

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Simulazioni Geant4 di muografie vulcaniche con telescopi Čerenkov

Tesi di Laurea Magistrale

Presentata da:

Davide Mollica

Relatore:

Chiar.mo Prof. Cristian Vignali

Correlatori:

Dott. Riccardo Campana

Dott.ssa Melania Del Santo

Appello III

Anno accademico 2017-2018

We shall not cease from exploration
And the end of all our exploring
Will be to arrive where we started
And know the place for the first time

— Little Gidding, T.S. Eliot

INDICE

SOMMARIO [vii](#)

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Raggi cosmici	1
1.1.1	Spettro dei raggi cosmici	2
1.2	Muoni atmosferici	4
1.2.1	Spettro dei muoni atmosferici	5
1.2.2	Variabilità dello spettro	7
1.3	Radiografia muonica	8
1.3.1	Muografie vulcaniche	10
2	ASTRONOMIA IN BANDA GAMMA E TELESCOPI ČERENKOV	15
2.1	Astronomia a raggi γ	15
2.1.1	Astronomia a raggi γ dallo spazio	15
2.1.2	Astronomia a raggi γ da terra	18
2.2	Imaging Čerenkov	20
2.2.1	Radiazione Čerenkov	20
2.2.2	Imaging Čerenkov	23
2.2.3	Alcuni esempi di telescopi Čerenkov	24
2.3	Čerenkov Telescope Array	26
2.3.1	SST-2M ASTRI	28
3	METODI MONTECARLO E GEANT4	31
3.1	Metodi Monte Carlo	31
3.1.1	Campionamento	31
3.2	GEANT4	33
4	PASSAGGIO DEI MUONI NELLA MATERIA	37
4.1	Interazione con uno strato di materiale	37
4.1.1	Geometrie implementate	38
4.2	Stopping power	40
4.2.1	Validazione delle perdite energetiche	41
4.3	Probabilità di sopravvivenza	46
4.3.1	Continuous slowing down approximation	46
4.3.2	Stima del range	48
4.3.3	Probabilità di sopravvivenza	49
4.4	Energia minima e relazione intensità-spessore	51
4.5	Scattering	53
4.6	Validazione del processo di radiazione Čerenkov	56
4.7	Conclusioni	61
5	ANELLI MUONICI	63
5.1	Geometria di emissione	63
5.2	Ricostruzione della direzione	68
5.3	Rumore	72

6	SIMULAZIONE	77
6.1	Geometria e sorgente	77
6.1.1	Sorgente dei muoni	78
6.2	Riduzione dei tempi di esecuzione	79
6.2.1	Muoni atmosferici	79
6.2.2	Fotoni Čerenkov	81
6.3	Analisi dei risultati	83
6.3.1	Selezione ottimale	84
6.3.2	Area di raccolta efficace	88
6.3.3	Energia minima di rivelazione	90
6.3.4	Ricostruzione degli spessori	91
7	RISULTATI	93
7.1	Analisi delle muografie	93
7.2	Risultati	96
8	CONCLUSIONI	117
8.1	Prospettive future	122
A	PERDITE DI ENERGIA	125
A.1	Perdita di energia per ionizzazione	125
A.2	Perdite radiative	127
A.2.1	Bremsstrahlung	127
A.2.2	Produzione di coppie	128
A.2.3	Interazioni foto-nucleari	128
B	ANALISI DELLE IMMAGINI	131
B.1	Condizione di trigger	131
B.2	Rimozione dei pixel isolati	134
	BIBLIOGRAFIA	141

SOMMARIO

Negli ultimi decenni l'astrofisica in banda γ ha compiuto notevoli progressi. In particolare, i telescopi Čerenkov a immagine attuali hanno dimostrato le capacità di questa tecnica nel rivelare sorgenti nella banda del TeV e hanno messo in evidenza la necessità di sviluppare strumenti con una maggiore sensibilità e un campo di vista più grande. Con questi obiettivi, è in fase di progettazione l'osservatorio *Čerenkov Telescope Array* (CTA) il quale sarà formato da due array di telescopi di piccola, media e grande dimensione, in grado di coprire l'intervallo spettrale compreso tra circa 20 GeV e 300 TeV.

In parallelo, negli ultimi anni sono stati compiuti grandi passi in avanti nel campo della muografia vulcanica. Questa tecnica sfrutta l'elevato potere penetrante dei muoni prodotti dall'interazione dei raggi cosmici primari con l'atmosfera terrestre per ricavare informazioni sulla struttura interna degli edifici vulcanici. Nello stesso modo in cui si utilizzano i raggi X per le comuni radiografie, una misura dell'attenuazione del flusso dei muoni atmosferici fornisce informazioni sulla quantità di materia nelle varie direzioni interne al campo di vista del rivelatore. Rispetto agli altri metodi di indagine, la muografia permette di studiare queste strutture con una risoluzione angolare dell'ordine di 10 m e di monitorare variazioni di densità utili a determinare lo stato di attività di un vulcano e ridurre il rischio associato a eventi parossistici. La principale difficoltà nell'applicazione della tecnica è data dal rumore di fondo di cui soffrono i rivelatori a scintillazione comunemente utilizzati. Per migliorare il rapporto segnale-rumore sono necessari diversi piani di rivelazione e diverse lastre schermanti di piombo e ferro che rendono il rivelatore costoso e difficile da trasportare.

Per far fronte a questi problemi, recentemente è stato proposto l'utilizzo di telescopi Čerenkov dedicati alla muografia. Quando un muone di alta energia passa nelle vicinanze dello specchio del telescopio, i fotoni Čerenkov emessi lungo la traiettoria formano sulla camera un tipico segnale ad arco facilmente riconoscibile, dal quale è possibile determinare la direzione di arrivo. Nonostante i telescopi Čerenkov non possano operare nelle ore diurne, questi non soffrono del rumore di fondo degli altri rivelatori e, al contrario dei normali telescopi Čerenkov astrofisici, un telescopio esclusivamente dedicato alla muografia può essere progettato con una struttura di supporto leggera e facilmente trasportabile.

Questo lavoro di tesi si propone come uno studio preliminare di fattibilità necessario per lo sviluppo dell'ottica e dell'elettronica di un telescopio Čerenkov per la muografia vulcanica. A tal fine, ho sviluppato un software di simulazione basato su GEANT4, un framework dedicato all'interazione delle particelle con la materia, che simula il passaggio dei muoni atmosferici attraverso un modello di edificio vulcanico e lo strato di atmosfera che lo separa dal telescopio, e la produzione di fotoni Čerenkov. Per studiare la rivelazione di questi, ho utilizzato il simulatore del prototipo di telescopio Čerenkov di piccola dimensione ASTRI SST-2M progettato per CTA e ho im-

plementato un metodo per ricostruire la direzione dei muoni a partire dalle immagini ottenute con il simulatore. Il modello vulcanico utilizzato si basa sulle caratteristiche del Cratere Sud-Est del Monte Etna, il quale è visibile dal sito di installazione di ASTRI.

Il lavoro presentato è organizzato nel modo seguente:

- nel capitolo 1 viene introdotto il quadro generale e lo stato dell'arte dell'ambito in cui si inserisce questo lavoro di tesi;
- nel capitolo 2 vengono descritte le tecniche di rivelazione della radiazione γ cosmica dallo spazio e da terra e, in particolare, il telescopio ASTRI SST-2M;
- nel capitolo 3 viene fatta una breve introduzione ai metodi Monte Carlo e, in particolare, al framework GEANT4;
- nel capitolo 4 viene descritta l'interazione dei muoni con la materia. In particolare viene ricavata dalle simulazioni una relazione intensità-spessore nella roccia e vengono valutate le deviazioni subite dai muoni nella roccia e nell'aria;
- nel capitolo 5 viene affrontato il problema della rivelazione dei muoni con i telescopi Čerenkov e viene descritto il metodo da me sviluppato per ricostruirne la direzione a partire dalle immagini ottenute con il simulatore del telescopio ASTRI SST-2M;
- nel capitolo 6 viene descritta la struttura della simulazione delle osservazioni muografiche, gli accorgimenti adottati per ridurre i tempi di esecuzione e l'analisi applicata agli eventi ricostruiti;
- nel capitolo 7 viene valutata la capacità del telescopio di distinguere un modello di vulcano senza un condotto magmatico da modelli con condotti di varie dimensioni;
- nel capitolo 8 viene riassunto il lavoro svolto e vengono presentate le prospettive nell'ambito della muografia vulcanica con telescopi Čerenkov.

In questo capitolo introduco, in modo generale, il contesto in cui si sviluppa questo lavoro di tesi.

Nella sezione 1.1 viene fatta una breve descrizione dei raggi cosmici primari e del loro spettro osservato, mentre nella sezione 1.2 viene descritta la componente muonica dei raggi cosmici secondari; in particolare vengono discusse alcune parametrizzazioni dello spettro e la variabilità temporale e spaziale di quest'ultimo.

Nella sezione 1.3 viene introdotto l'utilizzo dei muoni atmosferici per ottenere informazioni sulla struttura interna di grandi volumi. Qui viene descritto il metodo della radiografia muonica applicata ai vulcani e i limiti e le capacità dei rivelatori comunemente utilizzati.

1.1 RAGGI COSMICI

All'inizio del '900 vennero effettuati esperimenti sulla radioattività utilizzando elettroscopi: questi si scaricano rapidamente in presenza di materiale radioattivo, poiché le particelle cariche emesse dal materiale ionizzano il gas al loro interno, e il tasso di perdita di carica veniva utilizzato per misurare il livello di radioattività. Nonostante gli strumenti venissero isolati dalle sorgenti di radiazione note si registrava ugualmente una graduale scarica; questo portò all'ipotesi che fosse presente una sorgente esterna di radiazione ionizzante altamente penetrante. Il primo tentativo di provare la natura terrestre delle sorgenti si deve a Theodor Wulf, il quale, nel 1909, misurò il tasso di ionizzazione atmosferica in cima alla torre Eiffel, ma il tasso misurato risultò troppo simile a quello al suolo per poter trarre delle conclusioni [1]. Nello stesso anno venne effettuata la prima misura a bordo di una mongolfiera: a 1300 m sul livello del mare venne misurata una quantità di radiazione pari a circa un quarto di quella al suolo. Nel 1912 il fisico austriaco Victor Hess raggiunse in mongolfiera un'altitudine di oltre 5000 m, mostrando che la ionizzazione dell'atmosfera, dopo un'iniziale diminuzione, aumenta considerevolmente con la quota e non presenta variazioni significative tra la notte e il giorno: Hess concluse che la sorgente ionizzante fosse di natura extraterrestre ed esclude il sole come sorgente diretta [2]. Successivamente, i risultati di Hess vennero confermati dal fisico tedesco Werner Kolhörster il quale misurò un grado di ionizzazione a circa 9000 m dieci volte maggiore rispetto a quello al livello del mare [3].

Poco prima di Hess, tra il 1907 e il 1911, anche il fisico italiano Domenico Pacini condusse una serie di esperimenti per comprendere la natura della radiazione. In particolare, misurò la radiazione al livello del mare a diversi chilometri dalla costa e sviluppò una tecnica strumentale per ottenere misure sottomarine: la radiazione in mare aperto risultò comparabile con quella

sulla terra ferma, suggerendo che la sorgente radioattiva non potesse essere associata alla crosta terrestre [4]; le misure sottomarine mostrarono una riduzione della radiazione rispetto al livello del mare e risultarono inconsistenti con l'ipotesi di una sorgente terrestre di radiazioni [5].

Successivamente, con l'introduzione del contatore Geiger-Müller nel 1928, fu possibile dimostrare la natura corpuscolare della radiazione cosmica [6]. Nel 1932 Compton dimostrò, con una serie di esperimenti, che si trattava di particelle cariche e, nel 1933, tre esperimenti indipendenti (Alvarez et al. [7], Johnson [8] e Rossi [9]) mostrarono che la radiazione era costituita principalmente da particelle cariche positivamente. Nel 1941 queste particelle vennero identificate come protoni.

1.1.1 Spettro dei raggi cosmici

I raggi cosmici "primari" sono particelle provenienti dallo spazio accelerate da sorgenti astrofisiche, di cui l'1% sono elettroni e il 99% nuclei atomici. Circa il 90% di questi sono protoni (nuclei di idrogeno), il 9% particelle alfa (nuclei di elio) e circa l'1% nuclei di elementi più pesanti. Una piccola frazione è formata da positroni e antiprotoni.

Le particelle cariche sono modulate dal vento solare, il quale decelera e devia i raggi cosmici di bassa energia: sotto i 10 GeV è presente un'anti-correlazione tra l'attività solare e l'intensità del flusso [10]. Inoltre, sempre alle basse energie, il flusso di raggi cosmici è sensibile al campo magnetico terrestre e di conseguenza è dipendente dal luogo e dal periodo di osservazione. Nella regione dello spettro dove queste interazioni sono trascurabili (a energie maggiori di 10 GeV) e fino a circa 1000 TeV, l'intensità differenziale (in particelle/m²/s/sr) media di un nucleone primario è approssimativamente descritta dalla seguente legge di potenza [10]

$$\Phi_n(E_n) \approx 1.8 \cdot 10^4 \left(\frac{E_n}{\text{GeV}} \right)^{-\alpha} \quad (1)$$

E_n è l'energia per nucleone e $\alpha \simeq 2.7$ è l'indice spettrale. In figura 1 è mostrata l'intensità differenziale misurata per diversi tipi di nuclei in funzione dell'energia per nucleo. Lo spettro misurato di tutte le particelle (figura 2) si estende per almeno 12 ordini di grandezza in energia e per più di 30 ordini di grandezza in flusso. Sono presenti due principali cambi di pendenza: uno a circa $10^{15.5}$ eV, detto *ginocchio* ("knee"), e uno a circa $10^{18.5}$ eV, detto *caviglia* ("ankle"). Un ulteriore, ma meno evidente, cambio di pendenza è presente a circa 10^{17} eV, detto *secondo ginocchio*. Al primo ginocchio l'indice spettrale passa da 2.7 a 3.1; al secondo ginocchio lo spettro diventa ancora più ripido ($\alpha \simeq 3.3$); alla caviglia lo spettro si appiattisce nuovamente ($\alpha \simeq 2.7$).

L'origine dei raggi cosmici di energia minore di circa 10^{16} eV è probabilmente dovuta al meccanismo di *accelerazione di Fermi del primo ordine*, che si verifica nelle onde d'urto dei resti di supernova. Lo spettro predetto da questo meccanismo è del tipo

$$I_F(E) \sim E^{-2} \quad (2)$$

Essendo il meccanismo associato a onde d'urto, i modelli basati su questo meccanismo vengono chiamati *modelli ad accelerazione diffusiva da onde d'urto*.

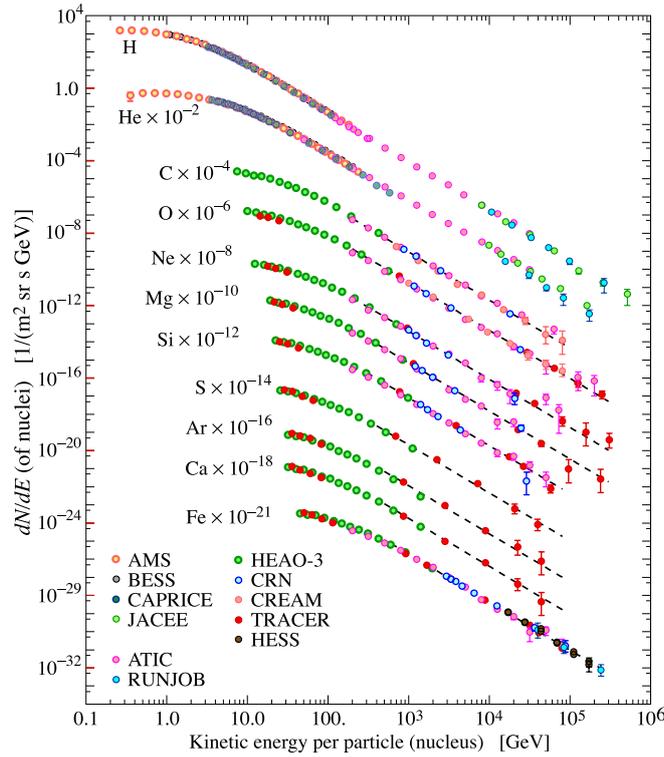


Figura 1: Intensità differenziale misurata dei nuclei dei raggi cosmici primari in funzione dell'energia per nucleo. Fonte: Patrignani et al. [10].

Questi prevedono che circa il 5%-10% dell'energia cinetica associata all'onda d'urto venga trasferita ad un piccolo numero di particelle portandole a energie relativistiche [11].

Lo spettro dei raggi cosmici misurato è dato dallo spettro alla sorgente modulato dalla diffusione nel mezzo interstellare. I modelli di diffusione attuali, applicati allo spettro osservato, predicono un indice spettrale alla sorgente compatibile con quello dello spettro 2. Una relazione approssimata tra lo spettro osservato e quello della sorgente è la seguente [12]

$$I_s \sim \frac{\Phi(E)}{E^{-0.6}} \sim E^{0.6-\alpha} \quad (3)$$

Utilizzando l'indice spettrale osservato dei raggi cosmici si ottiene un indice per la sorgente, $\delta = \alpha - 0.6 \simeq 2.1$, simile a quello predetto dal meccanismo di Fermi. Il fatto che i modelli di accelerazione basati sul modello di Fermi prevedano un'energia massima consistente con l'energia a cui si osserva il ginocchio suggerisce che il cambio di pendenza sia dovuto a una transizione tra meccanismi diversi e, quindi, tra sorgenti d'accelerazione diverse. Il primo ginocchio è interpretato come la massima energia a cui sono accelerati i protoni, mentre il secondo ginocchio è il limite energetico per gli elementi ad alto Z [13].

Osservando i raggi cosmici non è possibile risalire direttamente alla sorgente cosmica che li genera. Infatti, la traiettoria delle particelle cariche viene continuamente deviata dal campo magnetico galattico e l'informazione sull'origine viene cancellata. Le sorgenti di raggi cosmici possono essere

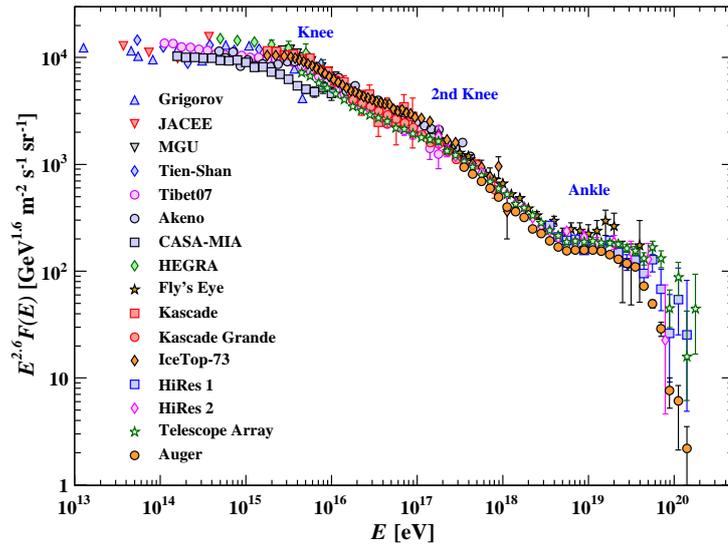


Figura 2: Spettro dei raggi cosmici in funzione dell'energia per nucleo. Sono visibili i caratteristici cambi di pendenza a circa $10^{15.5}$ eV (ginocchio), 10^{17} eV (secondo ginocchio) e $10^{18.5}$ eV (caviglia). Fonte: Patrignani et al. [10].

localizzate solo attraverso le particelle neutre, cioè fotoni e neutrini, o tramite le particelle cariche con energie maggiori di 10^{20} eV, le quali possono conservare informazioni sulla sorgente non essendo significativamente deviate dal campo magnetico galattico ed extragalattico. Per lo stesso motivo si pensa che l'origine dei raggi cosmici oltre il ginocchio sia extragalattica. I meccanismi di accelerazione a queste energie non sono chiari, e le sorgenti potrebbero essere nuclei galattici attivi. La possibilità di studiare le sorgenti extragalattiche con i raggi cosmici dipende dall'intensità del campo magnetico extragalattico, il quale determina l'entità della diffusione delle particelle durante la propagazione.

1.2 MUONI ATMOSFERICI

Quando un raggio cosmico primario (un protone o un nucleo atomico) impatta con l'atmosfera terrestre interagisce con i nuclei dell'aria e produce uno sciame di particelle, detto *sciame adronico*, composto da frammenti nucleari (elementi più leggeri) e, principalmente, pioni e kaoni. I pioni neutri decadono *istantaneamente* in due fotoni

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma, \tau_{\pi^0} \simeq 8.4 \cdot 10^{-17} \text{ s}$$

e generano la *componente elettromagnetica* dello sciame (questo tipo di sciame sarà descritto nel capitolo 2). I kaoni e i pioni carichi decadono in muoni e neutrini per interazione debole

$$\left. \begin{array}{l} \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \end{array} \right\} \tau_{\pi^\pm} \simeq 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$\left. \begin{array}{l} K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \end{array} \right\} \tau_{K^\pm} \simeq 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

e generano la *componente muonica* dello sciame, la quale, al livello del mare, è la componente più abbondante di particelle cariche. Nel caso dei pioni carichi la possibilità di interazione con la materia non è trascurabile, mentre, quelli neutri decadono dopo aver percorso una *distanza di decadimento*

$$d_{\pi^0} \simeq \Gamma 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

dove $\Gamma = 1/\sqrt{(1-\beta^2)}$ è il *fattore di Lorentz*. Essendo la vita media dei muoni di circa $2.2 \mu\text{s}$, la distanza di decadimento per kaoni, pioni e muoni in funzione dell'energia è

$$\begin{aligned} d_K &= \Gamma c \tau_K \simeq 7 \left(\frac{E_K}{\text{GeV}} \right) \text{ [m]} \\ d_\pi &= \Gamma c \tau_\pi \simeq 56 \left(\frac{E_\pi}{\text{GeV}} \right) \text{ [m]} \\ d_\mu &= \Gamma c \tau_\mu \simeq 6.2 \left(\frac{E_\mu}{\text{GeV}} \right) \text{ [km]} \end{aligned} \quad (4)$$

1.2.1 Spettro dei muoni atmosferici

Poiché i pioni e i kaoni sono prodotti dall'interazione di un raggio cosmico primario con l'atmosfera a circa 15 km di quota, lo spettro dei muoni atmosferici dipende dallo spettro energetico con cui i kaoni e i pioni vengono prodotti nello sciame e dalla competizione tra interazione nel materiale e decadimento; cioè dalla probabilità che questi decadano prima di interagire durante la propagazione nell'atmosfera. Lo spettro dei muoni a una certa altezza sul livello del mare è dato dalla convoluzione dello spettro prodotto, delle perdite energetiche in atmosfera e del decadimento.

Lo spettro dei muoni atmosferici può essere diviso in tre principali regioni energetiche [14]:

- $E_\mu \lesssim 1 \text{ GeV}$: a queste energie l'interazione dei kaoni e dei pioni con l'atmosfera è trascurabile, ma il decadimento e le perdite energetiche dei muoni sono importanti. In questo intervallo lo spettro risulta quasi costante;
- $1 \text{ GeV} \lesssim E_\mu \lesssim E_{\pi,K}$: dove $E_{\pi,K}$ sono le energie (per i pioni e i kaoni) oltre le quali la lunghezza di interazione diventa maggiore della distanza di decadimento. In questo intervallo energetico lo spettro dei muoni è lo stesso delle particelle primarie poiché decadono tutte;
- $E_\mu \gtrsim E_{\pi,K}$: i pioni e i kaoni interagiscono prima di decadere in muoni. In queste interazioni, i pioni possono generare altri pioni i quali possono decadere in muoni di energia più bassa. Di conseguenza lo spettro dei muoni ad alte energie risulta più ripido di quello dei pioni.

Il flusso dei muoni presenta una dipendenza dall'angolo zenitale per via dell'aumento dello strato di atmosfera da attraversare: i muoni decadono prima di arrivare sulla superficie o vengono assorbiti; i pioni e i kaoni di alta energia, invece, hanno una maggiore probabilità di decadere in muoni. L'effetto è un aumento, rispetto alla direzione verticale, del flusso dei muoni

di alta energia e una diminuzione alle basse energie. Ad esempio, per energie dell'ordine del GeV la dipendenza dall'angolo zenitale è del tipo $\cos^n \theta_z$, con $n \simeq 2 - 3$; mentre, a 1 TeV il flusso aumenta con un andamento del tipo $1/\cos \theta_z$.

Esistono due modi per derivare delle parametrizzazioni per il flusso dei muoni atmosferici [15]:

- simulazioni Monte Carlo in cui viene simulato un gran numero di sciami adronici e la successiva propagazione della componente muonica;
- adattamento di funzioni modello parametriche al flusso misurato sul livello del mare.

In quest'ultimo caso la funzione modello da adattare può essere derivata sia attraverso considerazioni fisiche sia scelta appositamente per ottenere il miglior adattamento alle misure. Solitamente, in modelli di questo tipo si assume uno spettro dei raggi cosmici primari del tipo $E^{-2.7}$ e una produzione di muoni dovuta al solo decadimento di pioni e kaoni. Una forma analitica per lo spettro dei muoni atmosferici fu proposta da Bugaev (1970) e successivamente diffusa da Gaisser (1990):

$$\Phi_G(E_\mu, \theta_z) = A_G E_\mu^{-\gamma} \left(\frac{1}{1 + \frac{\hat{E}_\mu}{E_{0,\pi}} \cos \theta_z} + \frac{B_G}{1 + \frac{\hat{E}_\mu}{E_{0,K}} \cos \theta_z} + r_c \right) \quad (5)$$

dove i parametri liberi sono: il fattore di scala A_G ; il fattore di bilancio B_G , il quale dipende dal rapporto tra i muoni prodotti dal decadimenti dei kaoni e quello dei pioni; il rapporto r_c tra il numero di muoni e pioni prodotti; e l'indice spettrale γ . Le energie $E_{0,(\pi,K)}$ sono le energie (per i pioni e i kaoni) per le quali la probabilità di interazione, lungo la direzione verticale, e di decadimento si eguagliano.

Questa parametrizzazione è valida ad energie elevate (> 100 GeV) e ad angoli zenitali non troppo grandi ($\theta_z < 70^\circ$). A partire dal modello di Geisser, sono stati derivati diversi modelli per parametrizzare il flusso ad angoli maggiori e a energie più basse. Tra questi, Bugaev derivò il seguente modello empirico dello spettro verticale

$$\Phi_B(p_\mu) = A_B p_\mu^{-(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3)} \quad (6)$$

dove p_μ è l'impulso e $y = \log p_\mu$; il valore dei parametri liberi A_B e a_i dipende dall'intervallo energetico in esame; il modello è valido per energie maggiori di 1 GeV.

Un altro modello basato su quello di Bugaev è stato proposto da Reyna [16] per tener conto della dipendenza dall'angolo zenitale:

$$\Phi_{R-B}(p_\mu, \theta_z) = \cos^3 \theta_z \Phi_B(p_\mu \cos \theta_z) \quad (7)$$

dove Φ_B è un'opportuna parametrizzazione del modello 6 valida per energie comprese nell'intervallo 1 GeV-2000 GeV:

$$\begin{aligned}
 A_B &= 2.53 \cdot 10^{-3} \\
 a_0 &= 0.2455 \\
 a_1 &= 1.288 \\
 a_2 &= -0.2555 \\
 a_3 &= 0.0209
 \end{aligned} \tag{8}$$

In figura 3 è mostrato il confronto (tratto da Lesparre et al. [15]) dei modelli appena descritti con altri due modelli: il Gaisser-MUSIC, derivato dal Gaisser (5); e il Reyna-Hebbeker, ottenuto utilizzando il modello di Hebbeker (derivato dal Bugaev), nell'equazione 7, al posto di Φ_B . I modelli sono confrontati in un intervallo energetico $10 \text{ GeV} < E_\mu < 10^4 \text{ GeV}$ e ad angoli zenitali di 50° e 85° . A 50° i modelli Gaisser-MUSIC, Reyna-Hebbeker e Reyna-Bugaev sono consistenti tra loro. A 85° l'andamento del Gaisser-MUSIC si discosta totalmente dagli altri; a basse energie i diversi modelli non sono consistenti tra loro (a 10 GeV il Reyna-Bugaev è circa il doppio del Reyna-Hebbeker).

1.2.2 Variabilità dello spettro

Il flusso dei muoni varia in relazione all'attività solare, alla latitudine geomagnetica, all'altitudine e alle condizioni atmosferiche. Se occorre confrontare misure di flusso ad energie minori di 20 GeV bisogna tener conto del periodo e del luogo delle rispettive misure [17].

CAMPO GEOMAGNETICO Il campo magnetico terrestre impedisce ai raggi cosmici di bassa energia di penetrare l'atmosfera; il numero di particelle secondarie di bassa energia viene ridotto e di conseguenza anche il flusso dei muoni atmosferici. Vicino all'equatore terrestre l'effetto di riduzione è significativo sullo spettro dei muoni fino a energie di circa 5 GeV e aumenta con la latitudine [17].

ATTIVITÀ SOLARE La variazione dell'intensità del vento solare, legata all'attività solare, porta ad una modulazione variabile dello spettro dei raggi cosmici primari che impattano l'atmosfera; l'effetto può essere parametrizzato nel seguente modo [18]

$$N(E) dE = KE^{-\gamma} \rightarrow K(E + C_2)^{-\gamma} dE \tag{9}$$

dove C_2 varia tra 1.8, al minimo dell'attività solare, a 3, al massimo. L'effetto sullo spettro primario causa modifiche fino al 10% nello spettro dei muoni ad energie minori di 20 GeV.

ALTITUDINE Il flusso di muoni dipende dall'altitudine poiché diminuisce lo strato di atmosfera tra il punto di interazione del raggio cosmico primario e il punto di osservazione. Ad energie maggiori di 10 GeV e altitudini minori

di 1000 m il rapporto tra il flusso verticale Φ_h ad una quota h e quello al suolo Φ_0 è parametrizzabile come [14]

$$\Phi_h = \Phi_0 e^{-h/L(p_\mu)} \quad (10)$$

dove $L = 4900 + 750(\frac{p_\mu}{\text{GeV}})$ è un fattore di scala dipendente dal momento p_μ dei muoni.

CONDIZIONI ATMOSFERICHE La variazione delle condizioni atmosferiche influisce sull'interazione dei raggi cosmici primari e secondari e dei muoni. Un aumento di temperatura porta ad un'espansione dell'atmosfera e alla diminuzione della densità dell'aria. Di conseguenza la probabilità di interazione di pioni e kaoni diminuisce e aumenta quella di decadimento a favore di una maggior produzione di muoni; allo stesso tempo, l'espansione dell'atmosfera aumenta la distanza tra il punto di generazione dei muoni e il rivelatore, portando ad un maggior tasso di decadimento dei muoni [14]. Per i muoni a bassa energia l'aumento del tasso di decadimento domina sull'aumento del numero di muoni prodotti e una variazione positiva di temperatura ΔT porta ad una diminuzione del flusso. L'effetto opposto avviene per i muoni di alta energia: questi non hanno il tempo di decadere e la variazione del flusso è positiva. Per questi ultimi è stata trovata una relazione tra variazione del flusso e variazione della temperatura media atmosferica, tra la superficie terrestre e la sommità dell'atmosfera, T_{eff} :

$$\frac{\Delta I_\mu}{I_\mu} = \alpha_T \frac{\Delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} \quad (11)$$

dove il coefficiente α_T è detto *coefficiente di temperatura atmosferica* ed è indicativo della frazione di kaoni e pioni che sono sensibili alla variazione di temperatura.

