

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Meccanismi di produzione dell'energia in astrofisica**

Tesi di laurea

Presentata da:  
Meriem Behiri

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

---

Appello III  
Anno accademico [2017-2018]

## Sommario

Il motore grazie al quale il nostro pianeta vive è una stella di sequenza principale: il Sole. Le stelle costituiscono una delle principali fonti di energia dell'Universo durante tutta la loro evoluzione: dall'irraggiamento, dovuto alle reazioni termonucleari che avvengono al loro interno, all'attrazione gravitazionale che esercitano, alla produzione di onde d'urto nel caso in cui esplodano come Supernovae. L'obiettivo di questo elaborato è fornire una panoramica sui meccanismi a causa dei quali la produzione di energia avviene. Il punto di partenza sarà il Teorema del Viriale, che regola il rapporto tra energia potenziale e energia cinetica, quindi tra irraggiamento e contrazione. In seguito, si studierà il modo in cui, durante tutta la sua evoluzione, la stella produce energia, dal momento in cui si innescano le prime reazioni termonucleari sino a quando, venuto meno l'equilibrio, si spegne come una nana bianca o esplose come una Supernova, al centro della quale rimane un buco nero o una stella di neutroni. Inoltre, una nana bianca può a sua volta esplodere come Supernova. Ci si focalizzerà, quindi, sui modi in cui queste strutture post-evolutive producono energia. Infine, si parlerà di quasar: si affronterà il problema dell'accrescimento di un buco nero, quindi, dell'energia prodotta da questo processo e della luminosità di Eddington, che pone un limite all'accrescimento stazionario. Si tratta di un argomento estremamente ampio, che tocca i più disparati ambiti dell'astrofisica, pertanto in questa sede non è stato possibile entrare nel dettaglio dei processi illustrati.

# Indice

<b>1</b>	<b>Bilancio energetico</b>	<b>4</b>
1.1	Teorema del Viriale . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Reazioni Termonucleari</b>	<b>7</b>
2.1	L'energia di legame . . . . .	8
2.2	Il tasso di produzione di energia . . . . .	9
2.3	La catena protone-protone . . . . .	10
2.4	La catena CNO . . . . .	11
2.5	Processo $3\alpha$ . . . . .	11
2.6	Parametrizzazione di $\epsilon$ . . . . .	12
2.7	Altre reazioni temonucleari . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Supernovae</b>	<b>13</b>
3.1	Classificazione . . . . .	14
3.1.1	Supernovae termonucleari (Ia) . . . . .	14
3.1.2	Supernovae Core-collapse . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Luminosità di Eddington</b>	<b>16</b>

# 1 Bilancio energetico

Una stella è fondamentalmente una sfera di gas che si contrae ed emette energia. Il Sole, che ha una temperatura superficiale di  $T_{sup} = 5770K$ , emette  $10^{33}erg/s$ . Per avere una luminosità di tale portata la temperatura nucleare deve essere di 15 milioni di Kelvin. Questo vale per tutte le stelle: c'è fortissimo gradiente termico. Questo implica che le stelle sono sorgenti di energia. Le fonti di energia sono di natura termica, gravitazionale e nucleare. Si consideri l'energia termica  $E_T = \frac{3}{2} \frac{kT^1}{m}$ ,  $k = 1.380 \cdot 10^{-16}erg/K$ . costante di Boltzmann. Per il Sole  $E_T \sim 3 \cdot 10^{48}erg$ , mentre la sua energia potenziale gravitazionale  $E_G = \frac{1}{2} \frac{GM}{R}$ ,  $G = 6.67 \cdot 10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}$  costante gravitazionale, vale  $4 \cdot 10^{48}erg$ . Il fatto che energia termica e energia gravitazionale siano dello stesso ordine di grandezza deriva dall'equilibrio idrostatico: nessuno dei due termini domina sull'altro. La struttura si mantiene in equilibrio proprio grazie a ciò:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \quad (1)$$

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -\int_0^R 4\pi r^3 \frac{GM_r\rho}{r^2} dr. \quad (2)$$

Integrando per parti e ponendo, per definizione di superficie,  $P(R) = 0$ , si ottiene

$$-\int_0^R 4\pi r^2 \frac{3k\rho T}{m} dr = -\int_0^R 4\pi r^2 \frac{GM_r\rho}{r} dr \quad (3)$$

$$2E_T = E_G. \quad (4)$$

Metà dell'energia gravitazionale, quindi, va in energia termica, mentre la parte restante va in irraggiamento. Questo risultato è in accordo con il fondamentale Teorema del Viriale.

## 1.1 Teorema del Viriale

Il Teorema del Viriale stabilisce una relazione generale tra le diverse forme di energia in un sistema di particelle. Si tratta di un concetto del tutto generale che si può applicare a una serie di situazioni astrofisiche diverse. In questa trattazione tale teorema è presentato al fine di studiare il comportamento delle particelle all'interno di un gas. Un sistema virializzato è per definizione un sistema all'equilibrio, ma esiste una serie di identità, chiamate teorema del viriale in media temporale, per le quali non è necessario che il sistema si trovi all'equilibrio. Queste identità sono collegate al teorema del viriale vero e proprio, il quale è definito come un insieme di identità tensoriali soddisfatte da un sistema all'equilibrio. Dall'identità tensoriale

---

<sup>1</sup> $m = \mu H$ ,  $H = 1.6605 \cdot 10^{-24}g$  = unità di massa atomica;  $\mu$  = peso molecolare medio del gas, che vale 0.6 per il Sole

più semplice si ottiene il teorema del viriale del secondo ordine scalare, secondo il quale:

$$2T = -W, \quad (5)$$

dove  $W$  è il lavoro e

$$T = \text{traccia}(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} v_{\alpha}^2, \quad (6)$$

$\mathbf{T}$  tensore di energia cinetica  $T_{j,k} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho v_j v_k d^3 \vec{x}$ . Si supponga di avere un sistema di particelle all'equilibrio. Il sistema è autogravitante quando la forza risentita da ogni particella dipende solo dalle altre particelle del sistema. Ad esempio, una stella è un sistema autogravitante. Si ipotizzi che la distribuzione di particelle di gas che compongono la stella sia in una buca di potenziale di materia oscura: in questo caso le particelle non sono più in un sistema autogravitante, in quanto queste non risentono solo dell'influenza delle altre particelle del sistema, ma anche della buca di potenziale della materia oscura. Se, però, il sistema si considera formato insieme da particelle di gas e materia oscura, allora tale sistema risulta autogravitante. Si consideri una distribuzione di particelle di densità  $\rho(\vec{x})$  ( $\vec{x}$  coordinata spaziale) che produce un potenziale  $\phi$  in un sistema che ha a sua volta un potenziale  $\phi_{ext}$ . Allora, siccome il potenziale totale è dato dalla somma dei potenziali, il lavoro vale:

$$W = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \langle \vec{x}, \nabla \phi_{tot} \rangle d^3 \vec{x}, \quad (7)$$

$\phi_{tot} = \phi + \phi_{ext}$  e  $W = W_{self} + W_{ext}$ . Si consideri la parte autogravitante del sistema. Si ha

$$W = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \langle \vec{x}, \nabla \phi \rangle d^3 \vec{x}, \quad (8)$$

dove  $\nabla \phi$  è l'accelerazione prodotta dal sistema su stesso  $\nabla \phi = G \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} d^3 \vec{y}$ , quindi

