di rigidità complessiva \mathbf{K} rendendo così il sistema di equazioni un sistema accoppiato.

Analogamente, le azioni giroscopiche aggiungono dei termini extra-diagonali all'interno della matrice di viscosità \mathbf{C} .

Il fatto che le equazioni siano accoppiate è considerata la causa principale del fischio dei freni.

Il fischio dei freni dipende da:

- Pressione dei freni (forza che il pistone esercita sul disco)
- Velocità del rotore (velocità di rotazione del disco, proporzionale alla velocità della mia autovettura)
- Coefficiente di attrito del materiale delle pastiglie
- Temperatura dei dischi (dischi in ghisa possono raggiungere i 700 °C, carboceramici fino a 900 °C)

Oltre a questi, vi sono anche altri fattori di influenza.

Essendo un fenomeno molto variabile e dipendente dalle svariate condizioni in cui un impianto frenante può dover lavorare, la maggior parte dei rimedi sviluppati per eliminare il fischio dei freni sono empirici.

Le metodologie empiriche più diffuse sono:

- ridurre il coefficiente di attrito delle pastiglie;
- usare materiale viscoelastico sul backplate delle pastiglie se vi sono delle vibrazioni significative sulla pastiglia;
- modificare la forma delle pastiglie;
- modificare la rigidità della pinza freno;
- modificare la geometria del supporto pastiglie;
- modificare il collegamento tra pastiglie e pinza/pistoni;
- modificare la geometria del disco.

Analizzeremo di seguito alcuni studi condotti presenti in letteratura per analizzare ed eliminare il fenomeno del fischio dei freni.

I principali metodi di analisi sono i seguenti:

- **metodi analitici:** i metodi analitici sono metodi in cui si è cercato di costruire un modello per lo studio del fenomeno che fosse rappresentativo della realtà.

A partire da questo modello l'autore ha in genere condotto un'analisi di stabilità per vedere quando il suo sistema diventa instabile e, qualora lo fosse, per cercare di ricavare i principali parametri che influenzano l'instabilità del suo modello.

In molti modelli di è visto che una causa del fischio era dovuta alla variazione del coefficiente di attrito al variare della velocità di scorrimento, in particolare quando questa presentava una caratteristica negativa.

In generale, resta comunque complicato applicare uno di questi modelli per modellare l'interazione tra i vari componenti di un impianto frenante a causa della molteplicità di fattori che entrano in gioco.

- **Metodi numerici:** Con i metodi numerici agli elementi finiti è possibile ricavare i modi di vibrare di ogni singolo componente, i quali però differiscono dai modi di vibrare dell'insieme.

Risulta infatti molto problematico modellare agli elementi finiti l'interazione tra i vari componenti, in particolare l'interfaccia pastiglie-disco. Sono stati creati diversi modelli agli elementi finiti che includessero le forze longitudinali di attrito tra pastiglia e disco, tuttavia la maggior parte di questi modelli è risultato essere poco accurato in quanto una piccola variazione di temperatura, velocità o

qualsiasi altro parametro influente, genera grandi variazioni delle frequenze naturali del fischio.

- **Metodi sperimentali:** è stato osservato come le frequenze a cui si verifica il fischio siano fortemente dipendenti dai modi di vibrare del disco, di conseguenza risulta fondamentale la determinazione delle frequenze naturali di tale disco.

È stato evidenziato che sia i modi di vibrare longitudinali che i modi di vibrare uscenti dal piano del disco rientrano tra le principali cause del fischio.

I metodi principali per determinare sperimentalmente i modi di vibrare di un disco sono tramite accelerometri oppure tramite vibrometria laser (interferometri olografici).

La misurazione delle frequenze naturali tramite accelerometri avviene posizionando l'accelerometro sul corpo in questione ed eccitandolo tramite una forzante impulsiva generata da un opportuno martelletto di misura (vedi Figura 6).

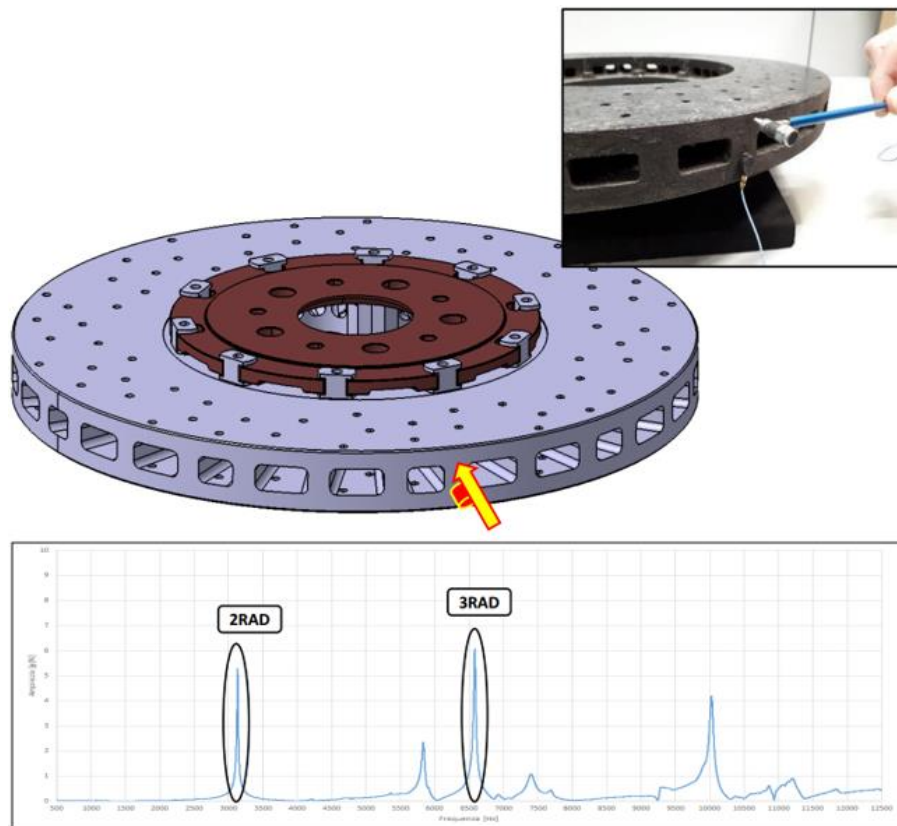


Figura 6 - Determinazione dei modi di vibrare radiali del disco freno

A partire dalla misura della trasformata della forzante applicata al corpo (misurata dal martello) e dalla misura della trasformata della risposta (misurata dall'accelerometro) si ricava la funzione di risposta in frequenza dell'oggetto in questione.

In Figura 6 tramite un accelerometro monoassiale posizionato in direzione radiale e tramite un'eccitazione impulsiva in direzione radiale è stata ricavata la funzione di risposta in frequenza da cui si ricavano le frequenze naturali associate a dei modi di vibrare radiali.

Il metodo più diffuso tuttavia è quello degli interferometri olografici in quanto l'uso di accelerometri è limitato a componenti dell'impianto frenante stazionari, cioè non posti in rotazione, oppure è limitato ad un singolo componente.

Un esempio di vibrometria laser applicato per il fischio dei freni è riportato in Figura 7: in tale applicazione l'autovettura è montata su un banco prova e portata in condizioni critiche fin tanto che il fischio non si verifica.

Quindi, tramite interferometri olografici⁴ è possibile ottenere i modi di vibrare e la frequenza in cui si manifesta il fischio.

Grazie a questo metodo si ottengono i modi accoppiati di un sistema frenante mentre il fenomeno stesso si verifica.

⁴ Gli **interferometri olografici** producono un'immagine olografica a seguito dell'innesco di un laser che rileva l'ampiezza massima e minima della superficie di un oggetto vibrante.

La differenza nella lunghezza del percorso ottico, provocata dalle deformazioni dell'elemento vibrante, crea un'interferenza tra i contorni dell'oggetto su una piastra olografica.

In questo modo, la forma del modo di vibrare dell'oggetto in questione può essere determinata a partire dal tipo di interferenza ottenuta.



Figura 7 - Vibrometria laser su Ferrari 488 Pista

I metodi sperimentali per il rilievo del fischio sono fondamentali in quanto, oltre a validare modelli analitici e numerici, costituiscono un'analisi di gran lunga più efficace rispetto a tali metodi.

Inoltre, spesso la ricerca della causa del fischio è possibile solo tramite analisi sperimentale dei dati.

3.1 Metodologie sperimentali per la quantificazione del fischio dei freni

Questo articolo [8] si propone di analizzare 6 diversi indici di valutazione del fischio dei freni con 4 differenti materiali delle pastiglie che presentano caratteristiche di attrito differenti.

I diversi metodi per la determinazione di un certo indice di valutazione del fischio sono stati studiati e validati separatamente, questo studio mira a confrontare 6 diversi indici per la valutazione del rumore dei freni usando come base comune la stessa procedura di test.

Particolare attenzione è stata data alla capacità di ciascun sistema di valutazione di distinguere la quantità di rumore prodotta da diversi materiali di attrito: per fare ciò sono stati sottoposti allo stesso test 4 diverse tipologie di pastiglie.

Per il test è stato utilizzato un dinamometro inerziale contenente una camera ambientale in grado di controllare temperatura e umidità, inoltre è presente un microfono che viene posizionato verticalmente rispetto al freno. Il rotore utilizzato è costituito da un disco in ghisa ottenuto per colata.

Quindi sono stati calcolati 6 diversi indici di valutazione del fischio dei freni, i quali vengono calcolati a partire dai seguenti input:

SI1: numero di volte in cui si verifica il fischio;

SI2: numero di volte in cui si verifica il fischio e intensità sonora a cui si verifica (sound pressure level);

SI3: numero di volte in cui si verifica il fischio, sound pressure level e il numero dei modi di vibrare;

SI4: numero di volte in cui si verifica il fischio e durata del fischio;

SI5: numero di volte in cui si verifica il fischio, sound pressure level, frequenza a cui si verifica il fischio, durata del fischio, temperatura, decelerazione e riduzione di velocità;

SI6: Numero di volte in cui si verifica il fischio, frequenza a cui si verifica il fischio, durata del fischio, rumorosità del fischio, temperatura, pressione e riduzione di velocità;

Dai risultati viene mostrato che i 6 indici sono tra loro coerenti, cioè attribuiscono tutti allo stesso materiale delle pastiglie l'indice di rumorosità più alto.

Quindi per stabilire la capacità che ha ogni indice di distinguere il diverso materiale di attrito in base alla quantità di rumore, è stata proposta una metodologia chiamata "*metodo della variazione relativa di ampiezza*".

In tale metodologia, per ogni indice (1-6), viene valutata una certa ampiezza a partire dal valore assoluto della somma delle differenze di indice per i 4 materiali; maggiore è il valore di tale ampiezza, migliore sarà la capacità dell'indice di fischio di differenziare i diversi materiali di attrito nella generazione del fischio.

Risulta quindi che gli indici 2, 3 e 4 hanno le più alte capacità di distinguere i diversi materiali di attrito rispetto alla loro quantità di rumore nei freni, inoltre, avendo pochi parametri di input sono anche gli indici più facili da implementare e che quindi meglio si prestano ad una fase iniziale della progettazione quando vengono indagati un gran numero di materiali e vengono eseguiti molti test.

In una fase successiva dello sviluppo in cui vengono valutate anche le proprietà psicoacustiche (frequenza del fischio, rumorosità e altre proprietà percettive dell'uomo) sono più appropriati gli indici di valutazione del rumore 5 e 6.

Come ulteriore risultato viene mostrato che per tutti e 4 i materiali di attrito, le frenate in cui si verifica il fischio dei freni presenta un coefficiente di attrito leggermente più alto rispetto a quello delle frenate in cui non si presenta rumore: il coefficiente di attrito è quindi un parametro molto importante per il fischio dei freni, tuttavia nessuno degli indici di rumorosità analizzati prende in considerazione tale parametro.

3.2 Modello di Shin et al.

Una delle principali cause del rumore dei freni è dato da un gradiente velocità-scorrimento negativo che porta a delle vibrazioni stick-and-slip, le quali presentano un'alternanza di comportamento uniforme (stick: accumulo di energia) e non uniforme (slip: dissipazione di energia).

Lo scopo di questo articolo [9] è quello di usare un modello semplificato per investigare l'effetto dello smorzamento sulle vibrazioni stick-slip di un impianto frenante: dopo una prima analisi di instabilità con particolare attenzione al parametro di smorzamento viene eseguita un'analisi non lineare per scoprire quegli aspetti più sottili del comportamento del sistema.

Per fare ciò viene usato un modello a 2 gradi: disco e pastiglie vengono modellati come sistemi ad 1 grado di libertà collegati tra loro da un'interfaccia ruvida in cui vi è un certo valore di attrito, come illustrato di seguito in Figura 8.

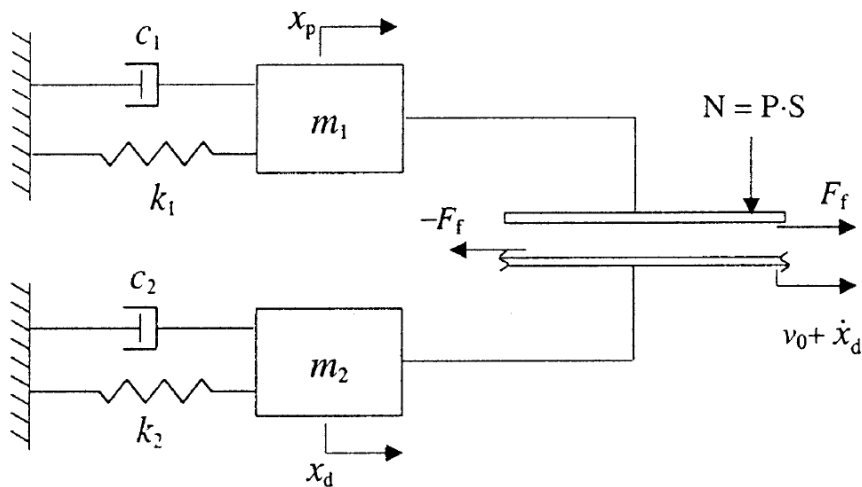


Figura 8 - Modello di Shin et al.

Il moto stick-slip è solitamente descritto come un ciclo limite nello spazio delle fasi e richiede un'analisi non lineare per determinare il comportamento dettagliato del sistema, tuttavia, poiché l'esistenza (e quindi rumore) di un ciclo limite dipende dalla stabilità dei punti di equilibrio, è possibile utilizzare un'analisi lineare per determinare la stabilità di tali punti.

Per questa ragione viene inizialmente eseguita un'analisi di stabilità considerando una forza di attrito all'interfaccia lineare (vedi il primo grafico di Figura 9), variando i parametri di massa, smorzamento e rigidità del sistema si va ad osservare in quali condizioni il sistema diventa instabile provocando quindi rumore non controllato.

L'analisi di stabilità si basa sulla ricerca della parte reale degli autovalori a partire dalle equazioni del moto: se la parte reale degli autovalori è positiva, allora il sistema è instabile e potenzialmente manifesta fischio.

Da questa prima analisi l'autore ricava che lo smorzamento del disco è importante tanto quanto quello delle pastiglie e per avere stabilità occorre quindi aumentare entrambi i termini viscosi del sistema c_1 e c_2 .

Un altro risultato di tale analisi di stabilità proposto dall'autore è la tendenza alla rumorosità quando frequenze naturali di disco e pinze sono prossime tra loro, questo tuttavia si tratta di un problema di risonanza.

Questa analisi lineare serve a predire le instabilità del sistema ma non fornisce informazioni sul comportamento dinamico non lineare; potrebbe infatti essere che l'analisi lineare preveda un sistema instabile, tuttavia non vengono date informazioni sul ciclo limite risultante, il quale potrebbe essere molto piccolo e quindi generare un rumore che nella realtà non risulta udibile.

L'analisi non lineare fornisce informazioni sulle dimensioni del ciclo limite e di conseguenza ci dice quando un'instabilità diventa un problema.

Per l'analisi non lineare la formulazione della forza di attrito è del tutto identica alla forma precedente con la differenza che è prevista una velocità negativa e quindi vi è una discontinuità in prossimità dello zero (vedi il grafico di destra di Figura 9).

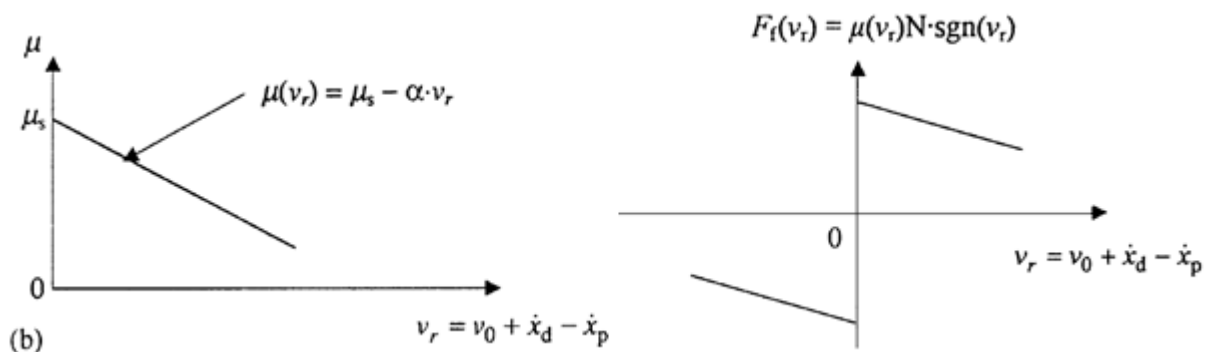


Figura 9 - Caratteristica della forza di attrito al variare della velocità

Vengono così riscritte le equazioni del moto e dai risultati si nota che per bassi valori di α (cioè quando il coefficiente di attrito dinamico è simile al coefficiente di attrito statico) si ottiene un ciclo limite costante, invece all'aumentare di α , N o v_0 si verifica un ciclo limite stick-slip la cui dimensione aumenta all'aumentare di questi parametri.

Ciò significa che la rumorosità del freno aumenta quando aumenta il gradiente negativo α del coefficiente di attrito dinamico.

Lo stesso risultato si ha all'aumentare della forza normale N e della velocità iniziale v_0 . Un altro risultato di tale analisi non lineare è la dimostrazione delle condizioni di stabilità ricavate nella precedente analisi: viene mostrato come per bassi valori di smorzamento c_1 e c_2 si ha un certo ciclo limite (= rumore) e come questo si riduca all'aumentare di c_1 e c_2 congiuntamente.

Viceversa, l'aggiunta di smorzamento singolarmente alle pastiglie o al disco può rendere il sistema ancora più instabile aumentando il rumore dell'impianto (ampiezza del ciclo limite).

I risultati principali di tale studio proposti dall'autore sono:

- Dimostrazione delle condizioni necessarie per prevenire l'instabilità;
- Tendenza alla rumorosità quando frequenze naturali di disco e pinze sono prossime tra loro;
- Che lo smorzamento è un fattore chiave per la riduzione di rumore.

In questo articolo [9] l'autore ha voluto dare una spiegazione di quello che è l'effetto dello smorzamento senza concentrarsi su un modello a parametri concentrati che fosse rappresentativo per il fenomeno del fischio dei freni.

La soluzione ricavata può diventare instabile a causa dei termini di viscosità negativi dati dalla caratteristica di attrito negativa.

Per via del fatto che un disco automobilistico è molto diverso da questo modello e che l'assunzione di un andamento del coefficiente di attrito di questo tipo è del tutto arbitraria, i campi di instabilità ottenuti e interpretati come fischio dei freni non sono da ritenersi validi.

3.3 Modello di Hoffmann e Gaul

In questo articolo [10] Hoffmann e Gaul presentano un modello minimale a 2 gradi di libertà per chiarire i meccanismi fisici alla base dell'instabilità dell'accoppiamento dei modi delle oscillazioni autoeccitate indotte dall'attrito.

Questo tipo di instabilità del sistema può essere interpretato come fischio.

Per studiare la proprietà dell'instabilità causata dai modi accoppiati viene proposto un modello a 2 gradi di libertà (vedi Figura 10) dove vi è una massa in grado di spostarsi in direzione x e y sottoposta ad una forza di attrito.

Una superficie di contatto collegata alla massa tramite una molla viene spinta su una cinghia in movimento a velocità costante; il coefficiente di attrito all'interfaccia è costante.

La massa è collegata a due molle lineari con rigidezza k_1 e k_2 e ad una terza molla la cui rigidezza k_3 rappresenta la rigidezza del contatto tra cinghia e la superficie.

Verranno prese in considerazione solo piccole perturbazioni attorno allo stato di scorrimento costante.

Scrivendo le equazioni del moto si ottiene una matrice di rigidezza asimmetrica come mostrato di seguito nell'Equazione 1 i cui termini extra-diagonali dipendono dai parametri di rigidezza del sistema:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - \mu k_3 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Equazione 1 - *Equazione del moto modello Hoffmann e Gaul*

In questo tipo di equazione non sono presenti termini dipendenti dalla velocità, contrariamente a quanto visto nell'articolo precedente [9].

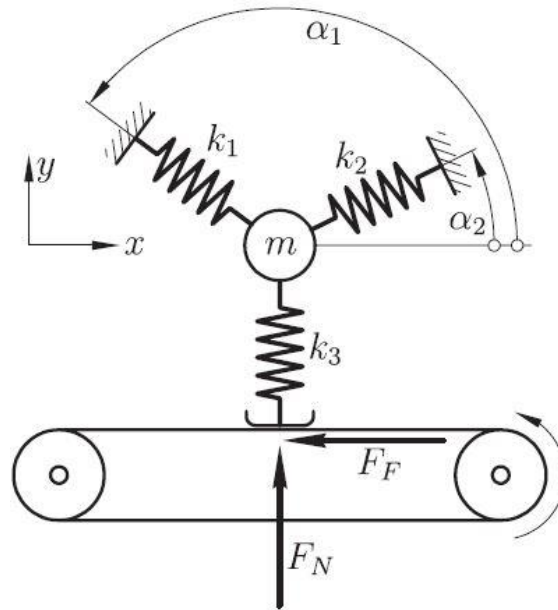


Figura 10 - *Modello di Hoffmann e Gaul*

Il tipo di instabilità studiato è dovuto alla presenza della forza di attrito che è una forza non conservativa e che produce un certo lavoro.

Per avere un aumento ciclico di energia vibrazionale devono esserci simultaneamente delle oscillazioni sul piano e fuori dal piano separate da una certa fase.

Questo articolo mostra come l'energia possa essere trasferita dal sistema di attrito a quello vibrazionale: un'oscillazione della forza normale genera un'oscillazione della forza tangente al piano.

Uno dei risultati mostrati è che se ci sono simultaneamente spostamenti tangenziali relativi all'interfaccia di attrito che non sono esattamente in fase con le oscillazioni di forza, si ottiene una crescita ciclica dell'energia vibratoria.

Inoltre, è stato mostrato che le forze di attrito agiscono come elemento accoppiante nelle equazioni del moto tra spostamenti sul piano e fuori dal piano e in determinate condizioni possono generare instabilità.

Ancora una volta il modello proposto è molto diverso da quello che è la struttura di un impianto frenante, tuttavia, come sottolineato dagli autori stessi, l'obiettivo principale è quello di evidenziare l'instabilità del meccanismo dovuto ai modi accoppiati del sistema, non tanto quello di costruire un modello rappresentativo dei freni automobilistici.

Un'estensione di questo articolo è riportata in [11] in cui, a partire da un modello analogo a quello di Figura 10, viene anche studiato come variano le caratteristiche dinamiche e la stabilità del sistema considerando anche la presenza di un giunto.

In Figura 11 vengono mostrati i due modelli di studio con due diversi tipi di non linearità associate alla presenza del giunto: nel modello di sinistra vi è una non linearità dovuta alla caratteristica cubica della molla, nel modello di destra vi è una non linearità dovuta ad un elasto-scorrimento del giunto.

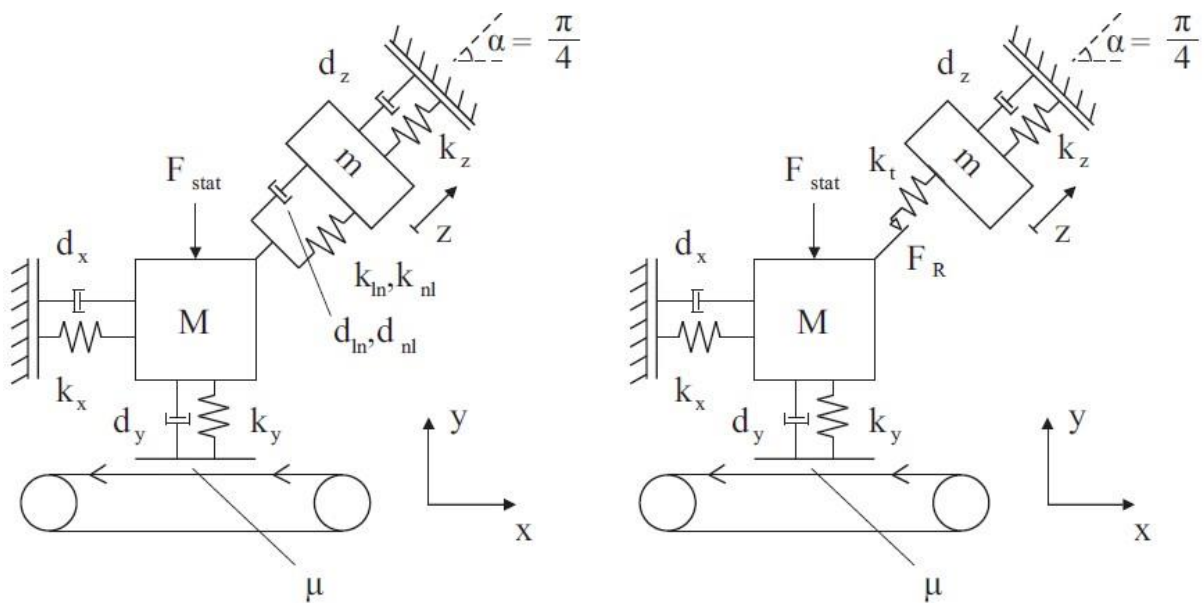


Figura 11 - Modello di Hoffmann 2

Una volta derivata l'equazione del moto viene condotta un'analisi di stabilità attraverso l'analisi degli autovalori dell'equazione del moto.

Per entrambi lo studio di stabilità è stato condotto in modo che esattamente un autovettore abbia parte reale positiva.

Dai risultati si è ricavato che il tipo di comportamento dinamico dei giunti, in entrambi i casi, influenza di molto l'ampiezza del ciclo limite.

Ampiezze molto elevate possono insorgere anche per casi in cui la dinamica dei giunti non viene considerata, tuttavia viene puntualizzato che l'analisi lineare basata sul calcolo degli autovalori può essere fortemente limitata in presenza di giunti o altre non linearità del sistema.

La dimensione della parte reale positiva degli autovalori di un'analisi di stabilità solitamente non è correlata all'ampiezza del ciclo limite (= rumore emesso dal sistema) derivante da un'analisi non lineare.

Inoltre, il confine di stabilità predetto dall'analisi lineare può risultare privo di senso.

Da queste considerazioni l'articolo intende dimostrare che occorrono inevitabilmente delle tecniche di analisi non lineare per mettere a punto delle tecniche numeriche di simulazione in grado di prevedere le vibrazioni del sistema e di conseguenza la sua possibile emissione sonora.

3.4 Modello di Ouyang e Mottershead

Come enunciato dal titolo, questo tipo di articolo [12] non tratta propriamente il fenomeno dell'instabilità ma la risonanza di un impianto frenante dovuta ad una caratteristica negativa dell'attrito al variare della velocità.

In questa trattazione viene considerato un modello in rotazione su un piano e vengono studiati sia i fenomeni sul piano, che i fenomeni uscenti dal piano e come questi influenzano la risonanza generando rumore.

Nell'articolo viene dimostrato che l'introduzione di un sistema molla-smorzatore sul piano del moto (compreso una caratteristica negativa dell'attrito al variare della velocità) aggiunge ulteriori risonanze parametriche che sono destabilizzate dallo smorzatore trasversale, e riduce le regioni di instabilità delle altre risonanze.

Nella trattazione proposta la velocità a cui si muove la massa sul piano è sufficientemente elevata da evitare fenomeni di stick-and-slip, ciò significa che la forza di attrito non cambia mai verso e vi è una condizione di continuo slittamento.

La forza di attrito presenta una caratteristica negativa al variare della velocità relativa angolare ed è definita come

$$F_{\theta} = \widetilde{F}_{\theta} \left(1 - \alpha(\dot{\varphi} + \widetilde{\Omega}) \right)$$

Equazione 2 - Caratteristica attrito secondo Ouyang e Mottershead

dove \widetilde{F}_{θ} è dato dal prodotto tra forza normale e coefficiente di attrito.