Variazioni locali della pressione atmosferica causano fluttuazioni di scarsa importanza sul flusso dei muoni, anche a basse energie [15].

1.3 RADIOGRAFIA MUONICA

Il metodo radiografico più comune è quello a raggi X di tipo diagnostico (in ambito medico) o industriale. L'idea alla base del metodo è quella di interporre l'oggetto da esaminare tra una sorgente di raggi X e un rivelatore: quando la radiazione attraversa l'oggetto una parte viene assorbita; poiché l'attenuazione è maggiore nelle regioni più dense, una comune lastra radiografica risulta "scurita" maggiormente se è esposta a un flusso di radiazione maggiore e la risultante scala di grigi fornisce un'informazione diretta sulla quantità di materia interposta tra la sorgente e la lastra e sul tipo di materiale coinvolto. Nel caso di materiali a basso numero atomico (ad esempio, il tessuto muscolare) l'utilizzo dei raggi X limita questo tipo di analisi a oggetti di dimensioni dell'ordine del metro; per materiali ad alto numero atomico il potere penetrante dei raggi X, anche alle lunghezze d'onda più basse, è notevolmente ridotto; ad esempio, nel piombo metà dei fotoni di un fascio di 120 keV sono fermati dopo circa un decimo di millimetro.

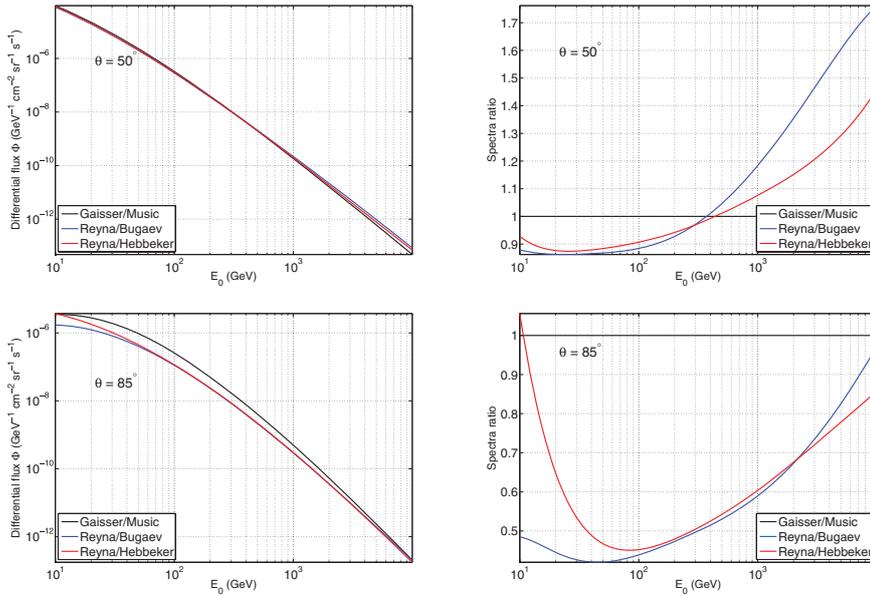


Figura 3: Confronto tra alcuni modelli empirici per il flusso dei muoni atmosferici al livello del mare, ad angoli zenitali di 50° e 85° , e in un intervallo energetico $10 \text{ GeV} < E_\mu < 10^4 \text{ GeV}$. A sinistra è mostrato il flusso differenziale, a destra il rapporto con il Gaisser-MUSIC. Fonte: Lesparre et al. [15].

I muoni sono leptoni carichi identici agli elettroni tranne che per la massa, circa 207 volte maggiore ($m_\mu \approx 0.106 \text{ GeV}/c^2$). Di conseguenza, durante la propagazione in un materiale, sia la deviazione dalla traiettoria sia l'energia persa per bremsstrahlung interagendo con gli atomi del materiale risultano di entità molto minore che nel caso degli elettroni. In figura 4 è mostrato il potere penetrante medio di elettroni, protoni e muoni nel ferro (sinistra) e nella roccia (destra): a partire da 1 GeV il potere penetrante dei muoni è 10 volte maggiore di quello di elettroni e protoni; nella roccia, a 1 TeV i muoni riescono ad attraversare spessori dell'ordine di 10^3 m , mentre protoni ed elettroni non superano il metro. Questa proprietà dei muoni permette di utilizzarli esattamente come i raggi X per ottenere radiografie di strutture di grandi dimensioni. Il flusso dei muoni atmosferici è ben conosciuto, così come i processi di interazione muone-materia, e confrontando il flusso misurato dopo l'attraversamento di una struttura con quello atteso è possibile stimare la quantità di materia attraversata lungo la direzione di osservazione. In questo modo, conoscendo la geometria della struttura, è possibile risalire alla densità media del materiale attraversato.

La prima applicazione pratica dell'utilizzo dei muoni per ottenere informazioni sulla struttura interna di grandi volumi risale al 1955 quando George [19] misurò la quantità di roccia e ghiaccio sovrastante il tunnel Guthega-Munyang, in Australia. Nel 1970 Alvarez et al. [20] applicarono il metodo alla ricerca di camere nascoste nella piramide di Chefren, in Egitto. I risultati delle osservazioni vennero comparati con simulazioni della propagazione dei muoni nella piramide alla ricerca di deviazioni nel flusso dell'ordine del 10% che avrebbe prodotto una camera di dimensioni simili a quelle presenti nelle altre piramidi: nella porzione di piramide sotto esame non fu rilevata nessuna camera di queste dimensioni. Nel 1987 Minato [21] misurò il

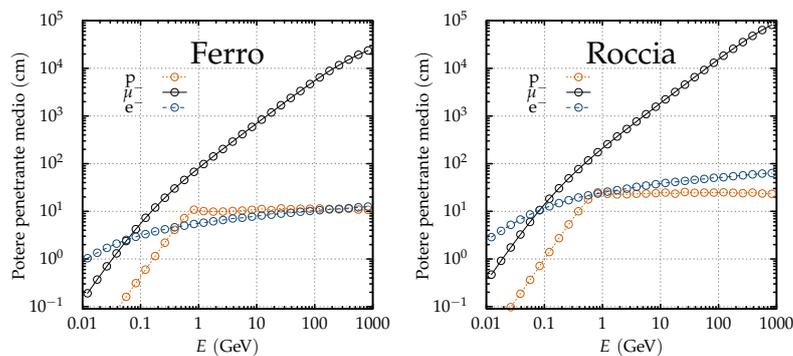


Figura 4: Confronto tra il range medio di muoni, elettroni e protoni nel ferro (sinistra) e nella roccia (destra): oltre 1 GeV i muoni hanno un potere penetrante molto maggiore. Qui il potere penetrante medio è definito come lo spessore al quale il numero di particelle sopravvissute dopo l'attraversamento è la metà di quello delle incidenti; il metodo con cui è stato calcolato è descritto in sezione 4.3.

flusso di muoni in 64 stazioni sotterranee della metropolitana di Nagoya, in Giappone. La correlazione trovata tra il flusso e la struttura delle stazioni (profondità e spessore di terreno sovrastante) dimostrò le potenzialità del metodo nel ricavare informazioni sulle proprietà strutturali di opere di grandi dimensioni in modo non invasivo. Recentemente, nel 2017, Morishima et al. [22] hanno applicato nuovamente la radiografia muonica alle piramidi, questa volta alla Grande Piramide di Giza. I risultati, ottenuti utilizzando tre diversi tipi di rivelatori, hanno confermato la presenza di un vuoto di almeno 30 m di lunghezza con una significatività complessiva di 5.8σ .

Nel 2003 Borozdin et al. [23] proposero un nuovo metodo di muografia: la *muografia a deviazione*. A differenza della muografia ad assorbimento, questa è basata sulla deviazione che i muoni subiscono interagendo con i nuclei atomici del materiale attraversato: la struttura tridimensionale interna di un volume può essere ricostruita tracciando individualmente ogni muone prima e dopo l'attraversamento. Borozdin et al. [23] dimostrarono di poter rivelare oggetti ad alto numero atomico di piccole dimensioni all'interno di container metallici con un tempo di acquisizione dell'ordine del minuto (un rivelatore apposito è stato proposto nel 2013 da Riggi et al. [24]). In uno studio di fattibilità del 2012, Borozdin et al. [25] dimostrarono che la tecnica può essere applicata all'analisi del nocciolo del reattore della centrale nucleare di Fukushima Dai-ichi ottenendo risultati utili in tempi di osservazione brevi (6 settimane).

1.3.1 Muografie vulcaniche

La muografia a deviazione è sensibile a materiali ad alto Z e viene eseguita registrando la traiettoria dei muoni in entrata e in uscita dal volume di interesse. Questo rende la tecnica inadatta ad applicazioni geologiche.

L'uso della muografia ad assorbimento come strumento per indagare la struttura interna dei vulcani fu proposto per la prima volta da Nagamine et al. [26] nel 1994. L'idea alla base del metodo è quella di misurare l'attenuazione del flusso dei muoni atmosferici nel loro passaggio attraverso l'e-

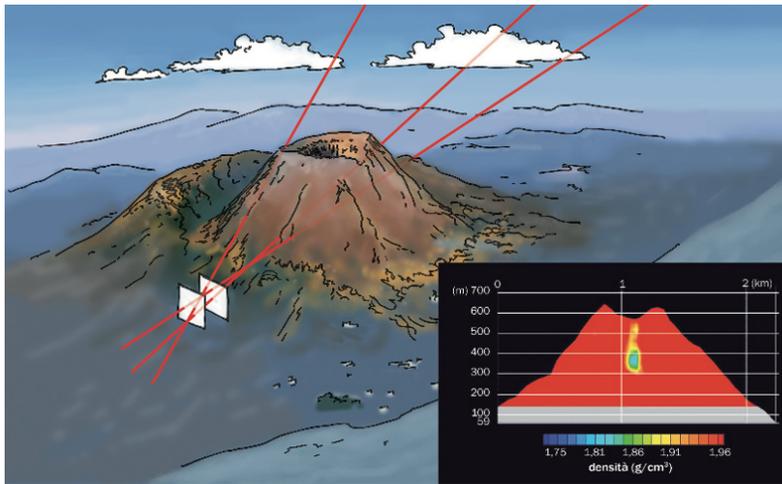


Figura 5: Illustrazione del principio di funzionamento della muografia vulcanica: un rivelatore, posizionato alla base del vulcano, registra la direzione di arrivo di ogni muone; successivamente il flusso misurato viene confrontato con quello atteso ottenendo informazioni sulla quantità di materia attraversata in ogni direzione. In basso a destra è mostrata la muografia del vulcano Satsuma-Iwojima, in Giappone, ottenuta da Tanaka et al. [28]. Fonte: Lista [29].

dificio vulcanico (figura 5) per conoscerne la struttura interna e monitorare i cambiamenti di densità lungo il condotto magmatico che possono precedere un'eruzione. La conoscenza quantitativa della struttura interna di un vulcano è il punto chiave per il monitoraggio dello stadio della sua attività. Questo permette di prevedere lo stile eruttivo del vulcano stesso e aiutare a ridurre quindi i pericoli da esso determinati. La struttura interna dei vulcani è studiata principalmente attraverso tomografie sismiche, indagini geo-elettriche e misure gravitazionali; in particolare, con quest'ultimo metodo le informazioni sulla distribuzione di densità nella struttura si ottengono tramite opportuni modelli per la soluzione del problema inverso associato, la quale presenta delle ambiguità intrinseche considerevoli dato che la distribuzione di densità che produce una certa misura di gravità non è unica. La muografia vulcanica permette di ottenere delle misure indipendenti della densità che, integrate a quelle dei metodi precedenti, permettono di ridurre considerevolmente queste ambiguità [27].

La prima applicazione della muografia ai vulcani risale al 2007 e si deve a un gruppo di ricerca dell'università di Tokyo guidato da H. Tanaka [27, 30, 31]. Le muografie furono effettuate al duomo lavico Showa-shinzan del Monte Uso e alla cima del Monte Asama, in Giappone. Nel primo caso riuscirono a rivelare un condotto con un diametro misurato di 102 ± 15 m. I risultati mostrarono la capacità del metodo di riuscire a ottenere mappe di densità della struttura con una risoluzione spaziale dell'ordine di 10 m, molto migliore di quella ottenibile con gli altri metodi di indagine. La prima sequenza temporale della mappa di densità di un vulcano in eruzione è stata ottenuta da Tanaka et al. [32] nel 2013: due episodi eruttivi del vulcano Satsuma-Iwojima furono osservati con una frequenza di 10 muografie mensili (3 giorni di acquisizione per muografia), riuscendo a rivelare variazioni di densità correlate con le fasi eruttive, seppur con difficoltà legate ai limiti

statistici dovuti ai grandi spessori coinvolti. Altre osservazioni muografiche di vulcani sono state effettuate nell'ultimo decennio: ad esempio, nel 2012 in Francia, al vulcano Puy de Dome da Cârloganu et al. [33] e al vulcano La Soufrière da Lesparre et al. [34] (sull'isola di Saint Vincent), e in Italia alla sommità del Cratere Sud-Est del Monte Etna nel 2013 da Carbone et al. [35].

IL RUMORE DI FONDO Diversi tipi di rivelatori sono stati utilizzati per la muografia, principalmente rivelatori a scintillazione, rivelatori a gas e rivelatori a emulsione nucleare. Nonostante l'alta risoluzione degli strumenti impiegati (in particolare di quelli a emulsione), diversi esperimenti muografici sono falliti a causa della contaminazione dei conteggi da parte di elettroni, protoni e muoni di energia minore di 1 GeV prodotti da sciami adronici o diffusi durante la propagazione in atmosfera [36]; questi, se non adeguatamente schermati, causano la rivelazione di false tracce muoniche nei rivelatori. La misura della densità media della struttura lungo una direzione richiede una valutazione precisa del flusso attenuato dei muoni atmosferici: questo diminuisce all'aumentare dello spessore di roccia e dell'angolo zenitale. La presenza di un rumore di fondo causa una sovrastima del flusso che porta a una sottostima dello spessore di roccia lungo la linea di vista e, quindi, a una sovrastima della densità media. L'entità di questa dipende dal livello di rumore a cui è esposto il rivelatore e dal rapporto con il flusso di muoni atteso: fissato il livello di rumore, la qualità della muografia peggiora lungo le direzioni che coinvolgono grandi spessori di roccia (a seconda dell'entità del rumore, ma tipicamente maggiori di 500 m). Una valutazione non ottimale del rumore presente nel sito di osservazione può influenzare fortemente l'esito di un esperimento muografico, ad esempio:

- nella muografia del Puy de Dome ottenuta da Cârloganu et al. [33], il rumore, unito alla bassa statistica, nelle regioni centrali del vulcano "imita" una bassa densità media, limitando la validità della muografia alle regioni superficiali;
- nella muografia del La Soufrière ottenuta da Lesparre et al. [34] uno dei due rivelatori è stato esposto a un livello di rumore molto maggiore dell'altro (probabilmente per ragioni topografiche), portando a stime della densità media non consistenti;
- nella muografia della sommità Cratere Sud-Est dell'Etna ottenuta da Carbone et al. [35] il flusso osservato risultò fino a 10 volte maggiore di quello atteso rendendo difficile una stima quantitativa precisa della densità media.

Per misurare la densità media di una struttura vulcanica la riduzione delle false tracce dovute a particelle di bassa energia è un problema di importanza fondamentale e non facilmente risolvibile. Solitamente la riduzione del rumore si basa sul posizionamento in un luogo topograficamente ottimale (possibilmente schermato da altre montagne) o posizionando direttamente il rivelatore sottoterra a un'opportuna profondità. Nel caso di misure accurate della densità media che coinvolgono grandi spessori, o brevi tempi di acquisizione, è necessario schermare opportunamente il rivelatore rendendolo più costoso e difficile da trasportare; ad esempio, per ottenere la sequenza

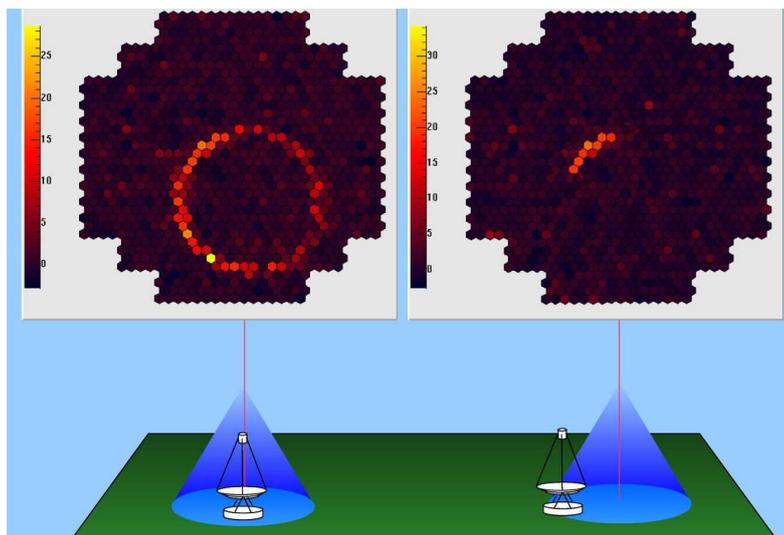


Figura 6: Illustrazione del principio di rivelazione dei muoni con un telescopio Čerenkov a immagine. Se il muone attraversa lo specchio i fotoni vengono focalizzati sulla camera in un anello (sinistra), altrimenti in un arco (destra). Il segnale è facilmente riconoscibile dal fondo cielo. Fonte: Catalano et al. [37].

temporale della mappa di densità del vulcano Satsuma-Iwojima il rivelatore utilizzato da Tanaka et al. [32] conteneva un modulo per il rigetto delle particelle di bassa energia composto da lastre di piombo e acciaio per un peso complessivo maggiore di 1.5 tonnellate. I moduli del rivelatore dovettero essere trasportati separatamente e assemblati nel sito di osservazione scelto; la sola fase di assemblaggio è durata 24 ore e ha richiesto il lavoro di 5 persone.

MUOGRAFIE CON TELESCOPI ČERENKOV Recentemente è stato proposto, da Catalano et al. [37], l'utilizzo dei telescopi Čerenkov come rivelatori per la muografia. In atmosfera, la luce Čerenkov è emessa quando una particella carica si propaga con velocità maggiore di quella della luce nell'aria (il processo sarà descritto in dettaglio nella sezione 2.2); per i muoni al livello del mare questo si traduce in una soglia energetica di circa 4.4 GeV, la quale aumenta con l'altitudine. I telescopi Čerenkov ad immagine (*Imaging Atmospheric Čerenkov Telescope*, IACT) consistono in un sistema ottico che focalizza la luce Čerenkov su una matrice di fotomoltiplicatori (anche questi sono descritti in dettaglio nella sezione 2.2). Quando un muone impatta sullo specchio primario del telescopio la luce Čerenkov emessa negli ultimi 200 m-300 m lungo la sua traiettoria forma un anello (o un arco di anello se il muone non colpisce il primario) sulla camera posta sul piano focale (figura 6). Il centro di questo anello (o arco di anello) coincide con la direzione di arrivo del muone che risulta quindi univocamente determinata. Nonostante questi telescopi abbiano lo svantaggio di poter operare solo di notte, hanno l'enorme vantaggio di avere un rumore di fondo derivante da particelle cariche trascurabile per le osservazioni muografiche. Come già accennato, la maggiore sorgente di questo rumore di fondo per i tradizionali rivelatori di particelle è rappresentata dai "falsi muoni", ovvero particelle cariche prodotte negli sciami atmosferici che impattano isotropicamente sul

rivelatore. Questo tipo di rumore viene eliminato solo in parte con tecniche di tracciamento delle particelle utilizzando più piani di rivelazione opportunamente schermati con piani di piombo e ferro. L'analisi della traccia su più piani di rivelazione permette di distinguere parte delle particelle di bassa energia ($\lesssim 1$ GeV) dai "veri muoni" attraverso la misura della deviazione dalla direzione d'ingresso delle stesse nel materiale ad alta densità. L'utilizzo di numerosi piani schermanti di piombo e ferro rendono questo tipo di strumenti costosi, pesanti e non trasportabili facilmente. Per uno IACT, come detto precedentemente, il muone è rivelato attraverso la luce Čerenkov prodotta lungo la sua traiettoria. Il fatto che l'effetto Čerenkov sia un effetto a soglia è di fondamentale importanza per la muografia. Di fatto, la soglia rappresenta una prima selezione dei muoni incidenti che esclude quelli di bassa energia diffusi in atmosfera, mentre per le altre particelle cariche la selezione è data dalla capacità di imaging del telescopio. L'unico fondo diffuso per uno IACT è dovuto ai muoni di energia superiore all'energia di soglia che impattano lo specchio primario con un angolo incidente all'interno del campo di vista, ma che non provengono dalla montagna. Questi sono principalmente gli eventi provenienti dal suolo e deviati nel campo di vista del telescopio (detti eventi *back-scattered*).

Catalano et al. [37] hanno ottenuto una prima stima delle capacità muografiche di uno IACT basandosi sul prototipo ASTRI (sviluppato per i telescopi di piccole dimensioni del futuro osservatorio per l'astronomia gamma Čerenkov Telescope Array), e su un modello semplificato del Cratere Sud-Est (CSE) del Monte Etna, visibile dal punto in cui è installato il telescopio. Catalano et al. hanno stimato, sulla base di misure precedenti, che nel campo di vista del telescopio sono attesi circa $3 \cdot 10^{-3}$ muoni atmosferici back-scattered per notte contro i 5000 per notte che hanno stimato essere quelli che impattano sullo specchio primario. Inoltre, i risultati ottenuti con un modello molto semplificato del CSE hanno mostrato un guadagno di un fattore 10 in sensibilità rispetto ai rivelatori tradizionali. In Del Santo et al. [38] hanno quindi proposto una possibile configurazione (molto schematizzata) per uno IACT leggero, a basso costo e facilmente trasportabile da un sito di osservazione a un altro.

Il mio lavoro di tesi si inserisce in questo progetto come propedeutico e fondamentale per lo sviluppo di un dettagliato studio di fattibilità e per la progettazione del sistema ottico e della camera di un telescopio Čerenkov dedicato esclusivamente alla radiografia muonica dei vulcani.

2

ASTRONOMIA IN BANDA GAMMA E TELESCOPI ČERENKOV

In questo capitolo vengono rapidamente introdotte le tecniche di osservazione della radiazione cosmica ad altissime energie.

Nella sezione 2.1 è descritto il principio di funzionamento dei telescopi γ spaziali (sezione 2.1.1), utilizzando come esempio il telescopio Fermi-LAT, e dei sistemi di rivelatori terrestri (sezione 2.1.2), necessari alla rivelazione di fotoni γ con energia maggiore del TeV.

Nella sezione 2.2 viene descritto il processo di emissione di radiazione Čerenkov e il principio di funzionamento della corrispondente tecnica di *imaging*. Sono anche descritti sommariamente alcuni sistemi di telescopi Čerenkov attualmente attivi e i risultati osservativi al momento ottenuti.

Infine, nella sezione 2.3 è descritto il futuro osservatorio Čerenkov Telescope Array e, in particolare, il prototipo di telescopio di piccole dimensioni SST-2M ASTRI, dedicato alla rivelazione dei fotoni gamma più energetici (energie maggiori del TeV).

2.1 ASTRONOMIA A RAGGI γ

I raggi γ costituiscono la parte più energetica dello spettro elettromagnetico. Fanno parte di questa categoria i fotoni con energia maggiore indicativamente di circa 100 keV. Sebbene la separazione con i raggi X non sia ben definita, questi ultimi sono solitamente associati alla radiazione prodotta da processi atomici o termici, mentre i raggi γ a quella prodotta da processi nucleari o non termici. Sulla terra i raggi γ sono prodotti principalmente nei decadimenti nucleari e rappresentano la parte meno energetica dello spettro γ (energie fino a qualche MeV). Solo in alcune circostanze la sorgente astrofisica è di tipo radioattivo, come nel caso della supernova 1987A nel cui spettro è stata identificata una riga a 843 keV dovuta al decadimento del ^{56}Co [39]. La maggior parte dei raggi γ cosmici vengono prodotti da fenomeni astrofisici altamente energetici che coinvolgono particelle accelerate fino a energie relativistiche. Lo spettro γ di queste sorgenti dipende dalla natura delle particelle accelerate e dai processi di interazione a cui queste vanno incontro, che generano la radiazione.

2.1.1 Astronomia a raggi γ dallo spazio

Poiché l'atmosfera è completamente opaca ai raggi γ , la loro rivelazione è possibile solo fuori dall'atmosfera. Per questo motivo, l'evoluzione delle osservazioni γ è stata limitata dai progressi della tecnologia spaziale. Nonostante le potenzialità di queste osservazioni fossero state comprese già negli anni '50 [40], la prima misura significativa di raggi γ di origine astrofisica avvenne nel 1968 quando il terzo *Orbiting Solar Observatory* (OSO3) della NA-

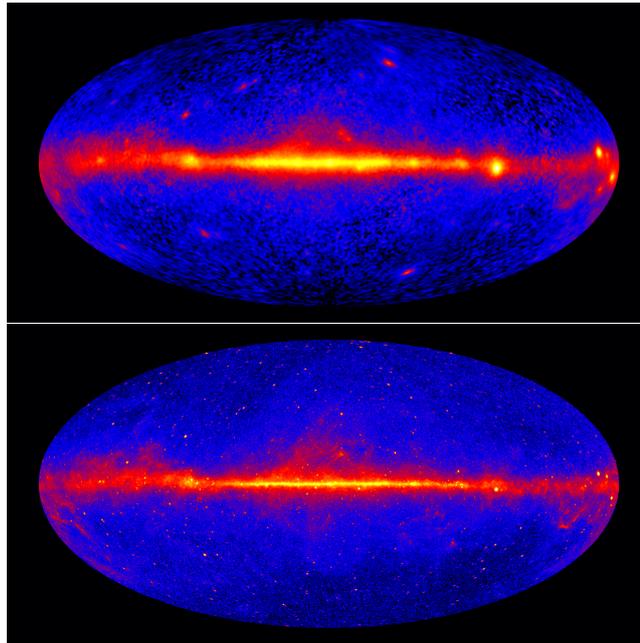


Figura 7: Sopra) Il cielo γ visto da EGRET in 9 anni di osservazione. **Sotto)** Mappa del cielo γ prodotta con i dati raccolti, dal 2008 al 2015, dal Fermi-LAT. Fonte: NASA/EGRET Team (sopra) e NASA/DOE/Fermi LAT Collaboration (sotto).

SA rivelò un flusso di raggi γ con energia maggiore di 70 MeV provenienti dal piano galattico [41].

EGRET Il punto di svolta dell'astronomia γ si ebbe con il lancio del *Compton Gamma Ray Observatory* (CGRO) nel 1991, dotato di 4 rivelatori che coprivano una finestra spettrale compresa tra 15 keV e 30 GeV. In particolare, con il rivelatore *Energetic Gamma Ray Experiment Telescope* (EGRET), sensibile ai fotoni con energia compresa tra 20 MeV e 30 GeV, in 9 anni di attività fu possibile ottenere la prima mappa del cielo γ (figura 7), nella quale una sorgente discreta appare come un segnale che eccede la componente diffusa. Dall'analisi finale dei dati fu prodotto il *terzo catalogo EGRET*, contenente 271 sorgenti. Tra queste, furono identificate 93 blazar e 5 pulsar. Per 170 sorgenti non fu trovata una possibile associazione con oggetti astrofisici noti [42].

FERMI-LAT A 17 anni dal lancio del CGRO, nel 2008, viene messo in orbita il *Large Area Telescope* (LAT) [43], a bordo del satellite *Fermi Gamma-ray Space Telescope* (Fermi). Grazie alle nuove tecnologie sviluppatesi dopo il lancio di EGRET, il LAT è dotato di una maggiore area efficace di raccolta¹ (circa 9500 cm², quasi 6 volte maggiore di quella di EGRET) e di un ampio campo di vista (circa 2.4 sr, quasi 5 volte maggiore di quello di EGRET). La risoluzione angolare dipende dall'energia del fotone γ : a 1 GeV è di circa 0.8° (quasi la metà di quella di EGRET, alla stessa energia) e raggiunge asintoticamente i 0.2° alle energie più alte. La differenza tra le capacità dei due strumenti è mostrata in figura 7, dove sono confrontate le mappe del cielo prodotte da

¹ L'area di raccolta efficace è l'area che avrebbe lo strumento se la sua efficienza di rivelazione fosse del 100%.

Tabella 1: Cataloghi Fermi-LAT delle sorgenti con energia nell'intervallo 100 MeV - 300 GeV (catalogo 3FGL [45], a sinistra) e 10 GeV - 2 TeV (catalogo 3FHL [46], a destra). Per ogni tipologia di oggetto astrofisico, è tabulato il numero sorgenti γ identificate o associate.

LAT 3FGL Source Classes					3FHL Source Classes				
Description	Identified		Associated		Description	Identified		Associated	
	Designator	Number	Designator	Number		Designator	Number	Designator	Number
Pulsar, identified by pulsations	PSR	143	Pulsar	PSR	53	psr	6
Pulsar, no pulsations seen in LAT yet	psr	24	Pulsar Wind Nebula	PWN	9	pwn	8
Pulsar wind nebula	PWN	9	pwn	2	Supernova remnant	SNR	13	snr	17
Supernova remnant	SNR	12	snr	11	Supernova remnant/Pulsar wind nebula	spp	9
Supernova remnant/pulsar wind nebula	spp	49	High-mass binary	HMB	4	hmb	1
Globular cluster	GLC	0	glc	15	Binary	BIN	1
High-mass binary	HMB	3	hmb	0	Globular cluster	glc	2
Binary	BIN	1	bin	0	Star-forming region	SFR	1	sfr	1
Nova	NOV	1	nov	0	Starburst galaxy	sbg	4
Star-forming region	SFR	1	sfr	0	BL Lac type of blazar	BLL	19	bll	731
Compact steep spectrum quasar	CSS	0	css	1	Flat-spectrum radio quasar type of blazar	FSRQ	30	fsrq	142
BL Lac type of blazar	BLL	18	bll	642	Non-blazar active galaxy	agn	1
FSRQ type of blazar	FSRQ	38	fsrq	446	Non-blazar active galaxy	agn	1
Non-blazar active galaxy	AGN	0	agn	3	Narrow-line seyfert 1	NYLS1	1
Radio galaxy	RDG	3	rdg	12	Radio galaxy	RDG	4	rdg	9
Seyfert galaxy	SEY	0	sey	1	Blazar candidate of uncertain type	bcu	290
Blazar candidate of uncertain type	BCU	5	bcu	568	Total	identified	136	associated	1220
Normal galaxy (or part)	GAL	2	gal	1	Unclassified	unknown	23
Starburst galaxy	SBG	0	sbg	4	Unassociated	177
Narrow-line Seyfert 1	NLSY1	2	nlsy1	3	Total in the 3FHL	1556
Soft-spectrum radio quasar	SSRQ	0	ssrq	3					
Total	...	238	...	1785					
Unassociated	1010					

EGRET in 9 anni di osservazioni e da Fermi-LAT in 7 anni.