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G \rho(\vec{x}) \langle \vec{x}, \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \rangle \rho(\vec{y}) d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G \rho(\vec{y}) \langle \vec{y}, \frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|^3} \rangle \rho(\vec{x}) d^3 \vec{y} d^3 \vec{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Siccome  $|\vec{x}-\vec{y}|^3 = |\vec{y}-\vec{x}|^3$  e  $(\vec{y}-\vec{x}) = -(\vec{x}-\vec{y})$

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} G \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{y}-\vec{x}|} d^3 \vec{y} d^3 \vec{x} = \\ &= -\frac{1}{2} G \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) d^3 \vec{x} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{y}-\vec{x}|} d^3 \vec{y} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3 \vec{x}, \end{aligned} \quad (10)$$

che non è altro che l'autoenergia potenziale  $U^2 \Rightarrow W_{self} = U$ . Si consideri, ora, l'energia gravitazionale del sistema nella buca di potenziale esterna  $U_{ext} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \phi_{ext}(\vec{x}) d^3\vec{x}$ . Notiamo che non c'è il fattore  $\frac{1}{2}$ : il motivo è che la buca di potenziale esterna non viene modificata dalla sottrazione di particelle dal sistema che ne subisce l'influenza. Quindi,

$$\nabla \phi_{ext} = G \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y})_{ext} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d^3\vec{y} \quad W_{ext} = -G \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y})_{ext} \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} d^3\vec{y} \quad (11)$$

Si ottiene, quindi, che  $W_{ext} \neq U_{ext}$ , dato che  $\langle \vec{x}, \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} Z \rangle = \langle -\vec{x}, \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} Z \rangle$ . Il risultato del Teorema del Viriale è, pertanto,  $2T = -W_{self} - W_{ext}$ . Per un sistema autogravitante, quale è una stella, questo risultato si riduce a  $2T = -U$ .

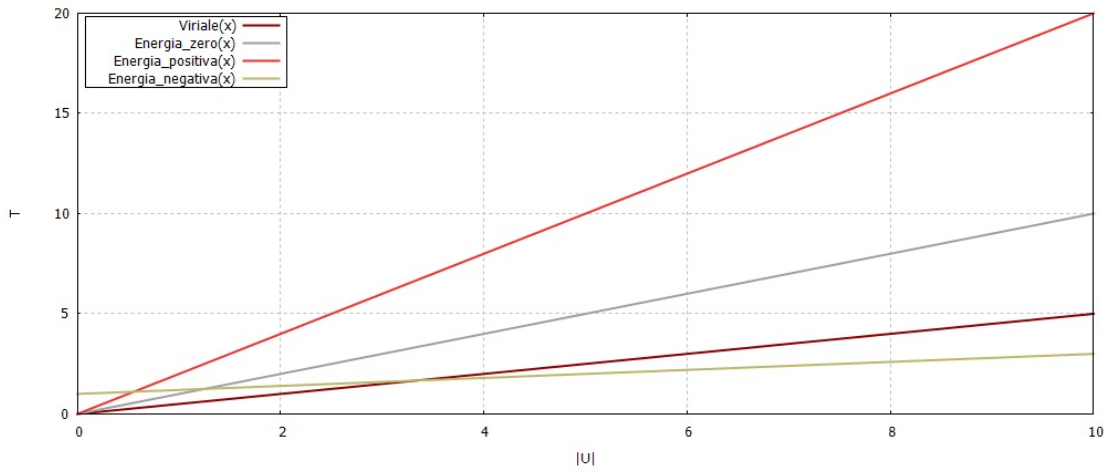


Figura 1: Grafico dell'energia cinetica in funzione dell'energia potenziale: le rette indicano i possibili rapporti tra energia potenziale e energia cinetica.

**Sistemi autogravitanti** Si consideri la figura1. I punti all'equilibrio sono quelli sulla retta  $T = \frac{U}{2}$ , detta retta del Viriale. Un sistema fuori da questa retta si muove nel grafico, in quanto non si trova all'equilibrio. Per la conservazione dell'energia,  $E = T - U$ . Se  $E > 0$  il sistema non può essere virializzato, dato che la retta  $E > 0$  non interseca mai la retta del viriale. Pertanto, gli unici sistemi autogravitanti che possono essere virializzati sono quelli con  $E < 0$ , cioè i sistemi dissipativi. Si è detto che per un sistema autogravitante  $2T = -U = |U|$ , quindi si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} T = -E \\ |U| = -2E \end{cases} \quad (12)$$

<sup>2</sup>La presenza del fattore  $\frac{1}{2}$  è dovuta al fatto che, se si sottrae una particella dal sistema, le particelle restanti risulteranno meno legate tra loro, quindi, per allontanare una seconda particella sarà necessario meno lavoro, in quanto la buca di potenziale del sistema autogravitante è meno profonda. A prescindere dall'ordine con cui sottraggo le particelle, la diminuzione di profondità della buca di potenziale alla fine sarà sempre pari a un fattore  $\frac{1}{2}$ : si dice, infatti, che il lavoro in questo caso è una funzione esatta.

con  $E < 0$  perché il sistema sia virializzato. Si prenda in esame una stella, cioè un oggetto caldo, circondato da un ambiente freddo: il sistema stella-vuoto non è un sistema all'equilibrio. La stella perde energia, cedendo calore all'ambiente per irraggiamento:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -\dot{E} \\ \frac{d|U|}{dt} = -2\dot{E} = 2\frac{dT}{dt}. \end{cases} \quad (13)$$

Questo vuol dire che metà della variazione di energia potenziale va spesa per aumentare l'energia cinetica interna (e quindi la temperatura), mentre quella totale diminuisce di altrettanto e va spesa in irraggiamento<sup>3</sup>. Il motore del processo fisico sta nel fatto che  $\dot{E} < 0$ , visto che la stella perde energia, quindi  $\frac{dT}{dt} > 0$ , il che significa che la nube di gas si sta riscaldando e contraendo: ogni perdita di energia costringe la configurazione a contrarsi e così facendo, essa non solo fornisce l'energia perduta, ma anche si riscalda<sup>4</sup>. Questo porta al raggiungimento delle condizioni necessarie all'innesco delle reazioni termonucleari. È possibile calcolare un tempo scala, detto tempo scala termodinamico o di Kelvin-Helmoltz, che dà una misura del tempo di vita di una struttura stellare il cui unico modo di produrre energia è la contrazione. Si consideri il Sole: il tempo scala termodinamico  $t_d$  risulta essere, data  $U = G\frac{M^2}{R} = 4 \cdot 10^{48} \text{ erg}$ ,  $t_d = \frac{U}{L} = 3 \cdot 10^7 \text{ yr}$ . Questo tempo scala risulta incompatibile con l'ordine di grandezza del tempo di vita del Sistema Solare: ciò vuol dire che la contrazione non può essere il meccanismo principale di produzione di energia nelle stelle. Questo processo di contrazione e riscaldamento, infatti, è il processo di raccordo tra le reazioni termonucleari del sistema: al termine di una reazione termonucleare, quella successiva non inizia immediatamente, in quanto la temperatura risulta ancora inadeguata per il suo innesco. Il passaggio da una reazione a un'altra, infatti, implica un salto di un fattore 10 in temperatura, quindi è necessario che, esaurita una reazione termonucleare, ci sia un momento in cui le reazioni termonucleari sono spente e si accende un'altra via di produzione energetica, cioè la contrazione.