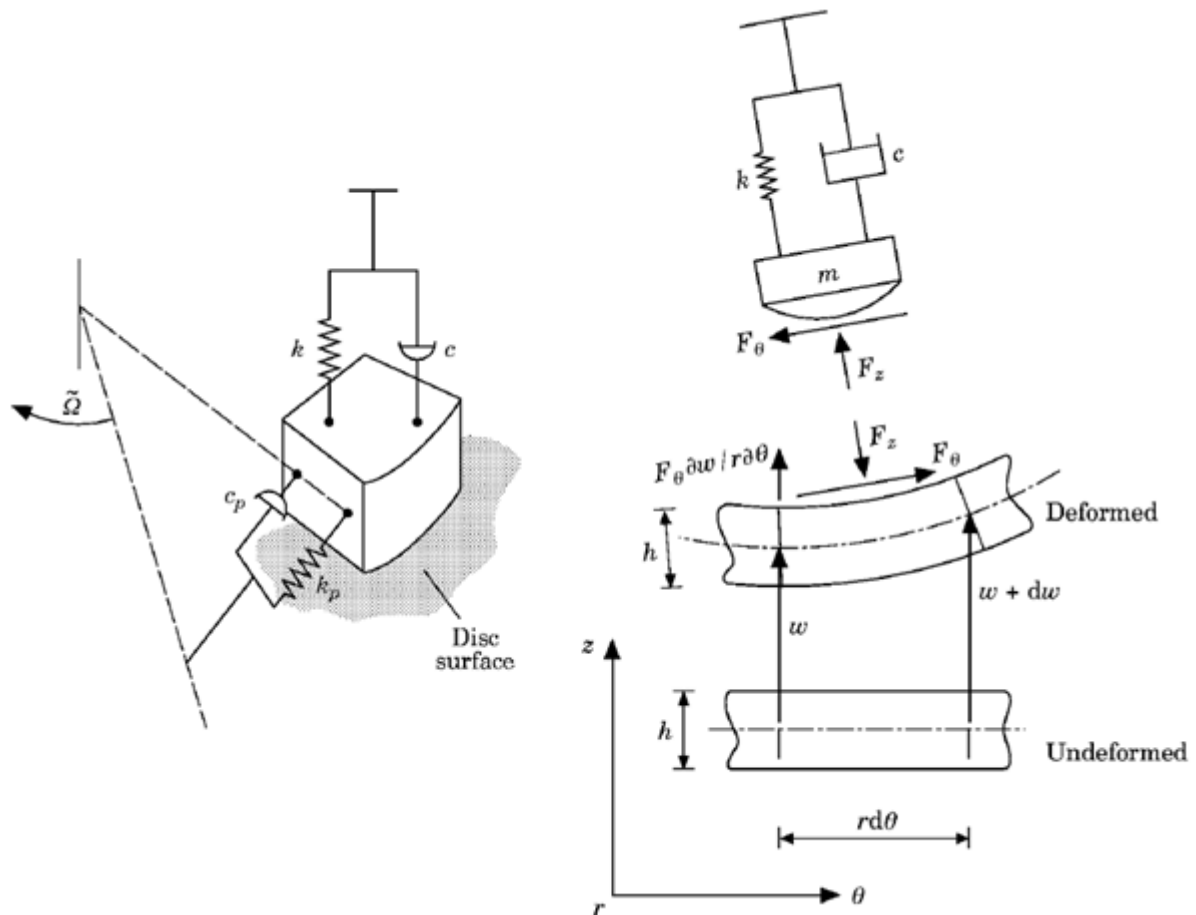


Figura 12 - Modello di Ouyang e Mottershead

Il sistema è rappresentato in Figura 12 consiste in una massa premuta contro la superficie di un disco tramite una molla ed uno smorzatore, un'altra molla e un altro smorzatore collegano la massa con un sistema rotante complanare alla superficie di scorrimento.

La massa in rotazione rappresenta le pastiglie di un impianto frenante che, viste dal sistema di riferimento solidale con il disco, ruotano rispetto ad esso.

A causa dell'introduzione di una molla-smorzatore sul piano di rotazione, vi è un certo angolo φ tra rotazione imposta e rotazione della massa.

Si noti che sono proprio la molla e lo smorzatore appartenenti al piano del disco che permettono alla forza di attrito di variare secondo la legge decrescente vista prima nell'Equazione 2.

La forza di attrito F_θ è quel termine che accoppia le due equazioni del moto normale al piano e sul piano di rotazione, tuttavia l'accoppiamento è uni-direzionale in quanto è possibile risolvere l'equazione del moto sul piano ricavando l'angolo φ

indipendentemente dallo spostamento verticale w , viceversa, per risolvere l'equazione del moto normale al piano (che rappresenta la deformata della superficie) occorre conoscere φ per poter ricavare w .

Note le due espressioni delle 2 equazioni del moto l'autore ricerca una soluzione, in particolare, nota la soluzione dell'equazione differenziale sul piano del moto, viene ricercata la soluzione dell'equazione fuori dal piano.

Per fare ciò viene scritto lo spostamento verticale come sommatoria di funzioni di forma di Bessel ψ_{rs} moltiplicate per una variabile del tempo q_{rs} .

$$w(r, \theta, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \psi_{rs}(r, \theta) q_{rs}(t)$$

Equazione 3 - Espressione dello spostamento verticale secondo Ouyang e Mottershead

Una volta trovata la forma analitica che descrive il fenomeno viene eseguita una simulazione in cui vengono scelti dei parametri di sistema il più possibile realistici per descrivere un impianto frenante reale.

Dai risultati viene mostrato che, a seguito dell'introduzione della molla e smorzatore sul piano e di una caratteristica negativa dell'attrito al variare della velocità, le risonanze modificate presentano una zona di instabilità minore rispetto a prima, ciò significa che la molla-smorzatore sul piano e la relazione negativa tra attrito e velocità ha un effetto stabilizzante.

Altra conclusione è che la rigidità della molla sul piano k_P non ha pressoché alcun effetto.

Come ulteriore risultato viene mostrato come lo smorzatore normale al piano abbia un effetto destabilizzante all'aumentare della viscosità c .

Infine, i parametri legati allo smorzamento del disco all'interno dell'equazione del moto risultano stabilizzanti in tutte le circostanze.

Tale analisi è stata condotta sotto un'ipotesi abbastanza inverosimile, ovvero che la caratteristica dell'attrito rimane negativa all'aumentare della velocità. Nella realtà per velocità sufficientemente elevate l'attrito presenta una caratteristica tipicamente

costante o che può addirittura diventare positiva, quindi la risonanza provocata dal sistema appartenente al piano e studiata in questo articolo non esisterebbe più.

Inoltre, per come è costituito un impianto frenante e per le elevate pressioni che si sviluppano al suo interno, è molto difficile e costoso introdurre degli elementi che abbiano un effetto smorzante o elastico nella direzione del piano del disco.

Questo articolo ha voluto mostrare come certi parametri influenzano il comportamento del disco, trattasi però di un problema di risonanza in cui vengono valutate le frequenze naturali del sistema, non di un problema di instabilità.

3.5 Modello di Walsh

L'articolo [13] propone l'analisi sperimentale e analitica di un sistema costituito da un'asta agente su un disco.

La parte iniziale del paper studia il modello sperimentale trave-su-disco: al banco prova viene riprodotto ed acquisito il fenomeno del fischio freno ponendo un'asta cilindrica a contatto con un disco in rotazione.

Dall'analisi della funzione di risposta in frequenza si ricava la frequenza naturale del fischio (1673 Hz) e la sua armonica; tale frequenza naturale è vicina alla seconda frequenza della modalità fuori dal piano del diametro nodale del disco (1529 Hz) ed alla prima frequenza flessionale della trave (1563 Hz).

In questo tipo di approccio si nota che il fischio del freno risulta legato alla prime 4 modalità fuori dal piano dei diametri nodali del disco ed alle prime due modalità flessionali della trave, per questo motivo risulta particolarmente facile da eccitare e riprodurre.

Tuttavia, occorre sottolineare che questo tipo di studio non risulta appropriato per il tipo di ricerca sul fischio dei freni che ci proponiamo di condurre: anche se l'effetto è il medesimo, ovvero rumore, in questo caso il rumore dei freni è generato da un problema di risonanza in cui vengono accoppiati due diversi modi di vibrare.

Quello che è lo scopo di questa tesi invece è la ricerca di un modello in grado di prevedere l'instabilità del sistema, la risonanza è invece un fenomeno che dipende dalle

frequenze naturali dei suoi componenti quando queste sono in prossimità l'una dell'altra.

Nella seconda parte, viene proposto un modello analitico a tre gradi di libertà come raffigurato in Figura 13: il modello è costituito da 2 masse in grado di spostarsi in direzione x e y rappresentanti la pastiglia ed il disco.

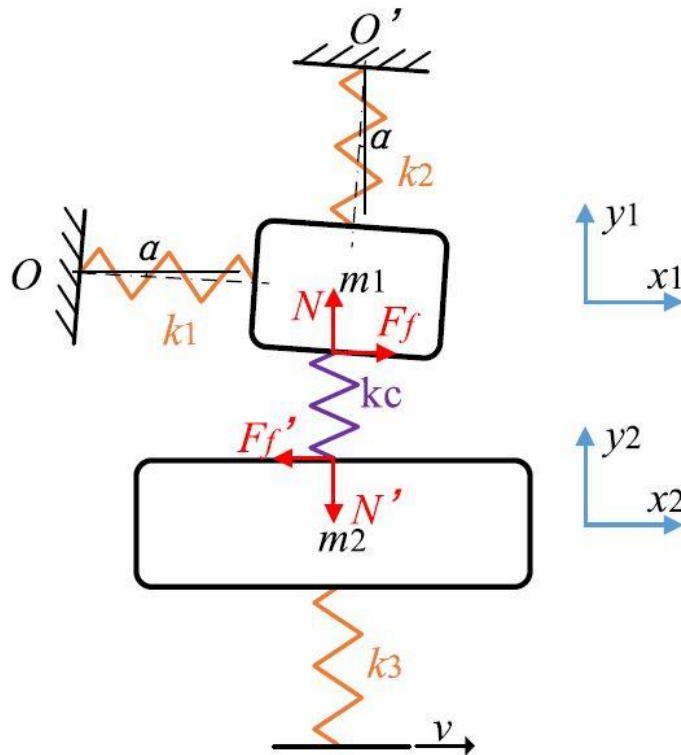


Figura 13 - Modello di Walsh

Il corpo 1 può spostarsi in nelle due direzioni e ruotare secondo un certo angolo α , tale rotazione rappresenta la corrispondente flessione dell'asta applicata sul disco in rotazione.

La rigidezza k_c è la rigidezza dovuta al contatto tra disco e asta.

Le ipotesi di tale modello sono che:

- m_1 è inclinata di uno stesso angolo α rispetto alle sue due direzioni principali;
- l'angolo α è costante e non è influenzato dalle vibrazioni ad alta frequenza e bassa ampiezza di m_1 ;
- m_2 si muove con velocità in direzione x costante e vibra soltanto in direzione y ;
- m_1 ed m_2 sono accoppiate tramite la forza normale N e di attrito F_f ;

- assenza di smorzamenti ne modello.

Dalla seconda legge di Newton si ricavano le equazioni del moto, in forma matriciale l'omogenea associata risulta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_F)\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Equazione 4 - Equazione di Walsh

Con:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha & -(k_1 - k_2) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -(k_1 - k_2) \sin \alpha \cos \alpha & k_1 \sin^2 \alpha + k_2 \cos^2 \alpha + k_c & -k_c \\ 0 & -k_c & k_3 + k_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} 0 & \mu k_c & -\mu k_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}.$$

Segue quindi un'analisi di stabilità al variare del coefficiente di attrito μ e dell'angolo α .

L'i-esimo autovalore del sistema viene espresso nella forma $\lambda_i = \sigma + j2\pi f_{di}$.

Il fattore di smorzamento adimensionale è dato da $\zeta_i = -\frac{\sigma}{2\pi f_{di}}$, se tale valore è negativo (cioè la parte reale dell'autovalore è positiva) il sistema risulta instabile.

L'articolo mostra che quando $\sigma = 0$ le frequenze f_d dei modi di vibrare sono separate ed il sistema risulta stabile, diversamente, quando $\sigma > 0$ le frequenze sono accoppiate ed il sistema presenta instabilità.

Come suddetto, trattasi di un problema di risonanza, non di instabilità; usare il termine "stabile" risulta quindi improprio.

Il risultato di tale analisi è che il sistema non manifesta rumorosità per bassi valori di μ e α o per alti valori di α .

Infine, in un'analisi della risposta transitoria viene valutata l'energia del sistema per stimare l'innescò e l'aumento di ampiezza delle vibrazioni.

Per dei valori di $\mu = 0.2$ e $\alpha = 2^\circ$, si osserva che tutte le grandezze aumentano con il tempo; infatti, a causa dell'interazione della forza di attrito con gli spostamenti

orizzontali e verticali di m_1 e m_2 , l'energia cinetica e potenziale del sistema aumenta di continuo grazie all'immissione di energia da parte della forza non conservativa di attrito che oltre a mantenere in moto le masse, ne aumenta l'ampiezza di oscillazione.

In questa maniera l'ampiezza delle vibrazioni tende a divergere provocando così il fenomeno del fischio dei freni.

Per quanto interessante e degno di nota, questo lavoro esula da quello che è il fenomeno che stiamo ricercando e studiando.

3.6 Modello di Hochlenert e Hardegon

Il modello è un modello proposto da Hochlenert in [14] è un modello a 2 gradi di libertà consistente in un disco rigido dotato di una certa inerzia, il cui baricentro è collocato su uno snodo sferico (vedi Figura 14).

I due gradi di libertà sono costituiti dalle due possibili rotazioni attorno a tale snodo.

Il collegamento tra disco e snodo sferico presenta una certa rigidità e viscosità torsionale.

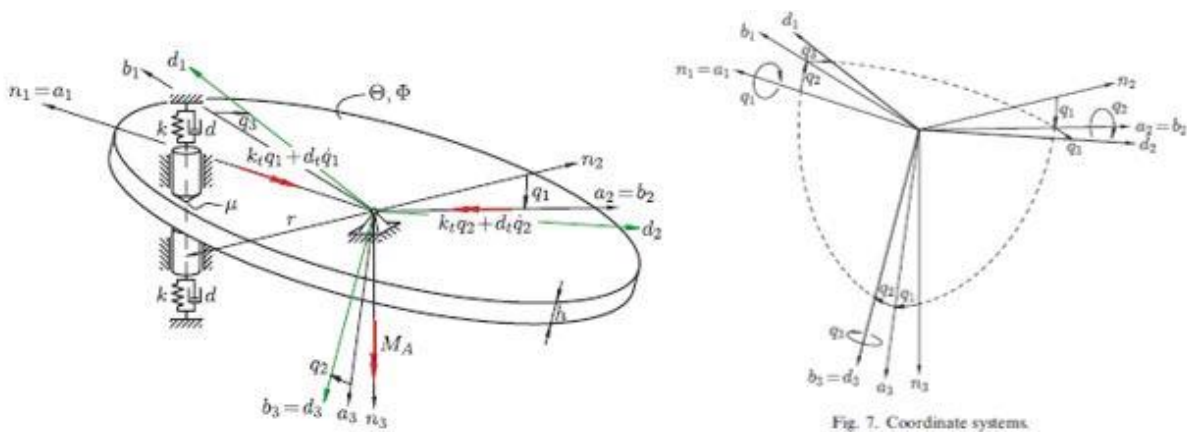


Figura 14 - Modello di Hochlenert e Hardegon

Il contatto con le pastiglie del sistema frenante viene simulato tramite l'azione di due masse, poste ad una distanza r dal centro del disco, in grado di traslare verticalmente grazie alla presenza di una molla ed uno smorzatore.

La posizione del disco è descritta attraverso i 3 angoli cartesiani (corrispondenti a 3 rotazioni) q_1, q_2, q_3 che legano in sistema di riferimento fisso $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ con quello solidale al disco $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$.

L'articolo segue un approccio Euleriano per ricavare le equazioni del moto: viene studiata la cinematica del sistema e successivamente vengono ricavate le equazioni del moto attraverso l'equilibrio dei momenti.

L'autore arriva infatti a scrivere l'espressione del momento complessivo come

$$\mathbf{M} = -k_t q_1 \mathbf{n}_1 - k_t q_2 \mathbf{a}_2 - d_t \dot{q}_1 \mathbf{n}_1 - d_t \dot{q}_2 \mathbf{a}_2 + M_A \mathbf{n}_3 + \mathbf{p}_1 \times \mathbf{F}_{D1} + \mathbf{p}_2 \times \mathbf{F}_{D2}$$

Equazione 5 – *Espressione del momento totale modello Hochlenert e Hardegon*

A partire dall'equilibrio nel sistema di riferimento Newtoniano $\left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega}^D = \mathbf{M}\right)_N$ (dove $\boldsymbol{\theta}$ è il tensore d'inerzia e $\boldsymbol{\omega}^D$ è il vettore velocità angolare nel sistema di riferimento Newtoniano) si ottengono le due equazioni del moto:

$$\begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mu N_0 \frac{h^2}{r \Omega} + 2dr^2 & \phi \Omega \\ -\phi \Omega - \mu dhr & d_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t + 2kr^2 + N_0 h & \frac{1}{2} \mu N_0 \frac{h^2}{r} \\ -\mu(khr + 2N_0 r) & k_t + (1 + \mu^2) N_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equazione 6 - *Equazione del moto modello di Hochlenert e Hardegon*

Dopo aver ricavato l'Equazione 6 gli autori hanno condotto un'analisi di stabilità per verificare quali fossero i parametri più influenti per la stabilità del sistema: essendo di fondamentale importanza scegliere dei parametri che siano rappresentativi della realtà (specialmente i termini viscosi e le dimensioni del disco r ed h), tali parametri sono stati definiti a seguito di prove sperimentali.

Per l'analisi di stabilità viene sostituita nell'equazione del moto una soluzione del tipo $\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}} e^{\lambda t}$, viene quindi valutato il luogo delle radici degli autovalori λ al variare della velocità di rotazione Ω .

Al variare di questo parametro viene ricercato quel particolare valore critico Ω_{crit} tale per cui la parte reale di λ diventa positiva, ovvero il sistema risulta instabile e la risposta tende a divergere.

Dopodiché vengono fatti variare alcuni parametri del sistema per vedere come varia il valore Ω_{crit} , ovvero per vedere come varia il campo di stabilità.

I risultati ottenuti dall'autore sono i seguenti:

- Per bassi valori di rigidità delle pastiglie k il campo di stabilità aumenta;
- Per bassi valori del coefficiente di attrito μ il campo di stabilità aumenta (questo modello non verifica questo fenomeno in quanto vi è una bassa dipendenza dal coefficiente di attrito);
- Per alti valori di pressione delle pastiglie sul disco N_0 il campo di stabilità aumenta;
- A parità di coppia frenante $M_A = \mu r N_0$ (cioè $r N_0 = cost$), esiste un minimo del campo di stabilità sia al variare delle dimensioni del disco r , sia al variare della pressione delle pastiglie N_0 .

In questo modello il coefficiente di attrito μ è costante.

Successivamente, il modello di [14] è stato ulteriormente complicato all'interno di [15], infatti, al modello visto prima sono stati aggiunti tre gradi di libertà corrispondenti alla torsione del cerchione della ruota ed agli spostamenti delle pastiglie sul piano del disco. Prima infatti, le pastiglie potevano muoversi solo in direzione trasversale ed il loro movimento era comandato dall'oscillazione del disco: vedi Figura 15 e Figura 16.

L'articolo [15] presenta un modello per lo studio del fischio dei freni e, in particolare, quando questo può portare alla rottura dell'impianto frenante in applicazioni in cui vi è un coefficiente di smorzamento molto basso e il cerchio della ruota presenta un design molto leggero, tipico delle autovetture sportive.

Normalmente il fischio dei freni si presenta soltanto come un problema di comfort e non di affidabilità dell'impianto frenante, tuttavia per forme di cerchi con alleggerimenti molto spinti con fattori di smorzamento molto bassi si potrebbe verificare che il fenomeno del fischio porti a problemi di sicurezza sulla vettura.

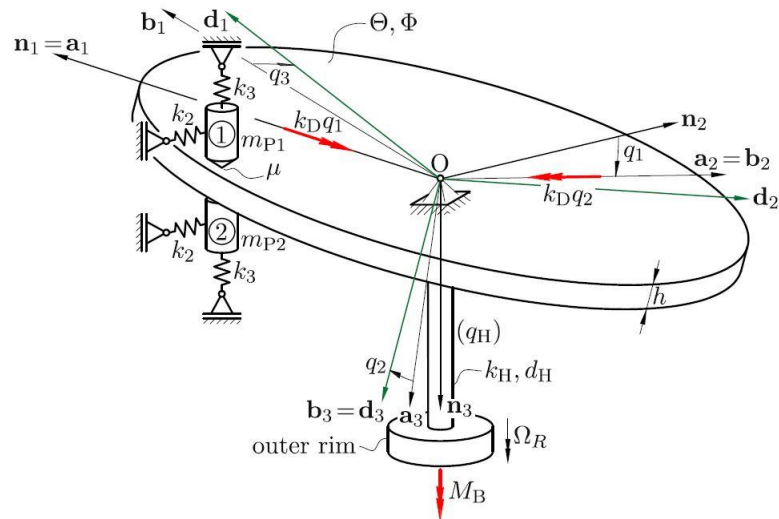


Figura 15 - Modello di Hochlenert e Hardegon 2

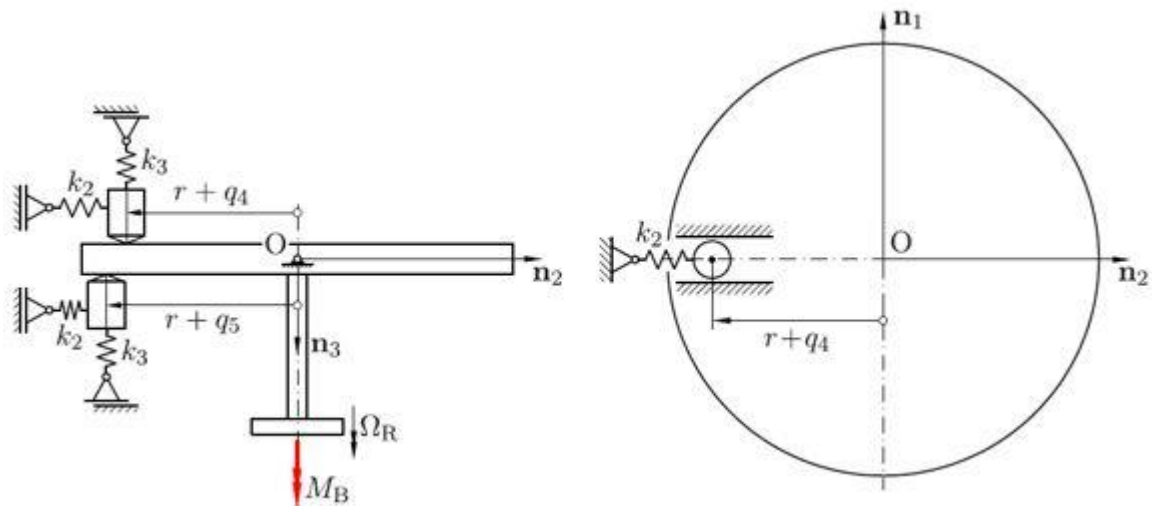


Figura 16 - Modello di Hochlenert e Hardegon 2

Questo lavoro oltre a mettere in evidenza delle nuove proprietà dinamiche relative al tipo di estensione a partire dal modello precedente, mostra anche che il meccanismo basilico di eccitazione consiste in un disco oscillante.

Precedentemente veniva assunta una velocità di rotazione costante del disco: tale ipotesi viene ora essere messa in discussione nel contesto di cerchi ruota alleggeriti in quanto vi potrebbero essere delle rotazioni relative tra mozzo interno e la parte esterna del cerchione.

Questa dinamica viene modellata grazie all'aggiunta di una connessione che rappresenta la cedevolezza torsionale del cerchio ruota; la parte esterna del cerchione è quindi

sottoposta ad una velocità di rotazione Ω_R costante, così facendo però non vengono comunque considerate le dinamiche dello pneumatico e del contatto ruota-asfalto all'interno della modellazione.

L'approccio è del tutto simile al caso precedente: viene studiata e linearizzata la cinematica, dopodiché vengono scritte le equazioni del moto (vedi Equazione 7) secondo un approccio Euleriano passando attraverso l'equilibrio dei momenti.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \theta + (m_{P1} + m_{P2})r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\mu(m_{P1} + m_{P2})hr & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{P1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{P2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_H \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{\mu N_0 h^2}{2\Omega_R r} & \Omega_R \phi & -\frac{\mu N_0 h}{2\Omega_R r} & \frac{\mu N_0 h}{2\Omega_R r} & 0 \\ -\Omega_R \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu N_0 h}{2\Omega_R r} & 0 & \frac{\mu N_0}{\Omega_R r} & 0 & 0 \\ \frac{\mu N_0 h}{2\Omega_R r} & 0 & 0 & \frac{\mu N_0}{\Omega_R r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_H \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} k_D + hN_0 + 2k_3 r^2 & \frac{\mu N_0 h^2}{2r} & -N_0 & N_0 & 0 \\ -\mu r(2N_0 + hk_3) & k_D + (1 + \mu^2)hN_0 & 0 & 0 & 0 \\ -N_0 & -\frac{h\mu N_0}{2r} & k_2 & 0 & 0 \\ N_0 & \frac{h\mu N_0}{2r} & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & \frac{h\mu N_0}{2r} & 0 & -\mu N_0 & -\mu N_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Equazione 7 - Modello di Hochlenert e Hardegon 2

L'analisi di stabilità è del tutto analoga a quella del precedente articolo.

La risposta del sistema vale: $\mathbf{q}_s(t) = \widehat{\mathbf{q}}_s e^{\delta_s t} \sin(\omega_s t + \gamma_s)$

L'articolo [15] si focalizza su come le vibrazioni auto-eccitanti vanno ad agire sulla torsione q_H tra mozzo e parte esterna del cerchione, quindi considerando la quinta equazione del moto:

$$\phi \dot{q}_H + d_H \dot{q}_H + d_H q_H = \hat{f} e^{\delta_s t} \sin(\omega_s t + \alpha_s)$$

Equazione 8 - Equazione del moto riferita alla torsione mozzo-cerchione

Dove $\hat{f} = -\mu N_0 q_4 - \mu N_0 q_5$. La soluzione particolare risulta essere:

$$q_H(t) = C_H e^{\delta_s t} \sin(\omega_s t + \alpha_s - \gamma_H)$$

Con
$$H = \frac{\hat{f}/\phi}{2(i\omega_s + \delta_s)(\delta_s + \delta_H) - \delta_s^2 + (\omega_H^2 - \omega_s^2)}$$
, inoltre $\omega_H^2 = k_H/\phi$, $\delta_H = d_H/2\phi$

$$C_H = |H|$$

$$\gamma_H = \arg(H)$$

Come si era detto, l'autore sta considerando l'effetto che queste vibrazioni auto-eccitanti hanno su cerchi leggeri e con basso coefficiente di smorzamento, se lo smorzamento è basso, la frequenza naturale del cerchio-mozzo è vicina alla frequenza naturale del fischio freno $\omega_H \approx \omega_s$, di conseguenza, l'ampiezza C_H della vibrazione è molto elevata. Ne deriva quindi che a causa degli effetti di risonanza l'ampiezza dell'angolo di torsione q_H può essere molto elevata anche se il ciclo limite corrispondente agli altri spostamenti e calcolato a partire dalle non linearità del sistema ha un'ampiezza soltanto dell'ordine dei micrometri.

L'articolo mostra quindi che l'ampiezza delle vibrazioni torsionali tra cerchione e mozzo sono ordini di grandezza più grandi delle vibrazioni che generano rumore nell'impianto frenante. Tale effetto di risonanza si verifica per progettazioni con forti alleggerimenti e bassi smorzamenti.

Per evitare tale problematica occorre avere una frequenza naturale del cerchione-mozzo che sia lontana dalla frequenza naturale del fischio.