Il principale processo di interazione con la materia per i raggi γ oltre i 10 MeV (quindi sia nel caso di EGRET che di LAT) è la produzione di coppie $e^- - e^+$. Il metodo di rivelazione, comune a tutti i telescopi γ , è di tipo indiretto: il fotone interagisce con un *tracciatore* che induce la produzione di coppie e ne registra il cammino all'interno dello strumento, permettendo di ricostruire direzione e tempo di arrivo del fotone primario. Successivamente le particelle arrivano in un *calorimetro*, dove avviene la produzione di uno sciame elettromagnetico. L'energia depositata dalle particelle dello sciame viene misurata, permettendo di risalire all'energia del fotone γ primario. Un rivelatore di questo tipo deve riuscire a riconoscere un fotone γ dal fondo di particelle cariche presenti nello spazio (principalmente raggi cosmici). Per questo i tracciatori vengono circondati da un sistema di anticoincidenza, che ha il compito di rivelare particelle cariche incidenti e inviare un *segnale di veto* all'elettronica di bordo per rigettare l'evento.

Il LAT è sensibile fino a energie maggiori di 300 GeV. Per misurare questi fotoni, è necessario un calorimetro pesante (~ 1800 kg) in modo da riuscire ad assorbire abbastanza energia dallo sciame elettromagnetico generato dal primario al suo interno. Un calorimetro massiccio presenta un problema: le particelle secondarie cariche dello sciame indotto possono incidere sul sistema di anticoincidenza, riducendo l'efficienza del rivelatore all'aumentare dell'energia del fotone primario. Per esempio, a causa di questo fenomeno, l'efficienza di rivelazione di EGRET a 1 GeV era il doppio di quella a 10 GeV [44]. Per risolvere il problema, il sistema di anticoincidenza del LAT è segmentato. In questo modo possono essere considerati solo i segmenti nel cammino proiettato del fotone incidente, riducendo l'area che potrebbe contribuire a false attivazioni del sistema [44].

I CATALOGHI FERMI-LAT I dati ottenuti da Fermi sono ancora oggetto di analisi. Le più recenti hanno prodotto due cataloghi per differenti intervalli energetici:

3FGL: è il terzo catalogo delle sorgenti alle basse energie (100 MeV - 300 GeV), ottenuto con i primi 4 anni di osservazione [45];

3FHL: è il terzo catalogo delle sorgenti alle alte energie (10 GeV - 2 TeV) ottenuto con i primi 7 anni di osservazione [46].

Nella tabella 1 sono elencate le varie classi di sorgenti del catalogo e, per ognuna, il numero di identificazioni o associazioni. Una sorgente γ è *associata* a un oggetto astrofisico attraverso un'analisi di corrispondenza posizionale. Una sorgente è *identificata* con un oggetto astrofisico se soddisfa uno dei seguenti criteri [45]

- Variabilità periodica: quando il periodo dell'emissione γ è coincidente con quello osservato ad altre lunghezze d'onda;
- Morfologia spaziale: quando l'estensione spaziale dell'emissione γ è legata a quella ad altre lunghezze d'onda;
- Variabilità correlata: quando la variabilità γ è correlata a quella ad altre lunghezze d'onda.

Le sorgenti γ che soddisfano i criteri di identificazione sono una piccola frazione di quelle totali. Nel catalogo a bassa energia, delle 3033 sorgenti trovate circa l'8% è stata identificata, il 59% associata e nel 33% dei casi non è stata trovata una controparte ad altre lunghezze d'onda. Nel catalogo ad alta energia, composto da 1556 sorgenti, la percentuale di identificazioni rimane quasi invariata (9%) ma le associazioni sono il 78%.

2.1.2 Astronomia a raggi γ da terra

La dimensione degli strumenti che possono essere messi in orbita è limitata, così come il loro peso. Questo influisce sull'area efficace massima del rivelatore e sull'energia massima misurabile. Il flusso di fotoni atteso, a energie maggiori del TeV, è dell'ordine di $10 \text{ m}^{-2}\text{yr}^{-1}$ [48], troppo basso per poter essere rivelato dallo spazio da strumenti con un'area efficace minore di circa 100 m^2 [47]. A queste energie è possibile utilizzare l'atmosfera terrestre come un calorimetro, registrando lo *sciame elettromagnetico* generato dal fotone primario.

Il fotone γ interagisce con l'atmosfera generando una coppia e^-e^+ . A loro volta, elettroni e positroni interagiscono con l'atmosfera producendo altri fotoni per bremsstrahlung. Oltre che per questo processo, gli elettroni (e i positroni) perdono energia per ionizzazione, e il processo domina sulle altre perdite quando l'energia dell'elettrone (o positrone) è minore di una certa energia critica $E_{e,c}$. Questa nell'aria è circa 86 MeV, molto maggiore della soglia di produzione di coppie (1.022 MeV). Il processo termina quando cessa la produzione di fotoni per bremsstrahlung, cioè quando l'energia degli elettroni diventa molto minore di $E_{e,c}$.

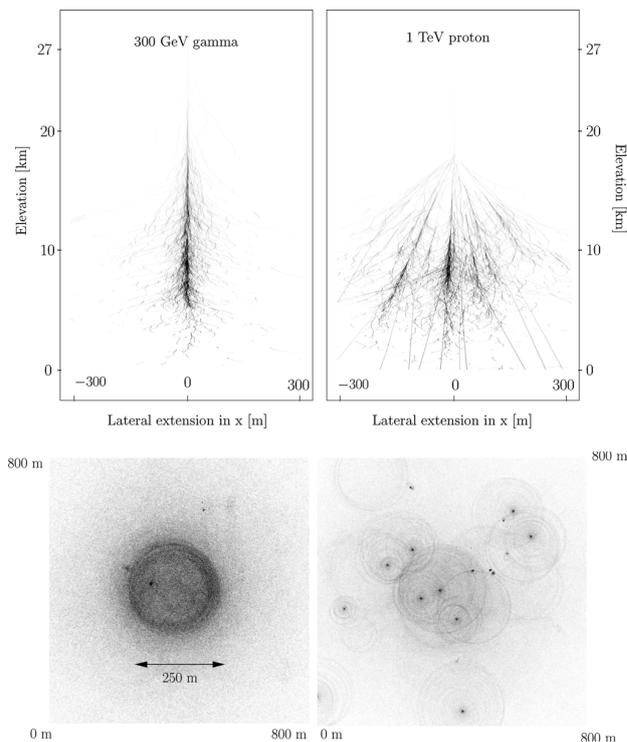


Figura 8: Confronto tra uno sciame elettromagnetico innescato da un raggio γ di 300 GeV (sinistra) e uno sciame adronico innescato da un protone di 1 TeV (destra). **Sopra**) Proiezione delle traiettorie delle particelle secondarie su un piano in cui l'ordinata rappresenta l'altitudine rispetto al suolo. **Sotto**) Distribuzione a terra dei fotoni Čerenkov prodotti nei due eventi. Fonte: Aharonian et al. [47].

Se la particella primaria è un fotone, i processi di produzione muonica sono trascurabili e lo sciame è formato interamente da fotoni, elettroni e positroni [49]. Se la particella primaria è un raggio cosmico, si ha uno *sciame adronico*. La differenza tra uno sciame elettromagnetico e uno adronico, ottenuti con simulazioni Monte Carlo, è mostrata in figura 8: quello elettromagnetico è molto più collimato di quello adronico, il quale presenta diversi *sotto-sciami*. Gli sciami adronici innescati dai raggi cosmici sono la prima fonte di rumore per i rivelatori di fotoni γ da terra. L'efficienza di rivelazione dipende dalla capacità dello strumento di distinguere i due tipi di eventi.

L'utilizzo di matrici di rivelatori a terra permette una misura diretta delle particelle cariche dello sciame, offrendo una grande area di raccolta e un ampio campo di vista. Presentano però due complicazioni principali:

- la difficoltà nel rigettare il fondo dovuto ai raggi cosmici (attraverso la misura del contenuto muonico e della distribuzione spaziale delle particelle) si traduce in una bassa sensibilità [50];
- a parità di energia del fotone primario, al livello del mare il numero di particelle secondarie può variare sensibilmente per ogni evento, rendendone difficile la determinazione e causando una bassa risoluzione energetica [48].

Sebbene quest'ultimo problema possa essere ridotto posizionando i rivelatori ad altitudini elevate, come nel caso dell'esperimento *High Altitude Water*

Cherenkov Observatory (HAWC) situato in Messico a 4100 m di altezza, o dell'esperimento *Astrophysical Radiation with Ground-based Observatory at Yang-Bajing* (ARGO-YBJ) situato in Tibet a un'altezza di 4300 m, il problema del rigetto degli sciami adronici limita questo tipo di rivelatori all'osservazione di sorgenti molto brillanti.

2.2 IMAGING ČERENKOV

2.2.1 Radiazione Čerenkov

L'emissione di luce azzurra da parte di sostanze trasparenti nelle vicinanze di sorgenti di raggi γ è stata osservata già nei primi anni del '900. I primi tentativi di studiare il fenomeno furono compiuti dal fisico francese Mallett (1926, 1928 e 1929), che mostrò la continuità dello spettro, ma non individuò la sorgente di emissione [51]. Tra il 1934 e il 1938, il fisico sovietico Pavel Alekseevič Čerenkov condusse una serie di esperimenti che identificarono gli elettroni secondari prodotti dai raggi γ come sorgente della radiazione. Nel 1937 i fisici sovietici Igor Tamm e Ilya Frank svilupparono una dettagliata interpretazione teorica del fenomeno.

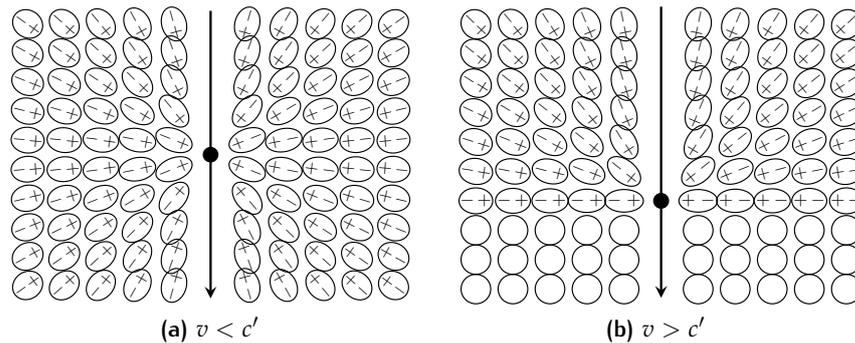


Figura 9: Rappresentazione qualitativa della polarizzazione di un dielettrico dovuta al passaggio di una particella carica con velocità minore (a) e maggiore (b) della velocità della luce nel mezzo c' .

Supponiamo di avere una particella carica che si muova in un mezzo dielettrico con indice di rifrazione $n > 1$. Il campo elettrico della particella polarizza atomi e molecole del mezzo nelle sue immediate vicinanze. Quando la particella si sposta in un nuovo punto gli atomi più distanti ritornano allo stato iniziale. Durante la depolarizzazione ogni elemento del mezzo si comporta come un dipolo accelerato emettendo radiazione elettromagnetica. Il tempo necessario affinché gli atomi ritornino allo stato iniziale dipende dalla velocità della luce nel mezzo

$$c' = \frac{c}{n}$$

In figura 9 è mostrato uno schema della polarizzazione dovuta a una particella di carica negativa con velocità costante sia minore (9a) che maggiore (9b) di c' . Nel primo caso la polarizzazione è simmetrica intorno alla

particella e tutte le onde emesse dagli elementi del mezzo interferiscono distruttivamente [51], di conseguenza la radiazione non si propaga a grandi distanze e l'energia persa dalla particella viene depositata vicino alla sua traiettoria [52].

Nel caso in cui la velocità della particella sia maggiore di c' la polarizzazione non è più simmetrica lungo la direzione di propagazione. È possibile che le onde si propagano in fase dando luogo ad un fronte d'onda elettromagnetico osservabile.

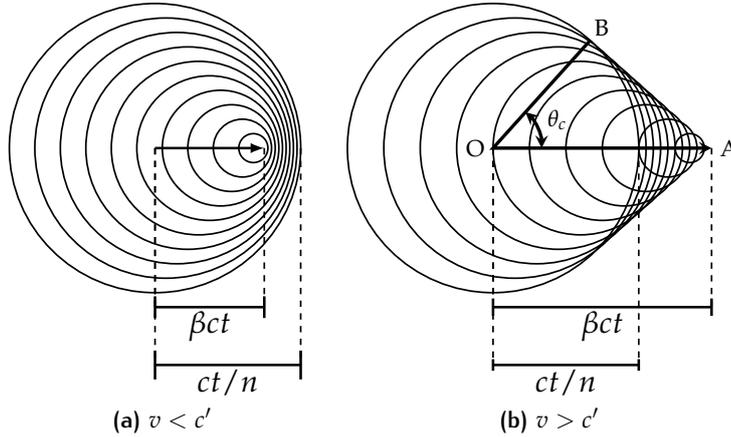


Figura 10: Onde sferiche emesse lungo la traiettoria di una particella carica con velocità minore (a) e maggiore (b) della velocità della luce nel mezzo c' .

In figura 10 è mostrata una successione temporale di emissione di onde sferiche da parte del mezzo. In figura 10a la particella si muove con velocità minore di c' , mentre in figura 10b con velocità maggiore. In quest'ultimo caso è evidente l'interferenza costruttiva delle onde secondarie che formano un fronte d'onda AB dietro la particella, il quale si propaga con un angolo θ_c rispetto alla sua direzione. Questo avviene quando la particella attraversa OA nello stesso tempo in cui la luce attraversa OB . Se βc è la velocità della particella, l'angolo caratteristico è

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n} \quad (12)$$

La condizione di emissione, scritta in modo esplicito,

$$v > \frac{c}{n(\lambda)} = c'(\lambda) \quad (13)$$

mostra come la velocità v della particella deve essere maggiore della velocità della luce nel mezzo a una lunghezza d'onda λ per avere emissione di radiazione Čerenkov alla stessa lunghezza d'onda [52]. Dalla precedente si ottiene la soglia in termini di energia cinetica

$$E^{\text{th}}(\epsilon) = \Gamma_{\text{th}} m = m \sqrt{\frac{1}{1 - \beta_{\text{th}}^2}} \quad (14)$$

dove Γ_{th} è il corrispondente fattore di Lorentz di soglia e m è la massa della particella carica.

Spettro

Lo spettro dei fotoni Čerenkov è dato dalla formula di Frank-Tamm

$$\frac{d^2N}{d\epsilon dx}(z, \beta, n) = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\epsilon)^2} \right) \quad (15)$$

dove z è la carica della particella, α è la costante di struttura fine e \hbar è la costante di Planck ridotta. Questo risultato fu ottenuto attraverso una trattazione elettrodinamica del problema e sotto alcune assunzioni:

- il mezzo è un dielettrico perfetto, continuo, uniforme e isotropo;
- il mezzo e la traiettoria della particella sono infiniti;
- la particella si muove con velocità costante.

Di conseguenza il mezzo è completamente descritto dalla costante dielettrica $\epsilon(\lambda)$, la conduttività elettrica è nulla e la permeabilità magnetica unitaria. Inoltre l'assorbimento della radiazione è trascurato. La condizione di velocità costante può essere espressa come

$$\frac{dv}{dt} \ll \frac{c'}{v} \quad (16)$$

la quale risulta facilmente verificata nella regione del visibile per gli elettroni [51] e di conseguenza per i muoni, poiché per questi la perdita di energia è molto più lenta.

L'equazione 15 è definita solo nelle regioni in cui $\beta > 1/n$, in caso contrario lo spettro è nullo. Ma, se $\beta \simeq 1$, lo spettro può risultare non nullo in ampi intervalli di lunghezza d'onda.

Se Δx è lo spessore di materiale attraversato da un muone di energia totale E_μ , assumendo che l'indice di rifrazione non vari lungo la traiettoria e la perdita di energia del muone sia trascurabile, lo spettro atteso della radiazione Čerenkov è semplicemente

$$\frac{dN}{d\epsilon} = \Delta x \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta_\mu^2 n(\epsilon)^2} \right) \quad (17)$$

Il numero atteso di fotoni, in un intervallo energetico $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$, è dato da

$$N = \Delta x \frac{\alpha}{\hbar c} \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} \left(1 - \frac{1}{\beta_\mu^2 n(\epsilon)^2} \right) d\epsilon \quad (18)$$

Dato che l'emissione dipende solo dalla velocità della particella e dalla relazione di dispersione $n(\epsilon)$, è presente un massimo sia nell'angolo di emissione

$$\theta_c^{\max} = \arccos(1/n) \quad (19)$$

sia nel numero di fotoni prodotti

$$N_{\max} = \Delta x \frac{\alpha}{\hbar c_0} \int_{n>1} \left(1 - \frac{1}{n(\epsilon)^2} \right) d\epsilon \quad (20)$$

entrambi raggiunti nel limite ultra-relativistico ($\beta_\mu \rightarrow 1$) e dipendenti unicamente dal materiale (attraverso l'indice di rifrazione).

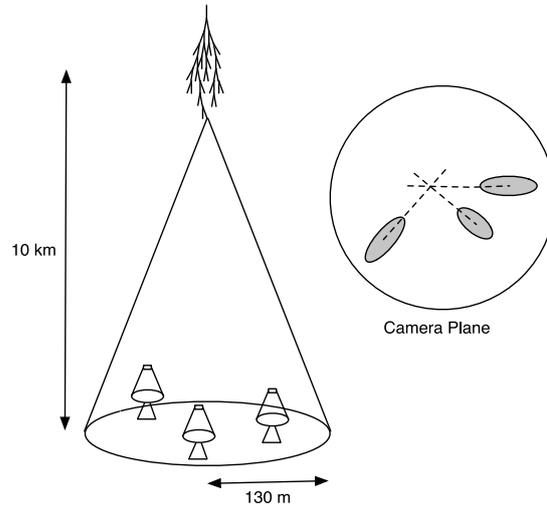


Figura 11: Illustrazione della tecnica stereoscopica di imaging Čerenkov. Un fotone γ innesca uno sciame elettromagnetico. Sul piano focale dei telescopi i fotoni Čerenkov, dovuti agli elettroni dello sciame, assumono una forma ellittica. L'intersezione degli assi maggiori rappresenta la direzione di arrivo del fotone. Fonte: Holder [50].

2.2.2 Imaging Čerenkov

Le particelle cariche dello sciame elettromagnetico, che vanno più veloci della luce nel mezzo lo polarizzano. Atomi e molecole del mezzo tornando nello stato originale emettono radiazione Čerenkov nell'ottico e nell'ultravioletto, come descritto nella sezione precedente. La velocità di soglia si traduce in un valore di soglia per il fattore di Lorentz

$$\Gamma_{\text{th}} = \frac{n(z)}{\sqrt{n^2(z) - 1}} \quad (21)$$

dove $n(z)$ è l'indice di rifrazione dell'aria in funzione dell'altitudine z : al livello del mare $\Gamma_{\text{th}} \simeq 48$ e a 10 km $\Gamma_{\text{th}} \simeq 87$. Quest'ultimo valore, per gli elettroni, corrisponde ad un'energia di soglia $E_e^{\text{th}} \simeq 44$ MeV [47]. Ricordando che gli elettroni prodotti hanno sempre energia maggiore dell'energia critica $E_e^{\text{cr}} \simeq 86$ MeV, tutte le particelle dello sciame verificano la condizione per l'emissione di luce Čerenkov. Anche l'angolo di emissione dei fotoni dipende dall'indice di rifrazione

$$\theta_c = \arccos \left(\frac{1}{\beta_e n(z)} \right) \quad (22)$$

Poiché n decresce con l'altitudine, l'angolo Čerenkov aumenta con lo spessore di atmosfera. Di conseguenza, i fotoni arrivano al suolo uniformemente distribuiti in un cerchio con un raggio dell'ordine di 100 m (figura 8).

L'*imaging Čerenkov* consiste nella rivelazione, da terra, di questi fotoni, che contengono le informazioni per ricostruire l'energia e la direzione di arrivo del fotone primario. I telescopi Čerenkov consistono in un ampio specchio segmentato che focalizza i fotoni dello sciame su una matrice di fotomoltiplicatori. Dal punto di vista ottico, è richiesta una risoluzione angolare

dell'ordine di 0.1° e un campo di vista ampio (tipicamente 3° - 5°) per riuscire a ottenere immagini di sciami con parametro di impatto (la distanza, a terra, tra il centro dello sciame e la posizione del telescopio) dell'ordine di 100 m. Dal punto di vista dell'elettronica le caratteristiche richieste sono molto più restrittive. Intervalli di acquisizione troppo lunghi diminuiscono il rapporto segnale-rumore: l'elettronica deve essere abbastanza veloce da ridurre il tempo di acquisizione a valori dell'ordine del tempo scala dell'evento (qualche decina di ns), in modo da minimizzare il segnale del fondo cielo. La riduzione del tempo di integrazione è affidata a un circuito di *trigger* (innescato) della camera, il quale permette di registrare l'evento solo se è verificata una particolare condizione (tipicamente l'attivazione di un certo numero di pixel sopra una certa soglia) all'interno di una piccola finestra temporale (solitamente tra i 3 ns-25 ns).

Rispetto ai rivelatori di particelle cariche, l'imaging Čerenkov presenta un campo di vista molto inferiore e, soprattutto, ha lo svantaggio di dover operare in notti senza Luna, limitazione che ne riduce sensibilmente il ciclo di lavoro utile a circa 1000 ore l'anno. Nonostante questo, la tecnica dell'imaging Čerenkov offre la possibilità di rigettare quasi totalmente il fondo dovuto ai raggi cosmici. Le immagini degli sciami elettromagnetici puri assumono, sulla camera, una caratteristica forma ellittica, il cui asse maggiore rappresenta l'asse dello sciame proiettato sul piano focale. Gli sciami adronici, invece, presentano una struttura più complessa, dovuta ai diversi sciami elettromagnetici secondari innescati dal decadimento dei pioni neutri. Inoltre, i fotoni Čerenkov non arrivano al suolo focalizzati in un singolo anello, ma formano diversi anelli dovuti ai sotto-sciami (come mostrato in figura 8).

Attraverso l'uso contemporaneo di più telescopi (*osservazione stereoscopica*) è possibile ricostruire un'immagine tridimensionale dello sciame. In questo caso, l'analisi delle immagini permette un'efficienza di rigetto degli eventi adronici maggiore del 99.99%. Inoltre, l'utilizzo delle immagini stereoscopiche permette una ricostruzione accurata della direzione di arrivo del fotone γ primario intersecando gli assi maggiori delle ellissi registrate da ogni telescopio. Con questa tecnica, schematizzata in figura 11, si ottengono notevoli miglioramenti in termini di risoluzione angolare ed energetica. Per esempio, le stime per il Čerenkov Telescope Array sono rispettivamente dell'ordine di 0.1° e del 10% a 100 GeV [53].

2.2.3 Alcuni esempi di telescopi Čerenkov

Attualmente, sono tre i principali sistemi di telescopi Čerenkov: HESS, MAGIC e VERITAS. Grazie alle osservazioni eseguite con questi, e altri strumenti (come CANGAROO, attivo dal 2004 al 2011), ad aprile 2018, sono 211 le sorgenti di raggi γ oltre il TeV rivelate [54]. In figura 12 sono mostrati i tipi di oggetti associati a queste sorgenti: i resti di supernova rappresentano le sorgenti galattiche più comuni, mentre quelle extragalattiche sono rappresentate dai nuclei galattici attivi (principalmente blazar). Delle 211 sorgenti, 62 non hanno una controparte in altre lunghezze d'onda.

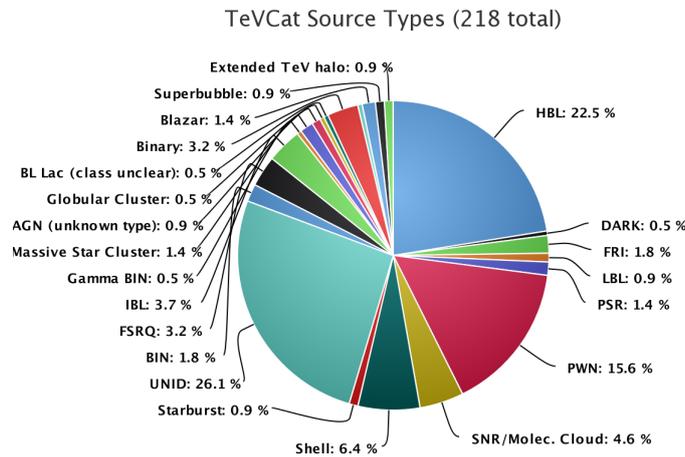


Figura 12: Diagramma circolare del tipo di oggetto associato (o identificato) alle sorgenti γ oltre il TeV. I contributi maggiori sono dati dai resti di supernova (sorgenti galattiche) e dai nuclei galattici attivi (sorgenti extragalattiche). Il 26% delle sorgenti non ha una controparte nota. Fonte: [TeVcat \[54\]](#).

HIGH ENERGY STEREO SCOPIC SYSTEM (HESS) HESS è un *array* di telescopi Čerenkov situato in Namibia, a un'altitudine di 1800 m sopra il livello del mare. Le osservazioni stereoscopiche cominciarono nel 2003 con un array composto da 4 telescopi di 12 m di diametro, disposti in modo da formare un quadrato di lato pari a 120 m. La camera di ogni telescopio ha un campo di vista di 5° , è composta da 960 fotomoltiplicatori ed è dotata di un sistema di trigger con una finestra temporale di 1.5 ns. L'array è dotato di un sistema di trigger centrale che si attiva quando riceve i trigger di almeno due telescopi. Nel 2012 è stato aggiunto un grande telescopio di 28 m di diametro al centro dell'array, portando l'intervallo di energie rivelabili a 10 GeV-10 TeV e dando inizio alla seconda fase dell'esperimento (HESS Phase II). La camera di questo è dotata di 2048 fotomoltiplicatori e ha un campo di vista di $\sim 3.2^\circ$. Il sistema di trigger centrale è stato modificato in modo da permettere di registrare gli sciami visti dal solo telescopio di 28 m.

Con i primi 9 anni di osservazioni (HESS Phase I), per un totale di 2700 ore di osservazione, è stata ottenuta una mappa del piano galattico. Il catalogo risultante contiene 78 sorgenti (tra cui 16 non rivelate precedentemente), delle quali [55]

- 28 identificate con resti di supernova;
- 3 identificate con sistemi binari a raggi gamma;
- 36 associate a resti di supernova;
- 11 non associate.

MAJOR ATMOSPHERIC GAMMA IMAGING ČERENKOV (MAGIC) MAGIC è un sistema di due telescopi Čerenkov situato nell'*Osservatorio del Roque de los Muchachos* a La Palma, nelle Isole Canarie. Inizialmente MAGIC era composto da un singolo telescopio di 17 m di diametro. Al tempo delle prime osservazioni, era il più grande telescopio Čerenkov dotato di una camera composta da 576 fotomoltiplicatori e un campo di vista di 3.5° . Nel 2009



Figura 13: Per coprire l'intero spettro energetico del CTA saranno utilizzati telescopi di piccole (SST), medie (MST) e grandi dimensioni (LST). In figura, da sinistra, sono mostrati i progetti dei tre prototipi di SST, dei due prototipi di MST e del prototipo di LST. Fonte: [CTA Consortium \[53\]](#).

venne aggiunto un secondo telescopio con caratteristiche fisiche identiche al precedente, ma con un'elettronica migliorata. Successivamente, nel 2012, anche l'elettronica del primo telescopio fu aggiornata e resa identica a quella del secondo. Il sistema attuale ha una risoluzione angolare di 0.07° a 300 GeV, una risoluzione energetica, alla stessa energia, inferiore al 20% e una soglia energetica di 50 GeV [56].

La caratteristica peculiare di MAGIC è la velocità di puntamento: la direzione dell'asse del telescopio può variare di 180° in circa 20 s, grazie alla struttura leggera in fibra di carbonio e ad un sistema di posizionamento automatico dei segmenti che formano lo specchio per correggere le deformazioni dovute al peso stesso della struttura.

2.3 ČERENKOV TELESCOPE ARRAY

Il Čerenkov Telescope Array (CTA) [53, 57] sarà un osservatorio γ di telescopi Čerenkov di nuova generazione. Il consorzio CTA coinvolge più di 1000 scienziati da 210 istituti di 32 nazioni. L'osservatorio consisterà in due array di telescopi ed è progettato per avere

- un'alta sensibilità, di almeno un'ordine di grandezza superiore a quella dei sistemi attuali;
- un'ampia copertura energetica, che si estenderà da 30 GeV a 300 TeV;
- una copertura totale del cielo, posizionando un array per emisfero terrestre;
- un'ampio campo di vista, di circa 8° , per ottenere mappature del cielo più rapide e agevolare lo studio delle sorgenti estese;
- una risoluzione angolare dell'ordine di qualche minuto d'arco;

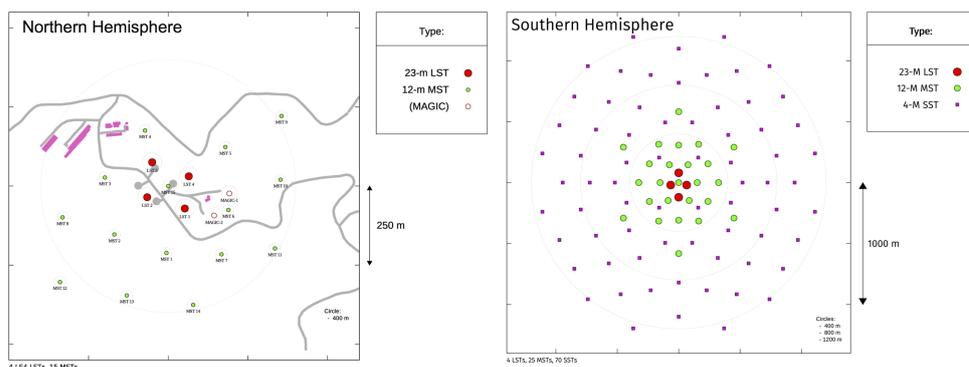


Figura 14: Disposizione ideale dei telescopi Čerenkov del CTA nell'emisfero nord (sinistra) e sud (destra), determinata tramite delle simulazioni Monte Carlo. I cerchi rossi e verdi, e i quadrati blu rappresentano rispettivamente la posizione dei telescopi di grande, media e piccola dimensione. Fonte: [CTA Consortium \[53\]](#).

- una risoluzione energetica dell'ordine del 10 %;
- tempi di puntamento brevi.