## 2 Reazioni Termonucleari

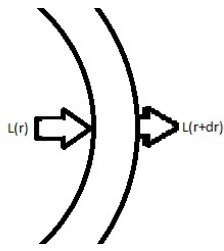
Se si ammette che la radiazione venga trasportata radialmente, dal centro della struttura stellare, si definisce  $\epsilon = \epsilon(\rho, T, X, Y)$  la quantità di energia liberata ad ogni secondo dall'unità di massa posta alla distanza  $r$  dal centro della stella<sup>5</sup>, cioè il tasso di produzione di energia, dove  $\rho$  è la densità,  $T$  la temperatura,  $X$  l'abbondanza in massa di idrogeno e  $Y$  l'abbondanza in massa di elio. Il tasso di produzione di energia dipende, infatti, dalle condizioni ambientali e dalla presenza di combustibile. Ci si chiede, quindi, quali siano i valori di  $\rho, T, X, Y$  in ogni strato della struttura stellare. Fissato lo strato sferico di spessore  $dr$  a distanza  $r$  dal centro,

<sup>3</sup>Cester, 1984, p.89.

<sup>4</sup>Ibidem

<sup>5</sup>Cester, 1984, p.90

si ha l'equazione di bilancio tra le due luminosit , che d  come risultato l'energia generata all'interno dello strato considerato:



$$L(r + dr) - L(r) = dL(r) = 4\pi\rho r^2\epsilon dr \Rightarrow \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2\epsilon dr, \quad (14)$$

dove  $L(r)$    la luminosit  interna dovuta a tutta l'energia della stella entro il raggio  $r$  e il fattore  $\epsilon$  indica quanto uno strato contribuisce alla luminosit . Il 99% della luminosit    generata dallo strato pi  interno, mentre gli strati pi  esterni non danno alcun apporto alla luminosit  ( $\epsilon = 0$ ) a causa della loro temperatura, troppo bassa per avere una produzione rilevante di energia. Il guscio sferico, quindi, produce luminosit  a seconda che  $\epsilon$  sia uguale o diverso da zero. perch   $\epsilon$  sia diverso da zero bisogna avere condizioni ambientali idonee e una certa quantit  di combustibile a disposizione. Al fine di comprendere la forma di  $\epsilon$ ,   necessario avere ben presente la struttura atomica.

**Struttura atomica** Nel nucleo stellare, quando si parla di atomi, ci si riferisce ai nuclei: a temperature tanto alte gli elettroni sono liberi. Il nucleo atomico   composto da neutroni e protoni, che insieme vengono per questo detti nucleoni. Si definisce numero di massa  $A$  la somma del numero di protoni  $Z$  e neutroni  $N$  presenti nel nucleo:  $A = Z + N$ .  $Z$    detto numero atomico e definisce la specie atomica. A parit  di  $Z$ , al variare di  $N$  non cambia la specie chimica ma si parla di isotopi: un isotopo   una forma diversa della stessa specie atomica. Fare nuove specie chimiche vuol dire modificare  $Z$ . Si prenda in esempio il nucleo di idrogeno: se  $N = 1$  si ha il prozio, se  $N = 2$  si ha il deuterio, se  $N = 3$  si ha il trizio, ma si tratta sempre di idrogeno.

## 2.1 L'energia di legame

Il nucleo   tenuto insieme da un tipo di interazione, detta interazione forte, che agisce a distanze dell'ordine di  $\sim 10^{-12} - 10^{-13} cm$ . Si pu  giudicare la grande intensit  di queste forze anche dal fatto che esse debbono vincere le forze di repulsione reciproca dei protoni, i quali hanno tutti cariche positive uguali<sup>6</sup>. Il punto fondamentale nella formazione di un nucleo atomico   che la sua massa totale   minore della somma delle masse dei nucleoni: c'  una frazione di massa che viene convertita in energia, che corrisponde a quella generata dalla reazione termonucleare. L'energia di legame del nucleo   pari a  $E(Z, N) = [Zm_p + Nm_n - m(Z, n)]c^2$ , dove  $m_p = 1.673 \cdot 10^{-24} g$    la massa del protone,  $m_n = 1.675 \cdot 10^{-24} g$  la massa del neutrone,  $m(Z, n)$  la massa del nucleo e  $c = 2.998 \cdot 10^{10} cm/s$  la velocit  della luce nel vuoto.   evidente da questa equazione che anche piccoli difetti di massa corrispondono a quantit  enor-

<sup>6</sup>Kaplan, 1982, p. 58



mi di energia, per via della presenza del fattore  $c^2$ . Si noti, inoltre, che la massa del neutrone è maggiore della massa del protone, se pur di un valore pari a  $0.003 \cdot 10^{-24} g$ : questo è il motivo per cui è più difficile che un protone si trasformi in neutrone, in quanto quello deve acquisire energia per subire tale trasformazione. In ciò risiede la ragione per cui non si trovano neutroni liberi in natura. L'energia di legame del nucleo per nucleone  $E/A$  caratterizza la specie atomica. Dal diagramma in figura 3 emerge che le specie più stabili sono quelle del gruppo del ferro e l'elio (il picco in 3).

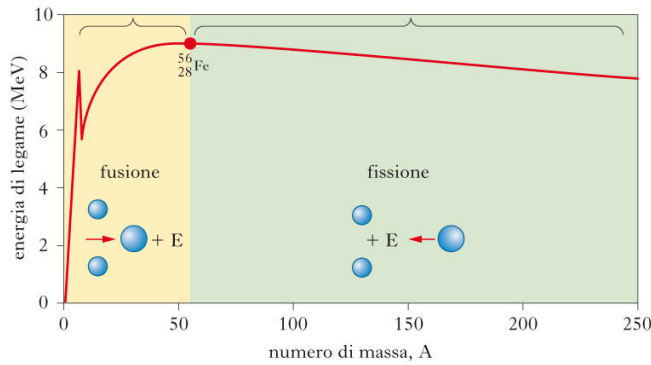


Figura 3: Curva di fusione

Il comportamento globale della curva di fusione indica che esiste un minimo in corrispondenza del quale avviene un cambiamento fondamentale: andando verso il  $Fe^{56}$ , i processi di fusione sono esoenergetici; dopo il ferro i processi di fusione sono endoenergetici. Le reazioni termonucleari producono energia sino al  $Fe^{56}$ ; oltre il  $Fe^{56}$ , per produrre energia, si devono seguire processi di fissione, non di fusione. In questo contesto la fissione non ha luogo, dato

che le stelle sono ambienti ricchi di elementi leggeri. Per produrre elementi più pesanti del  $Fe^{56}$  entrerà in gioco la cattura neutronica. Come si è già accennato, fare processi di fusione implica portare cariche dello stesso segno a unirsi, quindi si deve superare la barriera di potenziale  $E_0$  data dalla repulsione coulombiana: questo è possibile grazie all'effetto tunnel. Secondo le leggi della fisica classica una particella la cui energia è inferiore a  $E_0$  dovrebbe essere respinta. In realtà, una particella subatomica ha una probabilità finita di penetrare la barriera anche se la sua energia è inferiore a  $E_0$ . Questa probabilità cresce rapidamente con l'energia della particella. In ciò consiste l'effetto tunnel [...]. La probabilità che di penetrare la barriera si dimostra essere pari a  $\Pi'(E) \sim 2 \cdot 10^{-9}$ .