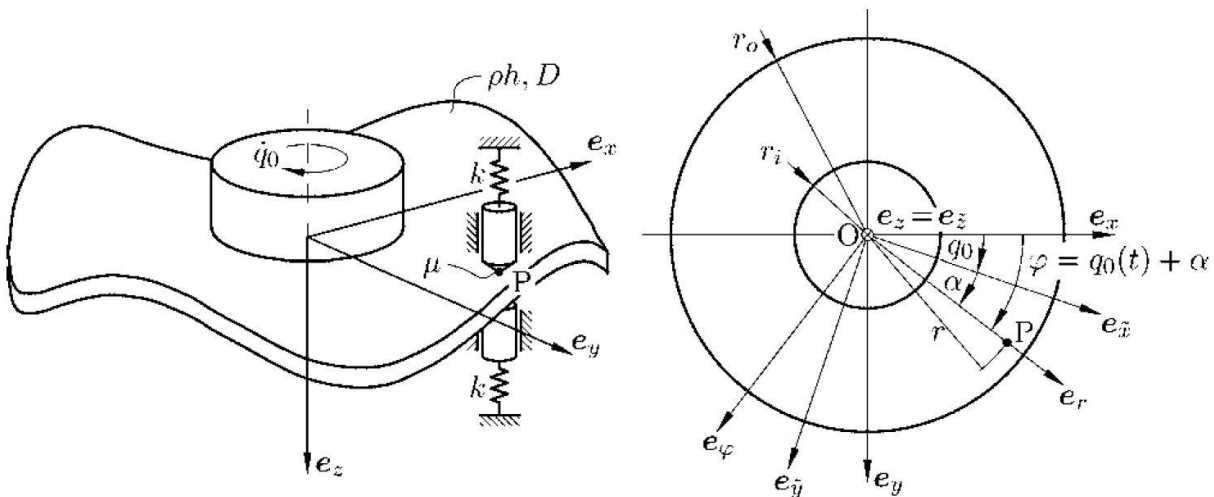


Figura 17 - Modello di Hochlenert e Hardegón 3

Un'ulteriore estensione del modello analitico preso in considerazione viene proposta in [17] in cui il disco rigido viene sostituito da un disco flessibile tramite la modellazione di una piastra circolare di Kirchhoff come riportato in Figura 17.

Come il precedente modello a 2 gradi di libertà riportato in [14], viene studiata l'instabilità del sistema generata dalla presenza di forze non conservative nell'area di contatto, la quale può verificarsi anche per un valore del coefficiente di attrito costante. In una prima parte viene studiato il problema delle vibrazioni indotte è studiato con un modello bi-dimensionale di una trave di Eulero-Bernoulli che si muove con una certa velocità di traslazione ed è posta in contatto in 2 punti con un certo coefficiente di attrito; successivamente tale modello viene esteso al caso tridimensionale in cui viene considerato un disco flessibile posto in rotazione.

Lo studio dell'instabilità della trave serve all'autore per validare il comportamento dinamico del modello di disco flessibile, non per la previsione dell'instabilità.

In questo articolo [17] viene illustrato il piatto rotante in contatto con due pastiglie precaricate da due molle lineari.

Lo spostamento verticale del piano neutro viene descritto in coordinate polari come $w(r, \alpha, t)$

L'equazione del moto viene scritta attraverso il principio di Hamilton dei lavori virtuali

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt$$

Equazione 9 - Principio di Hamilton

L'articolo si propone quindi di scrivere i vari termini di energia cinetica, energia potenziale e lavoro virtuale di tutte le forze in funzione dello spostamento trasversale del piano medio del disco come riportato nelle Equazione 10, Equazione 11 ed Equazione 12:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int \mathbf{v}_M(r, \alpha, t)^2 dA$$

Equazione 10 - Energia cinetica

$$U = \frac{1}{2} D \int (\nabla^2 \tilde{w})^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \alpha^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} \right)^2 \right] dA$$

Equazione 11 - Energia potenziale

$$\delta W = \int \mathbf{F} \delta \mathbf{p} dA$$

Equazione 12 - Lavoro virtuale

Tutti i vari termini all'interno degli integrali sono termini noti, la cinematica del disco è anch'essa nota in funzione dello spostamento fuori dal piano.

Lo spostamento trasversale viene scritto in maniera approssimata come sommatoria di funzioni di forma note moltiplicati per uno spostamento incognito:

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{i=1}^I W_i(r, \varphi) q_i(t)$$

Equazione 13 - Espressione dello spostamento trasversale secondo Hochlenert e Hardegon

Sostituendo quindi all'interno degli integrali l'Equazione 13 e sostituendo i termini energetici all'interno dell'Equazione 9 si ottiene l'equazione del moto riportata in Equazione 14 in funzione del vettore spostamento incognito

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Equazione 14 - Modello di Hochlenert e Hardegon 3

La dimensione delle matrici, ovvero il numero di equazioni, dipende dal numero di termini I della sommatoria dell'Equazione 13.

Per confrontare i risultati del piatto di Kirchhoff con la trave di Eulero-Bernoulli, lo spostamento trasversale è stato scritto usando delle funzioni di forma del tipo $w(r, \varphi, t) = R_{m,n}(r)[q_1(t) \cos(m\varphi) + q_2(t) \sin(m\varphi)]$ dove il termine $R_{m,n}(r)$ è la componente radiale della funzione di forma di un piatto con velocità di rotazione nulla. Un'ipotesi importante fatta in questa trattazione è che la velocità di rotazione del disco e quindi anche la velocità tangenziale dei punti di contatto sono sufficientemente elevati da evitare fenomeni di stick-and-slip.

Tale ipotesi spesso non risulta veritiera in quanto il fischio dei freni tende a manifestarsi per basse velocità di rotazione.

Negli ultimi passaggi gli autori, analogamente per quanto fatto in [14], propongono un'analisi di stabilità del sistema per $I = 2$, ovvero ricercano quei valori per cui il sistema manifesta degli autovalori con parte reale positiva e diventa così instabile.

All'interno dell'Equazione 14 la matrice \mathbf{D} non solo contiene i termini giroscopici, ma anche i termini di smorzamento dovuti alla viscosità del contatto tra pastiglie e disco.

La corrispondente dissipazione di energia influenza la stabilità della soluzione banale.

I passaggi per l'analisi di stabilità sono del tutto analoghi a quanto fatto in [14], i risultati sono gli stessi ottenuti nel caso del disco rigido, ovvero si ha che la velocità critica (e quindi il campo di stabilità):

- aumenta al ridursi della rigidezza delle pastiglie k ;
- aumenta all'aumentare del precarico N_0 a parità di coppia frenante $M_A = 2\mu r_0 N_0 = cost$
- cala all'aumentare del raggio r_0 del disco a parità di coppia frenante $M_A = 2\mu r_0 N_0 = cost$
- aumenta all'aumentare del coefficiente di attrito μ a parità di coppia frenante $M_A = 2\mu r_0 N_0 = cost$

Si noti come queste ultime tre considerazioni vadano ad opporsi ad un aumento di performance frenanti del disco in quanto, per avere una coppia frenante elevata sono richieste elevate pressioni delle pastiglie sul disco, dischi dal raggio il più grande possibile e coefficienti di attrito elevati.

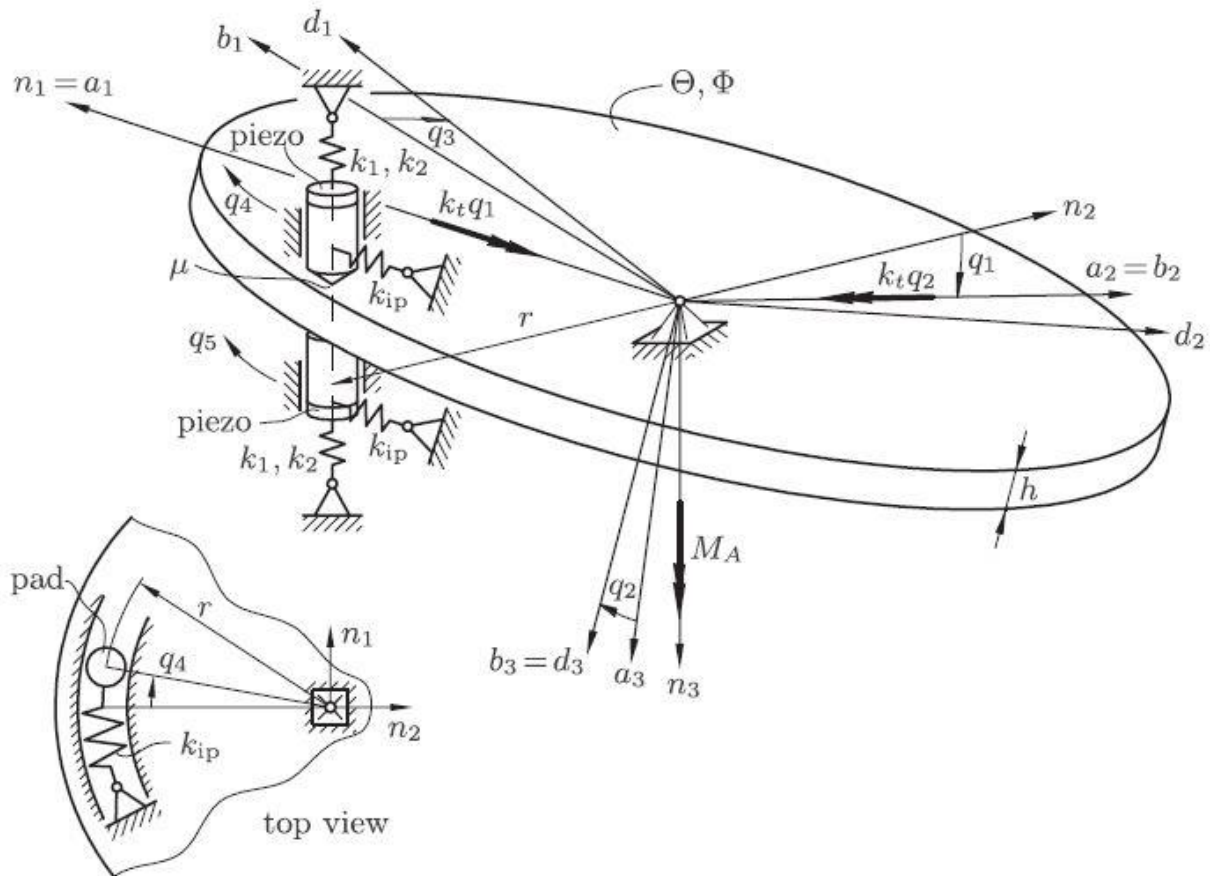


Figura 18 - Modello di Hochlenert e Hardegon 4

Un'ulteriore estensione del modello a due gradi di libertà di [14] viene proposto in [18] in cui vengono aggiunti due gradi di libertà corrispondenti alle possibili traslazioni delle pastiglie dei freni in direzione circonferenziale, come mostrato in Figura 18.

Si noti infatti l'aggiunta di due molle complanari al disco che rappresentano quella che è la rigidità delle pastiglie nella direzione normale all'asse dei pistoni.

Questo articolo oltre a proporre un modello analitico a 4 gradi di libertà per lo studio del fischio dei freni, implementa una strategia di controllo per la soppressione del fischio tramite delle "pastiglie attive", ovvero collegate a degli attuatori piezo-ceramici.

Queste pastiglie attive possono funzionare sia come attuatori che come sensori rilevando frequenze del fischio freni, usura e modifiche sull'impianto frenante; un problema a cui occorre prestare attenzione è la temperatura di funzionamento, la quale se superiore a 350 °C può portare alla depolarizzazione degli attuatori piezo-ceramici.

Questo già rappresenta un limite in quanto la normale temperatura di funzionamento di un impianto frenante di un'autovettura sportiva si aggira attorno ai 500 °C.

Come fatto nei precedenti studi, le equazioni del moto del sistema si ricavano secondo un approccio Euleriano dalla legge del momento angolare del disco.

Da cui si ricava l'equazione del moto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(t)$$

Equazione 15 - Modello di Hochlenert e Hardegon 4

Dove:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \theta + 2m_p r^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu m_p h r & \theta & 0 & 0 \\ -\mu m_p r^2 & 0 & m_p r^2 & 0 \\ \mu m_p r^2 & 0 & 0 & m_p r^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\mu N_0 h^2}{2\Omega r} & \Omega\psi & 0 & 0 \\ -\Omega\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_t + N_0 h + 2kr^2 & \frac{1}{2}\mu N_0 \frac{h^2}{r} & \frac{1}{2}\mu N_0 h & -\frac{1}{2}\mu N_0 h \\ -\mu(2N_0 r + k_1 h r) & k_t + (1 + \mu^2)N_0 h & N_0 r & -N_0 r \\ -\mu k_1 r^2 & (1 + \mu^2)N_0 r & k_{ip} r^2 & 0 \\ \mu k_1 r^2 & -(1 + \mu^2)N_0 r & 0 & k_{ip} r^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -r & r \\ \frac{1}{2}\mu h & \frac{1}{2}\mu h \\ \mu r & 0 \\ 0 & \mu r \end{bmatrix} \kappa \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Il termine $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$ comprende i vari termini non lineari causati dalla cinematica e dalla molla non lineare del comportamento delle pastiglie in direzione \mathbf{n}_3 .

I due termini $u_1(t)$ e $u_2(t)$ invece sono le differenze di potenziale applicate per il controllo degli attuatori piezo-ceramici.

I risultati dell'analisi di stabilità sono gli stessi di [14], inoltre risulta che il campo di stabilità della soluzione aumenta per valori molto piccoli di rigidità k_1 .

Ancora una volta, la velocità relativa tra disco e pastiglie è sufficientemente elevata da evitare fenomeni di stick-and-slip.

Nella seconda parte di [18] e all'interno di [16] gli autori propongono delle strategie di controllo per la soppressione attiva del fischio dei freni.

Strategie di controllo: per elaborare una strategia di controllo la parte lineare dell'equazione del moto viene scritta nello spazio di stato come

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Equazione 16 - *Equazione del moto nella forma degli stati per il controllo attivo del fischio*

Dove $\mathbf{x}^T(t) = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]$ è il vettore di stato, $\mathbf{u}^T(t) = [u_1 \quad u_2]$ è il vettore di controllo, $\mathbf{y}(t)$ è il vettore misurato, \mathbf{A} è la matrice di sistema, \mathbf{B} la matrice di input, \mathbf{C} la matrice delle misure e \mathbf{D} la matrice di trasmissione diretta. Il sistema viene controllato dalla matrice \mathbf{K} di feedback tramite la relazione $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$.

Vengono quindi sviluppate due differenti strategie di controllo:

- Strategia di controllo ottimale con un filtro di Kalman-Bucy: richiede un carico computazionale maggiore di conseguenza il codice deve essere ben organizzato e ottimizzato. Il suo vantaggio principale è che solamente un sensore (ad esempio l'accelerazione sul piano di una pastiglia) è richiesto per il controllo e che il segnale di input è proporzionale allo stato del sistema. Ciò significa che non è richiesta alcuna differenza di potenziale per mantenere il sistema in quiete una volta che il fischio del freno è stato soppresso.
- Strategia di controllo sulla dissipazione massima di energia (minima energia trasferita dalle forze di attrito): occorre sapere in anticipo la frequenza approssimativa (e come varia al variare del tempo, temperatura, usura...) del

fischio in modo da poter progettare un filtro opportuno e la sua legge di controllo. In questo tipo di strategia sono richiesti due sensori (uno per pastiglia). Lo svantaggio di tale strategia è un'ampiezza costante nei segnali di input. Quindi anche quando il fischio del freno è stato soppresso, rimangono delle piccole oscillazioni sul piano delle pastiglie freno per via del fatto che gli attuatori piezoceramici stanno ancora operando (viene sempre mantenuta una certa differenza di potenziale).

Entrambe le strategie di controllo sono state implementate sia analiticamente che sperimentalmente su un banco prova.

Come risultato di ha che esse permettono l'eliminazione in maniera attiva del fischio del freno senza la perdita di efficienza frenante dell'impianto.

Si può notare infatti in Figura 19 come l'accelerazione della pastiglia (associata al rumore dei freni) si riduca nel momento in cui interviene il controllo della pastiglia stessa.

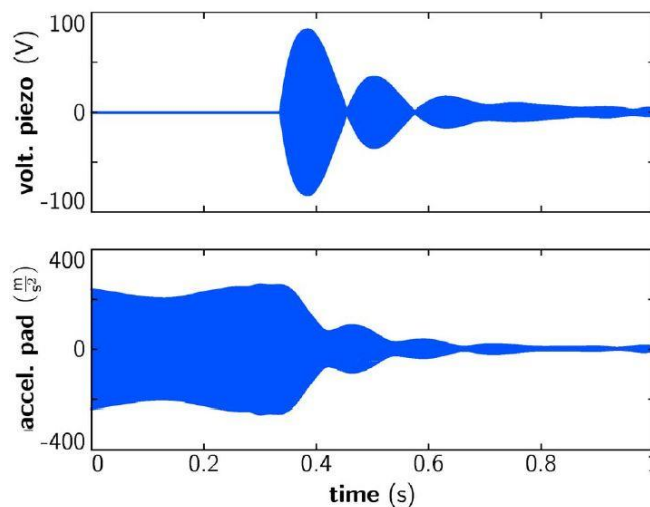


Figura 19 - Controllo attivo del fischio dei freni

Il controllo attivo tramite questi “*smart pads*” non era inizialmente considerato come una tecnica per l'eliminazione del fischio dei freni ma quanto uno strumento da laboratorio per ridurre i tempi di ottimizzazione di una progettazione. Tuttavia, grazie alle ottime performance ed alla robustezza di tali pastiglie attive, l'autore ritiene che

questi componenti possano essere applicati su scala industriale per la produzione di massa degli impianti frenanti.

Capitolo 4: Modellazione

4.1 Il modello dinamico di disco flessibile

In genere le vibrazioni del disco giocano un ruolo fondamentale nel contesto del fischio dei freni, sarebbe infatti opportuno modellare il disco come un piatto anulare di Kirchhoff o di Mindlin.

Potrebbe essere possibile usare anche un disco rigido elasticamente vincolato scegliendo i suoi parametri in modo tale che, nel campo di frequenze di interesse, approssimi sufficientemente bene il comportamento del disco elastico.

Questa modellazione, anche se abbastanza corretta risulterebbe restrittiva in quanto limiterebbe il campo di studio ad un certo intervallo di frequenze.

Per questo motivo il modello scelto per lo studio del fischio dei freni è quello di un disco flessibile costituito da un anello circolare.

Tale disco manifesta degli spostamenti sia sul proprio piano che al di fuori di esso a causa delle sue proprietà elastiche.

In questa trattazione indicheremo con:

- u : spostamento in direzione radiale (considerato trascurabile)
- v : spostamento in direzione circonferenziale
- w : spostamento normale al piano del disco.

Come mostrato in Figura 20, il sistema di riferimento considerato è un sistema di riferimento in coordinate polari, dove la generica posizione viene descritta dalla terna di coordinate (r, θ, z) .

Il passaggio da coordinate polari a coordinate normali è definito dalla relazione nell'Equazione 17:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Equazione 17 - *Passaggio a coordinate polari*

La tecnica con cui ci proponiamo di approcciare il problema è detta di “*Modellazione Spettrale*”; trattasi di una tecnica approssimata basata sui seguenti passaggi per la determinazione dell’equazione del moto dell’intero sistema:

- Determinazione dell’equazione costitutiva dell’oggetto in questione (piastra circolare);
- Scelta di funzioni di forma opportune a partire dalle condizioni al contorno del corpo in questione;
- Determinazione dei vari contributi energetici del corpo in questione.

Una volta determinati i vari contributi energetici del corpo, si ricava l’equazione del moto andando a minimizzare quella che è considerata l’energia totale del corpo.

Per ogni singolo elemento infinitesimo di piastra circolare (il cui volume infinitesimo vale $dV = dr \cdot rd\theta \cdot h$) vengono valutati i vari contributi energetici infinitesimi.

Il contributo energetico totale agente sul disco sarà quindi dato da un integrale sull’area del disco stesso.

La tecnica di *Modellazione Spettrale* applicata al disco è una tecnica approssimata basata sulla scrittura dello spostamento trasversale w in funzione delle sue variabili legate alla posizione ed al tempo.

Per fare ciò lo spostamento trasversale viene scritto come sommatoria di funzioni linearmente indipendenti note N , dette funzioni di forma, moltiplicate per un vettore incognito detto vettore dei gradi di libertà δ .

Tale teoria deriva dall’ipotesi di separazione delle variabili secondo cui è possibile scrivere una certa grandezza dipendente da 2 parametri come il prodotto di funzioni ciascuna dipendente da uno solo di questi parametri.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{N_{tot}} N_n(r, \theta) \cdot \delta_n(t) = \sum_{i=1}^{n1} \sum_{j=1}^{n2} \phi_i(r) \phi_j(\theta) \delta_{ij}(t)$$

Equazione 18 - Spostamento trasversale approssimato

Come succitato, questa tecnica non è una tecnica esatta, infatti l’approssimazione si basa su una combinazione lineari di funzioni ortogonali linearmente indipendenti e sarà tanto

più buona quanti più termini entreranno all'interno della sommatoria dell'Equazione 18, ovvero tanto più alto sarà il valore di N_{tot} .

Si noti che i gradi di libertà del sistema coincidono con il termine della sommatoria N_{tot} e che non sono dei gradi di libertà fisici ma fittizi usati per calcolare lo spostamento del sistema.

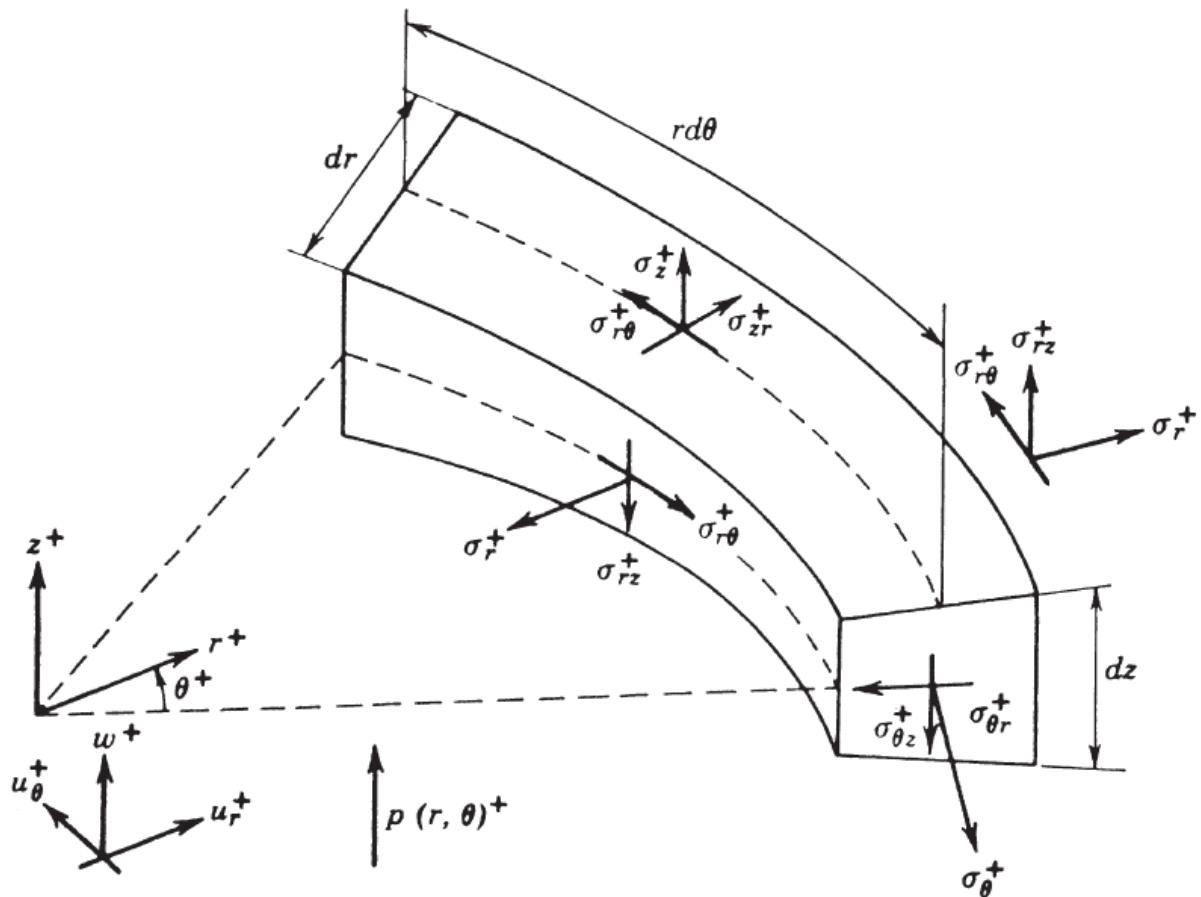


Figura 20 - elemento di disco circolare

4.1.1 Equazione costitutiva del disco

Il legame costitutivo che lega gli stati tensionali agli stati di deformazione per una piastra circolare è dato dall'Equazione 19.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}$$

Equazione 19 - Legame tensione-deformazioni

Con l'ipotesi di stato di tensione piano ottengo le relazioni classiche riportate di seguito nell'Equazione 20:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \end{cases}$$

Equazione 20 - Legame tensione-deformazioni per uno stato di tensione piana

Il generico stato di tensione su un elemento infinitesimo del disco è rappresentato nella Figura 21:

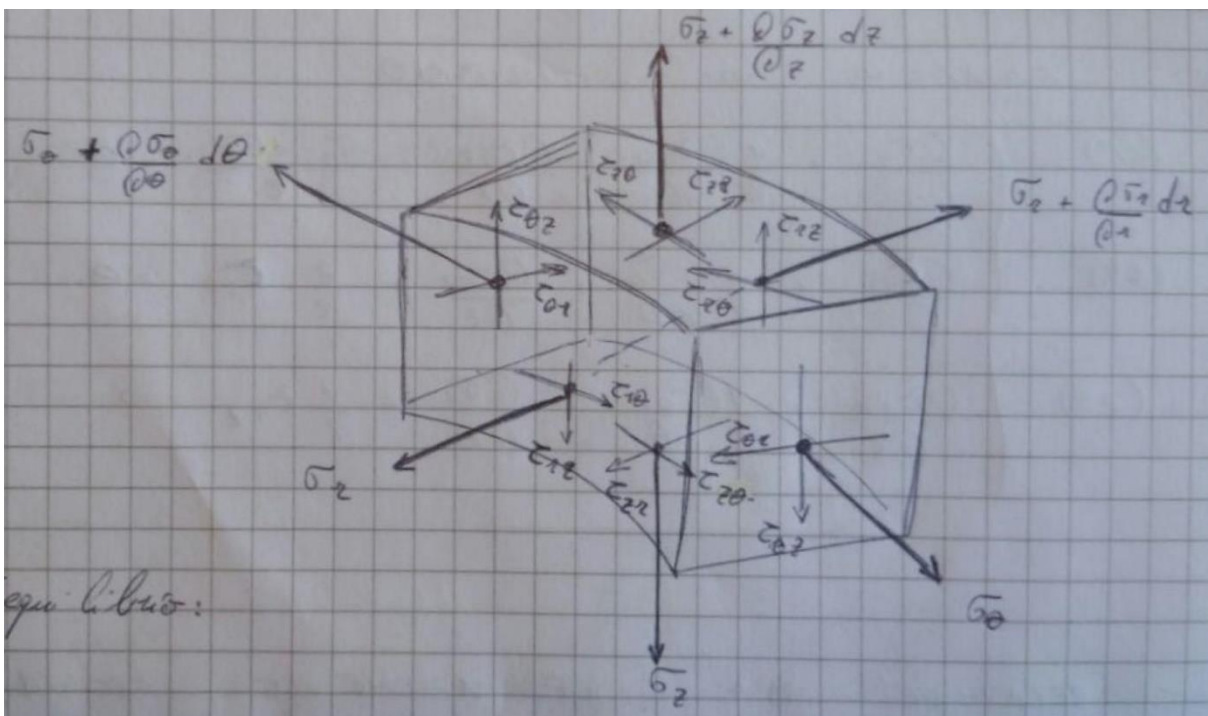


Figura 21 – Generico stato di tensione per un elemento infinitesimo

Eseguendo l'equilibrio in direzione radiale, circonferenziale e trasversale ottengo rispettivamente le Equazione 21 Equazione 23 Equazione 23:

$$\begin{aligned} \sigma_r rd\theta dz - \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) rd\theta dz + \tau_{\theta r} dr dz - \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz + \tau_{zr} rd\theta dr \\ - \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) rd\theta dr + \sigma_\theta \frac{d\theta}{2} dr dz - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \frac{d\theta}{2} dr dz = 0 \end{aligned}$$

Equazione 21 - Equilibrio in direzione radiale

$$\begin{aligned} \sigma_\theta dr dz - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz + \tau_{z\theta} rd\theta dr - \left(\tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} dz \right) rd\theta dr + \tau_{r\theta} rd\theta dz \\ - \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) rd\theta dz = 0 \end{aligned}$$

Equazione 22 - Equilibrio in direzione circonferenziale

$$\begin{aligned} \sigma_z dr rd\theta - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dr rd\theta + \tau_{rz} rd\theta dz - \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) rd\theta dz \\ + \tau_{\theta z} dr dz - \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz = 0 \end{aligned}$$

Equazione 23 - Equilibrio in direzione trasversale

Semplificando i termini di ordine inferiore si ottengono le tre relazioni di equilibrio in coordinate cilindriche come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{z}{r} \tau_{r\theta} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0 \end{aligned}$$

Equazione 24 - Equazioni di equilibrio in coordinate cilindriche

Valgono poi le seguenti relazioni tra deformazioni e spostamenti espresse nell'Equazione 25:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Equazione 25 - Legame spostamenti-deformazioni

Considero ora le ipotesi di Navier della trave applicate alla piastra: grazie a questa assunzione mi propongo di scrivere quello che è lo spostamento radiale e circonferenziale in funzione dello spostamento trasversale e delle sue derivate.