Per raggiungere i risultati richiesti, entrambi gli array devono essere dotati di telescopi con caratteristiche e dimensioni opportune. Il progetto attuale prevede 3 tipi di telescopi, di piccole, medie e grandi dimensioni (i cui progetti attuali sono mostrati in figura 13). Per valutare l'impatto della scelta del sito di osservazione, sono state eseguite dettagliate simulazioni Monte Carlo tenendo conto dell'altitudine, del fondo cielo notturno e del campo geomagnetico locale [58]. L'array nell'emisfero sud sarà collocato in Cile, nel deserto di Atacama (vicino all'osservatorio del Paranal), mentre quello nell'emisfero nord a La Palma, nelle isole Canarie, dove si trova anche il telescopio MAGIC. L'array nell'emisfero sud è in una posizione ottimale per osservare il piano galattico. Avrà un maggior numero di telescopi (70 di piccole dimensioni, 25 di medie e 4 di grandi) distribuiti su una superficie maggiore, rispetto a quello nell'emisfero nord. Quest'ultimo ha una vista migliore sulle sorgenti extragalattiche, e sarà sensibile alle basse energie (25 GeV-1 TeV) e composto da 15 telescopi di medie dimensioni e 4 di grandi dimensioni. Per determinare la disposizione ideale degli elementi degli array sono state eseguite simulazioni Monte Carlo [59] i cui risultati sono mostrati in figura 14.

Large Size Telescope (LST) Per coprire le basse energie (25 GeV-150 GeV) ogni array sarà dotato di 4 telescopi di grandi dimensioni (LST), in modo da poter rivelare il maggior numero possibile di fotoni Čerenkov prodotti dal debole sciame innescato dai fotoni primari. Lo specchio degli LST [60] ha un diametro di 23 m, un'area efficace di 368 m^2 e una risoluzione angolare di 0.05° in asse e 0.1° fuori asse. Nonostante le dimensioni, la struttura in carbonio e il sistema di puntamento permettono una variazione zenitale di 180° in 20 s. La camera del telescopio è dotata di 1855 fotomoltiplicatori dotati di un'efficienza quantica massima del 42%. Il campo di vista della camera è di 4.5° , corrispondente ad un campo di vista per pixel di circa 0.1° .

Medium Size Telescope (MST) Per coprire le energie intermedie (150 GeV-5 TeV) saranno costruiti 40 telescopi di medie dimensioni (MST): 15 faranno parte dell'array nell'emisfero nord e 25 nell'emisfero sud. Lo specchio di questi è di 12 m di diametro, con un'area efficace di 88 m². Il tempo necessario per puntare una qualsiasi direzione nel cielo è minore di 90 s. Attualmente, sono due le camere proposte: FLASHCAM e NECTARCAM [61], dotate, rispettivamente, di un campo di vista di 7.5° e 7.7°, con 1764 e 1856 pixel. Il campo di vista di ogni pixel, per entrambe le camere, è di 0.17° sul piano focale.

Oltre all'MST, è stato proposto un telescopio di medie dimensioni alternativo con uno schema ottico a doppia riflessione: Schwarzschild-Couder Telescope (SCT). Il telescopio avrà uno specchio primario di 9.6 m di diametro e il secondario di 5.4 m. L'area efficace, tenendo conto anche della struttura, sarà di 41 m². La camera del telescopio è progettata per avere 11328 fotomoltiplicatori al silicio, un campo di vista totale di 7.6° e di 0.067° per il singolo pixel.

Small Size Telescope (SST) Per coprire le alte energie (1 TeV-300 TeV), alle quali i raggi γ producono sciami molto intensi ed estesi, i telescopi possono avere piccola area di raccolta ma devono avere un ampio campo di vista ed essere distribuiti su un'area di qualche km², per aumentare il numero di eventi registrabili. Per questo motivo saranno costruiti 70 telescopi di piccole dimensioni (SST) e distribuiti in un raggio di circa 1 km nel solo array dell'emisfero sud. Sono stati costruiti 3 prototipi di SST: uno a specchio singolo (SST-1M) e due a specchio doppio (SST-2M GCT e SST-2M ASTRI). Questi hanno in comune uno specchio primario di circa 4 m, un'area efficace di circa 8 m² e un campo di vista di 8°-10°. Lo schema ottico a doppia riflessione degli SST-2M (i quali utilizzano una configurazione Schwarzschild-Couder, come l'SCT) ha una lunghezza focale ridotta (~ 2 m) e permette l'utilizzo fotomoltiplicatori al silicio, assemblati in camere compatte con un grande numero di pixel (~ 2000).

Sulla base delle performance misurate su questi tre prototipi, per l'osservatorio verrà sviluppato un singolo progetto di SST.

2.3.1 SST-2M ASTRI

Astrofisica con Specchi a Tecnologia Replicante Italiana (ASTRI) è un progetto del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR), guidato dall'Istituto Nazionale di Astrofisica (INAF), relativo allo sviluppo di un prototipo di SST per l'array nell'emisfero sud del CTA. Il prototipo (figura 15) si trova in Italia, presso la sede "M.G. Fracastoro" dell'Osservatorio Astrofisico di Catania (Serra la Nave, Mt. Etna, Sicilia), a 1735 m sul livello del mare [62]. La struttura è stata inaugurata nel 2014 ed è tutt'ora in fase di collaudo.

Sono stati eseguiti diversi test sulla struttura e sull'elettronica per ottimizzare i sistemi di controllo e acquisizione dei dati [63]. Tra questi, due sono di primaria importanza

- nel 2016 è stata osservata la stella polare, con un sensore CCD provvisorio, a diversi angoli rispetto all'asse del telescopio. La PSF dell'ottica risulta costante su tutto il campo di vista;



Figura 15: Il prototipo ASTRI SST-2M attualmente installato a Serra La Nave (Mt. Etna, Sicilia). Fonte: CTA Consortium [53].

- nel 2017 è stata ottenuta la prima immagine di uno sciame elettromagnetico dovuto a un raggio cosmico. Ciò ha dimostrato il corretto funzionamento delle componenti della camera.

Il telescopio ASTRI utilizza un sistema ottico con una configurazione *Schwarzschild-Couder* (SC). Questa fu inizialmente ideata da Schwarzschild nel 1905, migliorata da Couder nel 1926 e recentemente proposta per i telescopi Čerenkov, in quanto riduce le aberrazioni ottiche su tutto il piano focale anche per telescopi con basso rapporto focale, permettendo la costruzione di strumenti più compatti [64]. Lo schema ottico è formato da uno specchio primario di 4.3 m di diametro e da un secondario di 1.8 m. Il sistema ha una lunghezza focale equivalente di 2.15 m e una scala di circa 37.5 mm/°, che permette di utilizzare una camera compatta di fotomoltiplicatori al silicio (SiPM). Come dimostrato dalla validazione ottica in Giro et al. [65] (i cui risultati sono mostrati in figura 16), la configurazione SC permette la raccolta dell'80% del segnale di una sorgente puntiforme in una dimensione angolare, d_{80} , minore di quella di un singolo pixel, su tutto il campo di vista.

La camera di ASTRI [66, 67, 68] è progettata per registrare i fotoni Čerenkov con lunghezza d'onda compresa tra 300 nm e 700 nm. Il rivelatore è costituito da 37 moduli (*Photon Detection Module*, PDM) fisicamente indipendenti, in modo da poter essere disposti correttamente sul piano focale curvo richiesto dalla configurazione ottica. Ognuno di questi moduli consta di una matrice 8×8 sensori SiPM ognuno dei quali di dimensioni 7 mm×7 mm. La scelta di queste ultime dimensioni, che si traduce in una dimensione angolare di circa 0.19°×0.19°, è stata dettata dalla necessità di far corrispondere la dimensione di un pixel del rivelatore alla PSF del sistema ottico.

L'impulso di luce Čerenkov generata da uno sciame elettromagnetico ha una durata dell'ordine di qualche nanosecondo. Di conseguenza l'elettronica deve essere veloce nella lettura del segnale e deve essere dotata di un sistema di trigger. Quello di ASTRI è di tipo topologico: si attiva quando

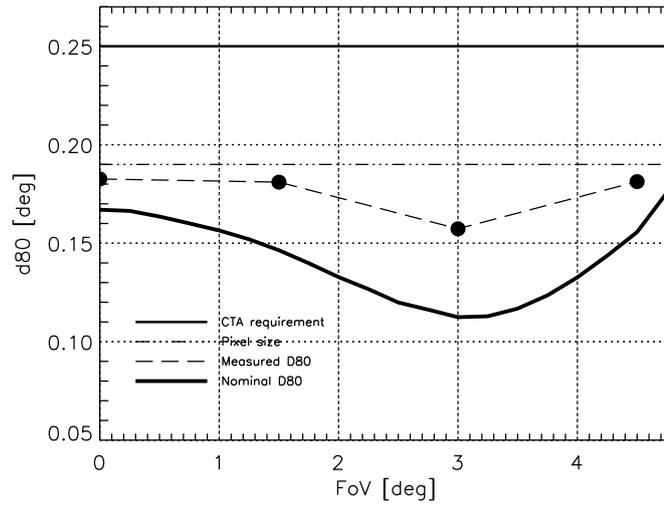


Figura 16: Dimensione angolare, d_{80} , che racchiude l'80% del segnale di una sorgente puntiforme, al variare della posizione sul piano focale. I valori misurati sono confrontati con quelli teorici (curva continua), con la dimensione dei pixel (linea orizzontale tratteggiata) e con la dimensione richiesta dal CTA (linea orizzontale continua). Fonte: Giro et al. [65].

n pixel contigui presentano un segnale maggiore di una certa soglia. Il numero minimo di pixel contigui è programmabile, da un minimo di 2 a un massimo di 7. La soglia è programmabile a valori maggiori di 4 fotoelettroni, a seconda del fondo cielo medio.

3

METODI MONTECARLO E GEANT4

In questo capitolo viene brevemente descritto il principio alla base delle simulazioni Monte Carlo e il framework GEANT4 utilizzato in questo lavoro di tesi.

Nella sezione 3.1 sono introdotti i metodi Monte Carlo e, come esempio specifico, il metodo di campionamento utilizzato in GEANT4.

Nella sezione 3.2 vengono individuate e descritte brevemente le componenti principali del framework GEANT4.

3.1 METODI MONTE CARLO

I metodi Monte Carlo sono una classe di algoritmi computazionali basati sull'estrazione di campioni casuali. Essi risultano i più adatti a risolvere problemi che per loro natura presentano un comportamento probabilistico, problemi a diversi gradi di libertà o problemi che richiedono integrazioni con complicate condizioni al contorno. Per esempio possono essere utilizzati per:

- analizzare la risposta dei test statistici al variare della dimensione dei campioni (ad esempio per la classificazione dello stato dinamico di gruppi di galassie [69]);
- stimare l'errore sui parametri ottenuti da una simulazione ripetendola diverse volte e calcolando l'errore in modo semi-sperimentale¹;
- stimare il momento di inerzia di geometrie complesse distribuendo casualmente dei punti nel volume conservandone coordinate e densità locale [70].

I metodi Monte Carlo sono la prima scelta per simulare l'interazione tra particelle e materia. Infatti, ogni evento (ad esempio la produzione di una particella secondaria) può essere campionato dalla distribuzione di probabilità associata alla sezione d'urto del processo fisico considerato. Affiancando a questo un metodo di trasporto è possibile riprodurre la risposta di un rivelatore o studiare il passaggio di particelle attraverso la geometria desiderata.

3.1.1 Campionamento

Il software utilizzato nel lavoro di tesi implementa una combinazione dei metodi Monte Carlo di *rigetto* e *composizione* per imitare le distribuzioni dei

¹ Il calcolo dell'errore in modo semi-sperimentale rappresenta la stima più semplice se il parametro è di tipo descrittivo e non ha un errore statistico associato.

processi fisici coinvolti. Il formalismo alla base del metodo di campionamento è il seguente: supponiamo di voler estrarre un valore x da un intervallo $[x_a, x_b]$ con una distribuzione $f(x)$ scomponibile nel seguente modo

$$f(x) = \alpha \tilde{f}(x)g(x)$$

dove α è un fattore di normalizzazione e $\tilde{f}(x)$ è una distribuzione normalizzata da cui si sa estrarre un campione. La funzione di rigetto

$$g(x) = \frac{f(x)}{\alpha \tilde{f}(x)}$$

fornisce un'indicazione sulla somiglianza di $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$: tanto più $g(x)$ è vicina all'unità tanto più le due distribuzioni sono simili. Per estrarre un valore x dalla distribuzione si estrae prima un x_0 da $\tilde{f}(x)$, successivamente si estrae un valore $\zeta \in [0, 1]$ da una distribuzione uniforme e si confronta con $g(x)$: se $\zeta < g(x)$ allora $x = x_0$ è accettato. Considerando la definizione di $g(x)$, il valore ζ estratto può essere visto come un valore $0 \leq y_0 \leq \alpha \tilde{f}(x)$: se il punto (x_0, y_0) ricade all'interno dell'area sottesa da $f(x)$ il punto è accettato e l'ascissa dei punti accettati segue $f(x)$. Questa interpretazione del problema è mostrata in figura 17.

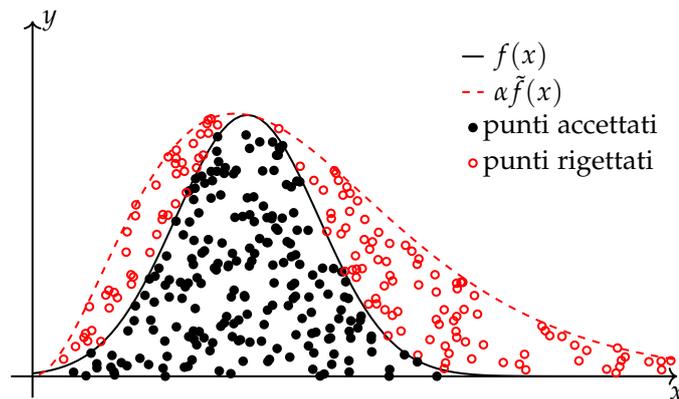


Figura 17: Illustrazione del metodo di campionamento. Estratti un valore x_0 da \tilde{f} e un valore $y_0 < \alpha \tilde{f}(x)$ da una distribuzione uniforme, si accettano solo i punti (x_0, y_0) tali che $y_0 < f(x_0)$. Il campione x_0 ottenuto ripetendo l'operazione segue la distribuzione $f(x)$.

Generalizzando, se la distribuzione è scomponibile in somme di sottodistribuzioni $f_i(x)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)g_i(x)$$

l'algoritmo di estrazione di un valore x è il seguente [71]:

1. Si estrae un intero $i \in \{1, \dots, n\}$ con probabilità proporzionale a α_i ;
2. Si seleziona un valore x_0 da $f_i(x)$;
3. Si calcola $g_i(x_0)$;
4. Si estrae un valore $0 \leq \zeta \leq 1$ da una distribuzione uniforme;

5. Se $\xi \leq g_i(x_0)$ si accetta $x = x_0$ con probabilità $g_i(x_0)$;
6. Se x_0 è rigettato si ritorna al punto 1.

L'efficienza del metodo dipende dalla facilità di campionamento delle sotto-distribuzioni $f_i(x)$, dalla facilità di calcolo delle funzioni di rigetto $g_i(x)$ e dal numero medio di prove necessarie per estrarre un campione della voluta dimensione.

3.2 GEANT4

GEANT4 (GEometry ANd Tracking 4) [72] è un toolkit per la simulazione del passaggio di particelle attraverso la materia. Il software è implementato in C++ e sfrutta una progettazione orientata agli oggetti per ottenere un framework modulare e flessibile. Si tratta di un software di riferimento in vari ambiti di ricerca in cui l'interazione tra particelle e materia è di importanza fondamentale, tra cui la fisica delle alte energie, la fisica nucleare, la fisica medica e lo sviluppo di tecnologie spaziali; numerosi esempi applicativi sono disponibili sul [sito web dedicato](#)².

Il toolkit offre la possibilità di creare, o importare, modelli geometrici composti da diversi tipi di materiali e geometrie. Sono disponibili una grande varietà di processi fisici che regolano la propagazione delle particelle nella materia. Inoltre l'utente può visualizzare direttamente geometrie e tracce tramite un'interfaccia grafica interattiva.

Le componenti essenziali della simulazione sono:

- geometria e materiali;
- tracciamento delle particelle;
- processi fisici;
- gestione di eventi e tracce.

A ognuna di queste categorie corrispondono diversi metodi che permettono di definire una parte della simulazione e di interagire con altre parti.

EVENTI Un *evento* rappresenta l'unità principale della simulazione. La categoria *event* fornisce all'utente i metodi per comunicare con il generatore di eventi fisici per la generazione delle particelle primarie che costituiscono un evento [72]. La classe fornisce inoltre i metodi necessari ad accedere alle informazioni principali dell'evento come il punto di produzione delle primarie, le traiettorie delle particelle coinvolte e gli identificatori corrispondenti.

GEOMETRIA La categoria *geometry* fornisce all'utente i metodi per costruire una struttura geometrica e definirne i materiali. La costruzione della geometria si basa sui concetti di volumi *logici* e *fisici*.

Un volume logico rappresenta un elemento della geometria con una certa forma e composto di un certo materiale. Se un volume contiene altri volumi

² <https://geant4.web.cern.ch/>

al suo interno viene detto *mother volume* e i volumi contenuti *daughter volumes*. La forma di un volume logico è definita da un oggetto separato detto *solid*. Sono disponibili diverse forme e altre possono essere ottenute come unioni, intersezioni e sottrazioni delle esistenti.

Un volume fisico rappresenta il posizionamento e la rotazione di un volume logico rispetto al sistema di riferimento del suo *mother volume*.

MATERIALI La categoria *materials* permette di definire i materiali che compongono le varie parti della geometria come aggregato di elementi e questi ultimi come aggregati di isotopi. Un materiale formato da una determinata molecola può essere costruito specificando il numero di atomi di ogni elemento, e un composto di materiali può essere costruito specificando la percentuale in massa di ogni materiale.

A ogni materiale definito possono essere associate una pressione, una densità, lo stato fisico e la temperatura. Inoltre, è possibile associare al materiale le sue proprietà ottiche (esempio l'indice di rifrazione e la lunghezza di attenuazione in funzione dell'energia dei fotoni).

TRACCIAMENTO La categoria *tracking* gestisce l'invocazione dei processi fisici che agiscono durante il trasporto della particella attraverso la geometria. I metodi sono implementati in modo generico, ossia non dipendono dal tipo di particella o dai processi fisici coinvolti.

Ogni processo fisico associato alla particella propone uno *step*, cioè una lunghezza di interazione estratta dalla sezione d'urto del processo³. Sia N il numero di processi coinvolti e $\{s_i\}$ l'insieme degli *step* proposti, il modo in cui un processo viene invocato è il seguente:

1. Per il primo *step* viene invocato il processo, supponiamo il k -esimo, che propone lo *step* più piccolo

$$\tilde{s} = \min \{s_i\} = s_k$$

2. Per lo *step* successivo viene proposto un nuovo *step* solo dal processo precedentemente invocato. Gli *step* precedenti vengono aggiornati sottraendo \tilde{s}

$$\{s_i\} \rightarrow \{s_i - \tilde{s}\} \cup \{s_k\} \quad \text{dove } k \neq i$$

Aggiornata la lista degli *step* proposti si ritorna al punto 1.

Ogni processo fisico può avere tre metodi associati

1. *at rest*, nel caso che la particella sia ferma (un esempio di processo che possiede questo metodo è il decadimento);
2. *along step*, nel caso di processi che possono essere considerati continui;
3. *post step*, nel caso di processi che devono essere considerati discreti (come la generazione di particelle secondarie).

³ Nel caso di particelle a riposo lo *step* è un intervallo temporale.

I metodi along step sono cumulativi, cioè la componente continua di ogni processo viene invocata anche se il processo non definisce lo step. La componente continua di quest'ultimo dipende dalla soglia di produzione di secondarie utilizzata. Inoltre, associando una combinazione dei tre metodi a tutti i processi fisici, questi risultano identici dal punto di vista del tracciamento, rendendo il codice completamente generico e comune a tutti i tipi di processi e particelle.

Cut La soglia energetica minima per la produzione di particelle secondarie è gestita in GEANT4 in termini di capacità di penetrazione minima (*cut*). Questa è utilizzata, al posto dell'energia, per una gestione delle secondarie coerente per differenti particelle e materiali [72]. Se la capacità di penetrazione di una particella secondaria è minore della soglia la sua traccia non viene inizializzata e la sua energia è trasferita dalla componente discreta del processo a quella continua come perdita di energia (o meglio, come energia depositata nel materiale). In appendice A è mostrato il calcolo della perdita di energia continua e discreta nel caso dei processi di ionizzazione e bremsstrahlung. Per questi due processi l'esistenza di una soglia di produzione è necessaria per evitare la produzione di un numero eccessivo di secondarie a bassa energia.

PROCESSI ELETTROMAGNETICI La fisica dell'elettromagnetismo rilevante in questo lavoro di tesi è gestita tramite le seguenti tre categorie

- *standard*;
- *muons*;
- *optical*.

Nella categoria standard la classe G4eIonisation calcola, per elettroni e positroni, la componente continua delle perdite per ionizzazione e simula la componente discreta di produzione di elettroni liberi. In modo simile, la classe G4eBremsstrahlung calcola, per elettroni e positroni, la componente continua delle perdite (*soft-bremsstrahlung*) e la componente discreta di produzione di fotoni (*hard-bremsstrahlung*).

La categoria muons è basata sulla categoria standard, le classi G4MuIonisation e G4MuBremsstrahlung sono implementate in modo identico ma differiscono per qualche correzione. La classe G4MuPairProduction calcola la componente continua e discreta della produzione diretta di coppie elettrone-positrone. L'interazione nucleare dei muoni (di tipo elettromagnetico ma con produzione di adroni) è gestita dalla classe G4MuonNuclearProcess la quale calcola la componente discreta del processo. Per una descrizione più approfondita di questi processi si veda l'appendice A e i riferimenti citati.

Lo scattering coulombiano multiplo è gestito dalla classe G4MuMultipleScattering (in cui è utilizzato il modello WentzelVI) combinata con la classe G4ComptonScattering che gestisce lo scattering singolo a tutte le energie [73].

La categoria optical gestisce i processi associati all'interazione (o all'emissione) dei fotoni ottici (trattati internamente come particelle diverse rispetto ai fotoni di alta energia) con i materiali a cui sono associate delle proprietà ottiche.

4

PASSAGGIO DEI MUONI NELLA MATERIA

In questo capitolo sono introdotte le principali quantità che descrivono la propagazione dei muoni nella materia. Alcune di queste, necessarie per lo sviluppo del lavoro di tesi, sono state calcolate tramite opportune simulazioni nel caso specifico della *roccia standard* e dell'*aria standard*, definite più oltre.

Nella sezione 4.1 vengono descritte le proprietà geometriche che caratterizzano l'interazione dei muoni con uno strato di materiale e vengono descritte brevemente le simulazioni implementate.

Nella sezione 4.2 viene presentato il modello che descrive la perdita di energia media dei muoni e viene proposto un confronto con le simulazioni con lo scopo di validare l'implementazione del codice da me effettuata.

Tenendo conto delle fluttuazioni delle perdite energetiche, nella sezione 4.3 viene introdotta, e ricavata dalle simulazioni, la *probabilità di sopravvivenza*, $P(E_\mu, X)$, di un muone di energia E_μ nell'attraversare uno spessore X . Questa è di primaria importanza poiché determina il tasso di muoni atteso e permette di ricavare una relazione intensità-spessore dalla quale è possibile risalire alla quantità di materia attraversata. Lo spessore R_P corrispondente ad una probabilità di sopravvivenza P viene calcolato e confrontato con il caso senza fluttuazioni.

Nella sezione 4.4 viene definita e ricavata dalle simulazioni l'energia minima, $E_{\min}(X, P_{E_{\text{th}}})$, necessaria affinché un muone che attraversa uno spessore X abbia una probabilità $P_{E_{\text{th}}}$ di emergere con un'energia maggiore di E_{th} , e viene calcolata la relazione intensità-spessore sia attraverso la probabilità di sopravvivenza sia nel caso senza fluttuazioni.

Nella sezione 4.5 viene valutata la deviazione angolare e lo scostamento laterale subito dai muoni nell'attraversamento di una geometria simile a quella delle simulazioni delle muografie vulcaniche (sezione 6.1) e vengono discusse le conseguenze sulla risoluzione spaziale della ricostruzione degli spessori attraversati.

Infine, nella sezione 4.6 viene proposta una validazione dell'implementazione del processo di emissione Čerenkov.

4.1 INTERAZIONE CON UNO STRATO DI MATERIALE

In figura 18 è mostrato uno schema della propagazione di un muone incidente perpendicolarmente a uno spessore di materiale. Un muone sopravvissuto emergerà dallo strato di materia con energia e direzione diverse da quelle iniziali. Se prendiamo un sistema di riferimento (x, y, z) in modo che x coincida con la direzione di incidenza, la propagazione di un muone di energia E_μ attraverso uno spessore Δx è descritta in modo completo dalle seguenti quantità [74]:

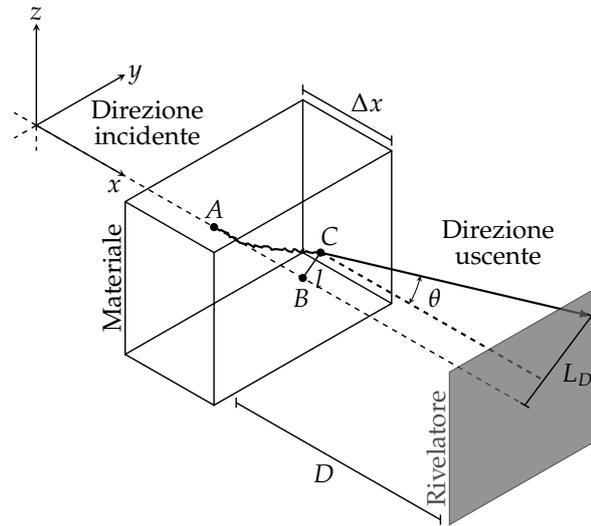


Figura 18: Schema dell'interazione di un muone con uno spessore Δx di materiale: il muone si propaga lungo la direzione x , perpendicolarmente allo spessore, incidendo nel punto A ; durante l'attraversamento il muone viene deviato dalla traiettoria originale ed emerge dal punto C a una distanza l dal punto B , da cui sarebbe emerso se non avesse subito deviazioni; il muone emerge dallo spessore con un angolo di deviazione θ che causa uno scostamento L_D ad una distanza D a cui è posto il rivelatore.

- $E_{\mu,f}$, l'energia dopo l'attraversamento;
- l_y e l_z , le componenti dello scostamento laterale l ;
- θ_y e θ_z , l'angolo di deviazione rispetto agli assi y e z .

Seguendo lo schema in figura 18: A è il punto di incidenza del muone; C è il punto di uscita; B è il punto di intersezione della traiettoria di incidenza con il piano perpendicolare y - z e passante per C . Facendo coincidere con B l'origine di questo piano, l_y e l_z sono le componenti dello scostamento laterale

$$l = \overline{BC} = \sqrt{l_y^2 + l_z^2} \quad (23)$$

L'angolo di deviazione dalla direzione di incidenza θ è legato agli angoli di deviazione rispetto agli assi y e z dalla seguente relazione

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_y - \sin^2 \theta_z} \quad (24)$$

Da queste è possibile ottenere lo scostamento laterale a una distanza arbitraria, D , dalla superficie (trascurando le interazioni con il mezzo interposto)

$$L_D = l + D \tan \theta \quad (25)$$

4.1.1 Geometrie implementate

STRATI SINGOLI La geometria dell'applicazione sviluppata per la simulazione della propagazione dei muoni in uno strato di materiale segue lo schema in figura 18. La geometria e la sorgente di muoni sono implementate nel modo seguente:

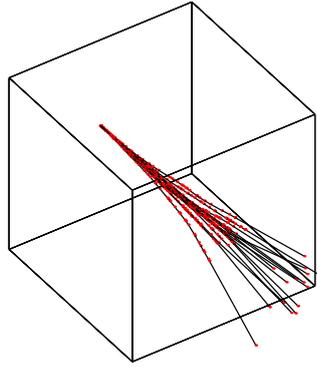


Figura 19: La geometria della simulazione riprende lo schema mostrato in figura 18. In questo esempio sono mostrate le tracce simulate di 15 muoni di 0.7 GeV incidenti perpendicolarmente alla faccia di un cubo di roccia di lato 1 m: i punti rossi rappresentano le interazioni discrete con il materiale (le particelle secondarie non sono tracciate).

- la geometria del materiale consiste in un cubo di lato Δx ;
- la sorgente di muoni è puntiforme e collocata al centro di una faccia del cubo;
- la direzione dei muoni è perpendicolare alla faccia del cubo.

Un esempio della geometria è mostrato in figura 19, dove sono indicate, a scopo illustrativo, anche le tracce simulate di alcuni muoni; lungo le tracce i punti rossi rappresentano una interazione discreta con il materiale.

STRATI VARIABILI Per simulare l'interazione del materiale in strati di dimensione variabile (come fatto in sezione 4.5 per valutare l'entità dello scattering e dello scostamento laterale al variare dello spessore di roccia) è stato necessario implementare una geometria tale da permettere l'attraversamento di spessori diversi in funzione del punto di origine del muone. Per studiare l'interazione con un intervallo di spessori $[\Delta x_{\min}, \Delta x_{\max}]$, rispetto al caso del singolo spessore:

- si sostituisce al cubo un cono di base e altezza pari Δx_{\max} ;
- i muoni vengono generati come nel caso precedente ma distribuiti uniformemente in un intervallo di altezze $[0, \Delta x_{\max} - \Delta x_{\min}]$.

In questo modo, un muone generato a un'altezza $y \in [0, \Delta x_{\max} - \Delta x_{\min}]$ incontrerà uno spessore $\Delta x = \Delta x_{\max} - y$ lungo la sua traiettoria. Si ottiene così un campione di muoni uniformemente distribuito nell'intervallo di spessori in esame.

MATERIALI Da questo momento, e per il resto del capitolo, con "aria" e "roccia" mi riferirò ai materiali utilizzati nelle simulazioni:

- *aria standard*: aria al livello del mare (1 atm), con umidità relativa dello 0%, temperatura di 0 °C e densità $1.205 \cdot 10^{-3} \text{ g m}^{-3}$;
- *roccia standard*: con una densità di 2.65 g m^{-3} , numero atomico $Z = 11$ e rapporto $Z/A = 0.5$.

4.2 STOPPING POWER

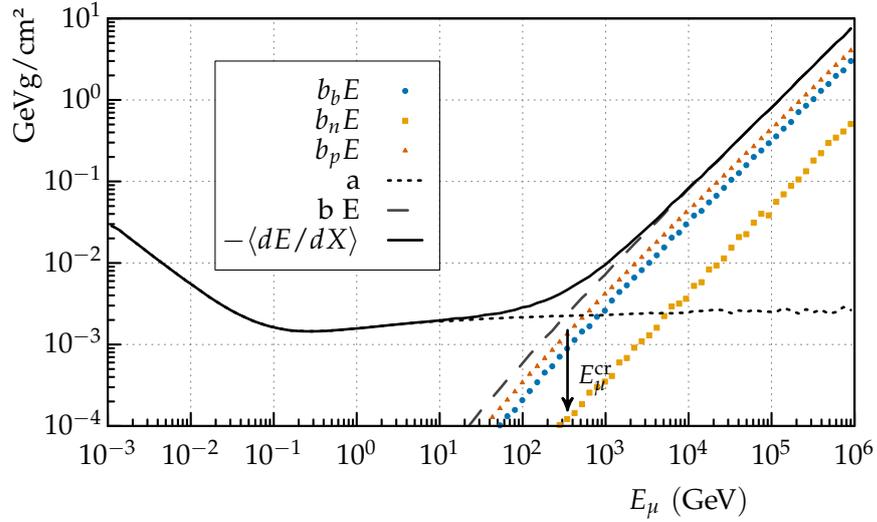


Figura 20: Stopping power medio nel ferro ottenuto simulando $6 \cdot 10^6$ muoni con energia compresa tra 10^{-3} e 10^6 GeV. La freccia indica l'energia critica ($E_\mu^{\text{cr}} \simeq 347$ GeV nel ferro) per la quale lo stopping power elettronico (a) eguaglia quello radiativo (bE). Di quest'ultimo sono mostrati i contributi dei singoli processi (27).