## 2.2 Il tasso di produzione di energia

A questo punto, è possibile calcolare il numero di reazioni termonucleari per unità di volume e tempo. Data la reazione termonucleare  $A + B \rightarrow \gamma + C$ ,  $\gamma$  un quanto di energia elettromagnetica,

$$\frac{dN}{dt} \sim N_A N_B \int_0^\infty \sigma(E) E e^{-E/kT} dE, \quad (15)$$

dove  $N_A$  e  $N_B$  sono le densità numeriche delle particelle  $A$  e  $B$ , mentre  $E$  è l'energia cinetica posseduta dalle particelle. La sezione d'urto, che dà la probabilità che  $A$  e  $B$  si scontrino, è indicata con  $\sigma(E) \propto \sigma'(E)\Pi'(E)\Pi$ , dove  $\sigma'(E)$  è la sezione d'urto ravvicinata,  $\Pi'(E)$  è la

probabilità che lo scontro porti alla rottura della barriera di potenziale e  $\Pi \propto \frac{\tau}{t}$  è la probabilità che la reazione porti alla formazione di un elemento stabile,  $\tau$  tempo di permanenza nello stato eccitato e  $t$  tempo impiegato dal nucleo per emettere la radiazione di eccitazione. Appena dopo lo scontro, infatti, i nuclei si trovano in stato eccitato. Una volta emessa la radiazione, il nuovo nucleo diventa stabile. In conclusione, considerando tutti i fattori e integrando, si ha:

$$\frac{dN_r}{dt} = k^* x_1 x_2 \rho^2 T^{-2/3} e^{-1.89(E_0/kT)^{1/3}}, \quad (16)$$

dove  $k^* = \frac{4h^2(A_1+A_2)^{3/2}}{k^{2/3}m_H^{7/2}(A_1A_2)^{5/2}}E_0^{1/6}\Pi$ ,  $h = 6.626 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$  costante di Planck. Dal rate di reazioni per un unità di tempo si ricava il tasso di produzione di energia  $\epsilon$ , che va caratterizzato e valutato per ogni ciclo di reazioni termonucleari. Il coefficiente  $\epsilon$ , infatti, è dato dalla somma delle energie prodotte dai processi che intervengono in un dato ciclo di reazioni:

$$\epsilon = \sum \frac{\text{energia prodotta}}{\text{reazione}} \frac{dN_r}{dt} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\text{erg}}{\text{gs}} \right] \Rightarrow \epsilon = \sum_i E_i x_1 x_2 k_i \rho T^{-2/3} e^{-1.89(E_0/kT)^{1/3}}. \quad (17)$$

Pertanto, a seconda delle condizioni ambientali e della presenza o meno di combustibile, si avvia una determinata reazione invece di un'altra. Il quadro evolutivo è perciò il seguente: una stella, per contrazione, raggiungerà nel suo nocciolo una temperatura sufficiente alla reazione dell'idrogeno, che si convertirà in elio. Esaurito questo elemento, una successiva contrazione porterà il centro ad una temperatura tale che sarà ora l'elio a fornire nuova energia. Seguirà un'altra contrazione del nocciolo che porterà ad una nuova interazione e così via<sup>7</sup>.

## 2.3 La catena protone-protone

La catena protone-protone, detta PP, è la catena più semplice e si avvia a temperature di  $\sim 10^7 K$ . La PP converte quattro nuclei di  $H^1$  in un nucleo di  $He^4$ :

	Energia	Tempo
$H^1 + H^1 \rightarrow H^2 + e^+ + \nu$	+1.44MeV - 0.26MeV	1.4 $10^9$ yr
$H^2 + H^1 \rightarrow He^3 + \gamma$	+5.49MeV	6s
$He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + H^1 + H^1$	+12.85MeV	$10^6$ yr

dove  $e^+$  è un positrone e  $\nu$  un neutrino. Di conseguenza, ogni volta che si realizza un ciclo di reazioni viene liberata una quantità di energia pari a  $\sim 4.2 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$ . I valori negativi nel bilancio vengono dalle perdite per emissione di neutrini. Il tempo caratteristico della reazione è dato dalla prima reazione, che è la più lenta: si tratta, infatti, di un decadimento  $\beta^+$ , che implica la trasformazione di un protone in neutrone, quindi ha bisogno di un input di energia per avvenire. Esistono due varianti del ciclo principale qui illustrato, detto PPI: la PPII e la PPIII. La PPII e la PPIII, come tutte le varianti dei cicli termonucleari, esistono perché le

<sup>7</sup>Cester, 1984, p. 165

reazioni termonucleari sono processi statistici: si avvia una o l'altra variante a seconda degli elementi presenti nell'ambiente. La discussione di questi processi venne fatta inizialmente trattando solamente la catena PPI, trascurando l'importanza della presenza di  $He^4$ . In seguito si trovò che la reazione tra  $He^3$  e  $He^4$  diventava importante quando l'elio era sufficientemente abbondante e la temperatura non era troppo bassa. Anzi, all'aumentare di entrambe si passava prima verso la PPII e poi alla PPIII<sup>8</sup>.

## 2.4 La catena CNO

Nel caso di stelle più massive del nostro Sole la sequenza protone-protone non assicura una produzione sufficiente di energia. Qui entra in azione un ciclo più efficace ad alte temperature, il ciclo del carbonio e dell'azoto che ora esamineremo<sup>9</sup>:

	Energia	Tempo
$C^{12} + H^1 \rightarrow N^{13} + \gamma$	+1.94MeV	$1.3 \cdot 10^7 yr$
$N^{13} \rightarrow C^{13} + e^+ + \nu$	+2.2MeV - 0.7MeV	7min
$C^{13} + H^1 \rightarrow N^{14} + \gamma$	+7.55MeV	$2.7 \cdot 10^6 yr$
$N^{14} + H^1 \rightarrow O^{15} + \gamma$	+7.29MeV	$3.2 \cdot 10^8 yr$
$O^{15} \rightarrow N^{15} + e^+ + \nu$	+2.7MeV - 1.0MeV	82s
$N^{15} + H^1 \rightarrow C^{12} + He^4$	+4.96MeV	$1.1 \cdot 10^5 yr$

L'energia totale prodotta da un ciclo è, pertanto,  $\sim 4.0 \cdot 10^{-5} erg$ , molto vicina a quella prodotta dalla catena protone-protone. C, N e O agiscono come catalizzatori: essi sono già presenti nella mistura del gas che costituisce il plasma stellare, dunque tali elementi non sono i prodotti della catena CNO, ma le loro abbondanze relative vengono alterate a causa dei tempi scala di ciascuna reazione. Siccome la reazione più lenta è  $N^{14} + H^1 \rightarrow O^{15} + \gamma$ , ci sarà un accumulo di azoto 14. L'effetto complessivo è che il mondo del CNO, nel punto in cui viene prodotto  $N^{14}$ , si divide in due sottocatene, una, detta CN, veloce, e l'altra, detta CNO, lenta: c'è una diminuzione rapida di carbonio e un accumulo di azoto; l' $He^4$ , nel frattempo, impenna. Questa anticorrelazione è un tracciante del fatto che il gas è stato processato da CNO. Ci sono, ovviamente, delle varianti della CNO, come per la PP, che avvengono a temperature leggermente più alte, introducendo delle proprietà importanti nel gas, come la correlazione tra differenti elenti (p.e. O-Na o Mg-Al).