L'ipotesi assunta è quella che nell'ambito dei piccoli spostamenti la deformata del piano medio si mantiene normale alle sezioni in r e θ .

Così facendo, ottengo le seguenti relazioni dell'Equazione 26 che definiscono rispettivamente le rotazioni attorno alla direzione circonferenziale α ed attorno alla direzione radiale β :

$$\alpha = \frac{dw}{dr}$$

$$\beta = \frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta}$$

Equazione 26 - Rotazioni delle sezioni in funzione dello spostamento trasversale

È quindi possibile esprimere lo spostamento radiale e circonferenziale di un punto appartenente al piano medio del disco in funzione delle rotazioni α e β del piano stesso:

$$u = -\alpha z + u_0 = -z \frac{dw}{dr} + u_0$$

$$v = -\beta z + v_0 = -\frac{z}{r} \frac{dw}{d\theta} + v_0$$

Equazione 27 - Legame spostamenti-rotazioni della sezione

Le relazioni dell'Equazione 27 fanno riferimento alla Figura 22.

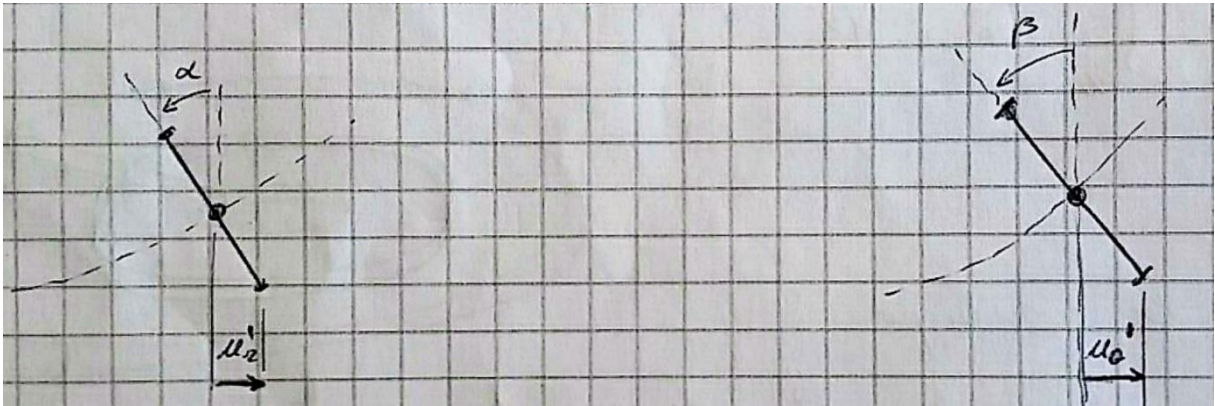


Figura 22 - Rotazioni attorno alla direzione circonferenziale e radiale

In questo modo, a partire dalle relazioni dell'Equazione 25, è possibile scrivere le componenti di deformazione in funzione del solo spostamento trasversale e delle sue derivate.

Ricordando che sotto l'ipotesi di stato di tensione piana si ha: $\varepsilon_z = \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0$

Otengo i risultati proposti nell'

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial u_0}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{u_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial r} \right)$$

Equazione 28 - Deformazioni in funzione dello spostamento trasversale

Dall'Equazione 28 sostituendo all'interno del legame tensioni-deformazioni dell'Equazione 19 è possibile quindi scrivere le tensioni agenti su un elemento infinitesimo di disco in funzione dei suoi spostamenti fuori dal piano.

Come ultimo passaggio occorre ricavare il legame tra le azioni esterne e le tensioni interne per poter arrivare a scrivere le prime in funzione dello spostamento trasversale w . In Figura 23 sono riportate le azioni esterne agenti su un elemento infinitesimo del disco per uno stato di tensione piana.

La relazione tra azioni esterne e tensioni interne si ottiene integrando queste ultime come riportato nell'Equazione 29.

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz \\
 N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz \\
 T_{r\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} dz \\
 T_{rz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz \\
 T_{\theta z} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz \\
 M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz \\
 M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz \\
 M_{r\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz
 \end{aligned}$$

Equazione 29 - Legame azioni esterne-tensioni interne

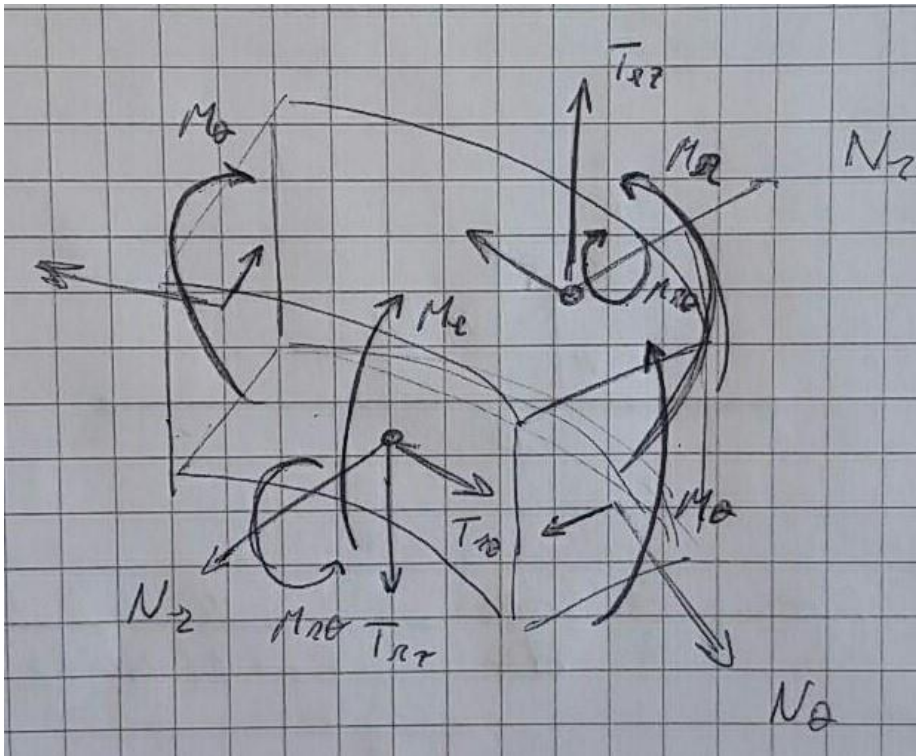


Figura 23 - Azioni esterne agenti su un elemento infinitesimo

In questo modo, è possibile scrivere le azioni esterne in funzione dello spostamento trasversale al piano come:

$$\begin{aligned}
 N_r &= \frac{E h}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} u_0 \right] \\
 N_\theta &= \frac{E h}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_0 + \nu u_0 \right] \\
 T_{r\theta} &= \frac{E h}{1 + \nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_0 \right] \\
 M_r &= -\frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\
 M_\theta &= -\frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\
 M_{r\theta} &= -\frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]
 \end{aligned}$$

Equazione 30 - Legame azioni esterne-spostamento trasversale

Le relazioni dell'Equazione 30 sono fondamentali in quanto proprio a partire dall'espressione dei momenti in funzione dello spostamento trasversale andremo a ricavare il contributo dell'energia potenziale elastica per un elemento infinitesimo del disco e, integrando, il contributo di energia potenziale elastica del disco.

Infine, facendo l'equilibrio allo spostamento delle azioni esterne in direzione radiale, circonferenziale e trasversale e facendo l'equilibrio alla rotazione attorno alla direzione radiale ed alla direzione circonferenziale ho che

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{N_r - N_\theta}{r} &= 0 && \text{equilibrio allo spostamento radiale} \\
 \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} T_{r\theta} &= 0 && \text{equilibrio allo spostamento circonferenziale} \\
 \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{rz} + p(r, \theta) &= 0 && \text{equilibrio allo spostamento trasversale} \\
 \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - T_{rz} &= 0 && \text{equilibrio alla rotazione attorno ad } r \\
 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} - T_{\theta z} &= 0 && \text{equilibrio alla rotazione attorno a } \theta
 \end{aligned}$$

Equazione 31 - Equilibrio delle azioni esterne

Dalle cinque relazioni dell'Equazione 31 è possibile ricavare T_{rz} e $T_{\theta z}$ in funzione dei parametri N_{θ} , N_r , $T_{r\theta}$, M_r e M_{θ} , sostituendo poi a tali valori la loro espressione in funzione dello spostamento verticale w riportata in Equazione 30, si ottiene l'equazione costitutiva per una piastra circolare:

$$\frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = p(r, \theta)$$

Equazione 32 - Equazione costitutiva piastra circolare

Come summenzionato, i risultati di interesse all'interno di questa trattazione sono le espressioni riportate in Equazione 30 delle azioni esterne, in particolare dei momenti, in funzione dello spostamento w normale al piano del disco.

4.1.2 Scelta delle funzioni di forma

Come evidenziato nell'Equazione 18 si vuole scrivere lo spostamento fuori dal piano del disco come sommatoria di funzioni note $N(r, \theta)$ moltiplicate per un vettore incognito $\delta(t)$.

Occorre dunque scegliere delle funzioni di forma opportune che descrivano quello che potrebbe essere il comportamento di un disco di un impianto frenante automobilistico.

La Figura 24 è un'immagine di quella che è la struttura di un impianto frenante: si noti come il disco dell'impianto frenante sia collegato alla campana⁵ tramite dei bulloni (evidenziati in giallo nella parte destra della Figura 24), e questa sia collegato poi al mozzo tramite altri cinque collegamenti bullonati.

⁵ La **campana** è un elemento di collegamento tra mozzo e disco freno: per problemi legati allo smaltimento del calore, alle prestazioni, alla fattibilità industriale e all'accessibilità del disco freno, è preferibile inserire un elemento intermedio piuttosto che montare il disco direttamente sul mozzo.



Figura 24 - Disco freno Ferrari 488 Pista

Risulta evidente come, a prescindere dalla presenza della campana tra disco e mozzo, il comportamento di tale disco sia associabile a quello di una piastra circolare anulare vincolata al raggio interno e libera al raggio esterno.

La condizione di vincolo al raggio interno è una condizione di tipo incastro, in quanto i collegamenti bullonati bloccano:

- Lo spostamento trasversale del disco w ;
- La rotazione attorno alla direzione circonferenziale $\alpha = \frac{dw}{dr}$;
- La rotazione attorno alla direzione radiale $\beta = \frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta}$.

In Figura 25 sono raffigurati le due rotazioni e lo spostamento fuori dal piano che può subire un elemento infinitesimo di disco anulare.

Al raggio esterno invece il disco è libero, ciò significa che momento e taglio al raggio esterno sono nulli.

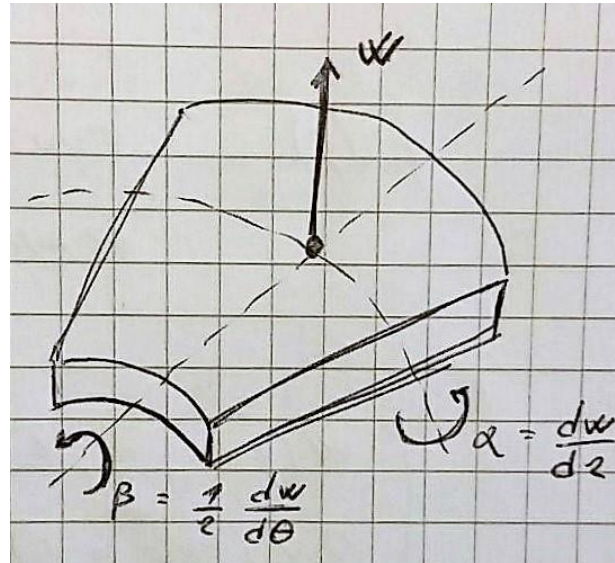


Figura 25 - Spostamenti e rotazioni su un concio di piastra circolare

Come mostrato nell'Equazione 18 è poi possibile scrivere la generica funzione di forma $N(r, \theta)$ come il prodotto di due funzioni di forma particolari dipendenti rispettivamente da r e θ in modo da descrivere separatamente il comportamento in direzione radiale ed il comportamento in direzione circonferenziale.

Prima di passare alla ricerca delle funzioni di forma opportune in direzione radiale e circonferenziale, è opportuno eseguire un cambio di coordinate e passare dallo spazio fisico allo spazio dei parametri.

Definiamo infatti la generica coordinata radiale parametrica ξ e la generica coordinata parametrica circonferenziale η come riportato nell'Equazione 33:

$$\begin{cases} r = R1 + \xi(R2 - R1) \\ \theta = 2\pi \eta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{r - R1}{R2 - R1} \in [0,1] \\ \eta = \frac{\theta}{2\pi} \in [0,1] \end{cases}$$

Equazione 33 - Passaggio da coordinate polari fisiche a coordinate polari parametriche

Dove $R1$ rappresenta il raggio interno e $R2$ il raggio esterno del disco.

Da cui si ricavano i differenziali come:

$$\begin{cases} dr = (R2 - R1)d\xi \\ d\theta = 2\pi d\eta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dr} = \frac{1}{R2 - R1} \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d}{d\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\eta} \end{cases}$$

Equazione 34 - Derivate nello spazio dei parametri

Possiamo quindi procedere con la scelta delle funzioni di forma; inizieremo con la ricerca di opportune funzioni di forma che descrivano il comportamento del disco in direzione radiale.

In direzione radiale vi è una condizione simile a quella dell'incastro in quanto, come riportato in Figura 26, il comportamento è assimilabile a quello di una trave incastrata-libera.

Infatti, si vuole che lo spostamento verticale e la rotazione al raggio interno ($\xi = 0$) siano nulli (vincolo di tipo incastro), mentre al raggio esterno ($\xi = 1$) si vuole che siano nulli il momento ed il taglio (condizione di tipo estremo libero).

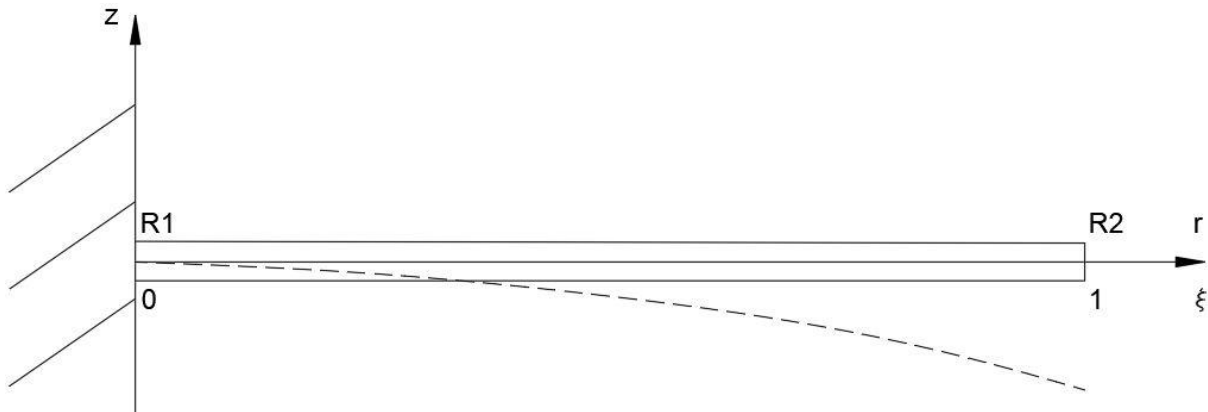


Figura 26 - Comportamento in direzione radiale

Verranno quindi ricercate le funzioni di forma proprie della trave incastrata-libera, le cui condizioni al contorno sono riportati in Equazione 36.

Si noti che le condizioni al contorno sono riferite alle condizioni di spostamento, rotazione e sollecitazione, le quali possono essere scritte come derivate dello spostamento trasversale w e, grazie alla separazione delle variabili, è possibile scrivere le derivate dello spostamento w come le derivate della funzione di forma.

In tutta la trattazione che segue indicheremo con $()'$ la derivata rispetto allo spazio (quindi rispetto a ξ e η) e con $(\dot{\ })$ le derivate rispetto al tempo.

Ricordiamo infatti che vale l'Equazione 35.

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{n1} \sum_{j=1}^{n2} \phi_i(\xi) \phi_j(\eta) \delta_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N N_k(\xi, \eta) \delta_k(t)$$

Equazione 35 - Spostamento trasversale

$$\begin{cases} w(\xi = 0, \eta, t) = 0 \\ \alpha(\xi = 0, \eta, t) = 0 \\ M(\xi = 1, \eta, t) = 0 \\ T(\xi = 1, \eta, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w(\xi = 0, \eta, t) = 0 \\ w'(\xi = 0, \eta, t) = 0 \\ w''(\xi = 1, \eta, t) = 0 \\ w'''(\xi = 1, \eta, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_i(\xi = 0) = 0 \\ \phi_i'(\xi = 0) = 0 \\ \phi_i''(\xi = 1) = 0 \\ \phi_i'''(\xi = 1) = 0 \end{cases}$$

Equazione 36 - Condizioni al contorno trave incastrata-libera

A partire da queste condizioni al contorno viene eseguita la ricerca della famiglia di funzioni di forma a partire dall'equazione costitutiva della trave:

$$\phi_i(\xi) = A \cos(z_i \xi) + B \sin(z_i \xi) + C \cosh(z_i \xi) + D \sinh(z_i \xi)$$

Equazione 37 - Equazione costitutiva della trave

Derivando ottengo:

$$\phi_i'(\xi) = z_i [-A \sin(z_i \xi) + B \cos(z_i \xi) + C \sinh(z_i \xi) + D \cosh(z_i \xi)]$$

Equazione 38 - Derivata prima equazione costitutiva

Applico quindi le due condizioni al contorno per $\xi = 0$:

$$\begin{cases} \phi_i(0) = A + C = 0 \\ \phi_i'(0) = z_i [B + D] = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -C \\ B = -D \end{cases}$$

Equazione 39 - Condizioni al contorno al raggio interno

Sostituendo all'interno dell'equazione costitutiva e derivando tre volte ottengo:

$$\begin{aligned} \phi_i(\xi) &= A (\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi)) + B (\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi)) \\ \phi_i'(\xi) &= z_i [A (-\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi)) + B (\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi))] \\ \phi_i''(\xi) &= z_i^2 [A (-\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi)) + B (-\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi))] \\ \phi_i'''(\xi) &= z_i^3 [A (\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi)) + B (-\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi))] \end{aligned}$$

Equazione 40 - Derivate equazione costitutiva

Applico ora le due condizioni al contorno per $\xi = 1$:

$$\begin{cases} \phi_i''(1) = z_i^2 [A(-\cos(z_i) - \cosh(z_i)) + B(-\sin(z_i) - \sinh(z_i))] = 0 \\ \phi_i'''(1) = z_i^3 [A(\sin(z_i) - \sinh(z_i)) + B(-\cos(z_i) - \cosh(z_i))] = 0 \end{cases}$$

Equazione 41 - Condizioni al contorno al raggio esterno

Dall'Equazione 41 ricavo due equazioni lineari omogenee, per ricavare la soluzione z_i impongo che il determinante della matrice sia nullo, ovvero:

$$(-\cos(z_i) - \cosh(z_i))(-\cos(z_i) - \cosh(z_i)) - (\sin(z_i) - \sinh(z_i))(-\sin(z_i) - \sinh(z_i)) = 0$$

$$\cos^2(z_i) + \cosh^2(z_i) + 2 \cos(z_i) \cosh(z_i) + \sin^2(z_i) - \sinh^2(z_i) = 0$$

$$2 + 2 \cos(z_i) \cosh(z_i) = 0$$

$$\cos(z_i) = -\frac{1}{\cosh(z_i)}$$

Equazione 42 - Ricerca della soluzione z_i

Le soluzioni z_i sono quei particolari valori per cui le due funzioni dell'Equazione 42 si equivalgono (vedi Figura 27).

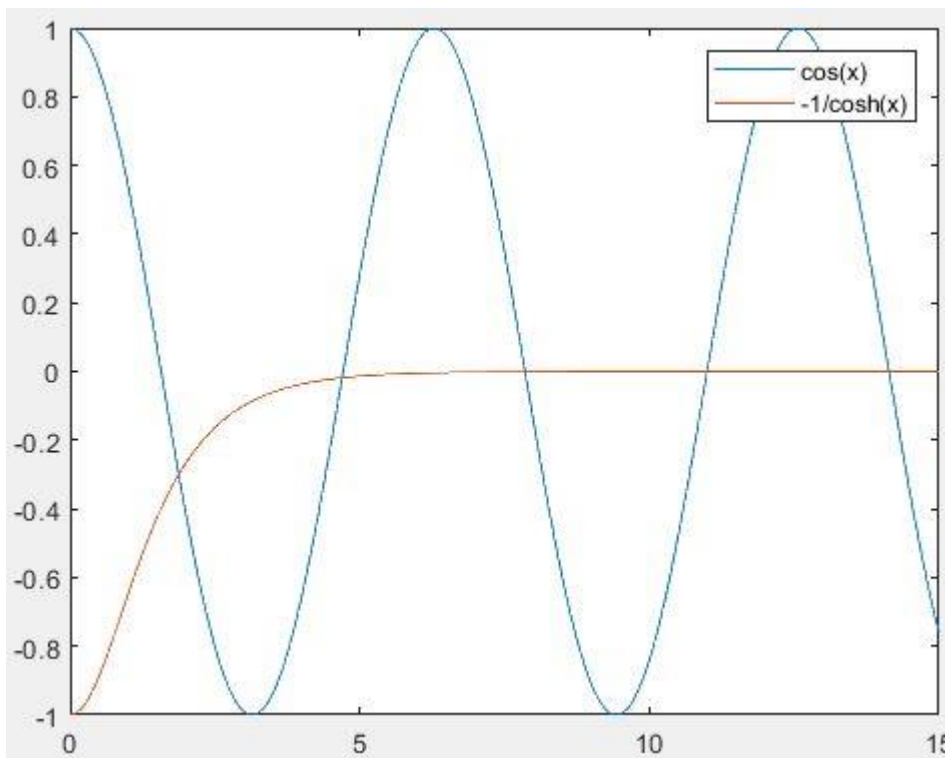


Figura 27 - Ricerca della soluzione trave incastrata-libera

La funzione di coseno iperbolico tende abbastanza rapidamente a zero, quindi le soluzioni dell'equazione possono essere ricercate in corrispondenza degli zeri della funzione seno.

Eccetto per $i = 1$, già per $i \geq 2$ è possibile scrivere:

$$z_i \cong \frac{\pi}{2} + (i - 1) \pi$$

Equazione 43 - Soluzioni funzioni di forma trave incastrata-libera

Note le soluzioni delle funzioni di forma della trave incastrata-libera dall'Equazione 43, sapendo che $\phi_i''(\xi = 1) = 0$ ottengo che:

$$B = -A \frac{\cos(z_i) + \cosh(z_i)}{\sin(z_i) + \sinh(z_i)} = -A \frac{\frac{\cos(z_i)}{\cosh(z_i)} + 1}{\frac{\sin(z_i)}{\cosh(z_i)} + \tanh(z_i)} = -A \cdot D_i(i)$$

Equazione 44 - Termine noto funzione di forma

Dove D_i è un coefficiente noto in funzione della particolare soluzione z_i .

Sostituendo all'interno dell'equazione costitutiva della trave incastrata-libera ottengo l'Equazione 45, cioè la mia espressione delle funzioni di forma a meno di una costante arbitraria A :

$$\phi_i(\xi) = A[\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi) - D_i(\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi))]$$

Equazione 45 - Equazione costitutiva

Infine, normalizzando tale funzione $\int_0^1 \phi_i(\xi) = 1$ ottengo che $A = 1$ e la mia espressione finale delle funzioni di forma vale:

$$\phi_i(\xi) = \left[\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi) - \frac{\frac{\cos(z_i)}{\cosh(z_i)} + 1}{\frac{\sin(z_i)}{\cosh(z_i)} + \tanh(z_i)} (\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi)) \right]$$

$$= [\cos(z_i \xi) - \cosh(z_i \xi) - D_i(\sin(z_i \xi) - \sinh(z_i \xi))]$$

Equazione 46 - Funzioni di forma trave incastrata-libera

Le funzioni di forma dell'Equazione 46 costituisce una base di funzioni al variare del parametro i tutte tra loro ortogonali e linearmente indipendenti.

Passiamo ora alla ricerca di una famiglia di funzioni di forma che possa descrivere il comportamento della trave in direzione circonferenziale.

In direzione circonferenziale non vi sono particolari condizioni da rispettare, senonché per $\eta = 0$ ed $\eta = 1$ vi deve essere continuità di spostamento, rotazione, taglio e momento.

Quindi funzioni come quella della trave incastrata-libera non sarebbero adeguate in quanto darebbero luogo ad una discontinuità.

Sarebbe inoltre sbagliato usare delle funzioni di forma del tipo trave incastrata-incastrata, oppure appoggiata-appoggiata, in quanto, anche se rispettano la condizione di continuità nominata prima, impongono dei particolari valori di spostamento/rotazione in corrispondenza dei due estremi $\eta = 0$ ed $\eta = 1$.

Tale condizione risulta errata in quanto provoca un irrigidimento della struttura in corrispondenza di particolari coordinate che non è rappresentativo del reale comportamento di una piastra flessibile.

Per questo motivo per descrivere il comportamento del disco in direzione circonferenziale occorre determinare una famiglia di funzioni di forma che sia la più generale possibile e che non imponga particolari condizioni di spostamento o rotazione in corrispondenza di coordinate particolari.

Una famiglia che ben si addice per il comportamento in del disco in direzione θ è la base di funzioni di Fourier.

Un'altra famiglia di funzioni di forma valida è quella propria della trave libera-libera, ovvero per la quale non vi sono applicati vincoli agli estremi.

Per analogia con la trattazione vista prima, svilupperemo quest'ultimo tipo di famiglia di funzioni.

Una rappresentazione della trave libera-libera è visibile in Figura 28.



Figura 28 - *Comportamento in direzione circonferenziale*

In questo caso non sono presenti vincoli, quindi le condizioni al contorno sono quelle più generali possibili, ovvero quelle per cui gli sforzi interni di momento e taglio sono nulli come riportato nell'Equazione 47 **Error! Reference source not found.:**

$$\begin{cases} M(\xi, \eta = 0, t) = 0 \\ T(\xi, \eta = 0, t) = 0 \\ M(\xi, \eta = 1, t) = 0 \\ T(\xi, \eta = 1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w''(\xi, \eta = 0, t) = 0 \\ w'''(\xi, \eta = 0, t) = 0 \\ w''(\xi, \eta = 1, t) = 0 \\ w'''(\xi, \eta = 1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_j(\eta = 0) = 0 \\ \phi_j'(\eta = 0) = 0 \\ \phi_j''(\eta = 1) = 0 \\ \phi_j'''(\eta = 1) = 0 \end{cases}$$

Equazione 47 - *Condizioni al contorno trave libera-libera*

Ancora una volta, per via dell'Equazione 35, è possibile esprimere le condizioni sulle derivate dello spostamento come condizioni sulle derivate delle funzioni di forma.