La capacità media di un dato materiale di frenare una particella carica (*stopping power*) è definita come il rapporto tra l'energia persa dalla particella e lo spazio percorso all'interno del materiale. Sono quattro i processi principali che determinano la perdita di energia dei muoni e la produzione di particelle secondarie:

- ionizzazione;
- produzione diretta di coppie elettrone-positrone;
- bremsstrahlung;
- interazioni anelastiche con i nuclei.

Lo stopping power medio per i muoni può essere descritto da [75]

$$\left\langle -\frac{dE_\mu}{dX} \right\rangle = a(E_\mu) + b(E_\mu)E_\mu \quad (26)$$

dove E_μ è l'energia cinetica del muone, $a(E_\mu)$ è dovuto alle perdite di energia per ionizzazione (perdite elettroniche) e $b(E_\mu)$ è la somma dei contributi dovuti ai processi di produzione di coppie, bremsstrahlung e fotonucleari (perdite radiative)

$$b \equiv b_p + b_b + b_n \quad (27)$$

La notazione è giustificata dalla debole variazione di $a(E)$ e $b(E)$ alle alte energie, dove lo stopping power totale risulta quasi linearmente dipendente dall'energia.

Si definisce *energia critica* dei muoni l'energia per la quale le perdite radiative eguagliano quelle per ionizzazione. Noti $a_M(E)$ e $b_M(E)$ di un materiale M , l'energia critica si ottiene risolvendo

$$a_M(E_\mu^{\text{cr}}) = E_\mu^{\text{cr}} b_M(E_\mu^{\text{cr}}) \quad (28)$$

Questa condizione corrisponde all'intercetta tra le curve tratteggiate in figura 20 e rappresenta la soglia oltre la quale dominano i processi radiativi. La dipendenza di E_μ^{cr} dal numero atomico Z è del tipo [76]

$$E_\mu^{\text{cr}}(Z) = \frac{C}{(Z+c)^\eta} \approx \begin{cases} \frac{7980 \text{ GeV}}{(Z+2.03)^{0.879}} & \text{per i gas} \\ \frac{5700 \text{ GeV}}{(Z+1.47)^{0.838}} & \text{per i solidi} \end{cases} \quad (29)$$

A parità di numero atomico, i processi radiativi dominano a energie maggiori se il materiale è allo stato gassoso perché le perdite per ionizzazione subiscono una riduzione minore a causa dell'*effetto densità* (descritto in appendice A). Nel caso del ferro, della roccia e dell'aria l'uguaglianza dei contributi è raggiunta rispettivamente a 347 GeV, 693 GeV e 1115 GeV [77]. I processi radiativi sono caratterizzati da piccole sezioni d'urto e forti fluttuazioni di energia trasferita. Di conseguenza, come verrà mostrato nella sezione 4.3, l'utilizzo delle perdite energetiche medie (26) può non risultare adatto allo studio di applicazioni che coinvolgono spessori elevati di roccia (maggiori di circa 500 m).

4.2.1 Validazione delle perdite energetiche

Lo stopping power medio viene calcolato come funzione dell'energia dei muoni incidenti, $E_{\mu,in}$,

$$\left\langle -\frac{dE(E_\mu)}{dX} \right\rangle \simeq \frac{-\Delta E(E_{\mu,in})}{\Delta X} = \frac{E_{\mu,in} - E_{\mu,out}}{\rho \Delta x} \quad (30)$$

dove ρ è la densità del materiale, Δx lo spessore attraversato e ΔE l'energia persa dal muone incidente. Nella 30 è implicitamente richiesto che la perdita di energia sia una frazione trascurabile di quella iniziale. Di conseguenza, questo tipo di stima richiede un'accurata scelta dello spessore. Se è maggiore del potere penetrante dei muoni incidenti questi vengono fermati nel materiale e si ottiene una sovrastima dello stopping power. Se lo spessore è molto minore del potere penetrante le interazioni con il materiale risultano insufficienti e si ottengono grandi fluttuazioni del valore stimato.

Per la validazione sono stati simulati $6 \cdot 10^6$ muoni per il ferro e $9 \cdot 10^6$ muoni per la roccia, utilizzando le combinazioni di spessori e intervalli energetici riportate in tabella 2.

La differenza tra simulazione e valori teorici, per lo stopping power $S_P(E)$ di un processo P , viene definita rispetto allo stopping power totale

$$\delta_P = 100 \left| \frac{S_P(E)}{S_{\text{PDG}}(E)} - 1 \right| \quad [\%] \quad (31)$$

dove S_{PDG} è lo stopping power di riferimento [77], i cui valori tabulati, per diversi materiali e composti, sono disponibili sul sito del *Particle Data Group*¹.

¹ <http://pdg.lbl.gov/2017/AtomicNuclearProperties/>

Tabella 2: Spessori ed intervalli energetici corrispondenti utilizzati per la validazione dello stopping power medio.

Ferro		Roccia	
Intervallo energetico (GeV)	Spessore (cm)	Intervallo energetico (GeV)	Spessore (cm)
10^{-3} - 10^{-2}	10^{-3}	10^{-3} - 10^{-2}	$8 \cdot 10^{-4}$
10^{-2} - 10^{-1}	10^{-2}	10^{-2} - 10^{-1}	$5 \cdot 10^{-3}$
10^{-1} - 10^0	10^{-1}	10^{-1} - 10^0	1
10^0 - 10^1	10^0	10^0 - 10^1	8
10^1 - 10^3	10^2	10^1 - 10^2	$3 \cdot 10^1$
10^3 - 10^6	10^3	10^2 - 10^3	$3 \cdot 10^2$
		10^3 - 10^4	$3 \cdot 10^3$
		10^4 - 10^6	10^5

Per valutare le quantità alla stessa energia, i dati di riferimento sono stati interpolati con una spline cubica.

Dai profili di $a(E)$ e $b(E)$ ottenuti dalle simulazioni è stata misurata l'energia critica eseguendo un fit del rapporto $a(E)/b(E)E$ utilizzando come funzione empirica

$$f(E) = \frac{\alpha}{E^\beta} \quad (32)$$

Una volta stimati i parametri, l'energia critica si ottiene eguagliando a 1 il rapporto

$$E_{\mu,c} = \alpha^{\frac{1}{\beta}} \quad (33)$$

Si ottengono i seguenti valori, consistenti con i modelli teorici di riferimento in Groom et al. [77]

Materiale	$E_{\mu,c}$ simulata (GeV)	$E_{\mu,c}$ di riferimento (GeV)	Differenza relativa (%)
Ferro	327 ± 19	347	6
Roccia	709 ± 12	693	2

In figura 21 è mostrato lo stopping power medio totale nella roccia e nel ferro, per energie che vanno da 10^{-3} a 10^6 GeV. La differenza con il modello teorico non supera il 2% nella roccia e il 3% nel ferro, indipendentemente dall'energia considerata. In figura 22 e figura 23 sono mostrati i vari contributi alle perdite energetiche medie nel ferro e nella roccia. Relativamente allo stopping power totale quello dei singoli processi non differisce in modo significativo dai modelli teorici. Per il ferro è stata eseguita una validazione dei processi su uno spettro energetico ampio, mentre per la roccia è stato considerato uno spettro energetico compreso tra 5 GeV e 10^5 GeV utilizzando un singolo spessore di 3 m, sia per una questione di tempi di calcolo sia perché i risultati coprono adeguatamente l'intervallo di energie utilizzato nelle simulazioni (sezione 6.1.1).

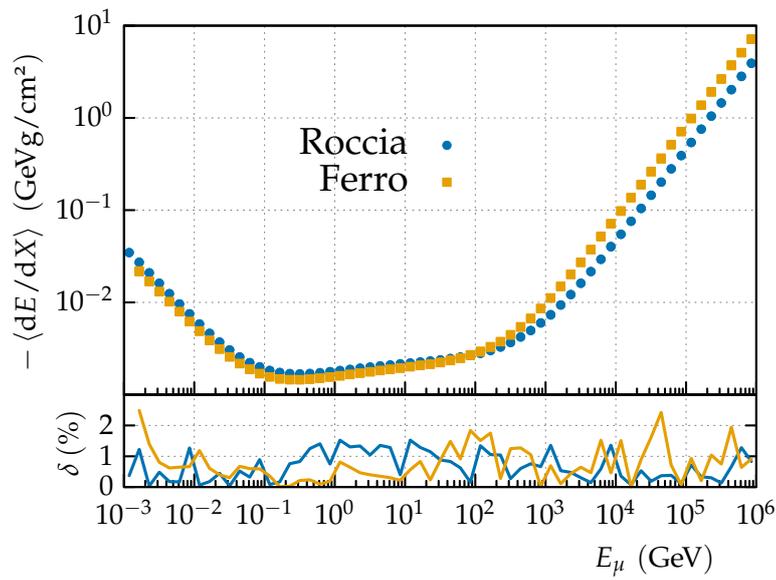


Figura 21: Stopping power medio nel ferro e nella roccia ottenuto simulando, rispettivamente, $6 \cdot 10^6$ e $9 \cdot 10^6$ muoni di energia compresa tra 10^{-3} GeV e 10^6 GeV, che attraversano diversi spessori di materiale (come descritto del testo). La differenza relativa con i modelli, riportata nel grafico inferiore, non supera il 3%. Nel pannello superiore i punti teorici e simulati sono indistinguibili.

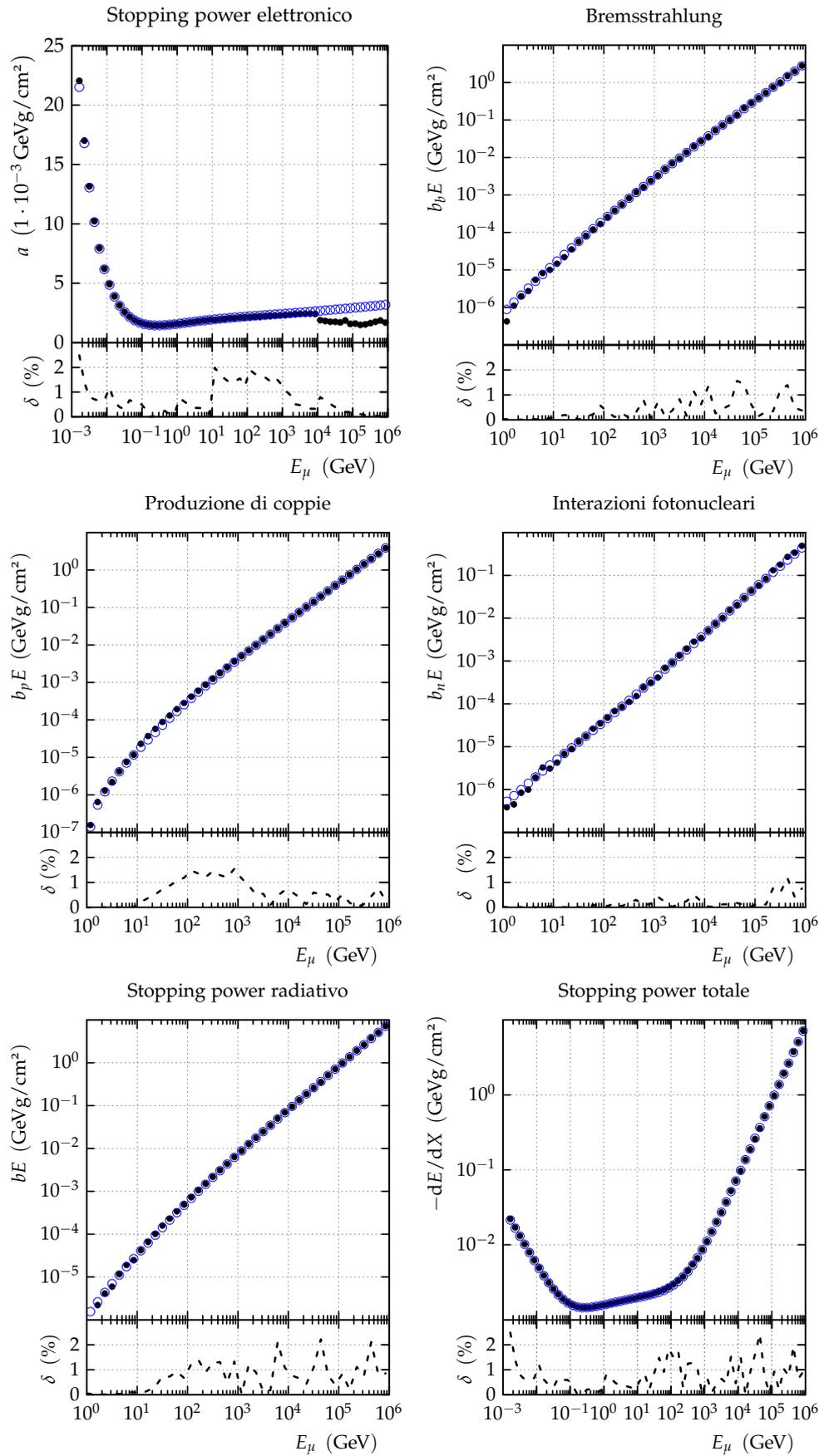


Figura 22: Stopping power totale e dei singoli processi ottenuto per il ferro (come descritto nel testo) e differenza relativa con i valori di riferimento.

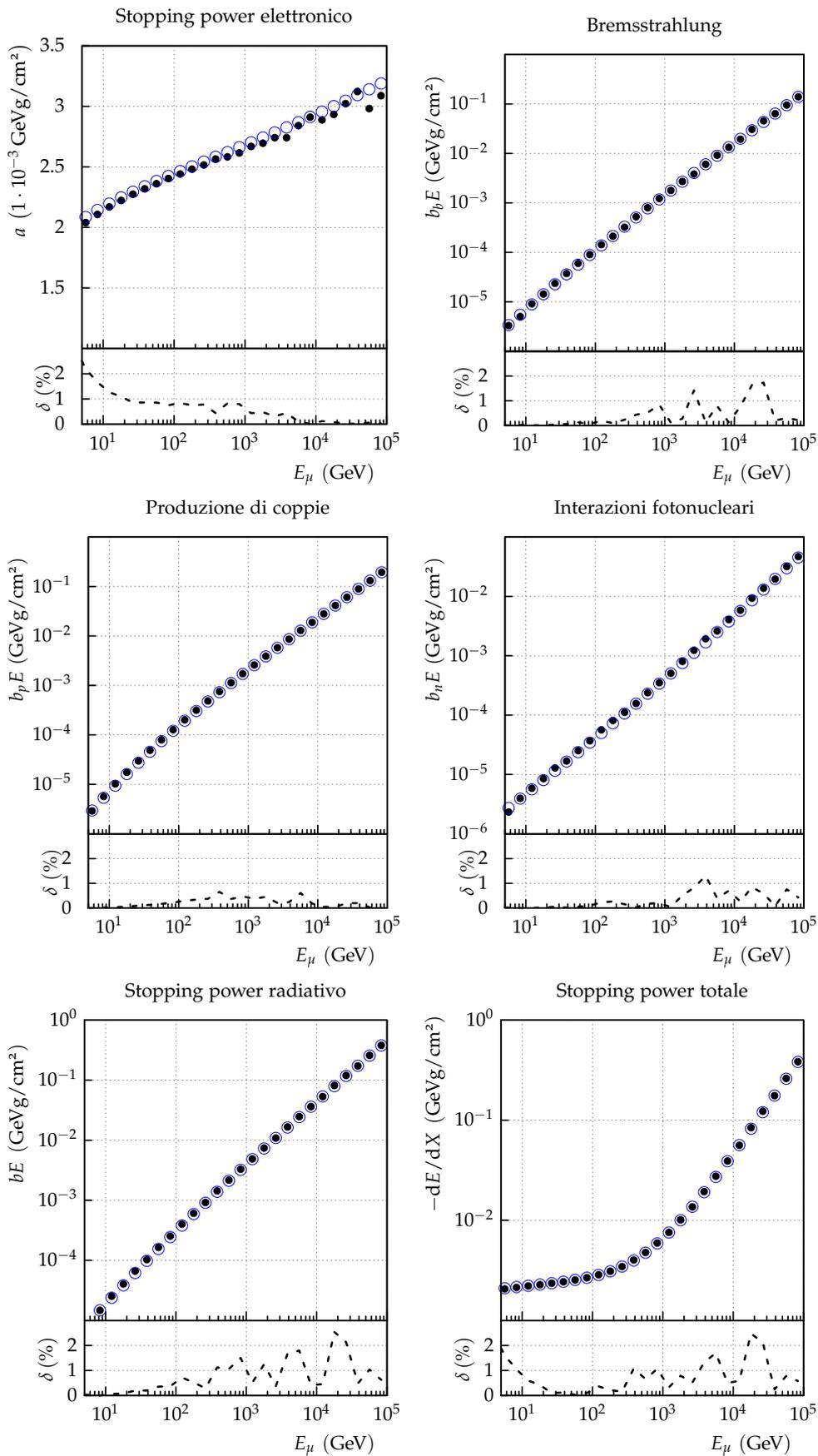


Figura 23: Stopping power totale e dei singoli processi ottenuto per la roccia (come descritto nel testo) e differenza relativa con i valori di riferimento.

4.3 PROBABILITÀ DI SOPRAVVIVENZA

4.3.1 Continuous slowing down approximation

La *continuous slowing down approximation* (CSDA) consiste nell'assumere che un muone, con energia E_μ , attraversando uno strato $dX = \rho dx$, perda sempre esattamente l'energia prevista dallo stopping power medio (26). Sotto questa ipotesi, possiamo calcolare lo spessore che riuscirà ad attraversare prima di fermarsi (*range*)

$$R_{\text{CSDA}}(E_\mu) = \int_0^R dx = \frac{1}{\rho} \int_0^{E_\mu} \frac{dE}{-\langle dE/dX \rangle} \quad (34)$$

Se consideriamo i termini a e b indipendenti dall'energia è possibile ottenere un'espressione analitica per il range

$$R_{\text{CSDA}}(E_\mu) = \frac{1}{b} \ln \left[1 + \frac{E_\mu}{E_\mu^{\text{cr}}} \right] \quad (35)$$

Occorre però tenere presente che l'indipendenza dall'energia dei termini $a(E)$ e $b(E)$ è approssimativamente vera solo a energie molto maggiori di E_μ^{cr} , ma a queste energie i processi radiativi diventano dominanti e le perdite di energia hanno grandi fluttuazioni intorno al valor medio. Come verrà mostrato successivamente, una percentuale consistente dei muoni non raggiunge R_{CSDA} , e il range medio diventa minore di R_{CSDA} (anche del 20%). Di conseguenza la 35 non è mai valida, mentre la 34 è una buona approssimazione del range medio a energie minori di quella critica, cioè quando le perdite energetiche frazionarie, $\nu = \Delta E/E$, sono poco disperse intorno a un valor medio $\langle \nu \rangle$.

In fig. 24 sono mostrate le distribuzioni delle perdite per muoni attraversanti uno strato di 5 m di roccia. Già a energie vicine a $E_{\mu,c}$ lo spettro delle perdite è molto esteso anche se ancora piccato, ma a energie in cui dominano le perdite radiative la distribuzione si appiattisce notevolmente. Questo è anche evidente in fig. 85 (in appendice A), dove sono mostrate le perdite, non frazionarie, in 3 m di ferro.

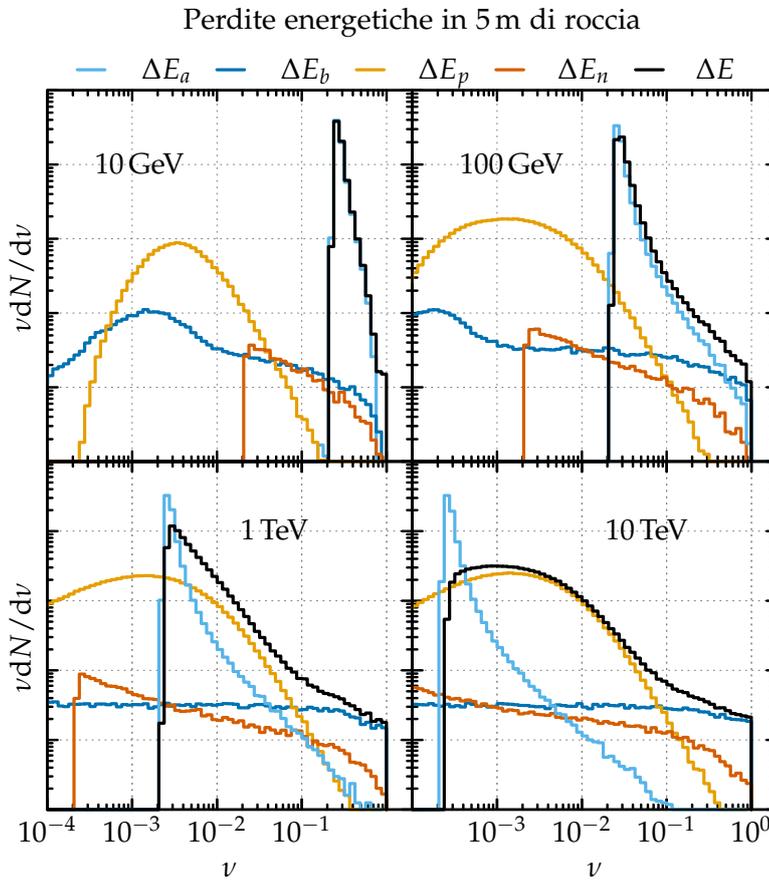


Figura 24: Distribuzione delle perdite frazionarie di energia in 5 m di roccia per fasci di 10^6 muoni con energia di 10 GeV, 100 GeV, 1 TeV e 10 TeV. La curva nera rappresenta la distribuzione delle perdite dovute a tutti i processi, le curve blu, gialla e arancio quelle delle perdite radiative e la curva azzurra quella delle perdite elettroniche. A 10 GeV e 100 GeV le perdite sono totalmente dominate dalla ionizzazione, a eccezione delle perdite frazionarie estreme ($\nu \simeq 0.8 - 1$). A 1 TeV la ionizzazione domina le perdite frazionarie intermedie ($\nu < 10^{-2}$), mentre a grandi perdite frazionarie ($\nu > 10^{-2}$) dominano i processi radiativi. A 10 TeV le perdite sono completamente dominate dai processi radiativi e lo spettro si estende fino a piccole perdite frazionarie ($\nu \simeq 2 \cdot 10^{-4}$).

4.3.2 Stima del range

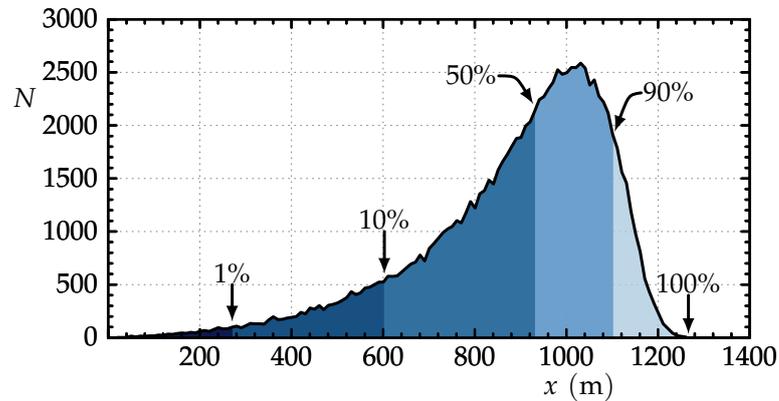


Figura 25: Distribuzione delle spessori di roccia attraversato da 10^5 muoni di 10^3 GeV. Sono indicati i percentili della distribuzione p_α , a ognuno dei quali corrisponde una probabilità di sopravvivenza $P = 100 - \alpha$.

Consideriamo un fascio monocromatico di muoni che attraversano uno spessore di roccia “infinito” (cioè molto più grande del loro range medio). Poiché le perdite energetiche sono affette da fluttuazioni, ogni muone riuscirà ad attraversare uno spessore diverso di materiale prima di fermarsi. In figura 25 è mostrata come esempio la distribuzione degli spessori attraversati da 10^5 muoni di 10^3 GeV: l’asimmetria della distribuzione è una diretta conseguenza della natura statistica delle perdite radiative. Le collisioni ad alto trasferimento energetico, seppur rare, spostano la media del range a valori più bassi. Il valore più probabile della distribuzione è di circa 1030 m mentre la media è 890 m, ma i muoni che riescono a superare questi valori sono, rispettivamente, il 28 % e il 60 % del totale.

Il range viene calcolato come stima di un quantile della distribuzione: a un quantile di ordine α corrisponderà un range R_p con probabilità di sopravvivenza $P = 1 - \alpha$. Sempre in figura 25 sono indicati i quantili $q_{0.01}$, $q_{0.1}$, $q_{0.5}$, $q_{0.9}$ e $q_{1.0}$: a 10^3 GeV la distribuzione di range è molto larga: si passa da una probabilità di sopravvivenza dello 0 % a 1266 m a una del 90 % a 603 m. Il range $R_{0.5}$ corrisponde alla mediana della distribuzione. Considerando il valor medio, o la moda si ottiene un range con probabilità di sopravvivenza variabile, la quale dipende dalla forma della distribuzione, a sua volta dipendente dall’energia attraverso la sezione d’urto differenziale totale $\phi(\nu, E_\mu)$.

Poiché lo scattering non è stato trascurato, il range ottenuto è l’intero cammino percorso da un muone nel mezzo. Questo è diverso dalla massima distanza raggiunta lungo la direzione di propagazione, detta *potere penetrante*. Nella simulazione è stato implementato anche il calcolo di quest’ultimo, e la differenza risulta trascurabile a tutte le energie considerate, non superando mai l’1 %.

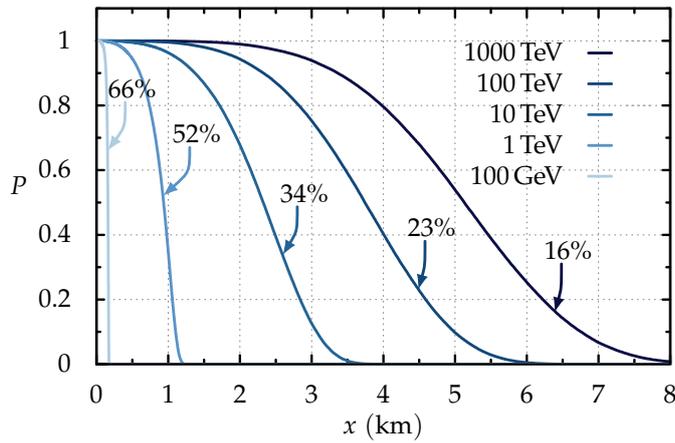


Figura 26: Probabilità di sopravvivenza in funzione dello spessore di roccia per fasci monocromatici di $1 \cdot 10^5$ muoni. Le percentuali riportate indicano la probabilità che un muone raggiunga il range CSDA.

4.3.3 Probabilità di sopravvivenza

La probabilità di sopravvivenza dipende dalla sezione d'urto differenziale totale

$$\phi(\nu, E_\mu) = \sum_i \frac{d\sigma_i}{d\nu}(\nu, E_\mu) \quad (36)$$

che si ottiene sommando su tutti i processi che causano perdite energetiche. Da questa è possibile ottenere in modo semi-analitico la probabilità di sopravvivenza, a patto di considerare $\phi(\nu, E)$ indipendente da E e trascurare le perdite per ionizzazione, o considerarle costanti [74]. Questa condizione risulta valida solo a energie maggiori di circa 10^5 GeV, ma non è mai esattamente raggiunta poiché il termine $a(E)$ cresce logisticamente con l'energia. In ogni caso la soluzione è una buona approssimazione solo fuori dagli intervalli energetici (e quindi di spessore) considerati. Di conseguenza una precisa valutazione della probabilità di sopravvivenza, e del range corrispondente, deve essere fatta attraverso simulazioni Monte Carlo.

Tenendo conto delle fluttuazioni si deve sostituire il range CSDA con una distribuzione di range $R(E_\mu, P)$, definita in base alla probabilità $P(x, E_\mu)$ che un muone di energia E_μ attraversi uno spessore x senza essere fermato. In figura 26 è mostrata la probabilità di sopravvivenza in funzione dello spessore di roccia, ottenuta con fasci monocromatici di 10^5 muoni di energia 100 GeV, 1 TeV, 10 TeV, 100 TeV e 1000 TeV. La distribuzione diventa sempre più larga all'aumentare dell'energia, cioè quando aumenta l'influenza dei processi radiativi e delle fluttuazione delle perdite energetiche associate [74]. Le frecce in figura indicano la probabilità di sopravvivenza corrispondente al range CSDA: questo è raggiunto dal 52% dei muoni a 1 TeV, mentre a 10^3 TeV solo dal 16%. Le fluttuazioni, oltre a causare un allargamento delle distribuzioni, causano un abbassamento della media rispetto al range CSDA.

In figura 27 è mostrato il range corrispondente a diverse probabilità di sopravvivenza ottenuto simulando la propagazione di $160 \cdot 10^3$ muoni: in corrispondenza dell'energia critica (693 GeV nella roccia) le fluttuazioni delle perdite energetiche dovute ai processi radiativi iniziano ad influenzare fortemente la distribuzione, come evidenziato nel riquadro. In figura 28 gli

estremi della distribuzione R_P ($R_{0.05}$ e $R_{0.95}$) e il range medio ($\langle R \rangle$) vengono confrontati con il range CSDA: la differenza relativa tra R_{CSDA} e $R_{0.05}$ non supera il 30 %, mentre raggiunge il 60 % con $R_{0.95}$. Il range medio risulta confrontabile con il range CSDA solo fino a energie dell'ordine di $E_{\mu,c}$, a energie maggiori è sempre minore e la differenza cresce con l'energia.

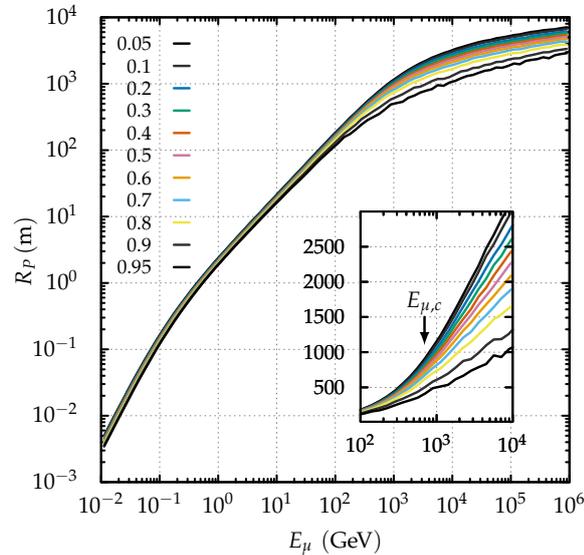


Figura 27: Curve di uguale probabilità di sopravvivenza (codice in colori a sinistra) al variare dello spessore e dell'energia; a probabilità maggiori corrispondono spessori minori. Nel riquadro, in scala semi-logaritmica, è evidenziato l'allargamento delle curve oltre l'energia critica. I risultati sono stati ottenuti simulando $1.6 \cdot 10^5$ muoni.