## 2.5 Processo $3\alpha$

Quando l' $H^1$  è stato bruciato quasi tutto, il nucleo inizia a contrarsi. Questo porta la temperatura ad aumentare, sino a raggiungere  $\sim 1.5 \cdot 10^8 K$ . A questa temperatura si innesca la

<sup>8</sup>Cester, 1984, p. 167

<sup>9</sup>Kaplan, 1982, p. 65

reazione di fusione dell'  $He^4$ , che viene bruciato in  $C^{12}$  tramite il processo  $3\alpha$ , così denominato perché coinvolge tre nuclei di  $He^4$ , cioè tre particelle  $\alpha$ , per formare il  $C^{12}$ . Il processo  $3\alpha$  produce  $1.2 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$ . La prima reazione  $He^4 + He^4 \rightarrow Be^8$  assorbe energia, infatti il  $Be^8$  è fortemente instabile e tende a ritrasformarsi nelle due particelle di partenza. In un ambiente ricco di  $He^4$  il  $Be^8$  riesce a interagire con un altro  $He^4$  e a formare il  $C^{12}$ , che si forma solo per nucleosintesi all'interno delle stelle.

## 2.6 Parametrizzazione di $\epsilon$

Da tutto ciò, risulta che i coefficienti di produzione di energia sono:

$$\epsilon_{PP} = 2.36 \cdot 10^6 \rho X_H^2 T_6^{-2/3} e^{-33.81/T_6^{1/3}} \Phi(T) \quad (18)$$

$$\epsilon_{CN} = 7.2 \cdot 10^7 \rho X_H Z_{CN} T_6^{-2/3} e^{-152.31/T_6^{1/3}} \Phi(T) \quad (19)$$

$$\epsilon_{3\alpha} = 3.5 \cdot 10^{17} \rho^2 Y_{He}^3 T_8^{40} \Phi(T), \quad (20)$$

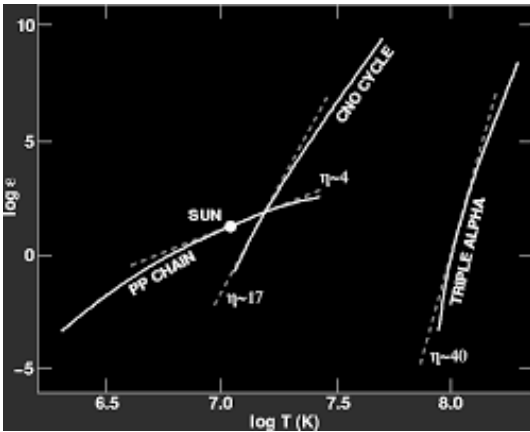


Figura 4: Andamento delle  $e$  in funzione della temperatura: il grafico indica quale processo prevale a una data temperatura

dove  $T_6$  è la temperatura espressa in milioni di Kelvin e  $T_8$  in centinaia di milioni di Kelvin, mentre  $\Phi(T)$  rappresenta il fattore di attenuazione della barriera di potenziale, che tiene conto del fatto che i nuclei sono circondati da una nube di elettroni che fa da schermo, grazie alla quale i protoni si respingono in misura minore. Il confronto tra PP e CNO viene fatto tra le quantità  $e_{PP} = \frac{\epsilon_{PP}}{\rho X_H^2}$  e  $e_{CN} = \frac{\epsilon_{CN}}{\rho X_H Z_{CN}}$ . Se in un ambiente c'è abbastanza CN prevale la CNO. Sino a  $T_6 = 17$  domina la PP, ma se  $T_6 > 17$  e ci sono quantità adeguate di carbonio e ossigeno, la CNO prende il sopravvento. Nel Sole domina ancora la catena protone-protone. Nei calcoli approssimati è utile semplificare queste espressioni di  $\epsilon$  nel seguente modo:  $\epsilon = \epsilon_0 \rho T^\nu$ ,  $\nu = \left(\frac{d \ln \epsilon}{d \ln T}\right)_\rho$ . Questa espressione è valida solo per piccoli intervalli di temperatura, ma, siccome l'obiettivo è semplicemente confrontare le reazioni per studiare la loro sensibilità alla temperatura, questa approssimazione è più che sufficiente. Derivando logicamente la eq(18), la eq(19) e la

(20), si ottiene:

$$\epsilon_{PP} = 10^{-5} \rho X_H^2 T_6^4 \quad \epsilon_{CN} = 10^{-18} \rho X_H Z_{CN} T_6^{17} \quad \epsilon_{3\alpha} = \epsilon_3 \rho Y_{He}^3 T^{\nu_{3\alpha}}, \quad (21)$$

dove  $3.5 \leq \nu_{PP} \leq 6$  ( $\nu_{PP} \sim 5$ ),  $13 \leq \nu_{CN} \leq 20$  ( $\nu_{CN} \sim 15$ ) e  $20 \leq \nu_{3\alpha} \leq 30$  ( $\nu_{3\alpha} \sim 25$ ).

Quindi piccole variazioni di  $T$  portano a grandi salti in  $\epsilon_{CN}$ : a parità di  $T$  e in presenza di combustibile adeguato  $\epsilon_{CN} \gg \epsilon_{PP}$ . Siccome  $\frac{dL}{dr} \propto \epsilon$  e un  $\frac{dL}{dr}$  grande implica un grande flusso di energia, cioè un regime convettivo, il risultato è che le stelle di grande massa, in cui ha luogo la *CNO*, hanno un core convettivo.