La ricerca della famiglia delle funzioni di forma parte sempre dall'equazione costitutiva della trave:

$$\phi_j(\eta) = A \cos(z_j \eta) + B \sin(z_j \eta) + C \cosh(z_j \eta) + D \sinh(z_j \eta)$$

Equazione 48 - *Equazione costitutiva della trave*

Derivando rispetto ad η ottengo:

$$\begin{aligned} \phi_j'(\eta) &= z_j [-A \sin(z_j \eta) + B \cos(z_j \eta) + C \sinh(z_j \eta) + D \cosh(z_j \eta)] \\ \phi_j''(\eta) &= z_j^2 [-A \cos(z_j \eta) - B \sin(z_j \eta) + C \cosh(z_j \eta) + D \sinh(z_j \eta)] \\ \phi_j'''(\eta) &= z_j^3 [A \sin(z_j \eta) - B \cos(z_j \eta) + C \sinh(z_j \eta) + D \cosh(z_j \eta)] \end{aligned}$$

Equazione 49 - *Derivate equazione costitutiva*

Applico quindi le due condizioni al contorno per $\eta = 0$:

$$\begin{cases} \phi_j''(0) = z_j^2[-A + C] = 0 \\ \phi_j'''(0) = z_j^3[-B + D] = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases}$$

Equazione 50 - Condizioni al contorno per $\theta=0$

Sostituendo all'interno dell'equazione costitutiva e derivando tre volte ottengo:

$$\begin{aligned} \phi_j(\eta) &= A (\cos(z_j\eta) + \cosh(z_j\eta)) + B(\sin(z_j\eta) + \sinh(z_j\eta)) \\ \phi_j'(\eta) &= z_j [A (-\sin(z_j\eta) - \sinh(z_j\eta)) + B(\cos(z_j\eta) + \cosh(z_j\eta))] \\ \phi_j''(\eta) &= z_j^2 [A (-\cos(z_j\eta) - \cosh(z_j\eta)) + B(-\sin(z_j\eta) + \sinh(z_j\eta))] \\ \phi_j'''(\eta) &= z_j^3 [A (\sin(z_j\eta) - \sinh(z_j\eta)) + B(-\cos(z_j\eta) + \cosh(z_j\eta))] \end{aligned}$$

Equazione 51 - Derivate equazione costitutiva

Applico ora le due condizioni al contorno per $\eta = 1$:

$$\begin{cases} \phi_j''(1) = z_j^2 [A (-\cos(z_j) + \cosh(z_j)) + B(-\sin(z_j) + \sinh(z_j))] = 0 \\ \phi_j'''(1) = z_j^3 [A (\sin(z_j) + \sinh(z_j)) + B(-\cos(z_j) + \cosh(z_j))] = 0 \end{cases}$$

Equazione 52 - Condizioni al contorno per $\theta=2\pi$

Esattamente come per la trave incastrata-libera, dall'Equazione 52 ricavo due equazioni lineari omogenee, per ricavare la soluzione z_j impongo che il determinante della matrice sia nullo, ovvero:

$$\begin{aligned} &(-\cos(z_j) + \cosh(z_j))(-\cos(z_j) + \cosh(z_j)) - (\sin(z_j) + \sinh(z_j))(-\sin(z_j) \\ &\quad + \sinh(z_j)) = 0 \\ &\cos^2(z_j) + \cosh^2(z_j) - 2 \cos(z_j) \cosh(z_j) + \sin^2(z_j) - \sinh^2(z_j) = 0 \\ &2 - 2 \cos(z_j) \cosh(z_j) = 0 \\ &\cos(z_j) = \frac{1}{\cosh(z_j)} \end{aligned}$$

Equazione 53 - Ricerca della soluzione z_j

Le soluzioni z_j sono quei particolari valori per cui le due funzioni dell'Equazione 53 si equivalgono (vedi Figura 29).

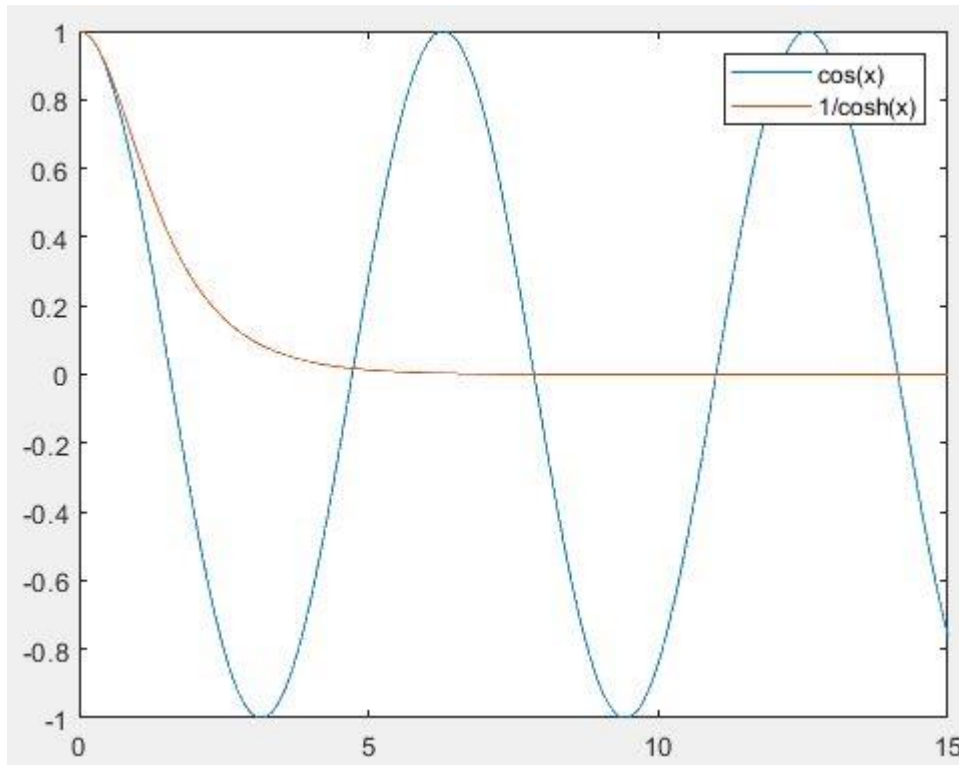


Figura 29 - Ricerca della soluzione trave libera-libera

Ancora una volta le soluzioni dell'equazione possono essere ricercate in corrispondenza degli zeri della funzione seno tranne che per la prima soluzione che vale $z_{j=1} = 0$.

Per $j \geq 2$ è possibile scrivere:

$$z_j \cong \frac{\pi}{2} + (j - 1) \pi$$

Equazione 54 - Soluzioni funzioni di forma trave libera-libera

Note le soluzioni delle funzioni di forma della trave libera-libera dall'Equazione 53, sapendo che $\phi_j''(\eta = 1) = 0$ ottengo che:

$$B = A \frac{-\cos(z_j) + \cosh(z_j)}{-\sin(z_j) + \sinh(z_j)} = A \frac{1 - \frac{\cos(z_j)}{\cosh(z_j)}}{\tanh(z_j) - \frac{\sin(z_j)}{\cosh(z_j)}} = A \cdot D_j(j)$$

Equazione 55 - Termine noto funzione di forma

Come prima, il termine D_j è un coefficiente noto in funzione della particolare soluzione z_j .

Sostituendo all'interno dell'equazione costitutiva della trave libera-libera ottengo l'Equazione 56, cioè la mia espressione delle funzioni di forma a meno di una costante arbitraria A :

$$\phi_j(\eta) = A[\cos(z_j\eta) + \cosh(z_j\eta) + D_j(\sin(z_j\eta) + \sinh(z_j\eta))]$$

Equazione 56 - Equazione costitutiva

E anche in questo caso, normalizzando tale funzione $\int_0^1 \phi_j(\eta) = 1$ ottengo che $A = 1$ e la mia espressione finale delle funzioni di forma vale:

$$\phi_j(\eta) = \left[\cos(z_j\eta) + \cosh(z_j\eta) + \frac{1 - \frac{\cos(z_j)}{\cosh(z_j)}}{\tanh(z_j) - \frac{\sin(z_j)}{\cosh(z_j)}} (\sin(z_j\eta) + \sinh(z_j\eta)) \right]$$

$$= [\cos(z_j\eta) + \cosh(z_j\eta) + D_j(\sin(z_j\eta) + \sinh(z_j\eta))]$$

Equazione 57 - Funzioni di forma trave libera-libera

Anche questa famiglia di funzioni costituisce una base ortogonale linearmente indipendente.

In realtà, per il problema che stiamo approcciando, in direzione circonferenziale occorre che vi sia continuità di spostamento, rotazione, taglio e momento in quanto, trattandosi di una funzione di forma su una coordinata circolare, in $\eta = 1$ deve esserci continuità con $\eta = 0$.

Andando a scrivere questa condizione sulle condizioni al contorno, ciò equivale a imporre che la derivata zero, prima, seconda e terza della funzione di forma siano uguali ai due estremi di integrazione.

$$\begin{cases} w(\xi, \eta = 0, t) = w(\xi, \eta = 1, t) \\ \beta(\xi, \eta = 0, t) = \beta(\xi, \eta = 1, t) \\ M(\xi, \eta = 0, t) = M(\xi, \eta = 1, t) \\ T(\xi, \eta = 0, t) = T(\xi, \eta = 1, t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} w(\xi, \eta = 0, t) = w(\xi, \eta = 1, t) \\ w'(\xi, \eta = 0, t) = w'(\xi, \eta = 1, t) \\ w''(\xi, \eta = 0, t) = w''(\xi, \eta = 1, t) \\ w'''(\xi, \eta = 0, t) = w'''(\xi, \eta = 1, t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \phi_j(\eta = 0) = \phi_j(\eta = 1) \\ \phi_j'(\eta = 0) = \phi_j'(\eta = 1) \\ \phi_j''(\eta = 0) = \phi_j''(\eta = 1) \\ \phi_j'''(\eta = 0) = \phi_j'''(\eta = 1) \end{cases}$$

Equazione 58 - Condizioni al contorno trave libera-libera con continuità agli estremi

Derivando tre volte l'equazione costitutiva della trave ottengo:

$$\begin{aligned} \phi_j(\eta) &= A \cos(z_j \eta) + B \sin(z_j \eta) + C \cosh(z_j \eta) + D \sinh(z_j \eta) \\ \phi_j'(\eta) &= z_j [-A \sin(z_j \eta) + B \cos(z_j \eta) + C \sinh(z_j \eta) + D \cosh(z_j \eta)] \\ \phi_j''(\eta) &= z_j^2 [-A \cos(z_j \eta) - B \sin(z_j \eta) + C \cosh(z_j \eta) + D \sinh(z_j \eta)] \\ \phi_j'''(\eta) &= z_j^3 [A \sin(z_j \eta) - B \cos(z_j \eta) + C \sinh(z_j \eta) + D \cosh(z_j \eta)] \end{aligned}$$

Equazione 59 - Derivate equazione costitutiva

Applicando sull'Equazione 59 le condizioni al contorno ottengo:

$$\begin{aligned} A + C &= A \cos(z_j \eta) + B \sin(z_j \eta) + C \cosh(z_j \eta) + D \sinh(z_j \eta) \\ z_j[B + D] &= z_j [-A \sin(z_j \eta) + B \cos(z_j \eta) + C \sinh(z_j \eta) + D \cosh(z_j \eta)] \\ z_j^2[-A + C] &= z_j^2 [-A \cos(z_j \eta) - B \sin(z_j \eta) + C \cosh(z_j \eta) + D \sinh(z_j \eta)] \\ z_j^3[-B + D] &= z_j^3 [A \sin(z_j \eta) - B \cos(z_j \eta) + C \sinh(z_j \eta) + D \cosh(z_j \eta)] \end{aligned}$$

Equazione 60 - Condizioni al contorno di continuità

Ricavando dalla prima e dalla seconda equazione i due coefficienti C e D in funzione di

A e B :

$$\begin{cases} A + C = A \cos(z_j) + B \sin(z_j) + C \cosh(z_j) + D \sinh(z_j) \\ B + D = -A \sin(z_j) + B \cos(z_j) + C \sinh(z_j) + D \cosh(z_j) \end{cases}$$

Equazione 61 – Prima e seconda condizione al contorno

Dalla prima:

$$C(1 - \cosh(z_j)) = A(\cos(z_j) - 1) + B \sin(z_j) + D \sinh(z_j)$$

$$C = A \frac{(\cos(z_j) - 1)}{(1 - \cosh(z_j))} + B \frac{\sin(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} + D \frac{\sinh(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))}$$

Equazione 62 - Coefficiente C

Dalla seconda:

$$B + D = -A \sin(z_j) + B \cos(z_j)$$

$$+ \left[A \frac{(\cos(z_j) - 1)}{(1 - \cosh(z_j))} + B \frac{\sin(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} + D \frac{\sinh(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} \right] \sinh(z_j)$$

$$+ D \cosh(z_j)$$

$$D \left(1 - \frac{\sinh^2(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} - \cosh(z_j) \right)$$

$$= A \left(-\sin(z_j) + \frac{(\cos(z_j) - 1) \sinh(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} \right)$$

$$+ B \left(-1 + \cos(z_j) + \frac{\sin(z_j) \sinh(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} \right)$$

$$D = A \frac{\left(-\sin(z_j) + \frac{(\cos(z_j) - 1) \sinh(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} \right)}{\left(1 - \frac{\sinh^2(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} - \cosh(z_j) \right)}$$

$$+ B \frac{\left(-1 + \cos(z_j) + \frac{\sin(z_j) \sinh(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} \right)}{\left(1 - \frac{\sinh^2(z_j)}{(1 - \cosh(z_j))} - \cosh(z_j) \right)}$$

Equazione 63 - Coefficiente D

Sostituendo l'Equazione 63 nell'Equazione 62 è possibile ricavare i due coefficienti C e D in funzione dei soli A e B ottenendo:

C

$$= - \frac{-(1 - \cos(z_j))(-A + A\cos(z_j) + B\sin(z_j)) - (-B + B\cos(z_j) - A\sin(z_j)\sinh(z_j))}{-1(1 - \cosh(z_j))^2 + \sinh^2(z_j)}$$

D

$$= - \frac{(-A\operatorname{csch}(z_j) + A\cos(z_j)\operatorname{csch}(z_j) + B\operatorname{coth}(z_j)\operatorname{csch}(z_j) - B\cos(z_j)\operatorname{coth}(z_j)\operatorname{csch}(z_j))}{-1 + \operatorname{coth}^2(z_j) - 2\operatorname{coth}(z_j)\operatorname{csch}(z_j) + \operatorname{csch}^2(z_j)}$$

Equazione 64 - *Espressione completa dei coefficienti C e D*

In forma compatta si possono scrivere questi due termini come:

$$\begin{cases} C = C_1A + C_2B \\ D = D_1A + D_2B \end{cases}$$

Equazione 65 - *Coefficienti C e D in funzione dei coefficienti A e B*

Quindi sostituendo nella terza e quarta espressione dell'Equazione 60 si ottiene:

$$\begin{aligned} & -A + C_1A + C_2B \\ & = -A \cos(z_j) - B \sin(z_j) + (C_1A + C_2B) \cosh(z_j) \\ & \quad + (D_1A + D_2B) \sinh(z_j) \\ & -B + D_1A + D_2B \\ & = A \sin(z_j) - B - \cos(z_j) + (C_1A + C_2B) \sinh(z_j) + (D_1A \\ & \quad + D_2B) \cosh(z_j) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} & (-1 + C_1 + \cos(z_j) - C_1 \cosh(z_j) - D_1 \sinh(z_j))A \\ & \quad + (C_2 + \sin(z_j) - C_2 \cosh(z_j) - D_2 \sinh(z_j))B = 0 \\ & (D_1 - \sin(z_j) - C_1 \sinh(z_j) + D_1 \cosh(z_j))A \\ & \quad + (-1 + D_2 + \cos(z_j) - C_2 \sinh(z_j) - D_2 \cosh(z_j))B = 0 \end{aligned}$$

Equazione 66 - *Terza e quarta condizione al contorno*

Come per quanto fatto nei casi precedenti, imponendo che il determinante della matrice sia pari a zero è possibile ottenere la soluzione z_j , occorre però notare dall'Equazione 64 come solamente l'espressione di C e D sia molto complessa, pertanto, la ricerca della

soluzione che si otterrebbe sviluppando l'Equazione 67 risulterebbe estremamente complessa oltre che computazionalmente molto pesante.

$$\begin{aligned}
 &(-1 + C_1 + \cos(z_j) - C_1 \cosh(z_j) - D_1 \sinh(z_j))(-1 + D_2 + \cos(z_j) - C_2 \sinh(z_j) \\
 &\quad - D_2 \cosh(z_j)) \\
 &\quad - (C_2 + \sin(z_j) - C_2 \cosh(z_j) - D_2 \sinh(z_j))(D_1 - \sin(z_j) \\
 &\quad - C_1 \sinh(z_j) + D_1 \cosh(z_j)) = 0
 \end{aligned}$$

Equazione 67 - Ricerca della soluzione z_j

Per evitare di generare un codice eccessivamente lento e in cui l'espressione di partenza potrebbe non avere una soluzione in forma chiusa, si è deciso di adottare in direzione circonferenziale una base di funzioni di forma differente che sia computazionalmente più leggera.

La serie di funzioni di forma di Fourier è una delle più generiche basi ortogonali di funzioni, tale base sarebbe adatta per descrivere il comportamento in direzione circonferenziale se solo vi fosse anche continuità della funzione tra i due estremi di integrazione.

I primi quattro termini di una generica base di Fourier sono rappresentati in Figura 30, immediatamente si nota che, mentre per i termini dispari della base vi è discontinuità della funzione ai due estremi, i termini pari della base presentano continuità.

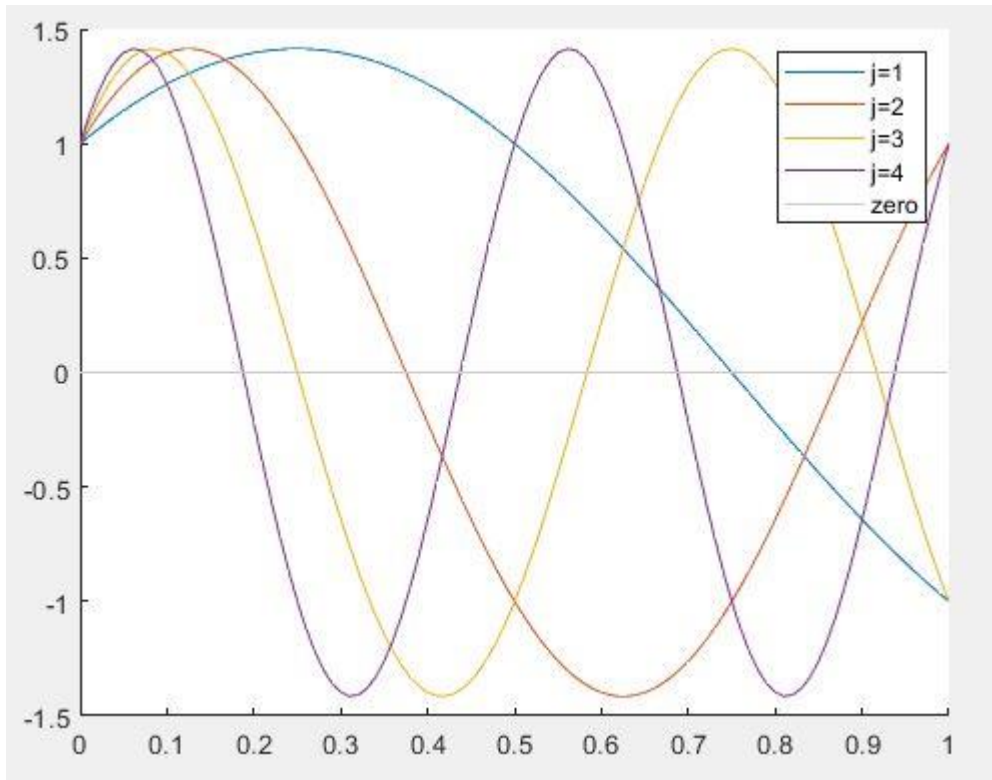


Figura 30 - Base di Fourier

Si noti inoltre dell'Equazione 68, che trattandosi di una base scritta a partire da termini del seno e del coseno, se è garantita la continuità per la derivata zero della funzione, lo è anche per la derivata s-esima.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n2} (\sin(j\pi x) + \cos(j\pi x))$$

Equazione 68 - Base di Fourier

Andremo quindi a descrivere il comportamento del disco in direzione circonferenziale a partire da una base di Fourier modificata in cui considereremo soltanto i termini pari.

La scelta di questo tipo di base consente di ottenere diversi vantaggi in quanto:

- È garantita l'ortogonalità della base e la lineare indipendenza;
- È una base di funzioni ottenuta a partire da una base già nota in letteratura, per cui si è certi del suo funzionamento;
- Sono delle funzioni computazionalmente molto leggere le cui derivate sono anch'esse dei termini dipendenti dal seno e dal coseno;

- È garantita la continuità della funzione per $\phi_j(\eta = 0) = \phi_j(\eta = 1)$ e per tutte le sue derivate.

La base di Fourier modificata che verrà implementata all'interno del codice per descrivere il comportamento in direzione è dunque data dall'Equazione 69.

$$\phi_j(\eta) = \sum_{j=2:2}^{2n2} (\sin(j\pi\eta) + \cos(j\pi\eta))$$

Equazione 69 - Funzioni di forma in direzione circonferenziale

In Figura 31, Figura 32, Figura 33 e Figura 34 sono rappresentate le prime tre funzioni della base di funzioni usata per descrivere il comportamento del disco in direzione circonferenziale.

Dalle figure si può notare come questa famiglia di funzioni verifica la continuità di spostamento e rotazione ai due estremi di integrazione.

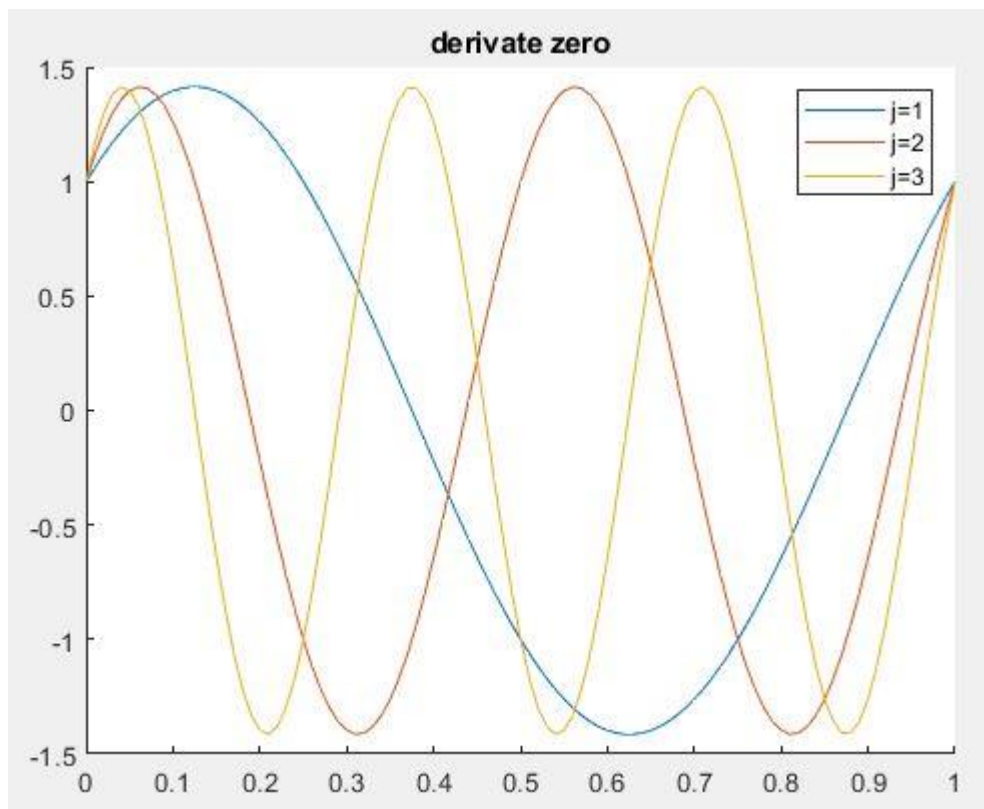


Figura 31 - Prime tre funzioni di forma circonferenziali

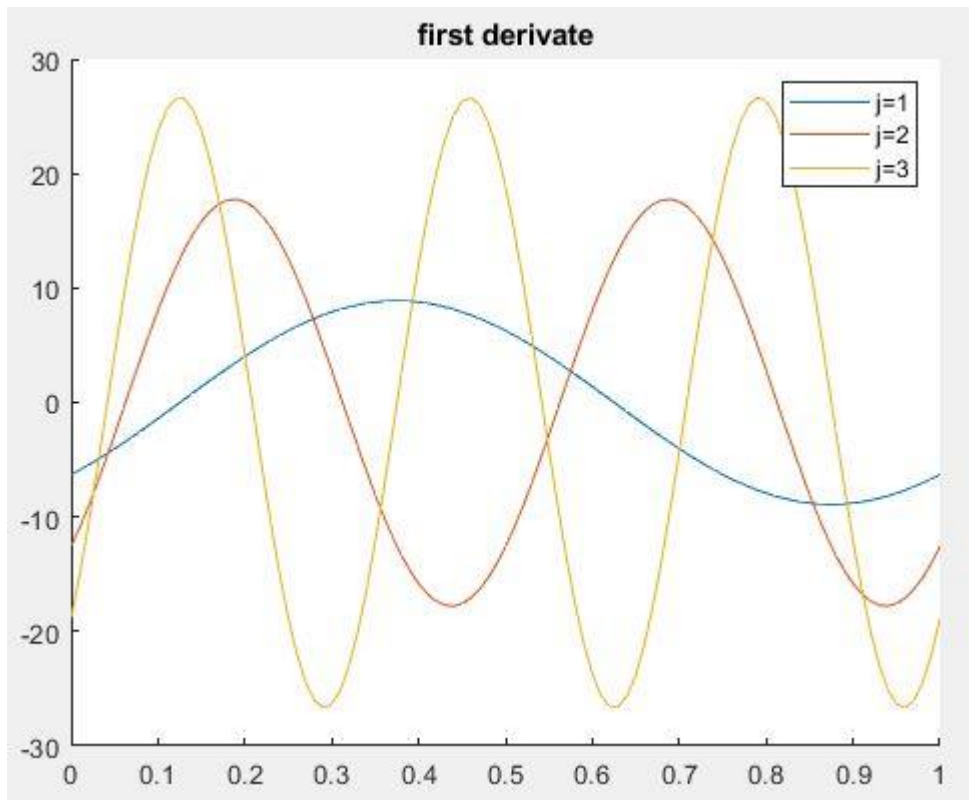


Figura 32 - Derivata prima delle prime tre funzioni di forma circolari

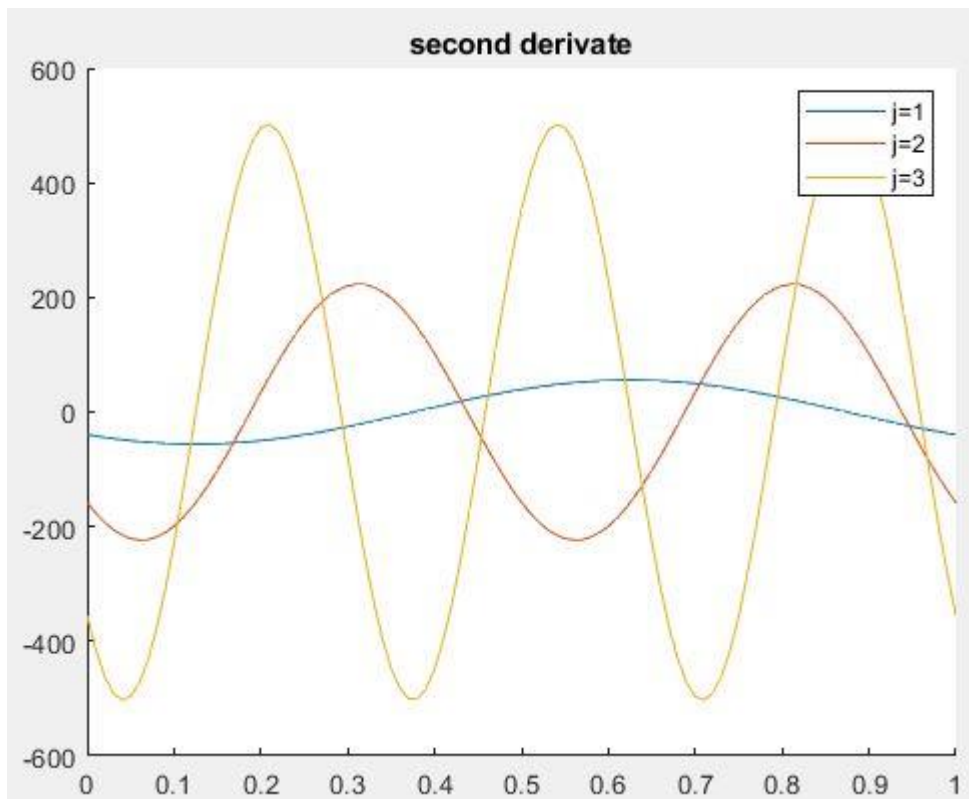


Figura 33 - Derivata seconda delle prime tre funzioni di forma circolari

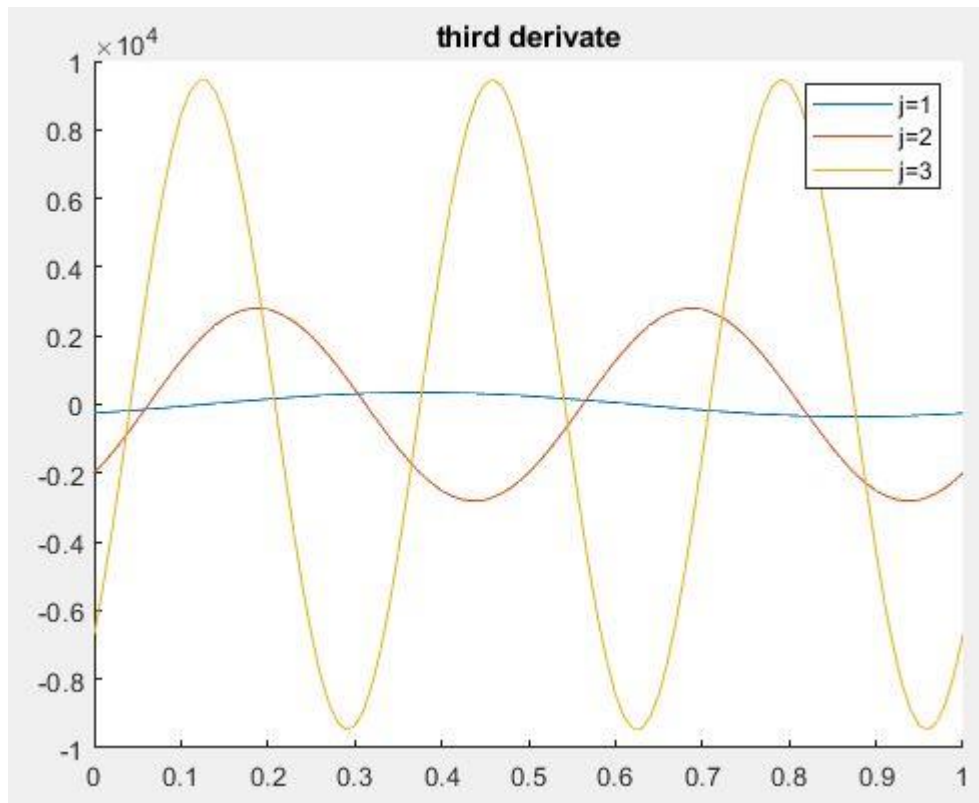


Figura 34 - Derivata terza delle prime tre funzioni di forma circolari

Note le due espressioni delle funzioni di forma dalle Equazione 46 e Equazione 69, con un metodo energetico andremo a ricavare quella che è l'espressione delle matrici di massa e rigidità del sistema.