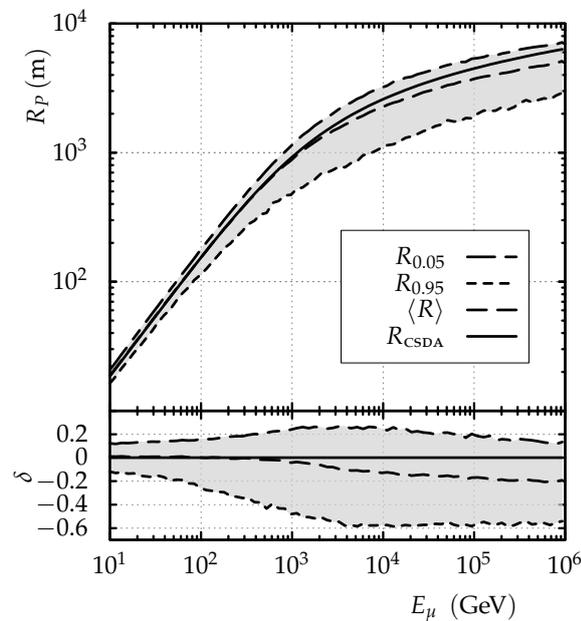


Figura 28: Confronto tra range CSDA e range corrispondente alle probabilità di attraversamento del 95 % e 0.05 %. I risultati sono stati ottenuti simulando $1.6 \cdot 10^5$ muoni.

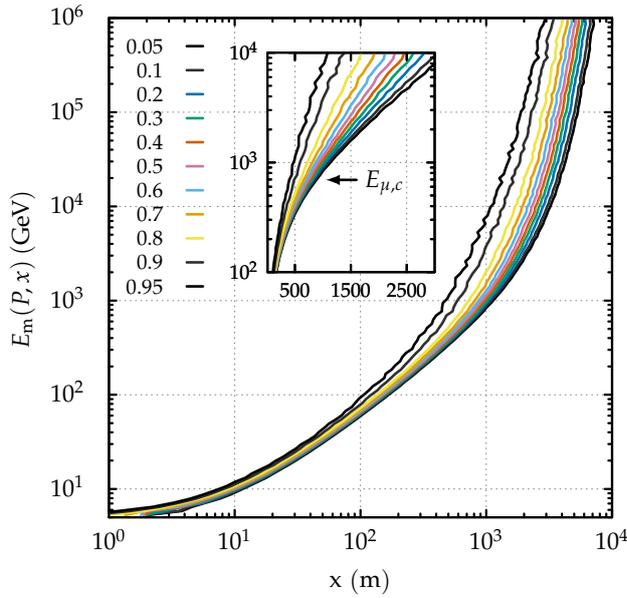


Figura 29: Energia minima necessaria a un muone incidente per attraversare uno spessore x di roccia con un'energia in uscita maggiore di 5 GeV. A probabilità maggiori corrispondono energie minime maggiori. Le probabilità sono riportate nel codice a colori a sinistra. Nel riquadro, in scala semi-logaritmica, è evidenziato l'allargamento delle curve oltre l'energia critica.

4.4 ENERGIA MINIMA E RELAZIONE INTENSITÀ-SPESSORE

Poichè i muoni perdono energia interagendo con gli atomi del materiale attraversato, il numero di interazioni è direttamente proporzionale alla densità e allo spessore del materiale; è conveniente definire una *profondità di interazione*

$$X = \int_0^x \rho(x') dx' \quad (37)$$

la quale è proporzionale alla perdita di energia lungo tutto il cammino considerato. Sia dN/dE_μ lo spettro dei muoni incidenti, il flusso atteso dopo l'attraversamento di uno spessore x dipende solo dalla profondità di interazione

$$I^{\text{CSDA}}(X) = \int_{E_0(X)}^{\infty} \frac{dN}{dE_\mu} dE_\mu \quad (38)$$

dove $E_0(X)$ è l'energia minima che il muone incidente deve avere per attraversare uno strato X senza essere fermato

$$E_0(X) = \int_0^X \left\langle -\frac{dE}{dX} \right\rangle dX' \quad (39)$$

Bisogna anche tener conto della soglia energetica, E_{th} , per l'emissione di radiazione Čerenkov: l'energia iniziale minima necessaria affinché il muone in uscita abbia energia maggiore della soglia si ottiene risolvendo

$$E_m(X) - E_{\text{th}} = \int_0^X \left\langle -\frac{dE}{dX} \right\rangle dX' \quad (40)$$

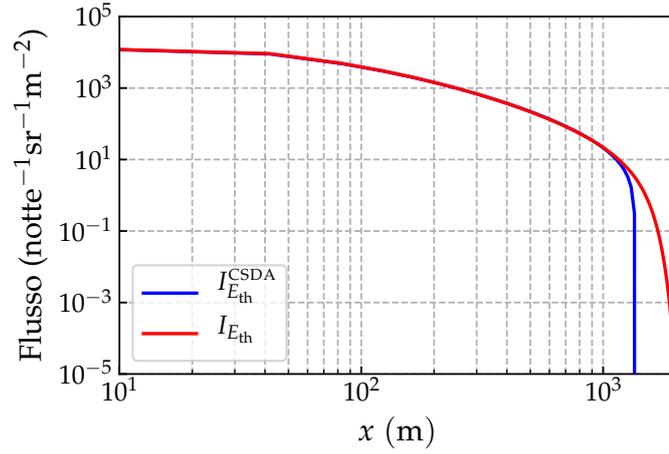


Figura 30: Confronto tra la relazione intensità-spessore nella roccia ottenuta con l'approssimazione CSDA (equazione 38, curva blu) e quella ottenuta utilizzando la probabilità di sopravvivenza ricavata dalle simulazioni (equazione 41, curva rossa). Lo spettro utilizzato è il Reyna-Bugaev a un angolo zenitale di 85° e in un intervallo 4.4 GeV-2000 GeV. L'energia di soglia utilizzata è quella di emissione Čerenkov nell'aria al livello del mare.

dove E_{th} dipende dall'indice di rifrazione del materiale e dalla massa della particella. Per i muoni nell'aria $E_{th} \simeq 4.4$ GeV al livello del mare, 8.1 GeV a una quota di 10 km e 12 GeV a 15 km [78].

L'equazione 40 definisce l'energia minima attraverso le perdite energetiche medie, come avviene con il range CSDA. Anche in questo caso le fluttuazioni ci spingono a considerare una distribuzione di energie minime $E_m(P_{E_{th}}, X)$, definita in base alla probabilità $P_{E_{th}}(E_\mu, X)$ che un muone, di energia E_μ , emerga da uno spessore X con un'energia maggiore di E_{th} . Per ottenere l'intensità dei muoni sopra la soglia di emissione pesiamo lo spettro su $P_{E_{th}}$

$$I_{E_{th}}(X) = \int_{E_{th}}^{\infty} P_{E_{th}}(X, E_\mu) \frac{dN}{dE_\mu} dE_\mu \quad (41)$$

Poiché tale probabilità è sicuramente nulla per $E_\mu < E_{th}$, dato che l'energia in uscita deve essere minore di quella in entrata, la scelta dell'estremo inferiore di integrazione minore non influisce sul risultato. In figura 29 è mostrata l'energia minima, per una soglia di 5 GeV, corrispondente a diverse probabilità. Come nel caso del range, in figura è mostrato l'aumento della dispersione delle curve oltre l'energia critica. A 500 m di spessore l'energia minima corrispondente a probabilità del 5% e 95% è, rispettivamente, di circa 200 GeV e 1 TeV. I muoni con energia iniziale minore di 20 GeV possono essere rivelati solo se attraversano spessori minori di 30 m.

È importante notare che, fissato uno spessore, la piccola probabilità di sopravvivenza dei muoni di bassa energia può essere compensata da un'intensità iniziale più alta. Nel caso CSDA tutti i muoni con energia minore di $E_m(x)$ non contribuiscono al flusso integrato in uscita, questo, considerando le fluttuazioni delle perdite energetiche, è influenzato dalle code della probabilità di sopravvivenza e dipende dalla dispersione delle perdite [74]. L'effetto delle fluttuazioni è mostrato in figura 30 dove è mostrato il confronto tra la relazione $I - x$ nei due casi (equazioni 38 e 41) utilizzando lo spettro

di Reyna-Bugaev a un angolo di 85° e in un intervallo 4.4 GeV-2000 GeV: l'effetto delle fluttuazioni è significativo solo a spessori maggiori dell'energia critica; il flusso CSDA presenta un taglio a uno spessore pari al range CSDA corrispondente alla massima energia in esame (2000 GeV), oltre la quale, in questa approssimazione, la probabilità di sopravvivenza è nulla. Nell'intervallo di spessori solitamente in esame nelle muografie la differenza tra le due relazioni è trascurabile (non supera il 2%), anche rispetto all'errore associato al conteggio degli eventi.

4.5 SCATTERING

Durante la propagazione nella roccia i muoni sono continuamente deviati dalla loro traiettoria. L'entità dello scattering subito dipende fortemente dalla loro energia: durante la propagazione i muoni vengono frenati e l'entità dello scattering aumenta di conseguenza. L'angolo di deviazione è determinato dalle fasi finali della propagazione, e sarà tanto maggiore quanto minore è l'energia con la quale il muone emerge.

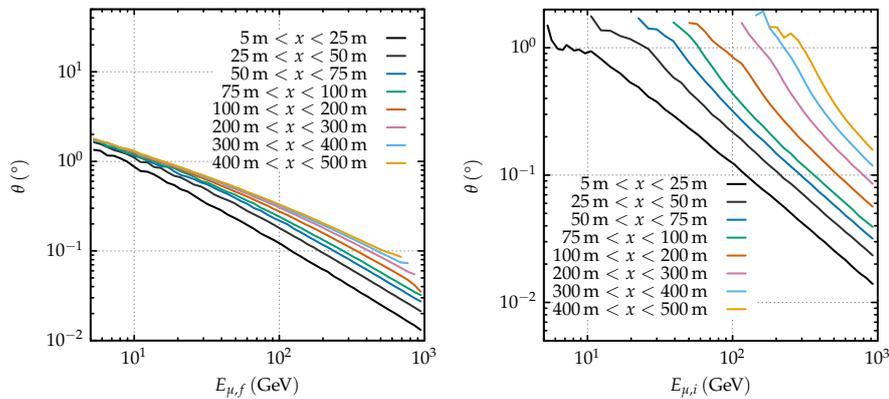


Figura 31: Angolo di scattering medio in funzione dell'energia finale (sinistra) e di quella iniziale (destra) per intervalli di spessore diversi. Lo spettro energetico dei muoni incidenti è uniforme con energia compresa tra 5 GeV e 10^3 GeV.

In figura 31, a sinistra, è mostrato l'angolo di scattering in funzione dell'energia finale per muoni che sopravvivono all'attraversamento con energia maggiore di 5 GeV. In media i muoni che emergono, attraversando qualsiasi spessore, con un'energia minore di 10 GeV subiscono una deviazione angolare di 1° - 2° . Solo per muoni con $E_{\mu,f} > 10^2$ GeV la deviazione scende, a qualsiasi spessore, sotto i 3 decimi di grado.

In figura 31, a destra, è mostrato nuovamente l'angolo di scattering ma in funzione dell'energia iniziale dei muoni. Qui è ancora più evidente come la deviazione angolare dipenda fortemente dall'energia persa durante la propagazione. L'angolo di scattering supera il grado quando l'energia iniziale è pari all'energia minima necessaria al muone per emergere con un'energia maggiore di 5 GeV. Per esempio, nel caso che lo spessore sia compreso tra 100 m e 200 m l'energia minima è di circa 50 GeV e lo scattering di quasi 2° , alla stessa energia ma a spessori compresi tra 5 m e 25 m lo scattering è di circa 0.1° .

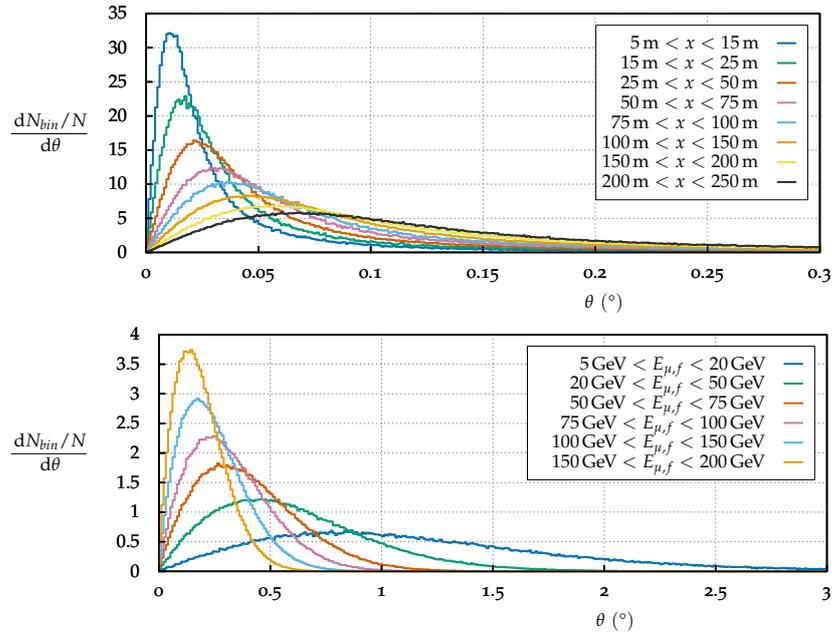


Figura 32: Distribuzione dell'angolo di scattering di un fascio di muoni con energie uniformemente distribuite tra 5 GeV e 1000 GeV, per diversi intervalli di spessore (sopra) e energie finali (sotto). Il valor medio e la dispersione delle distribuzioni diminuiscono a piccoli spessori e a energie finali più elevate.

Un'altra caratteristica importante dello scattering è che la dispersione intorno al valor medio diminuisce con l'aumentare dell'energia in uscita (e di conseguenza cresce con lo spessore), come mostrato in figura 32. Il valore medio dello scattering, su tutti gli spessori, per $5 \text{ GeV} < E_{\mu,f} < 20 \text{ GeV}$ è di circa 1.2° , ma più del 50% subisce deviazioni oltre il grado. Per $150 \text{ GeV} < E_{\mu,f} < 200 \text{ GeV}$ la quasi totalità dei muoni non subisce deviazioni maggiori di 0.5° . I bassi valor medi di scattering a diversi spessori, in figura 32 (sopra), sono dovuti al fatto che lo spettro considerato è uniforme, di conseguenza i muoni che sopravvivono con alte energie sono più numerosi di quelli a basse energie. I primi causano uno spostamento della moda a piccoli angoli, i secondi formano le code a grandi angoli delle distribuzioni.

L'entità dello scattering e dello scostamento laterale all'uscita dal materiale determinano durante il processo muografico uno "sfocamento" degli spessori ricostruiti. La risoluzione spaziale attesa σ_D , trascurando l'interazione con l'atmosfera, dipende dalla distanza D del rivelatore dal punto di uscita del muone

$$\sigma_D = l + d_D = l + D \tan \theta \quad (42)$$

dove sia l sia θ dipendono dallo spessore attraversato e dall'energia iniziale del muone. In figura 33 sono mostrati, per diversi intervalli di spessori di roccia attraversati, lo scostamento laterale l all'uscita e quello a 1500 m, d_{1500} , dal centro dello spessore: σ_d è dominato completamente dallo scostamento d_{1500} , il massimo contributo di l è pari a circa il 10% a grandi spessori (maggiori di 200 m).

In figura 34 è mostrato lo scattering in funzione dell'energia finale e dello spessore di materiale, ottenuto simulando $3 \cdot 10^7$ muoni utilizzando come

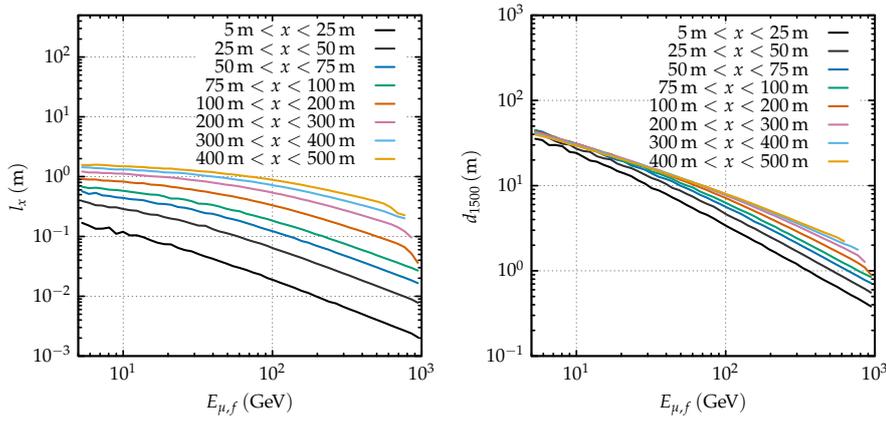


Figura 33: Scostamento laterale rispetto alla direzione di incidenza, in funzione dell'energia finale, nel punto di uscita dallo strato di roccia (sinistra) e a una distanza (lungo la traiettoria iniziale) di 1500 m dal centro dello strato (destra). Lo scostamento laterale all'uscita è trascurabile rispetto a quest'ultimo a tutte le energie e gli spessori considerati.

spettro iniziale per i muoni atmosferici quello di Bugaev-Reyna a 85° (descritto in sezione 1.2): lo scattering medio dei muoni in uscita dalla struttura di roccia (con un'energia maggiore di 4.4 GeV) presenta un massimo ($\sim 0.6^\circ$) a circa 60 m, corrispondente allo spessore attraversabile dai muoni con energia pari all'energia media dello spettro (55 GeV). La deviazione massima subita dal 90% dei muoni è minore di 1.5° , mentre per il 99% è minore di 3° .

In figura 35 è mostrata la distribuzione degli angoli di scattering dei muoni sopravvissuti all'attraversamento di 3 m di ferro e 10 m di roccia. La linea continua rappresenta le popolazioni di muoni sopravvissuti con energia maggiore di 5 GeV. L'asse superiore indica lo scostamento laterale, d_{1500} , previsto a una distanza di 1500 m (lo scostamento all'interno del mezzo è trascurato), già a 0.1° lo scostamento è di 2.6 m, e diventa 26 m a 1° . Nonostante il numero di muoni a bassa energia sia molto basso, lo spettro energetico dei muoni atmosferici è molto ripido e di conseguenza ci si aspetta che la bassa probabilità di sopravvivenza dei muoni con energia vicina all'energia minima sia compensata da un flusso molto più alto.

L'equazione 42 è valida se l'interazione con l'atmosfera è trascurabile, cosa che in generale non è vera. In questo caso la risoluzione angolare è pari all'angolo di deviazione dopo l'attraversamento di uno spessore X di roccia più l'angolo di deviazione dopo l'attraversamento di uno spessore D di aria. La risoluzione spaziale corrispondete è

$$\sigma(D, E_\mu, X) = D \tan \left[\theta_x^{\text{roccia}}(E_\mu, X) + \theta_x^{\text{aria}}(D, E_\mu) \right] \quad (43)$$

In figura 36 sono mostrati la deviazione e lo scostamento laterale in 1500 m d'aria: oltre i 50 GeV l'interazione con l'atmosfera è trascurabile, ma energie vicino alla soglia di produzione Čerenkov le deviazioni dalla traiettoria sono consistenti. Sia lo scostamento laterale che la deviazione angolare sono inversamente proporzionali all'energia: in media i muoni di energia pari a quella di soglia sono deviati di circa 0.5° e subiscono uno scostamento di circa 13 m; già intorno a 23 GeV la deviazione media è dell'ordine del decimo

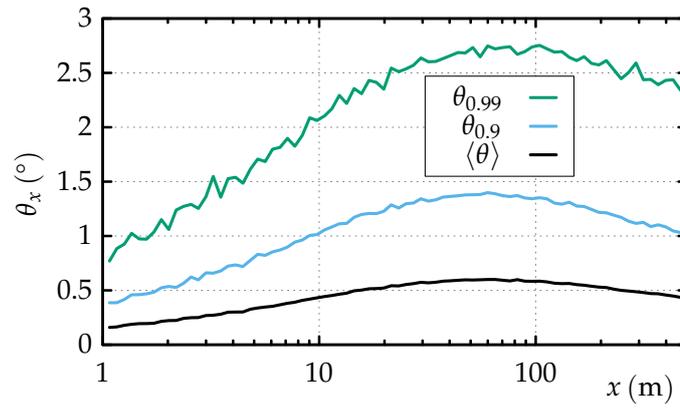


Figura 34: Scattering in funzione dello spessore di roccia attraversato per muoni con uno spettro iniziale di Reyna-Bugaev. Sono mostrati i quantili 0.99, 0.9 e la media.

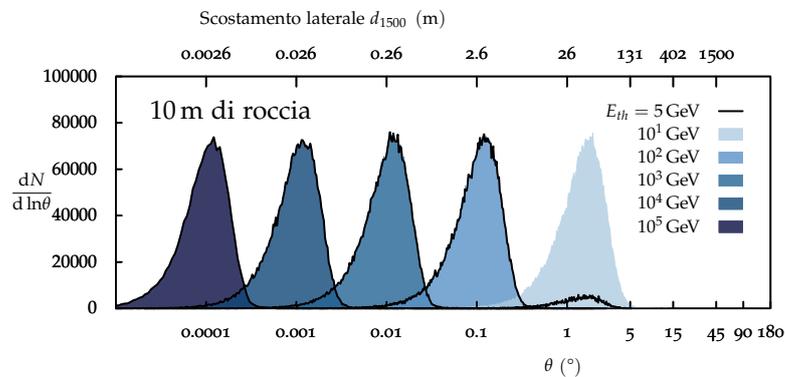


Figura 35: Distribuzione dell'angolo di scattering per fasci monocromatici di 10^4 muoni dopo l'attraversamento di 10 m di roccia. L'asse superiore rappresenta lo scostamento laterale a 1500 m dal punto di uscita. La linea continua indica le distribuzioni angolari dei muoni con energia in uscita maggiore di 5 GeV.

di grado e lo scostamento medio di circa 3 m. In figura sono anche mostrate la deviazione e lo scostamento in termini di percentili: il 99% dei muoni di energia pari a quella di soglia non è deviato oltre 1.4° e subisce uno scostamento laterale minore di 35 m; a 50 GeV i valori si abbassano rispettivamente a circa 0.1° e 3 m.

4.6 VALIDAZIONE DEL PROCESSO DI RADIAZIONE ČERENKOV

La parametrizzazione dell'indice di rifrazione utilizzata nelle simulazioni è la seguente [79]

$$n(\lambda) = 1 + \frac{0.05792105}{238.0185 - \lambda^{-2}} + \frac{0.00167917}{57.362 - \lambda^{-2}} \quad (44)$$

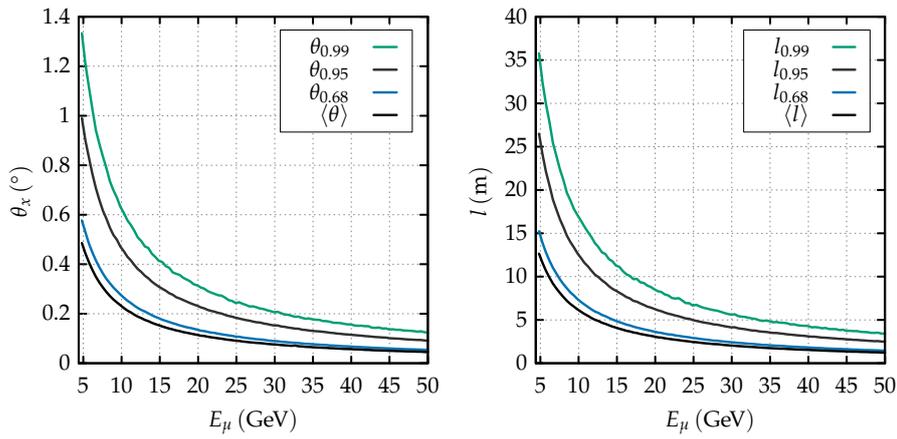


Figura 36: Scattering (sinistra) e scostamento laterale (destra) in 1500 m d'aria. Per entrambi sono mostrati i quantili 0.99, 0.95, 0.68 e la media, in funzione dell'energia iniziale.

valida per l'aria standard² e lunghezze d'onda comprese tra 0.23 e 1.69 μm . L'intervallo di lunghezze d'onda di produzione consentito è $0.3 \mu\text{m} < \lambda < 0.7 \mu\text{m}$, cioè quello a cui è sensibile la camera del telescopio ASTRI (descritto nella sezione 2.3). Questo corrisponde a un intervallo energetico $1.77 \text{ eV} < \epsilon < 4.13 \text{ eV}$.

La validazione del processo consiste nel verificare, trascurando le perdite energetiche, che:

- i fotoni vengono generati uniformemente lungo la traiettoria;
- nel sistema di riferimento della particella, i fotoni vengono generati uniformemente su un fronte d'onda conico di apertura $2\theta_c$;
- il numero totale di fotoni emessi è quello predetto dall'equazione 18;
- lo spettro dei fotoni emessi è quello predetto dall'equazione 15.

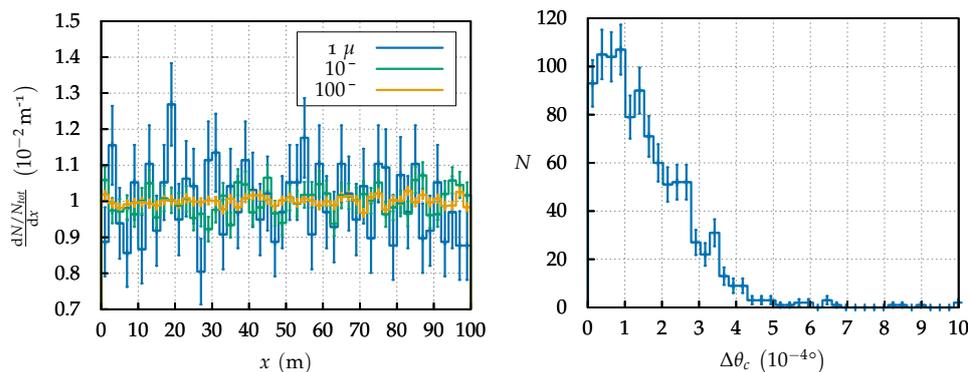


Figura 37: Distribuzione della frazione dei fotoni prodotti per unità di percorso (sinistra) e della differenza tra angolo Čerenkov teorico e simulato (destra). Entrambi i grafici sono stati ottenuti simulando 10^3 muoni di energia compresa tra 5 GeV e 55 GeV attraversanti 100 m di aria standard.

² Aria con umidità relativa dello 0%, alla temperatura di 15°C, pressione di 101.325 Pa e concentrazione di CO₂ pari a 450 ppm.

Per verificare l'uniformità di emissione sono stati simulati 10^3 muoni di energia compresa tra 5 GeV e 55 GeV attraversanti 100 m di aria standard. L'uniformità spaziale è verificata se la frazione di fotoni emessi per unità percorso è costante e pari all'inverso della lunghezza del percorso totale

$$\frac{dN/N_{\text{tot}}}{dx} = \frac{1}{\Delta x} = 10^{-2} \text{ m}$$

Sia l'uniformità di emissione che lo spettro dei fotoni prodotti vengono confrontati con quelli attesi attraverso un test χ^2 ridotto

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{1}{d} \sum \left(\frac{y_i - f_i}{\sigma_{y_i}} \right)^2$$

dove y_i , σ_{y_i} e f_i sono rispettivamente il valore simulato, il suo errore e il valore atteso nell'intervallo i . Il parametro d è il numero di gradi di libertà, in entrambi i casi pari al numero di intervalli in cui vengono divise le distribuzioni.

Come mostrato in figura 37 (destra), la produzione dei fotoni da un singolo muone è sufficientemente uniforme nello spazio entro i limiti statistici (per l'esempio nel grafico $\tilde{\chi}^2 \approx 1.2$). Aumentando il numero di muoni la distribuzione dei fotoni totali converge a quella attesa.

La distribuzione angolare dei fotoni emessi viene verificata controllando che l'angolo di emissione rispetto alla direzione del muone sia quello atteso (equazione 12), e verificando la distribuzione radiale uniforme delle direzioni perpendicolari al moto. L'angolo medio atteso è

$$\langle \theta_c \rangle = \arccos \frac{1}{\beta \langle n(\epsilon) \rangle} \quad (45)$$

e, come mostrato in figura 37, la differenza con il valore simulato non supera il millesimo di grado.

Fissato un sistema di riferimento $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ in modo che l'asse \mathbf{x} coincida con la direzione di propagazione del muone, gli angoli che la direzione di emissione di un fotone forma con gli assi sono legati dalla seguente relazione

$$\sin^2 \theta_y + \sin^2 \theta_z = \sin^2 \theta_c \quad (46)$$

Posti $Y = \sin \theta_y$ e $Z = \sin \theta_z$, la direzione dell' i -esimo fotone, degli N_{tot} emessi, è descritta dalla coppia (Y_i, Z_i) . Su un piano $\mathbf{Y-Z}$ si definisce la distanza media del punto (Y_i, Z_i) da tutti gli altri

$$d_i = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{j \neq i} \sqrt{(Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \quad (47)$$

e l'uniformità è verificata se la media delle d_i è pari alla distanza media dei punti su una circonferenza di raggio $\langle \sin \theta_c \rangle$ [80]

$$\langle d_i \rangle = \frac{4}{\pi} \langle \sin \theta_c \rangle \longrightarrow \langle \theta_c \rangle = \arcsin \left(\frac{\pi}{4} \langle d_i \rangle \right) \quad (48)$$

In figura 38 è mostrata la distribuzione della differenza tra la distanza media calcolata e quella attesa su un campione di 100 eventi³ dei 1000 simulati. La

³ La scelta di eseguire il test su un campione ridotto di eventi è dettata dall'eccessivo tempo di calcolo necessario.

differenza massima è dell'ordine del millesimo di grado. Sempre in figura è mostrata la distribuzione della dispersione della distanza media: per tutti e 100 gli eventi considerati, la dispersione ottenuta è minore di 3 centesimi di grado ed è consistente con la dipendenza di θ_c dallo spettro energetico dei fotoni.