## 2.7 Altre reazioni termonucleari

Ci sono reazioni che avvengono a temperature inferiori alla PP e alla CNO. I primi processi che avvengono nel nucleo di una stella portano alla combustione di  $H^2$  e  $Li$ . Con queste reazioni il nucleo si scalda, fino a raggiungere le temperature adatte alle reazioni termonucleari. Dopo la  $3\alpha$ , invece, vengono formati elementi più pesanti del  $C^{12}$  tramite cattura  $\alpha$ , cioè cattura di nuclei di  $He^4$  da parte di nuclei di elementi pesanti: ad ogni passo viene inglobata una particella  $\alpha$ , sino ad arrivare al  $Fe^{56}$ . Quelli che vengono così formati sono gli elementi più stabili dell'universo e si dividono in due gruppi: gli elementi di tipo  $\alpha$ , che sono legati alle supernovae di tipo II, e quelli del gruppo del  $Fe^{56}$ , prodotti dalle supernovae Ia. Le catture  $\alpha$  avvengono a  $T > 6 \cdot 10^8 K$ . Al di sopra di queste temperature la radiazione è tanto energetica da fare fotodisintegrazione. La fotodisintegrazione produce particelle  $\alpha$ , che portano alla formazione di elementi  $\alpha$ : la radiazione frantuma i nuclei pesanti in nuclei di  $He^4$ , che vengono catturati (cattura  $\alpha$ ). Nelle stelle si instaura una struttura a cipolla, in cui ogni strato sarà caratterizzato dalla produzione di un elemento  $\alpha$ . Gli elementi più pesanti del  $Fe^{56}$ , invece, si generano per cattura neutronica R (rapid) e S (slow). È necessario, pertanto, individuare una sorgente di neutroni: tale sorgente è costituita da processi di cattura  $\alpha$  che producono neutroni, per esempio la cattura  $\alpha$  dell' $C^{13}$ , dell' $O^{18}$  e del  $Ne^{22}$ . I neutroni prodotti in questo modo sono protagonisti di cattura neutronica S nelle stelle dell'Asymptotic Giant Branch (AGB). A  $T \sim 10^{10} K$  interviene un altro processo per la produzione di neutroni liberi: la fotodisintegrazione del  $Fe^{56}$ :  $Fe^{56} + \gamma \rightarrow 13He^4 + 4n$ . La cattura neutronica alimentata da questo processo è di tipo R si trova nelle SNII.

## 3 Supernovae

L'esplosione di supernova costituisce uno dei più spettacolari meccanismi di produzione di energia in astrofisica. Si definisce supernova una stella di massa  $> 8M_{sun}$  in fase di esplosione. Durante l'esplosione, comune a tutti i tipi di supernova, si ha la seguente situazione: il materiale stellare subisce un'accelerazione verso l'esterno, che è equivalente alla gravità, diretta invece verso l'interno, quindi il materiale degli strati più esterni diventa più denso di quello negli strati più interni. Questo porta all'instabilità di Rayleigh-Taylor<sup>10</sup>, cioè a perturbazioni.

---

<sup>10</sup>Clarke-Carswell, 2007, p. 137

## 3.1 Classificazione

La classificazione principale delle supernovae è puramente empirica e si basa sull'osservazione delle righe spettrali del resto di supernova: se presentano righe di idrogeno sono SN di tipo II; se non ci sono righe di H, ma si trovano righe di Si si tratta di SNIa, mentre se non hanno nè righe di H nè di Si ma hanno righe di He sono SNIb, infine, in assenza di righe di H, Si e He, si parla di SNIc. Il meccanismo che genera l'esplosione divide il mondo delle supernovae in maniera più chiara: sono SN termonucleari le supernovae di tipo Ia, mentre sono SN core-collapse le Ib, Ic e II.

### 3.1.1 Supernovae termonucleari (Ia)

L'origine delle termonucleari è dovuta all'esplosione termonucleare generata dalla combustione di carbonio in ambiente degenere: c'è un innesco esplosivo di CO su una nana bianca che accresce massa da una stella compagna in un sistema binario o multiplo. Si ha un sistema primordiale formato da due stelle di massa intermedia che evolve tramite una serie di episodi di contatto tra gli strati più esterni delle stelle, in cui una certa quantità di massa può uscire dal sistema, sino a quando si arriva alla situazione di due nane bianche di CO degenere che formano un sistema la cui massa totale supera il limite di Chandrasekhar.  $M_{Ch} = 1.4M_{\odot}$ . A ciò può seguire, se c'è sufficiente perdita di momento angolare (tramite onde gravitazionali), una fusione tra nane bianche. Essendo la massa totale dell'oggetto nato dalla fusione superiore alla  $M_{Ch}$ , viene a mancare l'equilibrio idrostatico. Il carbonio brucia in questo ambiente degenere, in cui la densità è dell'ordine di  $10^9 g/cm^3$ . Il bruciamento di CO converte C e O in  $Fe^{56}$ , di cui le SNIa sono le maggiori produttrici: questo porta all'esplosione e la stella viene distrutta. Non c'è alcun resto e tutta la massa della stella viene restituita al mezzo interstellare. Questo modello è detto double-degenerate scenario (DD)[cfr. Cester, 1984, p.35]. I lobi di Roche delimitano il raggio di influenza di ciascuna delle due componenti del sistema binario. Il trasferimento di massa da una stella all'altra avviene quando una delle due ha riempito il proprio lobo, allora la materia scavalca il punto  $L1$  e cade sotto il campo gravitazionale dell'altra componente. Il modello è in perfetto accordo con le osservazioni perché le nane bianche non hanno idrogeno, come le SNIa. Se il merging avvenisse tra una nana bianca e una stella normale, la prima cosa che questa ce-

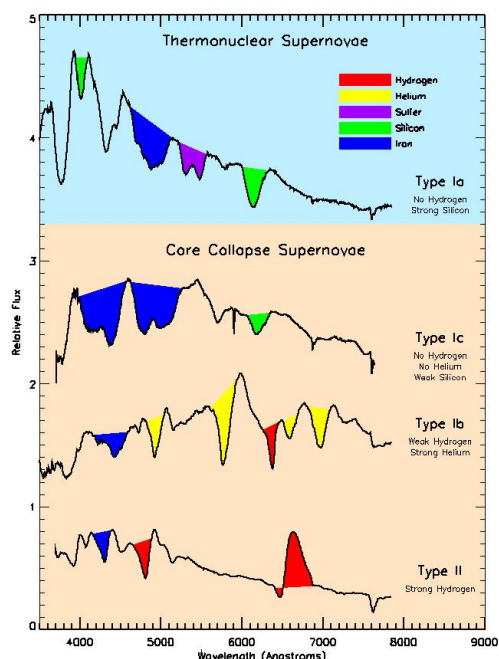


Figura 5: Distribuzioni spettrali dei diversi tipi di SN

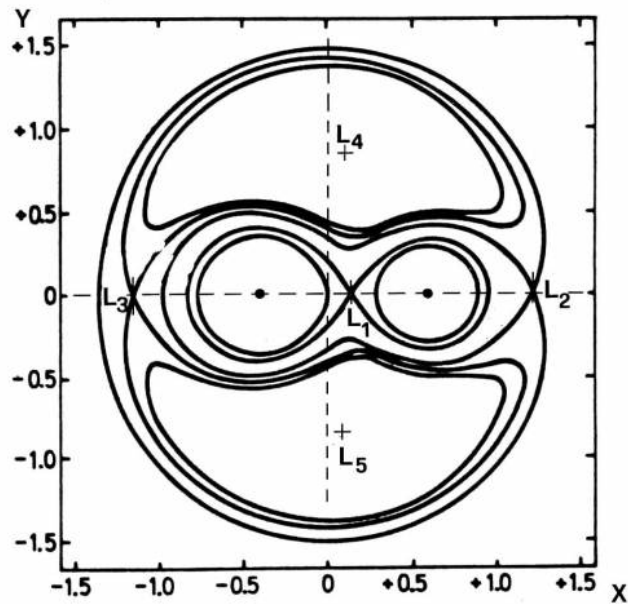


Figura 6: Rappresentazione dei lobi di Roche nel sistema binario

derebbe sarebbe il suo strato più esterno, nel quale è presente idrogeno, quindi l'esplosione presenterebbe righe di H, in contrasto con le osservazioni: è per questo che il modello di due nane bianche è il migliore.