Come riportato all'interno dell'Equazione 35, il prodotto delle funzioni di forma in direzione radiale ed in direzione circonferenziale dà luogo a quella che è la funzione di forma complessiva secondo $N_k(\xi, \eta) = \phi_i(\xi) \phi_j(\eta)$.

Il numero di gradi di libertà N complessivo del sistema è dato dal prodotto di $n1$ e $n2$ che sono rispettivamente il numero di termini della sommatoria delle funzioni di forma in direzione radiale ed il numero di termini della sommatoria di funzioni di forma in direzione circonferenziale.

Gli indici $i \in [1, n1]$ e $j \in [1, n2]$ identificano la i -esima funzione di forma radiale e la j -esima funzione di forma circonferenziale, questi indici sono univocamente determinati a partire dall'indice $k \in [1, N]$ della k -esima funzione di forma.

Per la successiva trattazione sarà di fondamentale importanza ricordare il succitato risultato.

4.1.3 Metodo del minimo di energia potenziale

Andremo ora a scrivere quella che è l'espressione dell'energia potenziale delle azioni inerziali associate all'accelerazione dello spostamento fuori dal piano w .

In Figura 35 è rappresentato un elemento infinitesimo posto ad una distanza r dal centro del disco e caratterizzato da uno spessore h , una lunghezza dr ed uno sviluppo angolare $d\theta$.

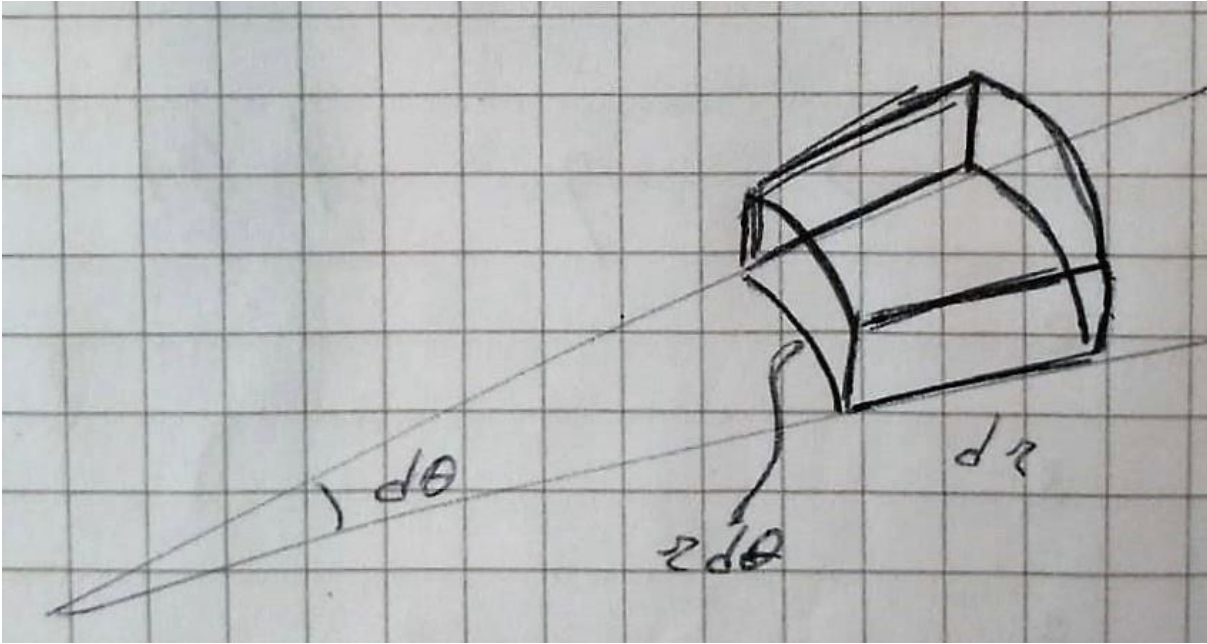


Figura 35 - Elemento infinitesimo di disco

La forza d'inerzia infinitesima associata al suo spostamento è data dall'Equazione 70:

$$dF_{in} = -dm \ddot{w} = -\rho dr rd\theta h \ddot{w}$$

Equazione 70 - Forza d'inerzia infinitesima associata a w

Da cui si ricava l'energia potenziale infinitesima dell'azione inerziale come riportato nell'Equazione 71.

$$\begin{aligned} d\Pi_{in} &= -dF_{in} w = w \rho dr rd\theta h \ddot{w} = \rho h [N(\xi, \eta) \delta(t) r N(\xi, \eta) \ddot{\delta}(t) d\vartheta dr] \\ &= \rho h [N(\xi, \eta) \delta(t) (R1 + \xi(R1 - R2)) (R2 \\ &\quad - R1) 2\pi N(\xi, \eta) \ddot{\delta}(t) d\eta d\xi] \end{aligned}$$

Equazione 71 - Energia potenziale inerziale infinitesima associata a w

Ricordandosi del già menzionato risultato dell'Equazione 35, è possibile scrivere tale termine in funzione del vettore delle funzioni di forma $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ moltiplicato per il vettore incognito dei gradi di libertà $\boldsymbol{\delta}(t)$.

Infine, grazie all'Equazione 33 è possibile scrivere i vari termini all'interno dello spazio dei parametri.

Eseguendo un integrale nello spazio dei parametri si ottiene quella che è la matrice di massa in funzione del vettore incognito $\boldsymbol{\delta}(t)$ associato ai gradi di libertà del sistema come riportato in Equazione 72.

$$\begin{aligned} \Pi_{in} &= \int d\Pi_{in} dV \\ &= \boldsymbol{\delta}^T(t) 2\pi\rho h \left[\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}^T(\xi, \eta) (R1 + \xi(R1 - R2))(R2 \right. \\ &\quad \left. - R1) \mathbf{N}(\xi, \eta) d\eta d\xi \right] \boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\delta}(t) \end{aligned}$$

Equazione 72 - *Energia potenziale totale associata all'azione inerziale di w*

Si noti che l'energia potenziale delle azioni inerziali associate allo spostamento trasversale w è uno scalare in quanto deriva dal prodotto vettoriale tra un vettore di dimensione $1 \times N$, una matrice $N \times N$ ed un vettore $N \times 1$, dove N rappresenta il numero di gradi di libertà totale del sistema.

Si noti che la matrice di massa \mathbf{M} ha la dimensione dei [kg] ed è completamente nota in quanto i termini che la costituiscono, tra cui i vettori delle funzioni di forma, sono termini noti.

Trascuriamo per il momento i contributi inerziali derivanti dalle rotazioni α e β della sezione in quanto il loro contributo è poco influente.

Non trascureremo però il contributo inerziale associato alle accelerazioni di Coriolis⁶ che queste rotazioni forniscono quando interviene anche una certa velocità di rotazione del disco.

In maniera del tutto analoga valutiamo ora il contributo all'energia potenziale dato dal momento elastico.

Per ricavare questo contributo sarà di fondamentale importanza ricordare l'espressione dei momenti in funzione dello spostamento trasversale ricavati nell'Equazione 30.

Il contributo infinitesimo di energia potenziale elastica dovuto alle rotazioni della sezione vale:

$$d\Pi_{el} = \frac{1}{2}(M_r d\alpha + (M_\theta + M_{r\theta})d\beta)$$

Equazione 73 - Energia potenziale elastica infinitesima

Come raffigurato in Figura 36 considereremo soltanto i contributi che M_r ed M_θ forniscono all'energia potenziale elastica, trascurando il termine $M_{r\theta}$.

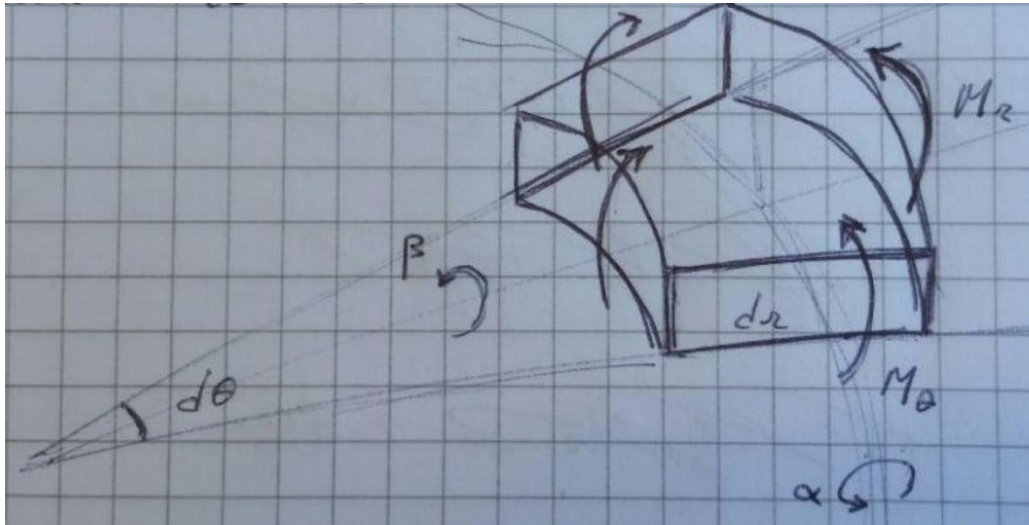


Figura 36 - Azioni esterne associate alle rotazioni della sezione

Sviluppando i termini dell'Equazione 73 ottengo:

⁶ L'accelerazione di Coriolis è quell'accelerazione associata alla forza di Coriolis. La forza di Coriolis è una forza fittizia, che viene percepita da un osservatore solidale a un sistema in rotazione (non inerziale), per effetto della quale i corpi non solidali al sistema ruotante e in moto rispetto ad esso tendono a deviare rispetto ad una traiettoria rettilinea.

$$\begin{aligned}
 d\Pi_{el,M_r} &= \frac{1}{2}M_r d\alpha = \frac{1}{2}M_r \left(\frac{d\alpha}{dr} dr + \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \frac{d\alpha}{dr} dr \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R2-R1)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))(R2-R1)} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))^2 4\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] \frac{1}{(R2-R1)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} (R2-R1) d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R2-R1)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))(R2-R1)} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))^2 4\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] \frac{1}{(R2-R1)2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} 2\pi d\eta \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R2-R1)^3} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))(R2-R1)^2} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))^2 (R2-R1)4\pi^2} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \delta(t) \right] \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \delta(t) d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R2-R1)^3} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1+\xi(R2-R1))(R2-R1)^2} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \delta(t) \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\nu}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 (R2 - R1) 4\pi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \boldsymbol{\delta}(t) \left] \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \boldsymbol{\delta}(t) d\eta \right.$$

Equazione 74 - Energia potenziale infinitesima associata al momento M_r della sezione

Integrando l'Equazione 74 sul volume ottengo il contributo totale dell'energia potenziale elastica associata alla rotazione attorno alla direzione circonferenziale:

$$\begin{aligned} \Pi_{el, M_r} &= \int d\Pi_{el, M_r} dV \\ &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left[\boldsymbol{\delta}^T(t) \frac{h}{(R2 - R1)^3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \boldsymbol{\delta}(t) \right. \\ &+ \boldsymbol{\delta}^T(t) \frac{\nu h}{(R2 - R1)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \boldsymbol{\delta}(t) \\ &+ \left. \boldsymbol{\delta}^T(t) \frac{\nu}{4\pi^2 (R2 - R1)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \boldsymbol{\delta}(t) \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left[\boldsymbol{\delta}^T(t) \frac{h}{(R2 - R1)^3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \boldsymbol{\delta}(t) \right. \\ &+ \boldsymbol{\delta}^T(t) \frac{\nu h}{(R2 - R1)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \boldsymbol{\delta}(t) \\ &+ \left. \boldsymbol{\delta}^T(t) \frac{\nu}{4\pi^2 (R2 - R1)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \boldsymbol{\delta}(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot \mathbf{K}_{M_r} \cdot \boldsymbol{\delta}(t) \end{aligned}$$

Equazione 75 - Energia potenziale totale associata al momento M_r della sezione

Analogamente, ripetendo gli stessi passaggi per il contributo associato alla rotazione β attorno alla direzione radiale:

$$\begin{aligned}
 d\Pi_{el,M_\theta} &= \frac{1}{2} M_\theta d\beta = \frac{1}{2} M_\theta \left(\frac{d\beta}{d\theta} d\theta + \frac{d\beta}{dr} dr \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \frac{d\beta}{d\theta} d\theta \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \frac{d\beta}{dr} dr \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} d\theta \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} dr \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 4\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1)} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R2 - R1)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1)) 4\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} 2\pi d\eta \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 4\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1)} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R2 - R1)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1) 2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} (R2 - R1) d\xi \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 8\pi^3} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1) 2\pi} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1)^2 2\pi} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \delta(t) \right] \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \delta(t) d\eta \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 8\pi^3} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \delta(t) + \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1) 2\pi} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1)^2 2\pi} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \delta(t) \right]
 \end{aligned}$$

Equazione 76 - Energia potenziale infinitesima associata al momento M_θ della sezione

Integrando:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{el, M_\theta} &= \int d\Pi_{el, M_\theta} dV \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left[\delta^T(t) \frac{h}{8\pi^3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^3} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \delta(t) \right. \\
 &+ \delta^T(t) \frac{h}{2\pi(R2 - R1)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \delta(t) \\
 &+ \left. \delta^T(t) \frac{\nu h}{2\pi(R2 - R1)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \delta(t) \right] \\
 &- \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left[\delta^T(t) \frac{h}{8\pi^3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^3} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} d\xi d\eta \delta(t) \right. \\
 &+ \delta^T(t) \frac{h}{2\pi(R2 - R1)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} d\xi d\eta \delta(t) \\
 &+ \left. \delta^T(t) \frac{\nu h}{2\pi(R2 - R1)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} d\xi d\eta \delta(t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot \mathbf{K}_{M_\theta} \cdot \delta(t)
 \end{aligned}$$

Equazione 77 - Energia potenziale totale associata al momento M_θ della sezione

A partire dalle due espressioni dell'energia potenziale elastica associata alla rotazione della sezione riportate in Equazione 75 e Equazione 77 si ottiene l'Equazione 78, ovvero l'espressione dell'energia potenziale elastica totale:

$$d\Pi_{el} = d\Pi_{el, M_r} + d\Pi_{el, M_\theta} = \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot (\mathbf{K}_{M_r} + \mathbf{K}_{M_\theta}) \cdot \delta(t) = \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot \mathbf{K} \cdot \delta(t)$$

Equazione 78 - Energia potenziale totale associata alle azioni elastiche M_r e M_θ

Dove la matrice di rigidezza \mathbf{K} è una matrice $N \times N$ completamente nota in funzione dei parametri del sistema e delle funzioni di forma.

Come suddetto, non è stato considerato il contributo della rotazione attorno alla direzione radiale dovuto al momento $M_{r\theta}$; un primo modo per verificare l'esattezza del codice è quello di valutare la convergenza dei valori aumentando il numero di punti di gauss nell'integrazione.

Siccome, all'aumentare del numero dei punti di Gauss i termini della matrice di rigidezza non convergevano verso un valore stazionario, è stato implementato anche il calcolo del termine della matrice di rigidezza dovuto al momento $M_{r\theta}$.

$$\begin{aligned}
 d\Pi_{el, M_\theta} &= \frac{1}{2} M_\theta d\beta = \frac{1}{2} M_\theta \left(\frac{d\beta}{d\theta} d\theta + \frac{d\beta}{dr} dr \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \frac{d\beta}{d\theta} d\theta - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \frac{d\beta}{dr} dr \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} d\theta \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} dr \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1)2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 2\pi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))4\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} 2\pi d\eta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))(R2 - R1)2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 2\pi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))2\pi(R2 - R1)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} (R2 - R1) d\xi \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 (R2 - R1)4\pi^2} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^3 4\pi^2} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \delta(t) \right] \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \delta(t) d\eta \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2 (R2 - R1)4\pi^2} \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^3 4\pi^2} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \delta(t) \right] \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \delta(t) d\xi
 \end{aligned}$$

Equazione 79 - Energia potenziale infinitesima associata al momento $M_{r\theta}$ della sezione

Integrando:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{el,Mr\theta} &= \int d\Pi_{el,Mr\theta} dV \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\delta^T(t) \frac{h}{(R2 - R1)4\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \delta^T(t) \frac{h}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^3} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \delta(t) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \left[\delta^T(t) \frac{h}{(R2 - R1)4\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \delta(t) \right. \\
 &\quad \left. + \delta^T(t) \frac{h}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{N}^T(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{1}{(R1 + \xi(R2 - R1))^3} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \delta(t) \right] = \frac{1}{2} \delta^T(t) \\
 &\quad \cdot \mathbf{K}_{Mr\theta} \cdot \delta(t)
 \end{aligned}$$

Equazione 80 - Energia potenziale totale associata al momento $Mr\theta$ della sezione

Inserendo anche l'Equazione 80 all'interno dell'Equazione 78 si ottiene l'Equazione 81 comprensiva di tutti i termini associati alle azioni elastiche:

$$\begin{aligned}
 d\Pi_{el} &= d\Pi_{el,Mr} + d\Pi_{el,Mr\theta} = \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot (\mathbf{K}_{Mr} + \mathbf{K}_{Mr\theta} + \mathbf{K}_{Mr\theta}) \cdot \delta(t) = \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot \mathbf{K} \\
 &\quad \cdot \delta(t)
 \end{aligned}$$

Equazione 81 - Energia potenziale totale associata alle azioni elastiche

Al momento sono state valutate le matrici di massa e rigidezza a partire da un vettore di funzioni di forma ricavate secondo quanto descritto nel capitolo precedente.

Tuttavia, per come sono state scelte le famiglie di funzioni di forma, queste descrivono il comportamento di un disco in cui viene imposto lo spostamento trasversale w e la rotazione α attorno alla direzione circonferenziale al raggio interno uguali a zero.

Oltre a queste due condizioni, sarebbe necessario bloccare anche la rotazione β attorno alla direzione radiale in corrispondenza del raggio interno per descrivere bene quello che è il comportamento dinamico di un disco freno.

Non potendo modellare tale vincolo attraverso delle funzioni di forma opportune, occorre aggiungere un contributo di rigidezza $\Delta \mathbf{K}$ che rappresenta il vincolo alla rotazione alla matrice \mathbf{K} .

Il vincolo che andremo a modellare è un vincolo che aumenta la rigidità alla rotazione in corrispondenza del raggio interno, come se su tale perimetro vi fossero delle molle torsionali distribuite.

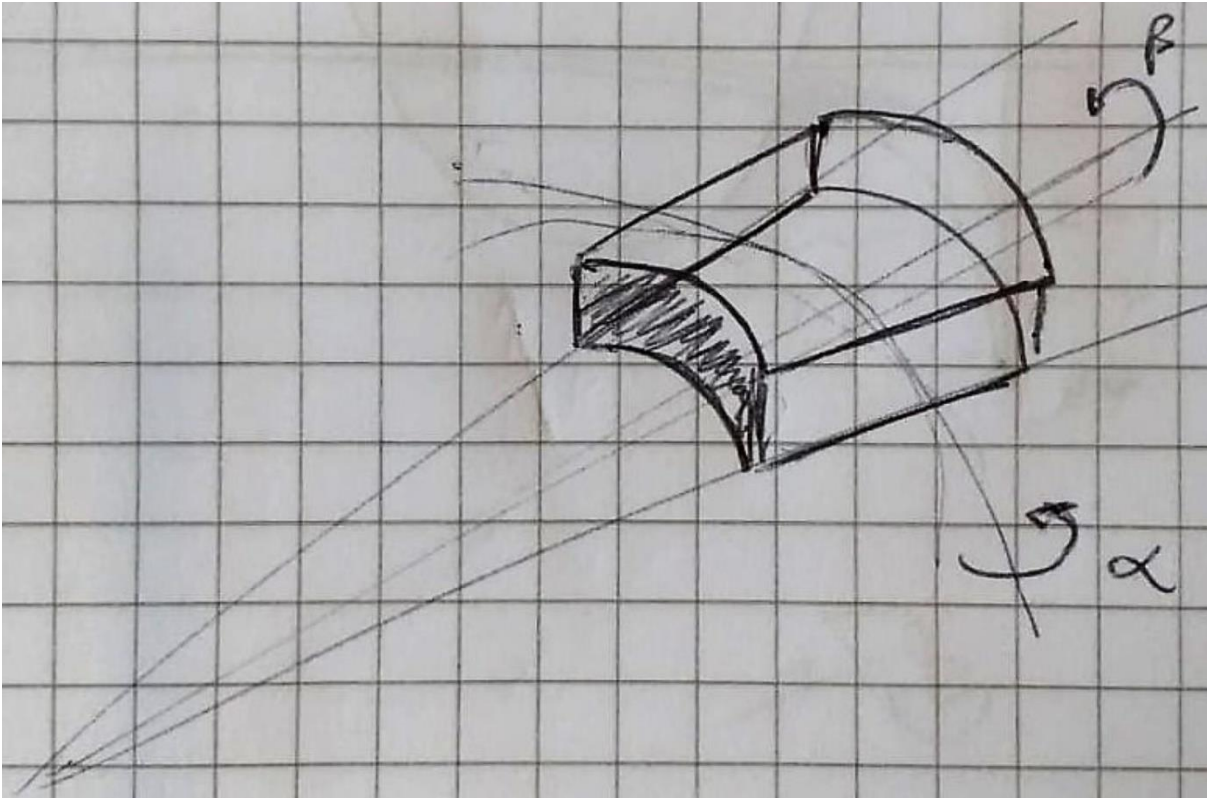


Figura 37 – Elemento infinitesimo in corrispondenza del vincolo al raggio interno

Come mostrato in Figura 37 il tipo di vincolo che si vuole costruire è un vincolo che blocca la rotazione sull'area della sezione circolare in corrispondenza del raggio interno. Impedire completamente la rotazione significherebbe aggiungere una rigidità torsionale infinita, un buon valore di rigidità del vincolo è un valore che sia circa 2 o 3 ordini di grandezza più elevato della norma della matrice \mathbf{K} .

$$k_{vinc} = (10^2 \div 10^3) \cdot norm(\mathbf{K})$$

Equazione 82 - Rigidità del vincolo

Così facendo, la rotazione β è sufficientemente piccola da poter essere considerata nulla o trascurabile.

L'energia potenziale associata alla rotazione è data dall'Equazione 83:

$$\begin{aligned}
 d\Delta\Pi_{vinc} &= -\frac{1}{2}dM_{el} \cdot \beta = -\frac{1}{2}(k_{vinc}dA \beta)\beta = -\frac{1}{2}(k_{vinc} R1d\theta h \beta)\beta \\
 &= -\frac{1}{2}\left(k_{vinc} h R1d\theta \frac{1}{R1} \frac{dw}{d\theta}\right) \frac{1}{R1} \frac{dw}{d\theta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_{vinc} h}{R1} \frac{dw}{d\theta}\right) \frac{dw}{d\theta} d\theta \\
 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{k_{vinc} h}{R1 2\pi} \frac{dN(\xi, \eta)}{d\eta} \delta(t)\right) \frac{dN(\xi, \eta)}{d\eta} \delta(t) d\eta
 \end{aligned}$$

Equazione 83 - Energia potenziale infinitesima associata al vincolo contro la rotazione β

Si noti che tale espressione non va integrata sull'area del disco ma va integrata soltanto in direzione circonferenziale.

L'energia potenziale totale associata al vincolo risulta pertanto:

$$\Delta\Pi_{vinc} = \frac{1}{2} \delta^T(t) \frac{k_{vinc} h}{R1 2\pi} \int_0^1 - \frac{dN^T(\xi, \eta)}{d\eta} \frac{dN(\xi, \eta)}{d\eta} d\eta \delta(t) = \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot \Delta\mathbf{K} \cdot \delta(t)$$

Equazione 84 - Energia potenziale totale associata al vincolo contro la rotazione β

A questo punto, note le matrici di massa, rigidezza ed eventuali vincoli è possibile valutare la dinamica di un disco anulare flessibile vincolato al raggio interno e con velocità di rotazione nulla imponendo il minimo dell'energia potenziale totale:

$$\Pi_{tot} = \Delta\Pi_{vinc} + \Pi_{el} + \Pi_{in} = \frac{1}{2} \delta^T(t) \cdot (\Delta\mathbf{K} + \mathbf{K}) \cdot \delta(t) + \delta^T(t) \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\delta}(t)$$

Equazione 85 - Energia potenziale totale per un disco fisso

Imponendo il minimo dell'energia potenziale all'Equazione 85, ovvero imponendo la stazionarietà rispetto al vettore $\delta(t)$, ottengo l'Equazione 86 che è anche l'equazione del moto:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\delta(t)} \Pi_{tot} &= 0 \\
 \mathbf{M} \cdot \ddot{\delta}(t) + (\Delta\mathbf{K} + \mathbf{K}) \cdot \delta(t) &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Equazione 86 - Equazione del moto per un disco fisso libero di vibrare

Abbiamo così ottenuto un sistema di N equazioni, dove N è il numero dei gradi di libertà del sistema. Come accennato prima, occorre prestare attenzione al fatto che questi gradi

di libertà non sono fisici ma dipendono dal numero di componenti del vettore di funzioni di forma.

Più questo numero sarà elevato e più il comportamento del disco flessibile risulterà ben approssimato da questa tecnica di cosiddetta “Modellazione Spettrale”.

Da questa prima equazione del moto è quindi possibile ricavare le frequenze naturali per una piastra anulare omogenea e di materiale omogeneo vincolata al raggio interno, un primo accorgimento che si può adottare è il confronto delle frequenze naturali con le frequenze proposte da Blevis in [21] e riproposte in Figura 38 **Error! Reference source not found.**

Notation: a = outside radius; b = inside radius; h = plate thickness; i = number of nodal diameters; j = number of nodal circles, not counting boundary circles; C = clamped edge; E = modulus of elasticity; F = free edge; S = simply supported edge; γ = mass per unit area of plate; ν = Poisson's ratio; consistent sets of units are given in Table 3-1. This table was adapted from Refs. 11-19 and 11-20.

$$\text{Natural Frequency (hertz), } f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left[\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{1/2}; \quad i=0,1,2,\dots; \quad j=0,1,2,\dots$$

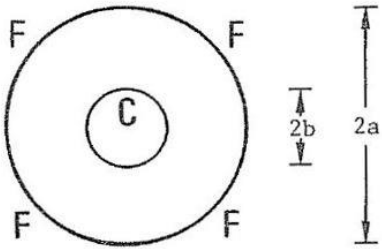
Description		λ_{ij}^2			
Free-Clamped 		b/a			
		i	j	0,1	0,3
0	0	4.23	6.66	13.0	37.0
1	0	3.14	6.33	13.3	37.5
2	0	5.62	7.95	14.7	39.3
3	0	12.4	13.3	18.5	42.6
0	1	25.3	42.6	85.1	239
$\nu = 0.3$					

Figura 38 - Frequenze naturali Blevis

Compreso il meccanismo di modellazione spettrale andremo ora a complicare il modello inserendo quello che è l'effetto di una velocità di rotazione del disco e l'effetto di una forzante esterna causata dalle pastiglie che vanno a schiacciare una certa porzione di superficie generando attrito.