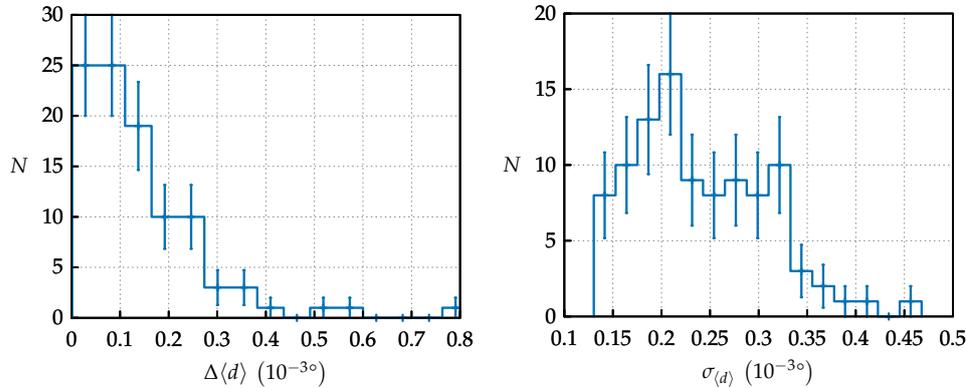


Figura 38: **Sinistra)** Differenza tra la distanza media (equazione 48) calcolata e attesa. **Destra)** Dispersione delle d_i (equazione 47): le distribuzioni sono rappresentative di un campione di 100 muoni attraversanti 100 m di aria standard con energia compresa tra 5 GeV e 55 GeV.

Il numero totale di fotoni emessi dato dall'equazione 18 è stato confrontato con i risultati della simulazione di 58 fasci monocromatici di 10^3 muoni con energie comprese tra 4.4 GeV e 25 GeV separate logicamente. La soglia di 4.4 GeV è l'energia minima che deve avere un muone affinché sia possibile la produzione di fotoni su tutta la finestra spettrale considerata. Sotto questo valore energetico la lunghezza d'onda massima dello spettro decresce come descritto implicitamente nell'equazione 13 e a circa 4.27 GeV lo spettro diventa nullo su tutto l'intervallo. Il numero teorico di fotoni attesi è calcolato riscrivendo la 18

$$N = \frac{\alpha \Delta x}{\hbar c_0} \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} \Psi(\epsilon) d\epsilon$$

dove

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{se } n(\epsilon) \leq 1/\beta \\ 1 - \frac{1}{\beta_{\text{mu}}^2 n^2}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Una volta fissato lo spettro dell'indice di rifrazione (44), il numero di fotoni attesi dipende unicamente dall'energia del muone e dall'intervallo spaziale di produzione. Il confronto con la simulazione è mostrato in figura 39 (sopra), la differenza raggiunge il 3.5% a 4.4 GeV per poi ridursi all'aumentare dell'energia, già a 5 GeV è sotto lo 0.5%. In termini assoluti la differenza è sempre al inferiore ai 20 fotoni. In figura 39 (centro) è mostrato lo spettro medio dei fotoni, prodotti dal passaggio di 10 muoni di 5 GeV, in funzione dell'energia e della lunghezza d'onda. La differenza relativa con quello teorico (17) non va oltre il 10%. Considerando i soli fotoni di un singolo evento, la differenza raggiunge anche il 30% ma considerando la natura statistica del processo lo spettro simulato è consistente con quello atteso. Per verificare la consistenza è stato implementato un test χ^2 ridotto per ognuno dei 1000 eventi simulati; i risultati sono mostrati in figura 39 (sotto).

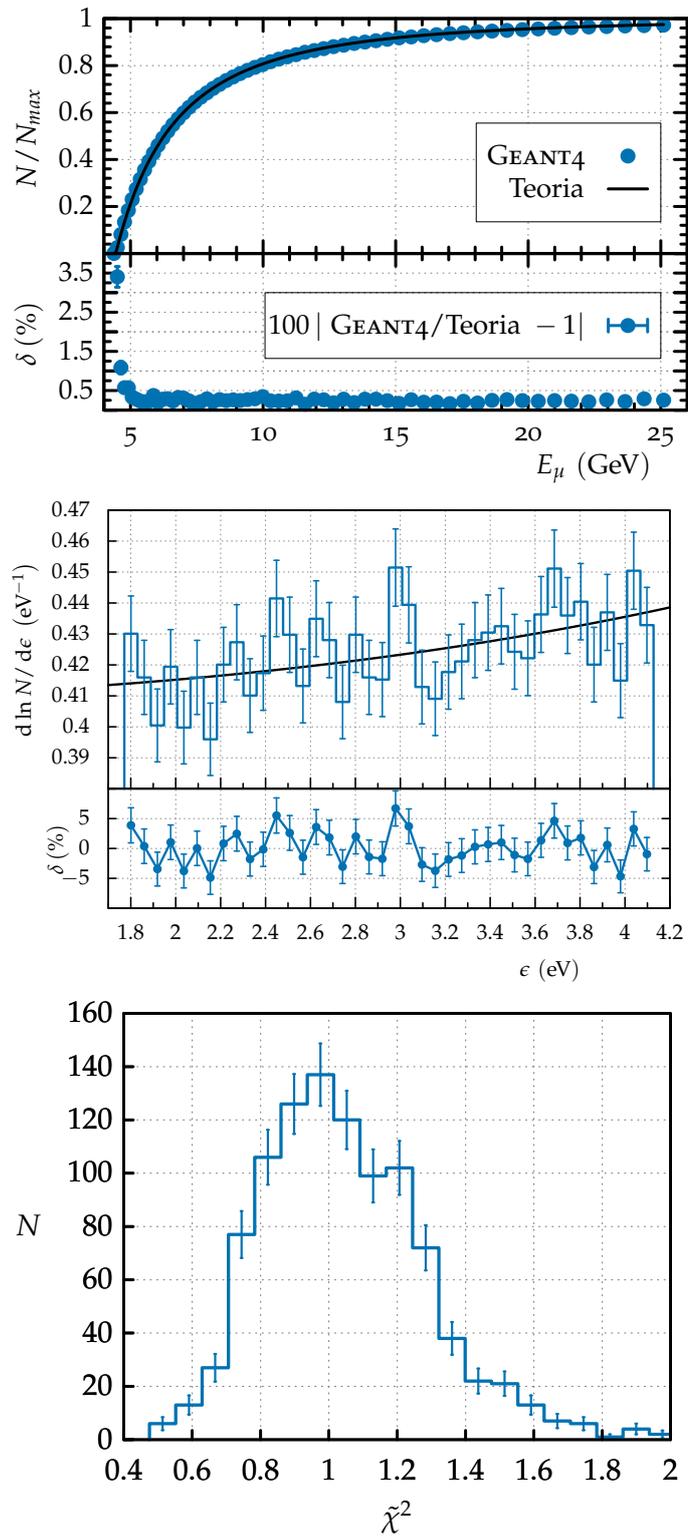


Figura 39: Sopra) Numero di fotoni attesi in 100 m d'aria standard in funzione dell'energia (pannello superiore) e differenza relativa con le simulazioni (pannello inferiore). Già a 5 GeV l'accordo è ottimo, la differenza relativa diventa minore dello 0.5% e la differenza assoluta è sempre inferiore a 15 fotoni. **Centro)** Spettro di emissione Čerenkov in funzione dell'energia ottenuto con 10 muoni di 5 GeV che attraversano uno strato di 100 m d'aria standard. Nella parte inferiore dei grafici è mostrata la differenza relativa tra le simulazioni e lo spettro teorico (linea continua). **Sotto)** Risultati del test χ^2 applicato allo spettro simulato di 10^3 muoni di energia compresa tra 5 GeV e 55 GeV.

4.7 CONCLUSIONI

VALIDAZIONI

- Le perdite energetiche dei muoni nella roccia, calcolate tramite la simulazione implementata, sono in accordo con i valori teorici di riferimento [77], sia per quanto riguarda le perdite totali (figura 21), sia per quanto riguarda le perdite dei singoli processi (figura 23).
- Per il processo di emissione di radiazione Čerenkov implementato, il numero di fotoni emessi (figura 39), la loro distribuzione spaziale (figura 37) e angolare (figura 38), e lo spettro energetico della radiazione (figura 39) sono in ottimo accordo con i valori teorici.

FLUTTUAZIONI DELLE PERDITE ENERGETICHE Il range CSDA e il range medio dei muoni nella roccia sono confrontabili fino a energie dell'ordine dell'energica critica (~ 700 GeV), a energie maggiori il range medio diventa minore. A 1 TeV la differenza è di circa il 5% e raggiunge il 20% a circa 100 TeV (figura 28). In particolare, il range CSDA corrisponde a piccole probabilità di sopravvivenza. Di conseguenza l'utilizzo di quest'ultimo per stimare gli spessori attraversati (equazione 38) può portare a una sottostima del flusso di muoni atteso e, quindi, a una sovrastima dello spessore. Inoltre, essendo lo spettro dei muoni atmosferici molto ripido ($dN/dE_\mu \sim E^{-3.7}$ ad altissime energie), l'alto numero di muoni di bassa energia compensa la loro bassa probabilità di sopravvivenza: non tenerne conto causa un'ulteriore sottostima del numero di muoni.

Per spessori maggiori di circa 1000 m, è necessario utilizzare la probabilità di sopravvivenza $P_{E_{th}}$ per stimare il flusso atteso oltre la soglia di rivelazione E_{th} e calcolare la relazione tra flusso e spessore attraversato (equazione 41). A spessori minori la relazione può essere calcolata attraverso le perdite medie (equazione 38) senza una perdita significativa di accuratezza nella ricostruzione degli spessori (figura 30).

Nel caso dei telescopi Čerenkov, a piccoli spessori (~ 10 m) la soglia di rivelazione è confrontabile con l'energia dei muoni attesi e il flusso è sensibile al valore esatto di E_{th} .

SCATTERING E RISOLUZIONE L'effetto dello scattering è quello di porre un limite alla risoluzione angolare di una muografia (equazione 43). Questa dipende dalla deviazione angolare dei muoni nell'attraversamento della roccia e dello strato di aria tra il punto di uscita e il rivelatore:

- l'angolo di scattering nella roccia è di circa 1° quando l'energia iniziale dei muoni è vicina all'energia minima per l'attraversamento (figura 31). Nel caso di spessori compresi nell'intervallo 0 m-500 m, e utilizzando come spettro energetico quello di Reyna-Bugaev ad un angolo azimutale di 85° , per il 99% dei muoni sopravvissuti con energia maggiore della soglia di emissione Čerenkov la deviazione è minore di 3° (figura 34). In questo intervallo di spessori l'angolo di deviazione medio è di circa 0.5° ;
- l'angolo di scattering e lo scostamento laterale dei muoni nel percorso tra il punto di uscita dalla roccia e il rivelatore non è trascurabile al-

le basse energie: per energie vicine alla soglia di emissione Čerenkov e in un percorso di 1500 m, il 99% dei muoni presenta un angolo di deviazione inferiore a 1.4° e uno scostamento inferiore ai 35 m (figura 36). Già a 20 GeV i valori si riducono a 0.1° e 3 m, e i muoni attesi con energie in uscita maggiori di questa sono circa il 70% del totale.

I risultati nella roccia sono stati ottenuti in un intervallo di spessori 0 m-500 m e mediati sull'energia. I muoni con energia in uscita minore di 20 GeV subiscono le deviazioni maggiori che pesano sulla media. Come verrà mostrato nel capitolo 6, l'energia minima di rivelazione dello strumento è dell'ordine di 10 GeV; i muoni in uscita con energia maggiore rappresentano l'85% del totale e la deviazione media (su tutti gli spessori) di questi è di circa 0.4° nella roccia e di circa 0.06° nello strato di 1500 m d'aria. Questi valori portano a una risoluzione spaziale attesa (a una distanza di 1500 m) di circa 12 m.

5

ANELLI MUONICI

In questo capitolo viene studiato il problema della ricostruzione della direzione dei muoni incidenti attraverso le immagini ottenute con il simulatore del telescopio ASTRI SST-2M.

Nella sezione 5.1 valuto la massima distanza di impatto, dal centro dello specchio, a cui è possibile rivelare un muone attraverso una stima semi-analitica del numero di fotoni che arrivano sullo specchio e attraverso la relazione tra la distanza di impatto e l'estensione dell'arco Čerenkov sulla camera del telescopio.

Nella sezione 5.2 descrivo i parametri di ricostruzione e i risultati del metodo di ricostruzione da me implementato.

Nella sezione 5.3 viene introdotta una procedura che simula la condizione di trigger del telescopio, tenendo in considerazione anche l'effetto del rumore di fondo sulle immagini, e un algoritmo da me sviluppato per l'isolamento dell'arco muonico dal fondo e la sua ricostruzione.

5.1 GEOMETRIA DI EMISSIONE

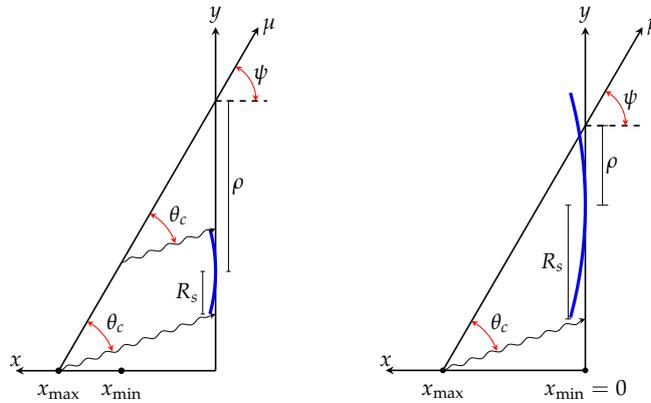


Figura 40: Geometria di emissione Čerenkov per un muone che passa nelle vicinanze dello specchio di raggio R_s : il parametro di impatto ρ è definito come la distanza dal centro dello specchio (in blu) alla quale il muone attraversa il piano tangente al centro di quest'ultimo; l'angolo di incidenza ψ è l'angolo tra la direzione del muone e l'asse del telescopio. **Sinistra)** Se $\rho > R_s$, i fotoni emessi possono arrivare sullo specchio quando il muone si trova ad una distanza x , perpendicolare al piano, compresa tra x_{\min} e x_{\max} . **Destra)** Se $\rho < R_s$, i fotoni possono arrivare sullo specchio quando $x < x_{\max}$.

Quando un muone passa nelle vicinanze dello specchio, i fotoni del cono Čerenkov, intercettati dall'ottica, vengono focalizzati sulla camera in un arco. Se la traiettoria del muone è parallela all'asse del telescopio l'immagine si forma al centro della camera. Se la traiettoria non è parallela, l'arco si forma

ad una distanza dal centro proporzionale all'angolo ψ tra l'asse e la direzione del muone [81]. Il numero di fotoni che raggiungono lo specchio, di raggio R_s , dipende principalmente da quest'angolo e dalla distanza, ρ , tra l'asse ottico e il punto di impatto del muone sul piano tangente al centro dello specchio. La ricostruzione di un evento è possibile solo quando la luce Čerenkov raccolta dal telescopio è sufficiente. Per valutare il livello del segnale raccolto e la qualità della ricostruzione, sono state fatte sia considerazioni di tipo teorico che simulazioni.

Considerando il caso di un muone in asse, possiamo stimare il numero di fotoni attesi sullo specchio: i fotoni sono emessi con un angolo θ_c e raggiungono lo specchio quando vengono emessi a una distanza dal piano

$$\frac{\rho + R_s}{\tan \theta_c} \geq x \geq \begin{cases} \frac{\rho - R_s}{\tan \theta_c}, & \text{se } \rho \geq R_s \\ 0, & \text{se } \rho < R_s \end{cases} \quad (49)$$

Questi fotoni sono prodotti in un intervallo di distanze, lungo la traiettoria del muone, dato dalla formula:

$$\Delta x = \begin{cases} \frac{2R_s}{\tan \theta_c}, & \text{se } \rho \geq R_s \\ \frac{\rho + R_s}{\tan \theta_c}, & \text{se } \rho < R_s \end{cases} \quad (50)$$

e formano una corona circolare sul piano dello specchio la quale contiene lo specchio stesso (figura 41a). Se la densità di fotoni sul piano fosse uniforme il rapporto tra il numero totale, N_{tot} , di fotoni emessi nell'intervallo Δx e il numero di quelli che raggiungono lo specchio, N_u , sarebbe esattamente il rapporto tra l'area della corona e quella dello specchio

$$\eta_u(\rho) = \frac{N_u}{N_{tot}}(\rho) = \begin{cases} \frac{R_s}{4\rho}, & \text{se } \rho \geq R_s \\ \frac{1}{1 + 2\frac{\rho}{R_s} + \frac{\rho^2}{R_s^2}}, & \text{se } \rho < R_s \end{cases} \quad (51)$$

Come mostrato in figura 41a, la densità di fotoni sul piano è maggiore nelle parti interne della corona. Questo dipende dal fatto che i fotoni emessi a una distanza x dal piano dello specchio arrivano su quest'ultimo distribuiti uniformemente in un cerchio di raggio $x \tan \theta_c$: quando il muone si avvicina al punto di impatto x diminuisce, mentre il numero di fotoni emessi per unità di percorso è costante durante l'attraversamento dell'atmosfera, dato che, in prima approssimazione, sia la velocità dei muoni sia l'indice di rifrazione sono costanti.

È possibile ottenere una stima dei fotoni attesi sullo specchio al variare del parametro di impatto tramite simulazioni Monte Carlo, come mostrato in figura 41a. Il risultato della simulazione è mostrato in figura 41b: la non uniformità diventa importante per parametri d'impatto minori della dimensione dello specchio. Per $\rho = R_s$ il numero di fotoni che raggiunge lo specchio è poco più di un terzo del totale. Se la distribuzione fosse uniforme solo un quarto dei fotoni raggiungerebbe lo specchio.

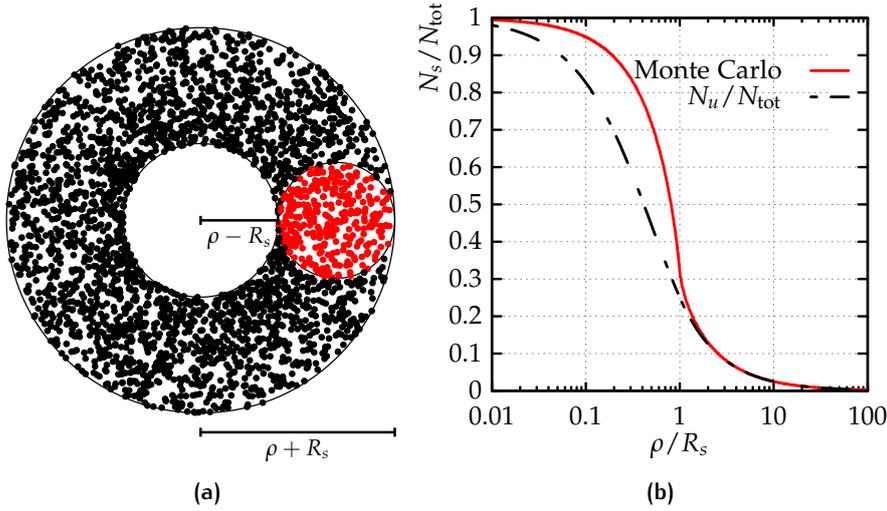


Figura 41: Se un muone impatta a una distanza ρ dal centro dello specchio, i fotoni che possono arrivare su quest'ultimo vengono emessi in un intervallo di distanze che dipende da ρ come descritto nel testo. La loro distribuzione sul piano dello specchio diventa più densa avvicinandosi al punto di impatto. **a)** Distribuzione dei fotoni sul piano dello specchio nel caso in cui $\rho > R_s$. **b)** Il rapporto tra il numero di fotoni che arrivano sullo specchio (in rosso in figura a) e il numero totale, al variare di ρ , calcolato attraverso simulazioni Monte Carlo (curva continua) differisce dal rapporto calcolato assumendo una distribuzione uniforme (curva tratteggiata).

Sia $\phi(\epsilon)$ l'efficienza di rivelazione dei fotoni. Essendo l'intervallo Δx dipendente dall'energia, in quanto θ_c dipende dall'indice di rifrazione, il numero di foto-elettroni attesi sarà

$$N_{pe}(E_\mu, \rho) = \frac{\alpha}{\hbar c_0} \eta(\rho) \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} \Delta x(\rho, \epsilon) \phi(\epsilon) \left(1 - \frac{1}{\beta_\mu (E_\mu)^2 n(\epsilon)^2} \right) d\epsilon \quad (52)$$

È importante notare che se l'oggetto su cui si vuole applicare la muografia si trova ad una distanza D dal telescopio, solo i fotoni prodotti da muoni con parametro di impatto

$$\rho < R_s + D \tan \theta_c = \rho_{\max} \quad (53)$$

possono raggiungere lo specchio. Inoltre l'intervallo di produzione diventa

$$\Delta x' = \begin{cases} 0, & \text{se } \rho > \tan \theta_c D + R_s \\ D - \frac{\rho - R_s}{\tan \theta_c}, & \text{se } \tan \theta_c D - R_s < \rho < \tan \theta_c D + R_s \\ D, & \text{se } \rho > \tan \theta_c D - R_s \wedge \rho < R_s \\ \frac{2R_s}{\tan \theta_c}, & \text{se } R_s < \rho < R_s + \tan \theta_c D \\ \frac{\rho + R_s}{\tan \theta_c}, & \text{se } \rho < R_s \end{cases} \quad (54)$$

Utilizzando $\Delta x'$ al posto di Δx , fissate R_s e D e assumendo la direzione del muone parallela all'asse del telescopio, è possibile stimare il numero di

fotoni attesi sullo specchio integrando la 52. Nel caso in cui $\beta \simeq 1$, $R_s = 2.15$ m, $D = 1500$ m e $\phi(\epsilon) = \bar{\phi}$:

$$N'_{pe} \begin{cases} \simeq 0, & \text{se } \rho \gtrsim 38.15 \text{ m} \\ \lesssim 150 \bar{\phi}, & \text{se } 33.85 \text{ m} \lesssim \rho \lesssim 38.15 \text{ m} \\ \lesssim 2850 \bar{\phi}, & \text{se } 2.15 \text{ m} \lesssim \rho \lesssim 33.85 \text{ m} \\ \lesssim 4450 \bar{\phi}, & \text{se } 0 \text{ m} \lesssim \rho \lesssim 2.15 \text{ m} \end{cases} \quad (55)$$

Assumendo $D = 100$ m il numero di foto-elettroni attesi è

$$N'_{pe} \begin{cases} \simeq 0, & \text{se } \rho \gtrsim 4.57 \text{ m} \\ \lesssim 1600 \bar{\phi}, & \text{se } 2.15 \text{ m} \lesssim \rho \lesssim 4.57 \text{ m} \\ \lesssim 4450 \bar{\phi}, & \text{se } 0 \text{ m} \lesssim \rho \lesssim 2.15 \text{ m} \end{cases} \quad (56)$$

In figura 42 è mostrato il numero di fotoni attesi sullo specchio al variare del parametro d'impatto, senza limiti sulla distanza di emissione e con una distanza massima di 100 m e 1500 m, nel caso di muoni in asse con energia di 5 GeV, 7 GeV e nel caso ultra-relativistico. Considerare solo i fotoni prodotti entro una distanza di 100 m dal piano dello specchio comporta la perdita di tutti i muoni che impattano fuori dallo specchio stesso. Inoltre, nel caso di eventi vicini alla soglia di emissione, il numero di fotoni è ridotto di oltre il 50% (rispetto al caso senza limiti di emissione) poiché questi vengono emessi con un angolo θ_c più piccolo e, quindi, in un intervallo di distanze, Δx , maggiore.

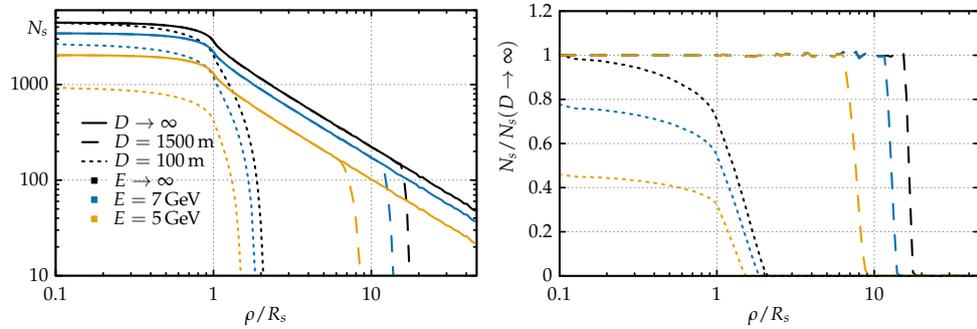


Figura 42: Sinistra) Numero di fotoni attesi sullo specchio al variare del parametro di impatto di muoni con direzione parallela all'asse del telescopio e con energia di 5 GeV (arancione), 7 GeV (blu) e nel caso ultra-relativistico (nero). La curva continua è ottenuta senza un limite per la distanza di emissione, mentre le curve tratteggiate corrispondono a distanze massime di 1500 m e 100 m. **Destra)** Come nel pannello di sinistra ma le curve sono normalizzate al caso senza limiti di emissione.

Inoltre, la rivelazione dei muoni che impattano fuori dallo specchio è fortemente limitata dall'estensione angolare massima dell'arco. Questa dipende dal parametro di impatto come [81]

$$\phi_{\text{arc}} = \begin{cases} 2 \arcsin \frac{R_s}{\rho}, & \text{se } \rho \geq R_s \\ 2\pi, & \text{se } \rho < R_s \end{cases} \quad (57)$$

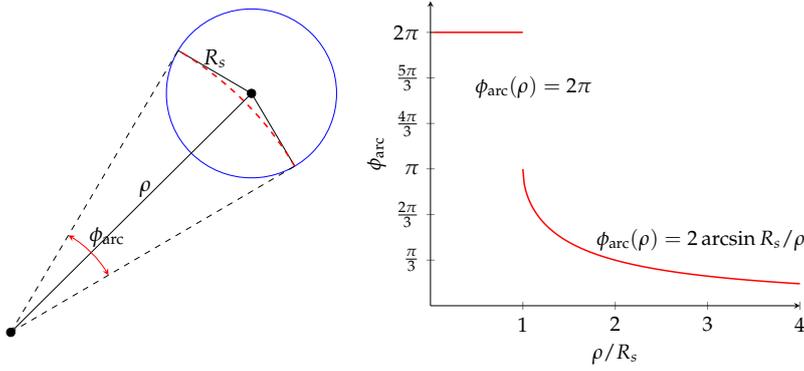


Figura 43: Sinistra) Muone che incide perpendicolarmente il piano dello specchio visto sul piano stesso: l'estensione angolare massima ϕ_{arc} dei fotoni Čerenkov che arrivano sullo specchio è data dalle rette tangenti al bordo dello specchio e passanti per il punto di impatto. **Destra)** Estensione angolare degli archi muonici in funzione del parametro di impatto.

In figura 43 è mostrata una rappresentazione geometrica di ϕ_{arc} e la sua dipendenza da ρ . In figura 44 sono mostrati alcuni anelli muonici come visti dalla camera di ASTRI: quando i muoni impattano sullo specchio (44a) l'estensione angolare dell'anello è di 360° , se impattano sul bordo (44b) l'estensione angolare si riduce a meno della metà. In quest'ultimo caso l'estensione angolare non è quella attesa (180°) perché, se il punto di impatto è vicino al bordo, i fotoni che completerebbero l'anello sono emessi in un intervallo spaziale molto limitato e il loro numero non è sufficiente ad attivare tutti i pixel, a causa dell'efficienza di rivelazione della camera. Di conseguenza l'estensione angolare effettiva risulta minore di quella massima (fornita dalla 57) con la quale un anello può formarsi sulla camera.

Se ω_{pix} è la dimensione di un pixel sul piano focale del telescopio, il numero di pixel visti dai fotoni Čerenkov sarà

$$N_{pix} \sim \phi_{arc} \frac{\theta_c}{\omega_{pix}} \quad (58)$$

Se n è il numero minimo di pixel utili a ricostruire la direzione, una particella può essere vista se

$$\rho \lesssim \frac{R_s}{\sin(n\omega_{pix}/2\theta_c)} \quad (59)$$

Nel caso di ASTRI, per ottenere 4 pixel, ρ deve essere minore di 8 m e, nel caso ultra-relativistico, i fotoni Čerenkov che impattano sullo specchio sono prodotti a una distanza massima di circa 420 m.

La 59 è una relazione approssimata che non tiene conto dei diversi fattori che portano ad un aumento dello spessore dell'anello sulla camera. I fattori di natura strumentale, come le aberrazioni ottiche e la geometria dei pixel, possono essere valutati direttamente in fase di progettazione e confrontati con i fattori di natura fisica [81], principalmente

- la variabilità dell'indice di rifrazione in atmosfera;
- lo scattering multiplo dei muoni in atmosfera;
- la perdita di energia dei muoni in atmosfera.

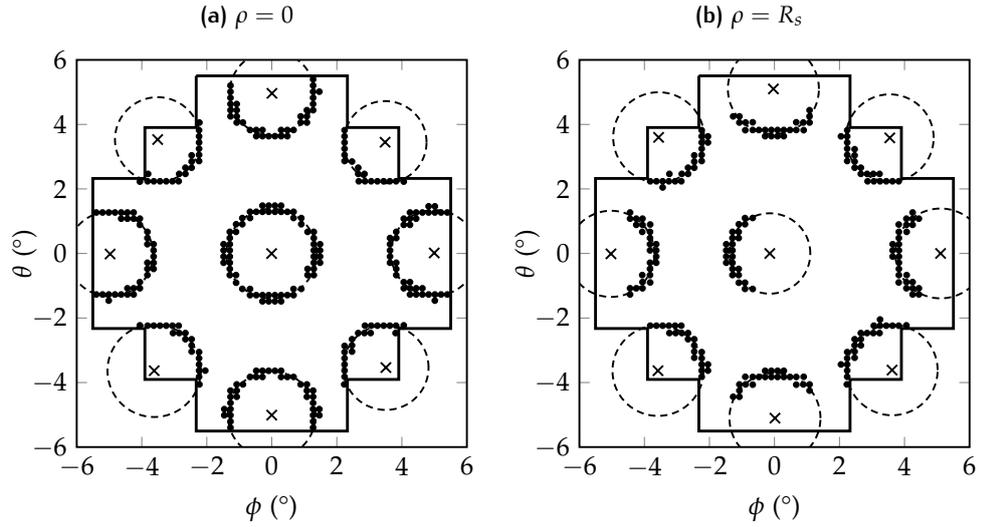


Figura 44: Muoni che impattano in asse (centro) e con un angolo di 5 gradi rispetto all'asse del telescopio al centro dello specchio **(a)**, e sul bordo dello specchio **(b)**. Gli assi θ e ϕ rappresentano la componente zenitale e azimutale dell'angolo di incidenza sul piano dello specchio. I cerchi tratteggiati rappresentano gli anelli ricostruiti e la linea continua spessa il bordo della camera.

5.2 RICOSTRUZIONE DELLA DIREZIONE

Le coordinate del centro (x_c, y_c) e il raggio R di ogni anello vengono ricostruiti minimizzando la funzione [82]

$$\xi(x_c, y_c, R_c) = \frac{\sum_{i=1}^N \left[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - R_c^2 \right]^2}{\sum_{i=1}^N \left[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 \right]} \quad (60)$$

dove x_i e y_i sono le coordinate dei pixel (sul piano focale) e le somme sono estese a tutti i pixel attivi. La geometria dei parametri ricostruiti è mostrata in figura 45.

La minimizzazione viene eseguita con il metodo *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) [83] implementato all'interno del framework ROOT [84] attraverso la libreria *GNU Scientific Library* (GLS). Sono stati provati diversi metodi di minimizzazione. Tra questi, il metodo *MIGRAD*, del pacchetto *MINUIT2* [85], porta a risultati equivalenti al BFGS ma è meno preciso nel ricostruire eventi con pochi pixel.