### 3.1.2 Supernovae Core-collapse

L'origine delle core-collapse è dovuta al ferro degenerare presente nel nucleo di una stella che ha terminato le reazioni termonucleari. Il nucleo si contrae e degenera: l'aumento di densità del nucleo porta la stella ad attraversare la retta di degenerazione. A questo punto la stella ha una temperatura di qualche miliardo di gradi, quindi la radiazione può spaccare i nuclei di ferro in  $4He^4$ , che iniziano a catturare elettroni liberi, originando neutroni. I nuclei, allora, diventano più ricchi di neutroni e si spaccano i nuclei di  $He^4$ , quindi non solo nuclei pesanti, ma anche protoni liberi catturano elettroni. La cattura elettronica da parte di protoni liberi è detta processo URCA:  $p^+ + e^- \rightarrow n$ . La presenza di protoni e neutroni liberi porta a perdite energetiche per neutrini, dovute alla reazione  $p^+ + n \rightarrow \nu$ . La struttura, in questa fase, è mantenuta in equilibrio da elettroni degeneri, quindi, se questi vengono catturati, l'equilibrio viene meno. Per di più, gli strati più esterni di una stella che ha concluso le reazioni termonucleari sono ricchi di elementi  $\alpha$ , in particolare, il guscio più vicino al nucleo è ricco di Si, che continua a bruciare in  $Fe^{56}$ , che viene depositato sul nucleo. Questo scenario porta al superamento della  $M_{Ch}$ , con conseguente collasso: si ottiene una struttura di  $1.5M_{sun}$  e raggio confrontabile con quello della Terra. A queste densità interviene la forza forte e tutto si concentra in una sfera di raggio  $\sim 10 km$ : questa è la proto-stella di neutroni. L'intero involucro della stella collassa sul nucleo, rimbalza e spazza via tutto. Quello che resta sono il nucleo e il gas, che viene restituito al mezzo interstellare. Il resto di supernova (Supernovae Remnant,

SNR) è un guscio in espansione, composto dal materiale dell'envelope, la cui composizione chimica è rimasta intatta: solo lo strato di  $Si$  può trasformarsi in  $Fe^{56}$  durante l'esplosione, ragione per cui le SN core-collapse restituiscono un grande quantità di elementi  $\alpha$  al mezzo interstellare, mentre il  $Fe^{56}$  rimane incapsulato nella neutron star di neutroni o inghiottito dal buco nero formatosi se la stella ha massa  $> 25 M_{\odot}$ . La velocità di espansione del guscio è di  $\sim 10^4 km/s$ : essendo tale velocità maggiore alla velocità del suono nel mezzo interstellare ( $\sim 1 km/s$ ), ha origine un'onda d'urto. La fase di espansione libera cessa quando la massa del mezzo interstellare trascinato dal SNR diventa comparabile con quella espulsa dalla stella. L'espansione va avanti per conservazione dell'impulso. Raggiunte temperature inferiori  $10^6 K$  non si possono più trascurare le perdite energetiche per radiazione, p.e. sincrotrone.

**Accelerazione di Fermi** Lo shock provocato dall'onda d'urto accelera gli elettroni, portandoli a velocità relativistiche secondo il processo di accelerazione di Fermi. L'accelerazione di Fermi si basa sull'interazione tra una particella carica in moto con velocità  $\vec{v}$  e massa  $m$  e una nube magnetizzata, grazie al remnant centrale, che ha velocità  $\vec{u}$  e massa  $M$ . Nel modello di Fermi con onda d'urto, l'elettrone attraversa indisturbato lo shock e urta contro una nube non shockata, la cui velocità si approssima a zero, quindi l'elettrone rimbalza con la stessa velocità di partenza, attraversa lo shock e fa un urto frontale con una nube shockata che ha velocità  $\frac{3}{4}v_{sh}$ , quindi la velocità dell'elettrone diventa  $v' = -v - 3/2v_{sh}$ , che, se  $v \ll v_{sh}$ , diventa  $\sim 3/2v_{sh}$ , il che vuol dire che l'elettrone è diventato più veloce dello shock; a questo punto, l'elettrone riattraversa lo shock, torna indietro e collide con un'altra nube shockata, e ciò porta la velocità della particella a un valore di  $3v_{sh}$ . L'elettrone ripete questo processo sino a quando non diventa relativistico, il che avviene in un tempo pari a  $\sim \frac{4}{3v_{sh}}$ . Data la compresenza di elettroni accelerati e campo magnetico, si ha radiazione di sincrotrone.

## 4 Luminosità di Eddington

Nell'Universo esistono oggetti ben più luminosi delle stelle: i quasar (quasi-stellar radio sources), la cui luminosità è  $\sim 10^{13} L_{\odot}$ . Questi oggetti vennero scoperti grazie a osservazioni radio negli anni '60 da Allan Sandage. Non si comprese da subito la loro natura. Innanzitutto, si osservò che si trattava di oggetti variabili: si poteva ottenere un'informazione che si rivelò fondamentale, ossia il periodo  $\Delta t$ . Dal periodo è possibile ricavare le dimensioni massime che un oggetto può avere: qualsiasi cosa che possieda una variabilità non può variare in tempi inferiori al tempo di coerenza, cioè il tempo che ci mette qualcosa, p.e. la luce, ad attraversare l'oggetto. Si considera la luce perché ha la velocità massima raggiungibile, quindi nulla attraverserà l'oggetto più velocemente della luce, in quanto l'informazione della variazione deve essere comunicata da una parte all'altra del corpo. La massima dimensione di un quasar è quindi  $L \leq c\Delta t$ ,  $\Delta t \sim 3600s$ , un tempo brevissimo cui conseguono dimen-



sioni di  $\sim 10^{19} cm$ . Lindenberg notò che non potevano essere le reazioni termonucleari a produrre la luminosità del quasar: ci sarebbe dovuta essere, entro un diametro di  $\sim 10^9 R_\odot$ , una quantità di idrogeno maggiore di quella presente in tutte le stelle della nostra galassia per avere la luminosità osservata. Una tale compressione di materia porta ad avere un buco nero (BH). Si concluse, infatti, che un quasar trae energia da un buco nero. In fisica classica, un buco nero è un oggetto la cui velocità di fuga è pari alla velocità della luce: un buco ha una massa tale per cui neanche la luce può sfuggire. Da questa massa ricava il raggio di Schwartzschild  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ <sup>11</sup>. Il raggio di Schwartzschild separa in modo causale la regione interna e quella esterna al buco nero: il raggio di Schwartzschild non delimita la superficie del buco nero, ma è il bordo dal punto di vista di un osservatore esterno. Si può supporre una densità media del buco nero  $\rho_{BH} = \frac{M_{BH}}{\frac{4}{3}\pi R_s^3}$ . Da queste prime nozioni, è possibile stimare l'efficienza radiativa dell'accrescimento gravitazionale del buco nero. Trattandosi di un fenomeno che trasforma una certa quantità di massa in energia, secondo la nota equivalenza di Einstein  $E = mc^2$ , si ottiene  $\Delta mc^2 = \Delta E$ , e, diviso per  $mc^2$ , dà  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta E}{mc^2}$ , che è proprio la misura dell'efficienza. È interessante calcolare l'efficienza a  $3R_s$ , dove si trova l'Inner-most Stable Circular Orbit (ISCO), cioè l'orbita circolare stabile più interna possibile: ogni oggetto che arriva a questa distanza è destinato a cadere nel BH. L'energia, classicamente, risulta essere  $E_{3R_s} = -\frac{GM_{BH}m}{6R_s}$ , quindi

$$\Delta E = E_{R_s} - E_{3R_s} = \frac{mc^2}{6} \Rightarrow \frac{\Delta E}{mc^2} = \frac{1}{6} = \frac{\Delta m}{m}. \quad (22)$$