La velocità di rotazione del disco Ω , combinata con le rotazioni della sezione dà luogo ad un'accelerazione, detta accelerazione di Coriolis, la quale è a sua volta responsabile di un contributo inerziale.

L'interazione tra velocità di rotazione del disco attorno al proprio asse e velocità di rotazione della sezione fuori dal proprio piano genera un termine giroscopico proporzionale all'accelerazione di Coriolis, la cui direzione è data dal prodotto vettoriale tra velocità angolare e velocità tangenziale di rotazione come mostrato in Figura 39.

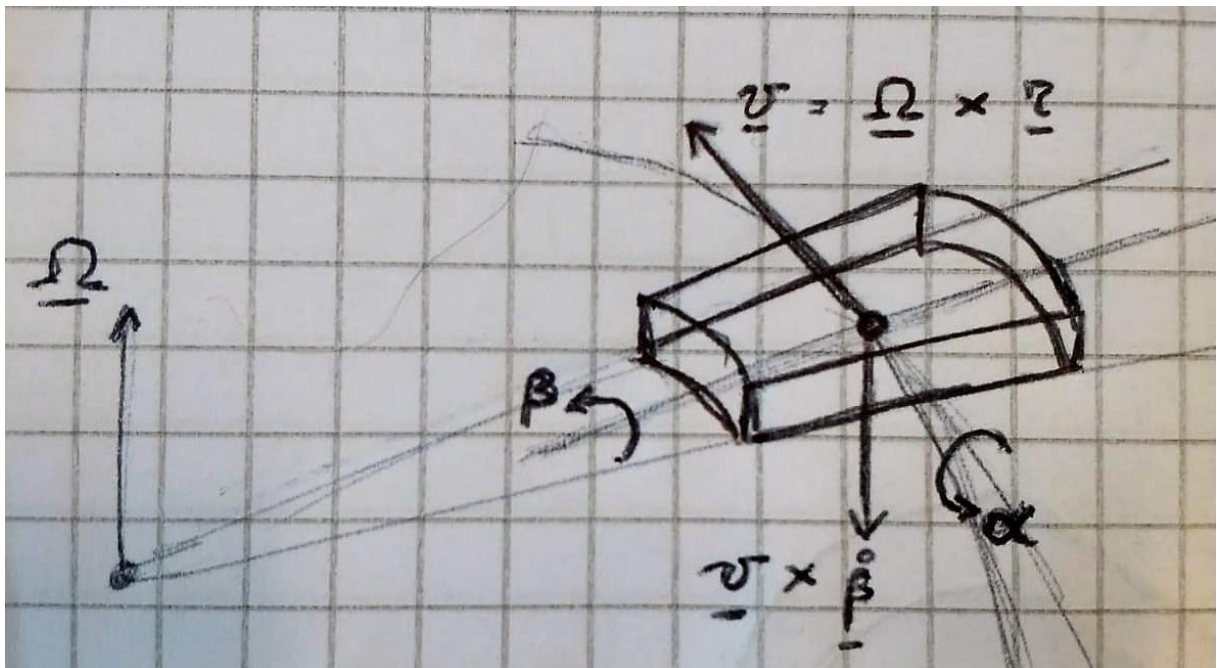


Figura 39 - Effetto giroscopico su un concio infinitesimo di disco

Si noti come tale contributo sia stabilizzante e tenda a riportare il sul proprio piano di rotazione opponendosi allo spostamento fuori dal piano w .

$$\begin{aligned}
 d\Pi_{cor} &= -dF_{in} w = (dm a_{cor}) w = (\rho r d\theta dr h \Omega \dot{w}) w = (\rho r d\theta dr h \Omega \dot{w}) w \\
 &= (\rho r d\theta dr h \Omega \dot{w}) w \\
 &= (\rho (R1 + \xi (R2 - R1)) 2\pi (R2 - R1) d\eta d\xi h \Omega \dot{w}) w \\
 &= (\rho (R1 + \xi (R2 - R1)) 2\pi (R2 - R1) d\eta d\xi h \Omega N(\xi, \eta) \delta(t)) N(\xi, \eta) \delta(t)
 \end{aligned}$$

Equazione 87 - Energia potenziale infinitesima associata al contributo giroscopico

Integrando l'Equazione 87 si ottiene l'espressione finale dell'energia potenziale associata al momento giroscopico:

$$\begin{aligned} \Pi_{cor} &= \delta(t) \rho h \Omega (R2 - R1) 2\pi \int_0^1 \int_0^1 N(\xi, \eta) (R1 + \xi(R2 - R1)) N(\xi, \eta) d\eta d\xi \dot{\delta}(t) \\ &= \delta(t) \cdot \mathbf{G} \cdot \dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

Equazione 88 - Energia potenziale totale associata al contributo giroscopico

Oltre al contributo giroscopico vi è un termine derivante dalle forzanti esterne, le quali sono non sono applicate sull'intero disco, ma come mostrato in , solamente in un ristretto settore circolare.

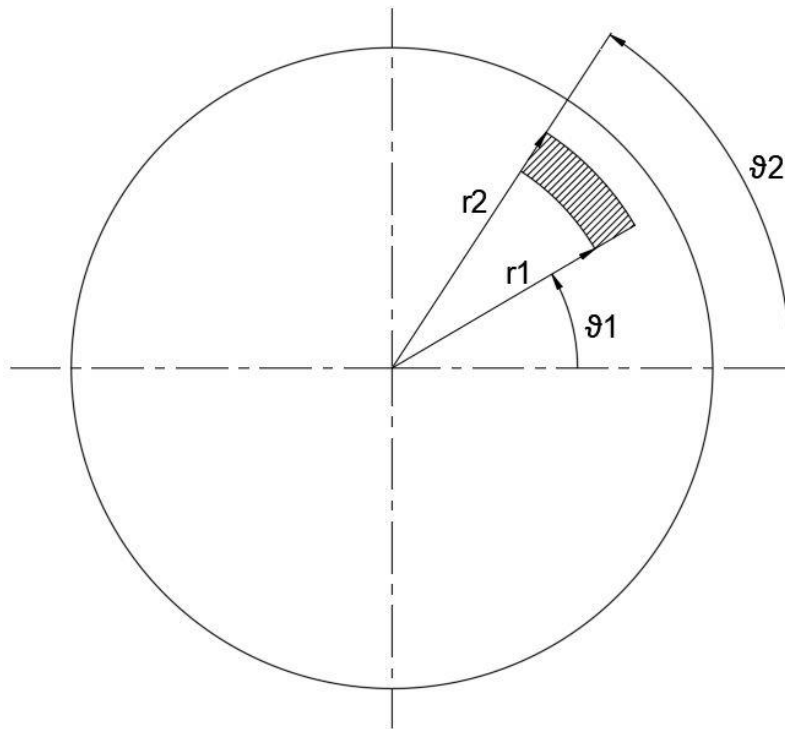


Figura 40 - Settore circolare in cui sono applicate le forzanti del sistema

Il lavoro infinitesimo delle azioni esterne vale dato dalla pressione \$p\$ delle pastiglie dei freni vale:

$$\begin{aligned} dW_{ext} &= pw dA = pw r d\theta dr = pw (R1 + \xi(R2 - R1)) 2\pi (R2 - R1) d\eta d\xi \\ &= N(\xi, \eta) \delta(t) p (R1 + \xi(R2 - R1)) 2\pi (R2 - R1) d\eta d\xi \end{aligned}$$

Equazione 89 - Lavoro infinitesimo associato alla pressione delle pastiglie

Integrando l'Equazione 89 si ottiene l'espressione del lavoro totale, tuttavia questo doppio integrale va eseguito tra ξ_1 e ξ_2 e tra η_1 ed η_2 dove:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{r_1 - R_1}{R_2 - R_1} \\ \xi_2 &= \frac{r_2 - R_1}{R_2 - R_1} \\ \eta_1 &= \frac{\theta_1}{2\pi} \\ \eta_2 &= \frac{\theta_2}{2\pi}\end{aligned}$$

Equazione 90 - Estremi di integrazione forzanti esterne

Scrivendo quindi l'espressione del lavoro complessivo:

$$\begin{aligned}W_{ext} &= \boldsymbol{\delta}^T(t) 2\pi p(R_2 - R_1) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{N}^T(\xi, \eta) (R_1 + \xi(R_2 - R_1)) d\eta d\xi \\ &= \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot \mathbf{F}\end{aligned}$$

Equazione 91 - Lavoro totale associato alla pressione delle pastiglie

Si noti che, a differenza dei contributi valutati prima, \mathbf{F} è un vettore e non una matrice. Quindi, in analogia con quanto fatto prima per il modello dinamico del disco fisso, è possibile scrivere l'equazione del moto a partire dall'espressione totale dell'energia potenziale del sistema:

$$\begin{aligned}\Pi_{tot} &= \Delta\Pi_{vinc} + \Pi_{el} + \Pi_{cor} + \Pi_{in} - W_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot (\Delta\mathbf{K} + \mathbf{K}) \cdot \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot \mathbf{G} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) \\ &\quad - \boldsymbol{\delta}^T(t) \cdot \mathbf{F}\end{aligned}$$

Equazione 92 - Energia potenziale totale per un disco forzato e in rotazione

Ancora una volta, imponendo il minimo dell'energia potenziale all'Equazione 92, si ricava l'equazione del moto:

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\delta}(t)} \Pi_{tot} &= 0 \\ \mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{G} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + (\Delta\mathbf{K} + \mathbf{K}) \cdot \boldsymbol{\delta}(t) &= \mathbf{F}\end{aligned}$$

Equazione 93 - Equazione del moto per un disco forzato e in rotazione

4.2 Il modello dinamico di disco rigido

Oltre alla dinamica del disco flessibile è stata studiata la dinamica di un disco rigido.

Il modello preso in considerazione è simile al modello di Hochlenert [14] tuttavia, le equazioni del moto sono state ricavate con un approccio differente.

Il modello studiato è simile a quello raffigurato in Figura 41, trattasi di un disco rigido vincolato al centro ad uno snodo sferico e dotato di una certa rigidezza torsionale k_t .

I gradi di libertà di tale modello sono le due rotazioni q_1 e q_2 attorno agli assi x e y.

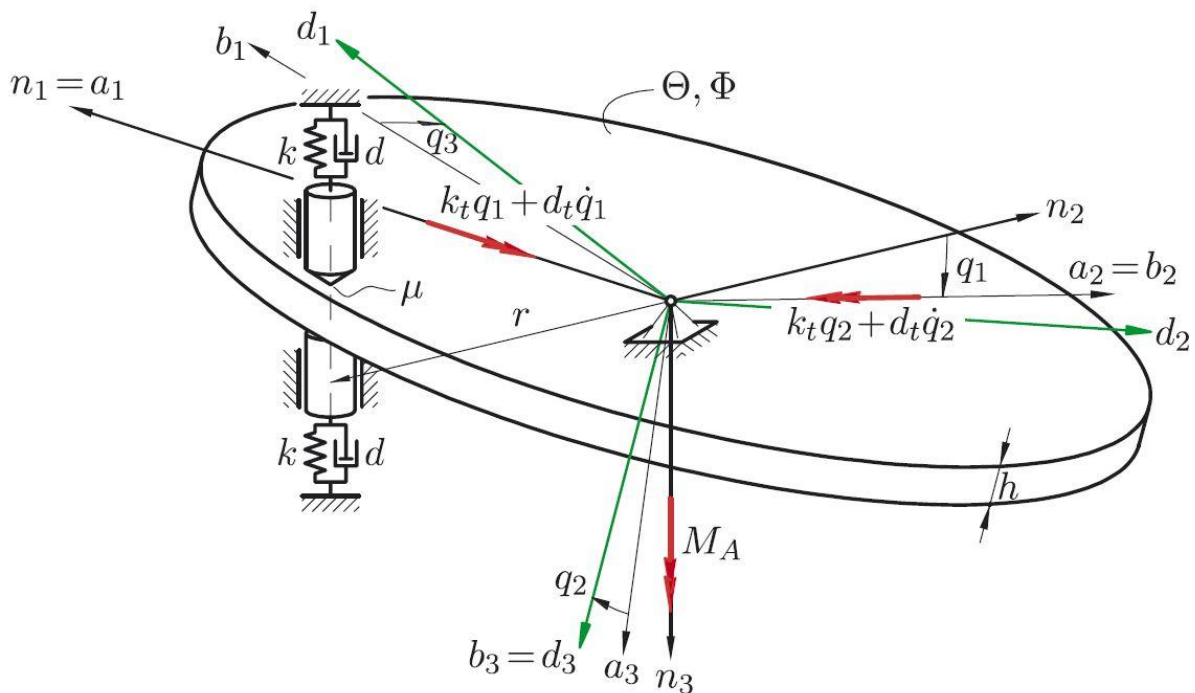


Figura 41 – Modello di Hochlenert

Il modello studiato da Hochlenert prevede un approccio Euleriano per ricavare le equazioni del moto attraverso l'equilibrio dei momenti attorno agli assi del sistema di riferimento.

L'approccio proposto di seguito è invece un approccio energetico che sfrutta le equazioni di Lagrange per ricavare le due equazioni del moto in funzione dei gradi di libertà del sistema.

La generica Lagrangiana associata al j -esimo grado di libertà del sistema è definita come:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_{j,NC}$$

Equazione 94 - Equazione di Lagrange

Dove q_j è il j-esimo grado di libertà del sistema ($j=1, 2 \dots n$), T è l'energia cinetica del sistema, V l'energia potenziale del sistema, $Q_{j,C}$ il termine delle forze conservative generalizzate associate al j-esimo grado di libertà, $Q_{j,NC}$ è il termine delle forze non conservative generalizzate associate al j-esimo grado di libertà.

Con questo approccio si otterranno n equazioni dove n è il numero totale di gradi di libertà: nel nostro caso $n = 2$.

Il disco subisce tre rotazioni q_1 attorno alla direzione x, q_2 attorno alla direzione y e $q_3 = \Omega \cdot t$ attorno alla direzione z imposta dalla velocità di rotazione del sistema.

Il vettore velocità angolare nel sistema di riferimento inerziale vale:

$$\{\omega\}_n = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

Equazione 95 - Vettore velocità angolare

La generica matrice di rotazione per passare dal sistema di riferimento solidale con il disco al sistema di riferimento inerziale è data dalla combinazione di 3 matrici di rotazione:

$$\begin{aligned} R_{dn} &= R_x R_y R_z \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & q_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -q_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & \sin(q_3) & q_2 \\ -q_1 q_2 \cos(q_3) - \sin(q_3) & \cos(q_3) - q_1 q_2 \sin(q_3) & q_1 \\ -q_2 \cos(q_3) + q_1 \sin(q_3) & -q_1 \cos(q_3) - q_2 \sin(q_3) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Equazione 96 - Matrice di rotazione complessiva

Nell'Equazione 96 è scritta l'espressione complessiva della matrice di rotazione per trasportare un vettore dal sistema di riferimento solidale al disco al sistema di riferimento inerziale.

Per quanto riguarda le due rotazioni q_1 e q_2 , trattandosi di piccole rotazioni, è stata eseguita un'approssimazione tale per cui il seno dell'angolo è stato approssimato con $\sin(q_k) \cong q_k$ e $\cos(q_k) \cong 1$.

Il tensore d'inerzia nel sistema di riferimento solidale al disco vale:

$$\{J\}_d = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$$

Equazione 97 - Tensore d'inerzia

L'energia cinetica del sistema, poiché il corpo può soltanto ruotare e non traslare, si ottiene come:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{\omega\}_d^T \{J\}_d \{\omega\}_d = \frac{1}{2} \{\omega\}_n^T \mathbf{R}_{dn}^T \{J\}_d \mathbf{R}_{dn} \{\omega\}_n \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{q}_3 (J_{zz} + J_{yy} q_1^2 + J_{xx} + J_{yy} q_1^2) \\ &\quad + 2 \dot{q}_3 \dot{q}_2 [(-J_{yy} + J_{zz}) q_1 \cos(q_3) + (-J_{xx} + J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2 \sin(q_3)] \\ &\quad + \dot{q}_1^2 [(J_{xx} + (J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2^2) \cos(q_3) + (J_{yy} + J_{zz} q_1^2) \sin^2(q_3) \\ &\quad + (J_{yy} - J_{zz}) q_1 q_2 \sin(2q_3)] \\ &\quad + \dot{q}_2^2 [(J_{yy} + J_{zz}) q_1^2 \cos^2(q_3) + (J_{xx} + (J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2^2) \sin^2(q_3) \\ &\quad + (-J_{yy} + J_{zz}) q_1 q_2 \sin(2q_3)] \\ &\quad - \dot{q}_1 [2 \dot{q}_3 (-J_{xx} + J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2 \cos(q_3) \\ &\quad - 2 (J_{yy} - J_{zz}) q_1 (q_2 \cos(2q_3) \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \sin(q_3)) \\ &\quad + (J_{xx} - J_{yy} - J_{zz} q_1^2 + (J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2^2) \dot{q}_2 \sin(2q_3)] \} \end{aligned}$$

Equazione 98 - Energia cinetica del sistema

Considerando i due contatti puntiformi con le pastiglie dei freni in corrispondenza di una distanza $-r$ sull'asse y del sistema di riferimento intermedio $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, si ottiene

che il loro spostamento in direzione verticale è dovuto pressoché unicamente alla rotazione q_1 attorno all'asse x.

$$\begin{aligned}\{\mathbf{p}_1\}_b &= \left\{ \frac{h}{2}, -r, 0 \right\} \\ \{\mathbf{p}_2\}_b &= \left\{ -\frac{h}{2}, -r, 0 \right\}\end{aligned}$$

Equazione 99 - Punti di contatto pastiglie-disco

Considerando una certa pressione N_0 esercitata sull'impianto frenante, assimilabile ad un precarico, la forza normale agente sui due punti di contatto vale:

$$\begin{aligned}N_1 &= \left(q_1 r + \frac{h}{2} \right) k + N_0 \\ N_2 &= \left(q_1 r - \frac{h}{2} \right) k + N_0\end{aligned}$$

Equazione 100 - Forze normali agenti sul disco

Il contributo dell'energia potenziale elastica è dato dalla forza elastica generata dalle due pastiglie e dal momento elastico generato dalla rigidità torsionale dello snodo sferico a cui il disco è vincolato.

È quindi possibile scrivere l'energia potenziale elastica del sistema come:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} M_x q_1 + \frac{1}{2} M_y q_2 + \frac{1}{2} N_1 \Delta z + \frac{1}{2} N_2 \Delta z \\ &= \frac{1}{2} \left(k_t q_1^2 + k_t q_2^2 + \left[\left(q_1 r + \frac{h}{2} \right) k + N_0 \right] q_1 r \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(q_1 r - \frac{h}{2} \right) k + N_0 \right] q_1 r \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(k_t q_1^2 + k_t q_2^2 + q_1^2 r^2 k + \frac{h}{2} k q_1 r + N_0 q_1 r + q_1^2 r^2 k - \frac{h}{2} k q_1 r \right. \\ &\quad \left. + N_0 q_1 r \right) = \frac{1}{2} \left(k_t q_1^2 + k_t q_2^2 + 2 q_1^2 r^2 k + 2 N_0 q_1 r \right)\end{aligned}$$

Equazione 101 - Energia potenziale del sistema

Infine, a partire dall'Equazione 100, si ricavano le due forze di attrito agenti sul disco come:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(q_1 r + \frac{h}{2}\right) k\mu + N_0\mu \\ T_2 &= \left(q_1 r - \frac{h}{2}\right) k\mu + N_0\mu \end{aligned}$$

Equazione 102 - Forze tangenziali di attrito agenti sul disco

E quindi il contributo della forza non conservativa generalizzata come:

$$Q_{NC} = T_1 + T_2 = \left(q_1 r + \frac{h}{2}\right) k\mu + N_0\mu + \left(q_1 r - \frac{h}{2}\right) k\mu + N_0\mu = 2q_1 r k\mu + 2N_0\mu$$

Equazione 103 - Forza non conservativa generalizzata del sistema

Note le Equazione 98, Equazione 101 ed Equazione 103 è possibile scrivere le lagrangiane per i due gradi di libertà del sistema.

Nella successiva trattazione, tutti i termini non lineari di q_1 e q_2 verranno semplificati.

Andando quindi a scrivere i termini della prima lagrangiana $J = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dq_1} &= \frac{1}{2} \left\{ 2\dot{q}_3^2 q_1 J_{yy} + 2\dot{q}_3 \dot{q}_2 [(-J_{yy} + J_{zz}) \cos(q_3) + 2q_1 q_2 J_{yy} \sin(q_3)] \right. \\ &\quad + \dot{q}_1^2 [2J_{yy} q_1 q_2^2 \cos^2(q_3) + 2J_{zz} q_1 \sin^2(q_3) + (J_{yy} - J_{zz}) q_2 \sin(2q_3)] \\ &\quad + \dot{q}_2^2 [2J_{zz} q_1 \cos^2(q_3) \\ &\quad + 2J_{yy} q_1 q_2^2 \sin^2(q_3) + (-J_{yy} + J_{zz}) q_2 \sin(2q_3)] \\ &\quad - \dot{q}_1 [2\dot{q}_3 (2J_{yy} q_1) q_2 \cos(q_3) \\ &\quad - 2(J_{yy} - J_{zz}) (q_2 \cos(2q_3) \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \sin(q_3))] \\ &\quad \left. + (-2q_1 J_{zz} + 2q_1 J_{yy} q_2^2) \dot{q}_2 \sin(2q_3) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2\dot{q}_3^2 q_1 J_{yy} + 2\dot{q}_3 \dot{q}_2 [(-J_{yy} + J_{zz}) \cos(q_3)] \right. \\ &\quad \left. - \dot{q}_1 [-2(J_{yy} - J_{zz}) \dot{q}_3 \sin(q_3)] \right\} \\ &= J_{yy} \dot{q}_3^2 q_1 + J_{xx} \dot{q}_3 \dot{q}_2 \cos(q_3) - J_{xx} \dot{q}_3 \dot{q}_1 \sin(q_3) \end{aligned}$$

Equazione 104 - Derivata dell'energia cinetica rispetto a q_1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{1}{2} \left\{ 2\dot{q}_1 [(J_{xx} + (J_{zz} + J_{yy}q_1^2)q_2^2)\cos^2(q_3) + (J_{yy} + J_{zz}q_1^2)\sin^2(q_3)] \right. \\
 &\quad + (J_{yy} - J_{zz})q_1q_2\sin(2q_3) \\
 &\quad - [2\dot{q}_3(-J_{xx} + J_{zz} + J_{yy}q_1^2)q_2\cos(q_3) \\
 &\quad - 2(J_{yy} - J_{zz})q_1(q_2\cos(2q_3)\dot{q}_2 - \dot{q}_3\sin(q_3)) \\
 &\quad \left. + (J_{xx} - J_{yy} - J_{zz}q_1^2 + (J_{zz} + J_{yy}q_1^2)q_2^2)\dot{q}_2\sin(2q_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -2(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3\cos(q_3)q_2 - 2(J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3\sin(q_3)q_1 \right. \\
 &\quad \left. + 2J_{xx}\cos^2(q_3)\dot{q}_1 + 2J_{yy}\sin^2(q_3)\dot{q}_1 - (J_{xx} - J_{yy})\sin(2q_3)\dot{q}_2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -2(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3q_2\cos(q_3) - 2(J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3q_1\sin(q_3) \right. \\
 &\quad \left. + 2\dot{q}_1 (J_{xx}\cos^2(q_3) + J_{yy}\sin^2(q_3)) - (J_{xx} - J_{yy})\sin(2q_3)\dot{q}_2 \right\}
 \end{aligned}$$

Equazione 105 - Derivata dell'energia cinetica rispetto a \mathbf{q}_1

Derivando l'Equazione 105 rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ 2(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3^2\sin(q_3)q_2 - 2(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3\cos(q_3)\dot{q}_2 \right. \\
 &\quad - 2(J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3^2q_1\cos(q_3) - 2(J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3\sin(q_3)\dot{q}_1 \\
 &\quad + 2\ddot{q}_1 (J_{xx}\cos^2(q_3) + J_{yy}\sin^2(q_3)) \\
 &\quad + 2\dot{q}_1 (-2J_{xx}\dot{q}_3\cos(q_3)\sin(q_3) + 2J_{yy}\dot{q}_3\cos(q_3)\sin(q_3)) \\
 &\quad \left. - \ddot{q}_2 (J_{xx} - J_{yy})\sin(2q_3) - 2\dot{q}_3 (J_{xx} - J_{yy})\cos(2q_3)\dot{q}_2 \right\}
 \end{aligned}$$

Equazione 106 - Derivata rispetto al tempo della derivata rispetto a \mathbf{q}_1 dell'energia cinetica

Il termine potenziale vale:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_t q_1 + 2q_1 r^2 k + 2N_0 r$$

Equazione 107 - Derivata dell'energia potenziale rispetto a \mathbf{q}_1

Infine, il termine associato alle forze non conservative del sistema:

$$Q_{1,NC} = 2q_1rk\mu$$

Equazione 108 - Forze non conservative generalizzate per $j=1$

Dall'Equazione 104, Equazione 106, Equazione 107 e dall'Equazione 108 è possibile scrivere la prima lagrangiana come:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_{1,NC} \\ & \left[(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3^2 \sin(q_3) q_2 - (-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3 \cos(q_3) \dot{q}_2 \right. \\ & \quad - (J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3^2 q_1 \cos(q_3) - (J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3 \sin(q_3) \dot{q}_1 \\ & \quad + \dot{q}_1 (J_{xx} \cos^2(q_3) + J_{xx} \sin^2(q_3)) \\ & \quad + \dot{q}_1 (-J_{xx}\dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3) + J_{xx}\dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3)) \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ddot{q}_2 (J_{xx} - J_{yy}) \sin(2q_3) - \dot{q}_3 (J_{xx} - J_{yy}) \cos(2q_3) \dot{q}_2 \right] \\ & \quad - [J_{yy}\dot{q}_3^2 q_1 + J_{xx}\dot{q}_3 \dot{q}_2 \cos(q_3) - J_{xx}\dot{q}_3 \dot{q}_1 \sin(q_3)] \\ & \quad + [k_t q_1 + 2q_1 r^2 k + 2N_0 r] = 2q_1 rk\mu \\ & [J_{xx} \cos^2(q_3) + J_{xx} \sin^2(q_3)] \ddot{q}_1 + \left[\frac{1}{2} (J_{xx} - J_{yy}) \sin(2q_3) \right] \ddot{q}_2 \\ & \quad + [-(J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3 \sin(q_3) + 2(-J_{xx} + J_{xx})\dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3) \\ & \quad + J_{xx}\dot{q}_3 \sin(q_3)] \dot{q}_1 \\ & \quad + [(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3 \cos(q_3) - \dot{q}_3 (J_{xx} - J_{yy}) \cos(2q_3) \\ & \quad - J_{xx}\dot{q}_3 \cos(q_3)] \dot{q}_2 \\ & \quad + [-(J_{yy} - J_{zz})\dot{q}_3^2 \cos(q_3) - J_{yy}\dot{q}_3^2 + k_t + 2r^2 k - 2rk\mu] q_1 \\ & \quad + [(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3^2 \sin(q_3)] q_2 = -2N_0 r \end{aligned}$$

Con le dovute semplificazioni:

$$\begin{aligned} & [J_{xx} \cos^2(q_3) + J_{xx} \sin^2(q_3)] \ddot{q}_1 + [0] \ddot{q}_2 + [0] \dot{q}_1 + [-J_{zz} \dot{q}_3] \dot{q}_2 \\ & \quad + [k_t + 2r^2 k - 2rk\mu] q_1 + [0] q_2 = -2N_0 r \end{aligned}$$