Da ciò si hanno due informazioni fondamentali: l'efficienza del buco nero non dipende dalla  $M_{BH}$  e un oggetto a  $3R_s$  ha già convertito 1/6 della sua massa in energia. Si supponga che un oggetto compatto stia accrescendo massa con un rate  $\dot{M} = \frac{\Delta M}{\Delta t}$ . Chiamata  $\epsilon$  l'efficienza, si ottiene la luminosità del buco nero legata all'accrescimento:  $L = \epsilon \dot{M} c^2$ . Un buco nero, però, non può accrescere massa indefinitamente: il materiale che cade verso il buco nero è costituito da particelle che interagiscono elettromagneticamente, quindi, per la legge di Larmor, essendo particelle cariche accelerate, emettono fotoni, i quali esercitano sul materiale in caduta una pressione opposta all'attrazione gravitazionale. Esiste una luminosità critica, detta Luminosità di Eddington, oltre la quale l'effetto dei fotoni emessi prevale sull'attrazione gravitazionale. La luminosità di Eddington, quindi, è il limite oltre il quale l'oggetto si autospegne. Si consideri un oggetto con luminosità monocromatica  $L(\nu) = L f(\nu)$ ,  $\int_0^\infty f(\nu) d\nu = 1$ , dove  $f(\nu)$  è la Spectral Energy Distribution (SED). Nel caso di perfetta simmetria sferica, l'energia per unità di tempo, superficie e frequenza è  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2}$ , quindi, dato che l'energia di un fotone è  $E = h\nu$ , il numero di fotoni per unità di tempo, superficie e frequenza è  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 h\nu}$ . Dalla legge  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  si ottiene che l'impulso di un fotone è  $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$ , quindi l'impulso totale dei fotoni per unità di tempo, frequenza e superficie vale  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c}$ . Utilizzando un approccio semi-classico al problema, si ricava l'impulso per unità di volume, frequenza e

<sup>11</sup> Si tenga a mente che la trattazione che si sta facendo in questa sede è puramente classica

tempo trasmesso dai fotoni alle particelle. Innanzitutto, va definita la sezione d'urto di Klein-Nishina  $\sigma_{KN} = \sigma_T \sigma_{KN}^*\left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)$ , dove  $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$  è la sezione d'urto Thomson, mentre  $\sigma_{KN}^*\left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)$  è un fattore di correzione tramite il quale entra in gioco la dipendenza della sezione d'urto dal rapporto tra la frequenza del fotone incidente  $\nu$  e quella caratteristica dell'elettrone  $\nu_T$ ,  $h\nu_T = m_e c^2$ . L'impulso derivante da queste osservazioni è pari a  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} \sigma_{KN}(\nu) n_e(r)$ , dove  $n_e(r)$  è la quantità di elettroni per unità di volume in funzione del raggio  $r$ . Integrando l'impulso su tutte le frequenze, si ricava la forza esercitata dai fotoni sugli elettroni per unità di volume:

$$\int_0^\infty \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} \sigma_{KN}(\nu) n_e(r) d\nu = \frac{L}{4\pi r^2 c} \sigma_T n_e(r) \int_0^\infty \rho(\nu) \sigma_{KN}^*(\nu) d\nu = \frac{L}{4\pi r^2 c} \sigma_T n_e(r) C_{SED}, \quad (23)$$

dove la terza uguaglianza perché  $\int_0^\infty \rho(\nu) \sigma_{KN}^*(\nu) d\nu = C_{SED} \sim 1$ . La forza totale che agisce per unità di volume è data dalla somma tra la forza esercitata dai fotoni e l'attrazione gravitazionale per unità di volume:  $F_{TOT} = -\frac{GM_{BH}\rho(r)}{r^2} + \frac{L}{4\pi r^2 c} \sigma_T n_e(r) C_{SED}$ . Uguagliando la  $F_{TOT}$  a zero si ottiene la luminosità oltre la quale la forza esercitata dai fotoni prevale sull'attrazione gravitazionale, cioè la luminosità di Eddington:

$$L_{Edd} = \frac{GM_{BH}\rho(r)4\pi c}{n_e(r)\sigma_T C_{SED}}. \quad (24)$$

Se  $L > L_{Edd}$  il BH non può continuare ad accrescere stazionariamente: arriva un momento in cui l'oggetto si spegne, perché la fonte di accrescimento inverte il suo moto. In realtà, si osservano oggetti che superano di gran lunga la loro  $L_{Edd}$ : superare la luminosità di Eddington, infatti, non implica uno spegnimento istantaneo, ma la fine del regime di accrescimento stazionario. Supponendo di avere un gas di solo idrogeno  $\rho(r) = n_e(r)m_e + n_p(r)m_p \sim n_e(r)m_p$ , quindi i coefficienti  $n_e(r)$  si semplificano: la luminosità di Eddington non dipende dal raggio, ragion per cui la pressione fotonica diminuisce l'effetto dell'attrazione gravitazionale allo stesso modo a tutti i raggi. Per un gas generico, si aggiunge un fattore  $C_x$  che dipende dalla composizione chimica del gas, quindi  $L_{Edd} = \epsilon \dot{M} c^2 = \frac{GM_{BH}m_p 4\pi c C_x}{\sigma_T C_{SED}}$ . Pertanto, integrando sul tempo, si ottiene l'energia totale emessa dal quasar:

$$\epsilon M_{BH} c^2 = E_{quasar}^{TOT}. \quad (25)$$

# Riferimenti bibliografici

- [1] Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie, *An introduction to modern Astrophysics*, San Francisco, Addison-Wesley, 2007.
- [2] Vittorio Castellani, *Astrofisica Stellare*, Bologna, Zanichelli, 1985.
- [3] Bruno Cester, *Corso di Astrofisica*, Milano, Hoepli, 1984.
- [4] Luca Ciotti, *Astrofisica Extragalattica*, Dispense, 2018.
- [5] Cathie J. Clarke, Robert F. Carswell, *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*, New York, Cambridge University Press, 2007.
- [6] Daniele Dallacasa, *Processi di radiazione e MHD*, dispense, 2017
- [7] Francesco Rosario Ferraro, *Astrofisica Stellare*, Dispense, 2017.
- [8] Samuil Aronovich Kaplan, *Fisica delle stelle*, Firenze, Sansoni, 1982
- [9] Maurizio Salaris, Santi Cassisi, *Evolution of Stars and Stellar Populations*, Chichester, John Wiley & Sons, 2005.