Equazione 109 - Prima Lagrangiana

Analogamente ripetendo i passaggi è possibile scrivere la seconda Lagrangiana che costituisce la seconda equazione del moto del sistema:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dq_2} &= \frac{1}{2} \{ 2\dot{q}_3^2 q_2 J_{xx} + 2\dot{q}_3 \dot{q}_2 [(-J_{xx} + J_{zz} + J_{yy} q_1^2) \sin(q_3)] \\
 &\quad + \dot{q}_1^2 [2(J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2 \cos^2(q_3) + (J_{yy} - J_{zz}) q_1 \sin(2q_3)] \\
 &\quad + \dot{q}_2^2 [2(J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2 \sin^2(q_3) + (-J_{yy} + J_{zz}) q_1 \sin(2q_3)] \\
 &\quad - \dot{q}_1 [2\dot{q}_3 (-J_{xx} + J_{zz} + J_{yy} q_1^2) \cos(q_3) - 2(J_{yy} - J_{zz}) q_1 (\cos(2q_3) \dot{q}_2) \\
 &\quad + (J_{zz} + J_{yy} q_1^2) \dot{q}_2 q_2 \sin(2q_3)] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 2\dot{q}_3^2 q_2 J_{xx} + 2\dot{q}_3 \dot{q}_2 (-J_{xx} + J_{zz}) \sin(q_3) \\
 &\quad - 2\dot{q}_1 (-J_{xx} + J_{zz}) \dot{q}_3 \cos(q_3) \} \\
 &= J_{xx} \dot{q}_3^2 q_2 + J_{yy} \dot{q}_3 \dot{q}_2 \sin(q_3) - J_{yy} \dot{q}_3 \dot{q}_1 \cos(q_3)
 \end{aligned}$$

Equazione 110 - Derivata dell'energia cinetica rispetto a \mathbf{q}_2

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} \{ 2\dot{q}_3 [(-J_{yy} + J_{zz}) q_1 \cos(q_3) + (-J_{xx} + J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2 \sin(q_3)] \\
 &\quad + 2\dot{q}_2 [(-J_{yy} + J_{zz} q_1^2) \cos^2(q_3) + (J_{xx} + (J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2^2) \sin^2(q_3) \\
 &\quad + (-J_{yy} + J_{zz}) q_1 q_2 \sin(2q_3)] \\
 &\quad - \dot{q}_1 [-2(J_{yy} - J_{zz}) q_1 q_2 \cos(2q_3) \\
 &\quad + (J_{xx} - J_{yy} - J_{zz} q_1^2 + (J_{zz} + J_{yy} q_1^2) q_2^2) \sin(2q_3)] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 2\dot{q}_3 [(-J_{yy} + J_{zz}) q_1 \cos(q_3) + (-J_{xx} + J_{zz}) q_2 \sin(q_3)] \\
 &\quad + 2\dot{q}_2 [J_{yy} \cos^2(q_3) + J_{xx} \sin^2(q_3)] - \dot{q}_1 [(J_{xx} - J_{yy}) \sin(2q_3)] \}
 \end{aligned}$$

Equazione 111 - Derivata dell'energia cinetica rispetto a $\dot{\mathbf{q}}_2$

Derivando l'Equazione 111 rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = & \frac{1}{2} \{ 2\dot{q}_3 [(-J_{yy} + J_{zz}) \dot{q}_1 \cos(q_3) - (-J_{yy} + J_{zz}) q_1 \dot{q}_3 \sin(q_3) \\ & + (-J_{xx} + J_{zz}) \dot{q}_2 \sin(q_3) + (-J_{xx} + J_{zz}) q_2 \dot{q}_3 \cos(q_3)] \\ & + 2\ddot{q}_2 [J_{yy} \cos^2(q_3) + J_{xx} \sin^2(q_3)] \\ & + 2\dot{q}_2 [-2J_{yy} \dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3) + 2J_{xx} \dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3)] \\ & - \dot{q}_1 [(J_{xx} - J_{yy}) \sin(2q_3)] - \dot{q}_1 [(J_{xx} - J_{yy}) 2\dot{q}_3 \cos(2q_3)] \} \end{aligned}$$

Equazione 112 - Derivata rispetto al tempo della derivata rispetto a \dot{q}_2 dell'energia cinetica

Inoltre,

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = k_t q_2$$

Equazione 113 - Derivata dell'energia potenziale rispetto a q_2

$$Q_{2,NC} = 0$$

Equazione 114 - Forze non conservative generalizzate per $j=2$

Dall'Equazione 110, Equazione 112, Equazione 113, e dall'Equazione 114 è quindi possibile scrivere la seconda equazione di Lagrange per $J = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_2} = & Q_{2,NC} \\ \left[\dot{q}_3 (-J_{yy} + J_{zz}) \cos(q_3) \dot{q}_1 - (-J_{yy} + J_{zz}) \dot{q}_3^2 \sin(q_3) q_1 + (-J_{xx} + J_{zz}) \dot{q}_3 \sin(q_3) q_2 \right. \\ & + (-J_{xx} + J_{zz}) \dot{q}_3^2 \cos(q_3) q_2 + (J_{yy} \cos^2(q_3) + J_{xx} \sin^2(q_3)) \ddot{q}_2 \\ & + 2(-J_{yy} + J_{yy}) \dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3) q_2 - \frac{1}{2} (J_{xx} - J_{xx}) \sin(2q_3) \dot{q}_1 \\ & \left. - (J_{xx} - J_{yy}) \dot{q}_3 \cos(2q_3) \dot{q}_1 \right] \\ & - [J_{xx} \dot{q}_3^2 q_2 + J_{yy} \dot{q}_3 q_2 \sin(q_3) - J_{yy} \dot{q}_3 q_1 \cos(q_3)] + [k_t q_2] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) \sin(2q_3) \right] \ddot{q}_1 + [J_{yy} \cos^2(q_3) + J_{yy} \sin^2(q_3)] \ddot{q}_2 \\
 & + [\dot{q}_3(-J_{yy} + J_{zz}) \cos(q_3) - (J_{xx} - J_{yy})\dot{q}_3 \cos(2q_3) \\
 & + J_{yy}\dot{q}_3 \cos(q_3)] \dot{q}_1 \\
 & + [(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3 \sin(q_3) + 2(-J_{yy} + J_{yy})\dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_3) \\
 & - J_{yy}\dot{q}_3 \sin(q_3)] \dot{q}_2 + [-(-J_{yy} + J_{zz})\dot{q}_3^2 \sin(q_3)] q_1 \\
 & + [(-J_{xx} + J_{zz})\dot{q}_3^2 \cos(q_3) - J_{xx}\dot{q}_3^2 + k_t] q_2 = 0
 \end{aligned}$$

Con le dovute semplificazioni:

$$[0]\ddot{q}_1 + [J_{yy}]\ddot{q}_2 + [-J_{zz}\dot{q}_3]\dot{q}_1 + [0]\dot{q}_2 + [0]q_1 + [k_t]q_2 = 0$$

Equazione 115 - Seconda Lagrangiana

Dalla Equazione 109 e dalla Equazione 115 si ottiene un sistema di due equazioni rappresentante le equazioni del moto del sistema. In forma matriciale si ha:

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2N_0 r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equazione 116 - Equazioni del moto del sistema disco rigido

Dove i termini \mathbf{M} , \mathbf{G} e \mathbf{K} rappresentano rispettivamente la matrice di massa, la matrice dei termini giroscopici e la matrice dei termini di rigidità.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 \\ 0 & J_{yy} \end{bmatrix}$$

Equazione 117 - Matrice di massa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & (+J_{zz})\dot{q}_3 \\ (-J_{zz})\dot{q}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Equazione 118 - Matrice termini giroscopici

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_t + 2r^2k - 2rk\mu & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}$$

Equazione 119 - Matrice di rigidità

Capitolo 4: Conclusioni

Secondo le ipotesi fatte sono stati quindi ottenuti due modelli rispettivamente del disco flessibile e del disco rigido.

Il modello dinamico di disco rigido è caratterizzato da due gradi di libertà che sono le due rotazioni lungo due direzioni principali attorno al suo centro, lo spostamento verticale del disco sarà quindi dovuto unicamente a queste due rotazioni.

Il modello del disco flessibile è invece caratterizzato da N gradi di libertà fittizi e lo spostamento trasversale w è dovuto unicamente alla flessione del piatto circolare.

Tipicamente, per via dell'elevata rigidità, lo spostamento verticale dovuto alla flessione del disco è estremamente più piccolo di quello che potrebbe derivare da una rotazione del disco attorno al proprio centro.

Di conseguenza, nell'ipotesi in cui la rigidità flessionale del disco sia elevata, per descrivere il comportamento del disco rigido attraverso il modello di disco flessibile, occorre aggiungere altre due funzioni corrispondenti ai due moti rigidi di rotazione al set di funzioni di forma.

In questo modo, sotto l'ipotesi che lo spostamento w dovuto alla flessione sia piccolo, il modello di disco flessibile è in grado di descrivere anche la dinamica del disco rigido a due gradi di libertà.

Per fare ciò occorre aggiungere due funzioni di forma di rotazione.

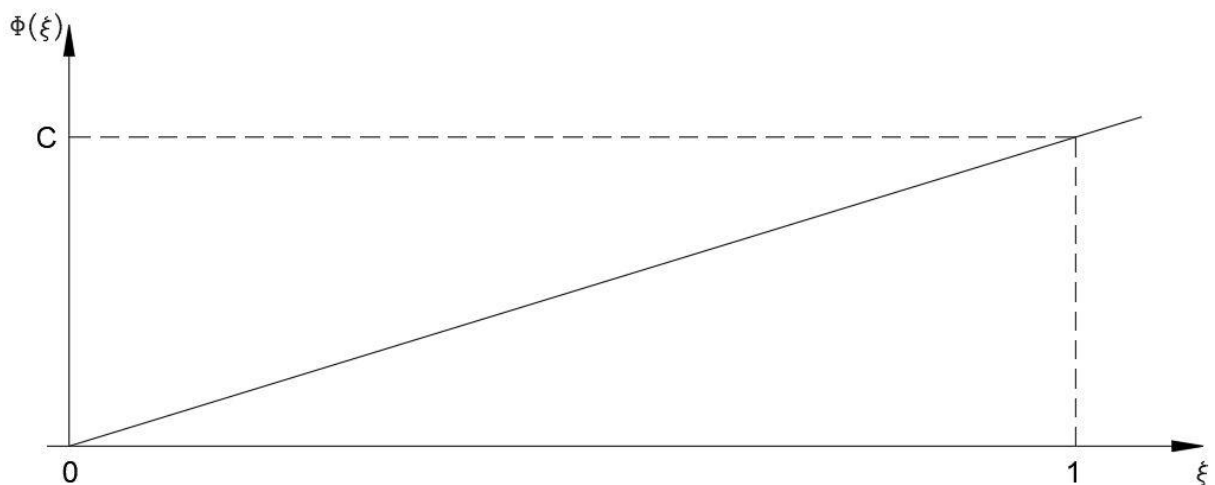


Figura 42 - Funzione di forma di rotazione

Per la ricerca della funzione di forma faremo riferimento alla Figura 42.

Una funzione di forma di rotazione in funzione della generica coordinata radiale è del tipo:

$$\phi(\xi) = C\xi$$

Equazione 120 - Funzione di forma di rotazione

Dove C è un generico coefficiente. Normalizzando l'Equazione 120:

$$\int_0^1 \phi^2(\xi) d\xi = \int_0^1 C^2 \xi^2 = \left[C^2 \frac{\xi^3}{3} \right]_0^1 = \frac{C^2}{3} = 1 \rightarrow C = \sqrt{3}$$

Equazione 121 - Coefficiente C

In questo modo, aggiungendo queste due funzioni di forma corrispondenti a due rotazioni rigide al vettore di funzioni di forma flessionali è possibile ottenere un comportamento dinamico simile a quello del modello del disco rigido.

Ponendo le due funzioni di moto rigido in cima al set delle n funzioni di forma, si ottiene che i primi due gradi di libertà sono associati alle possibili rotazioni del disco attorno al mozzo.

Nella realtà di quella che è la struttura di un freno a disco, per via dell'elevata rigidità dei componenti, le rotazioni del mozzo centrale sono talmente piccole da essere considerate assenti.

Inoltre, come menzionato precedentemente, il disco e la campana sono collegati al mozzo centrale tramite un accoppiamento imbullonato, per cui anche la loro rotazione è pressoché inibita.

Queste due funzioni di forma di moto rigido hanno perciò come unica funzione quella di correlare il modello dinamico di disco rigido con il modello dinamico di disco flessibile;

Una volta fatto ciò, essendo la dinamica di un disco frenante automobilistico più simile a quella descritta da un disco in cui è inibita la rotazione attorno al proprio centro, è possibile bloccare i suddetti due moti rigidi e studiare la tendenza all'instabilità di tale modello.

La conclusione raggiunta con questo lavoro di tesi è stato quello di ricavare due modelli dinamici per la previsione del fischio descrivendo l'approccio matematico e le equazioni che ne stanno alla base.

Le equazioni che governano la dinamica del disco rigido sono state ricavate sfruttando l'approccio Lagrangiano basato sulla valutazione dell'energia cinetica, dell'energia potenziale e delle azioni non conservative del sistema.

Tuttavia, sono presenti alcune criticità all'interno di questo studio quali:

- Sono state considerate tre rotazioni consecutive attorno alle tre direzioni principali per passare dal sistema di riferimento solidale con il corpo al sistema di riferimento inerziale: questa ipotesi ha dato luogo ad una particolare matrice di rotazione che dipende dalla sequenza con cui vengono eseguite le rotazioni.

In generale tale ipotesi porta a dei risultati che possono essere considerati sbagliati se generalizzati per qualsiasi tipo di rotazione, tuttavia nell'ipotesi di piccole rotazioni l'errore commesso può risultare accettabile;

- Sono stati trascurati e semplificati all'interno della trattazione tutti i termini non lineari e quadratici;
- Il punto di contatto tra disco e pastiglie non è un punto generico ma ben preciso, in particolare il punto di contatto si trova ad una distanza r dal centro del disco e posizionato sull'asse y del sistema di riferimento intermedio.

Questa ipotesi toglie generalità alla trattazione e fa sì che le forze normali scambiate tra disco e pastiglie siano responsabili quasi unicamente della rotazione q_1 attorno all'asse x .

Tale risultato è anche evidenziato dal fatto che all'interno dell'equazione del moto riportata nell'Equazione 116, solamente la prima delle due equazioni comprenda i termini dati dall'azione delle pastiglie sul disco.

Anche questa assunzione rende il modello di disco rigido poco adatto per lo studio del fenomeno.

- Non sono stati considerati smorzamenti di alcun tipo se non gli effetti giroscopici. Considerare uno smorzamento interno o esterno aggiungerebbe dei termini diagonali alla matrice \mathbf{G} , i quali potrebbero rendere il sistema instabile.

Sarebbe infatti più corretto considerare come ha fatto Hochlenert in [14] anche una certa viscosità nell'accoppiamento tra snodo sferico e disco ed una certa viscosità delle pastiglie data da eventuali effetti dissipativi.

Per questi motivi il modello di disco rigido proposto in questa tesi non può considerarsi completo o rappresentativo di quella che è la realtà di freno automobilistico.

Tuttavia, tale risultato può considerarsi utile per quella che è la scrittura della metodologia con cui andare a ricavare le equazioni del moto.

Per quanto complicato, tale approccio risulta di gran lunga più conveniente e molto più semplice rispetto ad un approccio Euleriano basato sull'equilibrio dei momenti.

Noti infatti i termini energetici occorre soltanto derivarli rispetto ai vari gradi di libertà per poter ottenere le equazioni del moto descrittive del comportamento dinamico del sistema.

Come suddetto, il modello di disco rigido serve per approssimare e verificare il corretto comportamento del modello del disco flessibile, risultato fondamentale di questa tesi.

Il risultato principale è stato proprio la definizione di una procedura per la costruzione di un modello di disco flessibile utilizzando l'approccio di "*modellazione spettrale*".

Questo studio ci ha permesso di ottenere un sistema ad N gradi di libertà, dove N è il numero di funzioni di forma scelte dall'utente per approssimare il comportamento del sistema.

Nonostante ciò, il modello proposto è ancora molto lontano da quella che è la natura di un disco automobilistico di una autovettura sportiva e non è assolutamente in grado di prevedere quella che potrebbe essere la sua reale instabilità.

Infatti, un reale impianto frenante differisce da quello studiato in questa modellazione per le seguenti caratteristiche:

- Il disco è stato considerato come un disco in ghisa pieno di materiale omogeneo: è invece risaputo come, ormai da diversi anni, i freni comprendano al loro interno dei canali di ventilazione;

Inoltre, per quanto riguarda Ferrari, i freni sono in materiale composito carboceramico: questo materiale, rispetto ad un materiale metallico, presenta una

rigidezza decisamente più elevata ed un comportamento che non è isotropo⁷ ma varia a seconda di come sono orientate le fibre metalliche al suo interno.

- Le proprietà di attrito delle pastiglie dei freni cambiano in funzione della velocità relativa tra disco e pastiglie, della temperatura, della pressione di contatto, dell'usura ecc.
- Oltre al disco, vi sono altri componenti del sistema che potrebbero interagire rendendo il sistema instabile, come pinza, supporti, circuito idraulico dell'olio o altro.

In Ferrari è stato infatti notato che un ruolo fondamentale lo gioca il cerchione della ruota (studiato da Hochlenert in [15]) che tende a rendere il sistema instabile con un suo modo torsionale di vibrare.

Nonostante il modello di disco flessibile non sia comprensivo di questi e altri numerosi aspetti utili per descrivere il problema nel suo intero, esso costituisce un ottimo punto di partenza per l'implementazione dei precedenti punti e di altri eventuali fenomeni.

Per motivi di tempo e per via dell'enorme vastità costituita dall'argomento del fischio dei freni, il quale dipende da una grandissima moltitudine di fattori, non è stato possibile creare un modello accurato e rappresentativo della realtà, ma soltanto realizzare una solida base di partenza descrivendo la matematica alla base del fenomeno.

A partire da questa tesi, ampliando lo studio, sarebbe interessante approfondire i seguenti sviluppi futuri:

- 1) Implementazione del reale andamento della velocità di rotazione e dei carichi inerziali durante una frenata: la velocità dell'autovettura è stata considerata costante pari a 40 km/h, velocità tipicamente critica per il fischio dei freni.
- 2) Aggiunta dei contributi inerziali $\ddot{\alpha}$ e $\ddot{\beta}$ alla matrice di massa del sistema: questi due termini non sono stati considerati in questo lavoro in quanto generano un

⁷ Con il termine **isotropo** si identifica un corpo che, rispetto a un determinato fenomeno fisico, presenta proprietà uguali in tutte le direzioni. L'anisotropia è invece la proprietà di quei corpi che, rispetto a un determinato fenomeno fisico, presentano comportamenti diversi a seconda della direzione considerata.

contributo inerziale molto piccolo. Andrebbero però inseriti per avere una corretta modellazione.

- 3) Studiare ed implementare il comportamento del reale accoppiamento tra mozzo e campana e tra campana e disco freno: anche se questi tre oggetti sono collegati con delle viti di serraggio sarebbe interessante valutare se vi è una certa cedevolezza o considerare il disco come incastrato al raggio interno è un'ipotesi sufficientemente corretta.
- 4) Creazione di un modello rappresentativo della reale geometria di un disco di un impianto frenante automobilistico: ovvero modellazione di due piatti circolari con interposti dei vani di ventilazione;
- 5) Implementazione del reale comportamento anisotropo del materiale e di come questo varia in funzione della temperatura del sistema;
- 6) Implementazione del reale andamento delle pressioni delle pastiglie sul disco durante la manovra di frenata;
- 7) Aggiunta del contributo di ulteriori componenti esterni: il comportamento dinamico del disco freno non è isolato ma interagisce e risente della presenza degli altri oggetti a cui è accoppiato.
Sarebbe fondamentale modellare e valutare l'influenza della pinza e del cerchione sulla dinamica del disco.
- 8) Studio della rigidità dell'olio in pressione all'interno del circuito idraulico e come questo influenza i modi di vibrare del disco.

Questi e altri aspetti potrebbero essere valutati in successivi lavori di tesi o all'interno di un progetto di ricerca di dottorato con lo scopo di realizzare un sistema accurato di previsione del fischio dei freni.

Al giorno d'oggi infatti, non è ancora stata trovata una soluzione efficace o un modello in grado di comprendere appieno il fenomeno.

L'approccio finora utilizzato dalla maggior parte dei produttori automobilistici è sempre stato un approccio *try-and-error*, ovvero, si occupavano di trovare una soluzione nella fase finale della produzione qualora il fenomeno si fosse verificato.

Avere uno strumento in grado di prevedere, quantomeno a grandi linee, quella che potrebbe essere la tendenza alla rumorosità di un impianto frenante già nelle prime fasi della progettazione costituirebbe per un'azienda automobilistica un notevole risparmio economico sia sui costi di progettazione che sui costi di produzione.

Identificare un problema nella fase finale della produzione significa infatti un notevole dispendio economico in quanto occorre bloccare la produzione del prodotto prima che questo entri sul mercato e studiare, implementare e validare una soluzione alternativa.

Se poi il prodotto difettoso è già entrato sul mercato, a questi costi si aggiungono i costi di ritiro e sostituzione del prodotto oltre che un notevole danno d'immagine.

In Figura 43 è mostrato l'andamento del costo di un prodotto durante la progettazione.

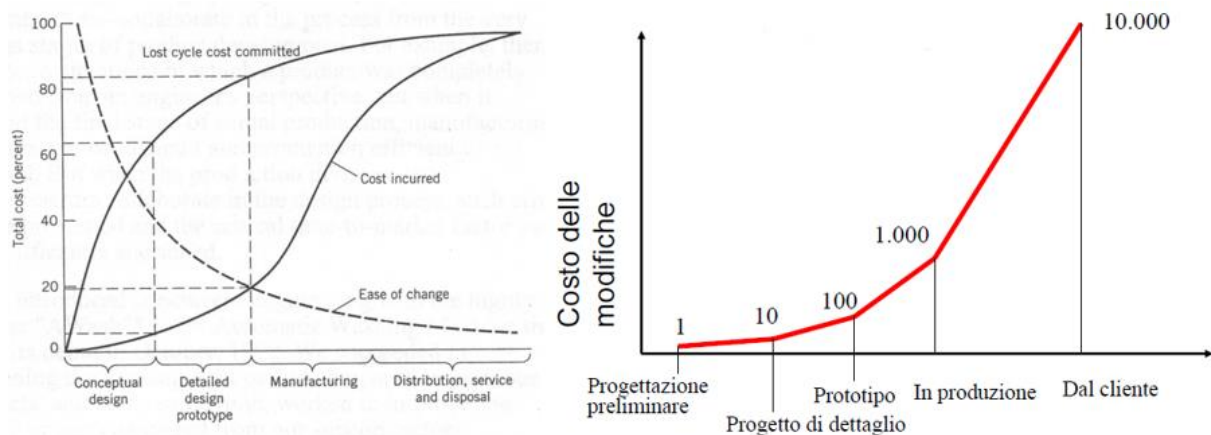


Figura 43 - *Andamento del costo di un prodotto durante la progettazione*

Si noti dal grafico di sinistra come il 70-80% del costo di un prodotto si decida nelle prime fasi della progettazione, mentre nella figura di destra è raffigurato come il costo di una modifica di progetto aumenti esponenzialmente durante i diversi stadi della produzione.

Per un'azienda potrebbe quindi essere strategico e di fondamentale importanza avere uno strumento in grado di prevedere una criticità come il fischio dei freni già nei primi stadi della progettazione anziché eseguire delle modifiche correttive nella fase finale di collaudo del prodotto.

Bibliografia

- [1]. H. Abendroth, B. Wernitz, *The integrated test concept: Dyno-vehicle, performance-noise*, Technical Report 2000-01-2774, SAE, Warrendale, PA, 2000.
- [2]. T.P. Newcomb, R.T. Spurr, *A Technical History of the Motor Car*, Adam Hilger, New York, 1989.
- [3]. E.A. Sperry, *The electric brake in practice*, Transactions AIEE 11 (1894) 682-728.
- [4]. T.P. Newcomb, R.T. Spurr, *Automobile Brakes and Braking Systems*, R. Bentley Inc., Cambridge, MA, 1969.
- [5]. A.E. Anderson, *Friction and wear of automotive brakes*, in: ASM Handbook, Vol. 18, ASM International, Materials Park, OH, 1992, pp. 569–577.
- [6]. Kinkaid NM, O'Reilly OM, Papadopoulos P, *Automotive disc brake squeal*. Journal of Sound and Vibrations 2003; 267:105–66.
- [7]. Papinniemi A, Lai JCS, Zhao J, Loader L. *Brake squeal: a literature review*. Applied Acoustic 2002; 63(4):391–400
- [8]. J.C. Poletto, P.D. Neis, N.F. Ferreira, D. Masotti, L.T. Matozo, *An experimental analysis of the methods for brake squeal quantification*, Applied Acoustic 2007; 107-112
- [9]. K. Shin, M. J. Brennan, J.E. Oh, C. J. Harris, *Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model*, Journal of Sound and Vibration (2002) 254(5), 837-848
- [10]. N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier, L. Gaul, *A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations*, Mechanics Research Communications 29 (2002) 197–205
- [11]. S. Kruse, M. Tiedemann, B. Zeumer, P. Reuss, H. Hetzler, N. Hoffmann, *The influence of joints on friction induced vibration in brake squeal*, Journal of Sound and Vibration 340 (2015) 239–252.
- [12]. H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, M. I. Friswell, *Friction-induced parametric resonances in discs: effect of a negative friction-velocity relationship*, Journal of Sound and Vibration (1998) 209(2), 251-264
- [13]. J. Walsh, H. Lyu, G. Chen, *Analysis of Friction-Induced Vibration Leading to Brake Squeal Using a Three Degree-of-Freedom Model*, 2017 Springer Science+Business Media
- [14]. U. Wagner, D. Hochlenert, P. Hardegon, *Minimal models for disk brake squeal*, Journal of Sound and Vibration 302 (2007) 527–539
- [15]. D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter, P. Hardegon, *A note on safety-relevant vibrations induced by brake squeal*, Journal of Sound and Vibration 329 (2010) 3867–3872
- [16]. U. Wagner, D. Hochlenert, T. Jearsiripongkul, P. Hardegon, *Active Control of Brake Squeal Via “Smart Pads”*, 2004 SAE Technical paper series.

-
- [17]. D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter, P. Hardegon, *Friction Induced Vibrations in Moving Continua and their Application to Brake Squeal*, 2007 542-549 Transactions of the ASME
- [18]. D. Hochlenert, P. Hardegon, *Control of disc brake squeal – modelling and experiments*
- [19]. J. R. Vinson, *The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates, and Shells*, Kluwer Academic Publishers
- [20]. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company
- [21]. R. D. Blevis, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold Company, Dallas
- [22]. G. Catania, A. Zanarini, *Flexible Multibody System Dynamics by Means of a Spectral Based Meshless Approach*, Advances in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 11, No. 3, pp. 1-49
- [23]. G. Catania, *Appunti presi a lezione*, University of Bologna – DIN
- [24]. F. Cheli, E. Pennestrì, *Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody Vol. 1*, Casa Editrice Ambrosiana
- [25]. F. Cheli, E. Pennestrì, *Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody Vol. 2*, Casa Editrice Ambrosiana
- [26]. H. Baruh, *Applied Dynamics*, CRC Press
- [27]. D.J. Ewins, *Modal Testing, theory, practice and application Second Edition*, Research Studies Press LTD

Ringraziamenti

“Per aspera sed itur ad astra” - attraverso le asperità sino alle stelle
(Cicerone, *De natura deorum III*, 40).

Con questo lavoro si conclude, per il momento, quello che è il mio percorso di studente, punto di arrivo e di inizio della mia vita.

Sembra passato solo qualche giorno da quando ero poco più di un distratto sedicenne appassionato di motori.

La prima persona che ringrazio è il Professor Giuseppe Catania: è solo grazie alle sue conoscenze ed alla sua enorme pazienza se ho potuto affrontare questo lavoro di tesi.

In secondo luogo, devo ringraziare i miei genitori, da sempre mi hanno motivato a non mollare mai davanti a qualsiasi difficoltà.

È merito loro se oggi posso girare a testa alta fiero di quello che sono diventato.

A mio fratello che, anche se non lo crede, vale molto e molto mi insegna.

A mia madre, la persona più forte che conosca nonostante le difficoltà.

A mia nonna ed ai miei zii, da sempre presenti per aiutarmi in qualsiasi cosa.

Un ringraziamento speciale meritano anche i miei amici tutti: grazie per aver condiviso con me in questi anni un percorso così bello e importante, ma non privo di momenti di difficoltà.

Questo ringraziamento vale sia per quegli amici di vecchia data, in particolare Carlo, Mario e Filippo, sia per le amicizie più recenti, ma ugualmente fidate, come Fabio, Mattia e Stefano.

Grazie per avermi sempre trasmesso tanta comprensione e coraggio: senza di voi sarebbe stato tutto più cupo.

Un ultimo ringraziamento è rivolto a quei colleghi che, tra una battuta e un insegnamento, hanno reso il mio primo lavoro un'esperienza indimenticabile, mi rivolgo in particolare ad Alfredo, Stefano, Simone, Daniele ed Alessandro.

Tutto l'affetto ricevuto rende questo traguardo ancora più prezioso.

Ad Maiora!