Una volta ricostruito un anello, l'errore sull'angolo di incidenza viene calcolato come differenza relativa tra l'angolo simulato ψ_s e il centro dell'anello (x_c, y_c) :

$$\Delta\psi = \begin{cases} \left| \sqrt{x_c^2 + y_c^2} - \psi_s \right|, & \text{se } \psi_s = 0 \\ \frac{\left| \sqrt{x_c^2 + y_c^2} - \psi_s \right|}{\psi_s}, & \text{se } \psi_s \neq 0 \end{cases} \quad (61)$$

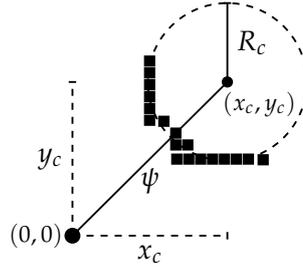


Figura 45: Ricostruzione dei parametri x_c , y_c e R_c di un arco muonico sul piano focale del telescopio. La distanza ψ tra il centro della camera $(0,0)$ e il centro dell'anello (x_c, y_c) è l'angolo tra la direzione del muone e l'asse del telescopio. Il raggio dell'anello R_c è l'angolo di emissione Čerenkov.

In modo analogo viene definito l'errore sull'angolo Čerenkov come differenza tra quello simulato, $\theta_{c,s}$, e quello ricostruito

$$\Delta R_c = |R_c - \theta_{c,s}| \quad (62)$$

dove l'angolo simulato è definito come l'angolo medio di emissione a un'energia E_μ .

Di tutti gli eventi ricostruiti vengono selezionati solo quelli con $0.5^\circ < R_c < 1.5^\circ$ e viene definita un'efficienza di ricostruzione, E_r , come la frazione di eventi selezionati

$$E_r \equiv \frac{N_{\text{sel}}}{N_{\text{tot}}} \quad (63)$$

In assenza di rumore questa dipende solo dal numero di pixel che compongono l'immagine e debolmente dal metodo di minimizzazione utilizzato.

In figura 46 sono mostrati R , $\Delta\psi$ e E_r al variare del numero di pixel che compongono il singolo evento. I risultati sono stati ottenuti simulando 10^5 muoni di 20 GeV uniformemente distribuiti, in ρ , entro 21.5 m dal centro dello specchio e in completa assenza di rumore, utilizzando sia il metodo BFGS sia il MIGRAD. Quest'ultimo risulta poco stabile quando il numero di pixel è minore di 20: alcuni eventi vengono ricostruiti con un raggio enormemente sovrastimato e la media e la dispersione dei risultati (le barre di errore nel grafico) ne risentono di conseguenza. Tuttavia, una volta selezionate le ricostruzioni in base al raggio, i metodi portano a risultati equivalenti ma il BFGS ha un'efficienza di ricostruzione maggiore che raggiunge circa il 100% intorno ai 15 pixel, mentre il MIGRAD intorno ai 25.

Il numero di pixel attivati decresce rapidamente con il parametro di impatto poiché decresce l'estensione angolare dell'anello. Riducendosi quest'ultima, la dimensione finita dei pixel e la loro disposizione portano all'attivazione di pixel allineati. Di conseguenza, la precisione e l'efficienza di ricostruzione peggiorano notevolmente. In figura 47 sono mostrati due eventi di 7 e 10 pixel ricostruiti con entrambi i metodi. L'evento da 7 pixel è ricostruito in modo nettamente diverso tramite i due metodi: poiché 6 dei 7 pixel sono allineati, i metodi tendono a ricostruire la circonferenza con un raggio molto grande ma con centri diametralmente opposti. L'evento da 10 pixel, invece,

è ricostruito in modo consistente, ma l'errore di ricostruzione è alto. Come mostrato in figura 48, solo i muoni con $\rho < 2R_s$ riescono ad attivare 10 pixel sulla camera e l'errore medio sulla ricostruzione di questi eventi è minore di 0.5° . Il numero di pixel attivati si riduce di un terzo quando il parametro di impatto è pari al raggio dello specchio, ma sono sufficienti a mantenere la precisione sotto il decimo di grado. Sempre in figura è mostrata l'efficienza cumulativa: oltre il 90% degli eventi con $\rho < 2R_s$ è selezionato dopo la ricostruzione. Per parametri di impatto maggiori la percentuale diminuisce proporzionalmente.

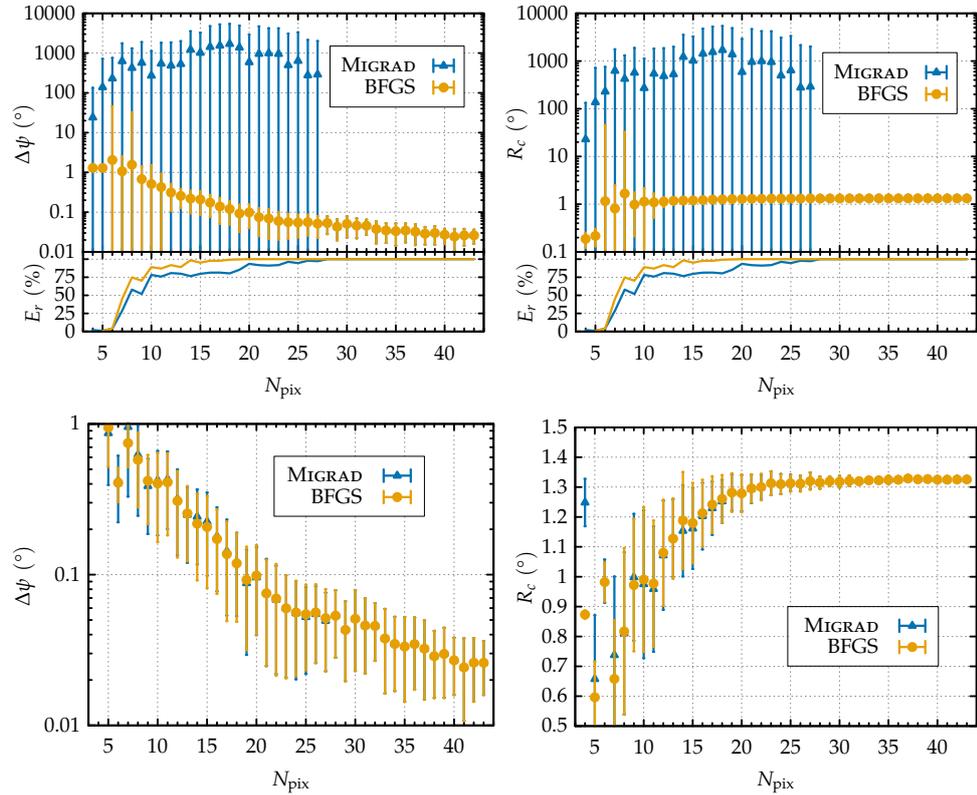


Figura 46: Ricostruzione della direzione di 10^5 muoni di 20 GeV in asse, distribuiti uniformemente (in ρ) entro 21.5 m dal centro dello specchio, con i metodi BFGS e MIGRAD. Le barre verticali rappresentano la dispersione del campione. **Sopra)** Errore sull'angolo di incidenza e stima del raggio, in funzione del numero di pixel, prima della selezione degli eventi. Nella parte inferiore è mostrata l'efficienza di ricostruzione corrispondente. **Sotto)** Stesse quantità dopo la selezione degli eventi: i due metodi sono quasi indistinguibili ma MIGRAD ha un'efficienza di ricostruzione più bassa: a 15 pixel, quando BFGS raggiunge circa il 100% di efficienza, MIGRAD raggiunge solo il 75% e raggiunge il 100% intorno ai 25 pixel.

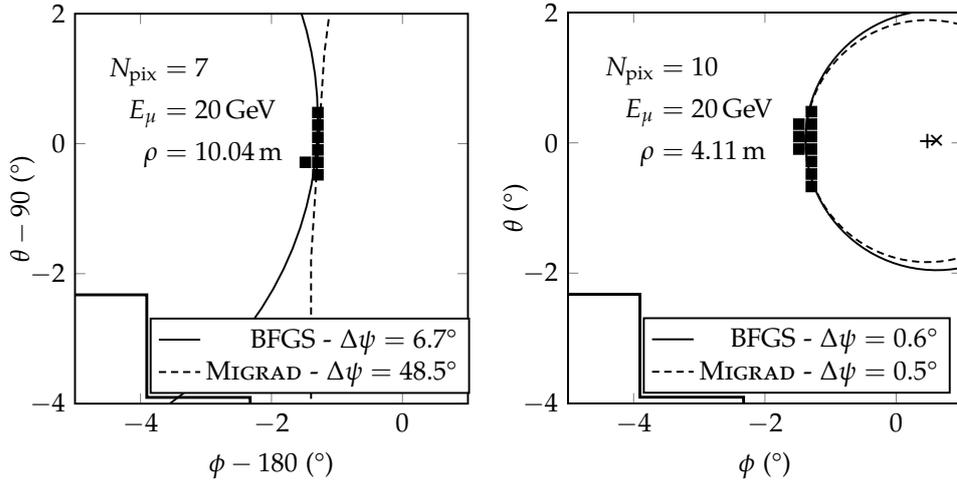


Figura 47: Gli eventi con piccola estensione angolare attivano pixel allineati, rendendo la ricostruzione imprecisa. **Sinistra)** Un muone, di 20 GeV che impatta in asse con $\rho \approx 10 \text{ m}$, forma un arco di 7 pixel, di cui 6 allineati. L'errore sull'angolo di incidenza $\Delta\psi$ è alto con entrambi i metodi, in particolare con MIGRAD. **Destra)** Un muone, di 20 GeV che impatta in asse con $\rho \approx 4 \text{ m}$, forma un arco di 10 pixel, disposti in due file da 7 e 3 pixel ciascuna. Rispetto al caso precedente, il miglioramento è evidente nonostante l'errore di ricostruzione sia ancora relativamente alto.

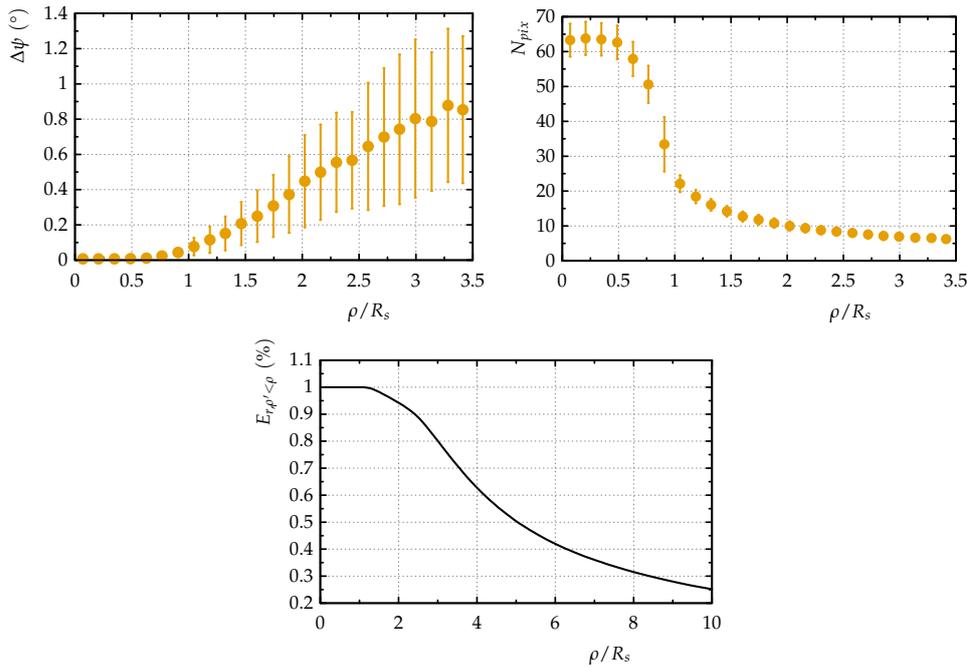


Figura 48: Ricostruzione della direzione di 10^5 muoni in asse con spettro energetico uniforme tra 5 GeV e 100 GeV, e distribuiti uniformemente (in ρ) entro 21.5 m dal centro dello specchio. **Sopra)** Errore medio sull'angolo di incidenza (sinistra) e numero di pixel attivati (destra) in funzione del parametro di impatto. L'errore si mantiene sotto 0.5° finché il numero di pixel attivati è superiore a 10, cioè per parametri di impatto minori del diametro dello specchio. Le barre verticali rappresentano la dispersione del campione. **Sotto)** Efficienza cumulativa: circa il 95 % degli eventi con $\rho < 2R_s$ è selezionato. A $\rho/R_s = 10$ l'efficienza si riduce al 25 %.

5.3 RUMORE

I risultati precedenti sono stati ottenuti considerando solo il segnale focalizzato sulla camera e la procedura di minimizzazione poteva essere applicata senza operazioni intermedie. Le immagini registrate dai telescopi Čerenkov però contengono sempre del rumore dovuto all'elettronica e al fondo cielo. Per ottenere una corretta ricostruzione dell'immagine è necessaria una procedura di pulizia che riduca il più possibile il rumore mantenendo invariata la morfologia del segnale. Per valutare gli effetti del rumore sulla ricostruzione dei parametri fisici dei muoni è stato introdotto negli eventi fisici simulati.

Il rumore viene sovrapposto alle immagini ottenute dal simulatore estraendo un valore per ogni pixel da una distribuzione gaussiana con valor medio del fondo n_{pe} e dispersione

$$\sigma(n_{pe}) = 1.634 + 0.00678n_{pe} - 9.988 \cdot 10^{-6}n_{pe}^2 \quad (64)$$

dove le costanti sono state ottenute da misure di caratterizzazione dei rivelatori fatte nei laboratori dell'IASF di Palermo [68].

L'introduzione del rumore nelle simulazioni richiede anche l'implementazione di una procedura di *trigger* (innescio) della camera. Si adotta, come per ASTRI, un trigger di tipo topologico: i dati registrati vengono processati solo se sono presenti N_t pixel contigui con segnale maggiore di una certa soglia $n_{pe,t}$ di foto-elettroni (pe). In figura 49 è mostrato un evento che non verifica la condizione.

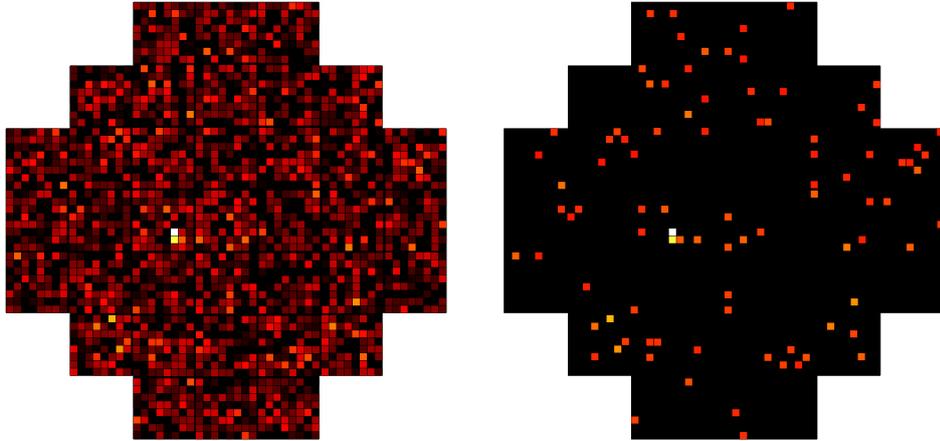


Figura 49: Esempio di condizione di trigger non verificata da un muone di 20 GeV con un parametro di impatto di 12 m. A sinistra è mostrata l'immagine dell'anello ottenuta in un fondo di 1 pe. A destra sono mostrati solo i pixel con valore maggiore di 4 pe. L'immagine non presenta pixel che formino gruppi di almeno 4 elementi contigui con valore maggiore di 4 pe e dunque non verifica la condizione di trigger.

Il metodo di ricostruzione descritto precedentemente deve essere applicato solo alle immagini che soddisfano la condizione di trigger e solo dopo che sono state ripulite dal fondo. La procedura di pulizia comunemente adottata consiste in due fasi principali [86, 87]: inizialmente vengono esclusi i pixel con segnale minore di una prima soglia χ_1 ; successivamente, dai pixel rimasti, si escludono quelli che non presentano un pixel adiacente sopra una

seconda soglia χ_2 . Le soglie sono solitamente scelte proporzionalmente al rumore di fondo.

Di conseguenza, la procedura di minimizzazione è stata implementata nel seguente modo:

- viene verificata la condizione di trigger: se nell'immagine non sono presenti 4 pixel contigui con segnale maggiore di 4 pe, l'evento viene scartato in quanto non è registrato dal telescopio. L'implementazione della procedura è descritta in appendice B;
- vengono esclusi tutti i pixel con valore minore del valore di soglia

$$\tau_k = \tilde{n}_{pe} + k\tilde{\sigma}_{n_{pe}} \quad (65)$$

dove \tilde{n}_{pe} e $\tilde{\sigma}_{n_{pe}}$ sono i valori, rispettivamente, del fondo medio e del rumore, stimati a partire dall'immagine. Poiché il numero di pixel direttamente attivati da un anello muonico non è mai superiore al 10% del totale, una volta tenuto conto del rumore elettronico, il metodo di stima applicato è il seguente:

- si trova il 90-esimo percentile (p_{90}) della distribuzione dei pixel;
- si calcolano media e deviazione dei pixel con $n < p_{90}$.

Nonostante il metodo tenda a sottostimare leggermente la media e la deviazione, le stime sono consistenti con i valori implementati.

Per isolare il segnale dal fondo, il parametro k è stato fissato a 5;

- vengono esclusi i pixel (o i gruppi di pixel) isolati, i quali influiscono notevolmente sul risultato della minimizzazione. Per eliminarli è stato implementato un metodo di riconoscimento di gruppi di pixel contigui che applica le seguenti azioni:
 - se il pixel è isolato viene escluso, qualunque sia il suo valore;
 - se il gruppo è formato da due pixel e nessuno di questi ha valore maggiore di τ_6 la coppia viene esclusa.

L'implementazione del processo è descritta in appendice B;

- se il numero di pixel rimasti è maggiore di 3 si esegue un primo fit utilizzando come stima iniziale dei parametri il valor medio delle coordinate dei pixel e un raggio Čerenkov caratteristico $\theta_c^* = 1.2^\circ$;
- si rimuovono i pixel troppo lontani dal primo fit calcolando lo scarto quadratico medio $\overline{\delta^2}$ ed escludendo i pixel con scarto $\delta_i^2 > 3\overline{\delta^2}$;
- se il numero di pixel rimasti è maggiore di 3 si riesegue la minimizzazione della 60 utilizzando come stima iniziale dei parametri i risultati del primo fit.

Le tre fasi principali del processo (condizione di trigger, esclusione dei pixel sotto τ_5 ed esclusione di pixel isolati) sono mostrate in figura 50.

Il metodo di pulizia delle immagini è stato verificato con un fondo medio di 1 pe, 3 pe e 5 pe per pixel e, quindi, una dispersione di 1.64 pe, 1.65 pe e 1.67 pe. La simulazione consiste in 10^5 muoni con energia compresa tra

5 GeV e 1000 GeV e con parametro di impatto fino a 4 volte il raggio dello specchio. I risultati, confrontanti con quelli ottenuti in assenza di rumore, sono mostrati in figura 51, in cui si evidenzia che:

- il numero di pixel con il quale viene eseguita la minimizzazione non è più legato solo all'estensione angolare degli anelli ma dipende anche dal processo di pulizia, il quale tende a ridurre il numero di pixel rispetto a quello che si avrebbe in assenza di rumore. Per $\rho > R_s$ il numero di pixel dipende debolmente dal fondo medio, invece per $\rho < R_s$ è ridotto, rispetto al caso senza rumore, del 55% con un fondo medio di 1 pe e dell'80% con un fondo di 5 pe;
- nonostante la forte riduzione del numero di pixel, la direzione di arrivo è ricostruita con una precisione maggiore del decimo di grado per tutti gli eventi con $\rho < R_s$. L'andamento della precisione presenta un minimo (intorno a un centesimo di grado) a circa $\rho = 0.5 R_s$, indipendente dal fondo medio. Per eventi con parametro di impatto minori l'errore di ricostruzione aumenta e l'entità della crescita dipende dal fondo medio. All'aumentare di questo sia la media dell'errore che la dispersione crescono: a $\rho \approx 0$, con un fondo di 5 pe l'errore medio è di 0.04° e la dispersione di 0.08° , cioè, rispettivamente, due e otto volte i valori corrispondenti al fondo di 1 pe;
- il fatto che, a parità di pixel, sia la precisione sia l'efficienza di ricostruzione siano migliori quando si applica l'algoritmo di pulizia dimostra che la procedura riesce a mantenere la morfologia del segnale, nonostante la riduzione consistente del numero di pixel;
- sia l'efficienza di ricostruzione che l'efficienza cumulativa, in funzione di ρ , peggiorano con l'aumentare del fondo medio. In ogni caso circa il 100% degli eventi con parametro di impatto minore di R_s è ricostruito correttamente.

La forte riduzione del numero di pixel, a piccoli parametri di impatto, è dovuta all'oscuramento dello specchio primario da parte del secondario, il cui diametro, come detto nella sezione 2.3, è di circa 1.8 m (circa 0.4 volte quello del primario). Quando il muone impatta su quest'ultimo è possibile perdere fino al 40% dei fotoni, di conseguenza diminuisce il numero di fotoelettroni per pixel e aumenta la probabilità che parte dei pixel sia scartata nel processo di pulizia.

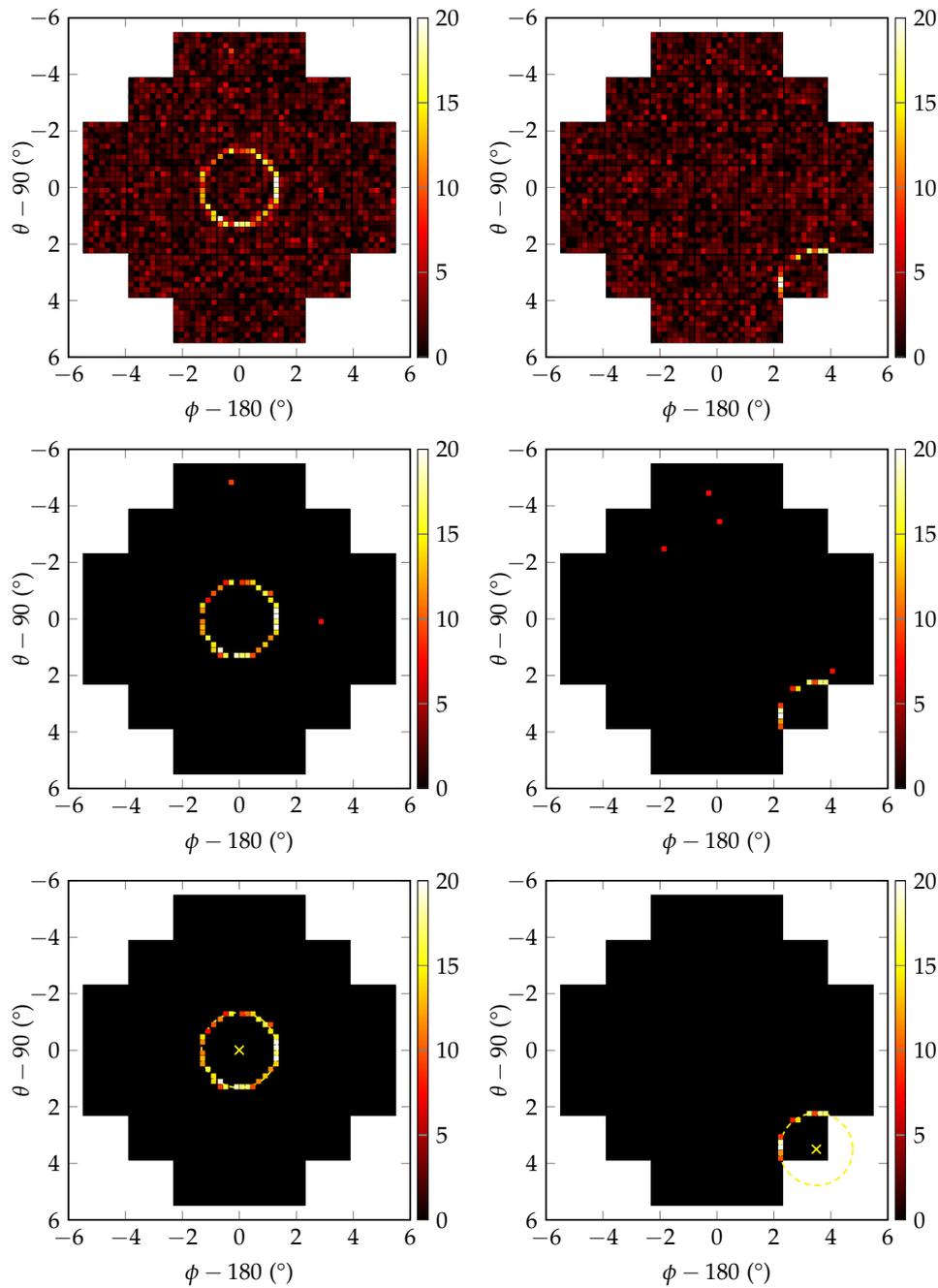


Figura 50: Esempi di pulizia e ricostruzione di due anelli muonici simulati con un fondo medio di 2 pe. Gli anelli sono prodotti da muoni di 20 GeV che impattano al centro dello specchio con un angolo di 0° (sinistra) e 5° (destra) rispetto all'asse del telescopio. Per entrambi gli eventi sono mostrate l'immagine simulata registrata dal telescopio (sopra), l'immagine dopo la rimozione dei pixel sotto la soglia τ_5 (centro) e l'immagine dopo la rimozione dei pixel singoli e doppi con una soglia τ_6 (sotto). Con i pixel di quest'ultima viene eseguita la minimizzazione; i due eventi sono ricostruiti con un errore sulla direzione di 0.04° (sinistra) e 0.06° (destra). La scala è in fotoelettroni.

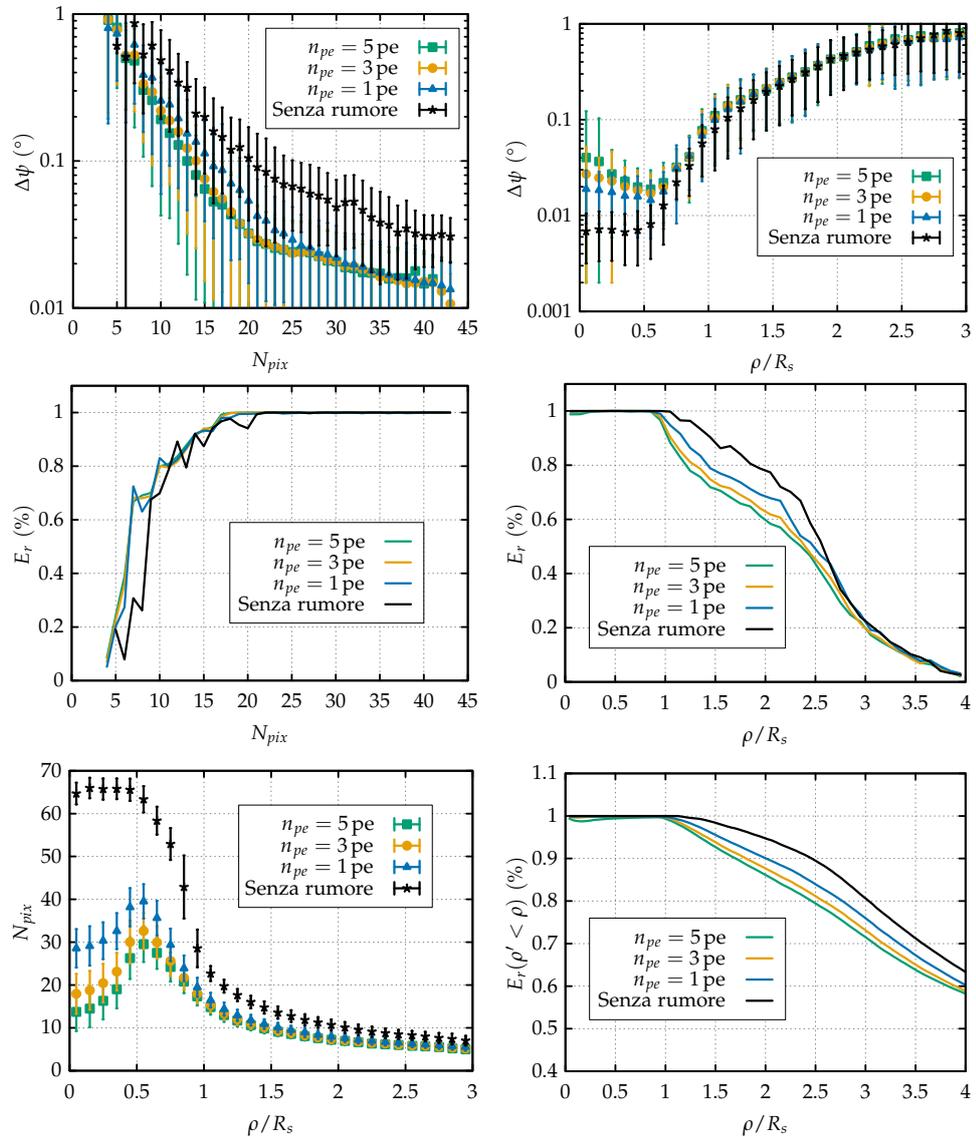


Figura 51: Risultati della simulazione, per differenti valori del fondo medio, di 10^5 muoni con energia compresa tra 5 GeV e 10^3 GeV e parametro di impatto fino a $4R_s$. **Sinistra)** Dall'alto verso il basso: errore sull'angolo in funzione del numero di pixel (N_{pix}), efficienza di ricostruzione in funzione di N_{pix} e N_{pix} in funzione del parametro di impatto. Il numero di pixel è fortemente ridotto a parametri di impatto minori di circa $0.5R_s$, poiché lo specchio primario è oscurato dal secondario, e la riduzione cresce con il fondo medio. **Destra)** Dall'alto verso il basso: errore sull'angolo in funzione ρ , efficienza di ricostruzione in funzione di ρ e efficienza di ricostruzione cumulativa in funzione di ρ .

6

SIMULAZIONE

In questo capitolo descrivo il modello geometrico utilizzato nelle simulazioni, i metodi di riduzione del tempo di esecuzione e l'analisi applicata agli eventi ricostruiti.

Nella sezione 6.1 descrivo il modello geometrico dell'edificio vulcanico, del suo condotto interno e della sorgente di muoni.

Nella sezione 6.2 indico quali accorgimenti sono stati adottati per ridurre in modo considerevole i tempi di esecuzione della simulazione.

Nella sezione 6.3 descrivo la procedura di flat fielding effettuata per ricavare un buon metodo di selezione degli eventi ricostruiti e la corrispondente area efficace dello strumento, necessaria per applicare una correzione angolare ai risultati e ottenere una stima corretta del numero di eventi attesi.

6.1 GEOMETRIA E SORGENTE

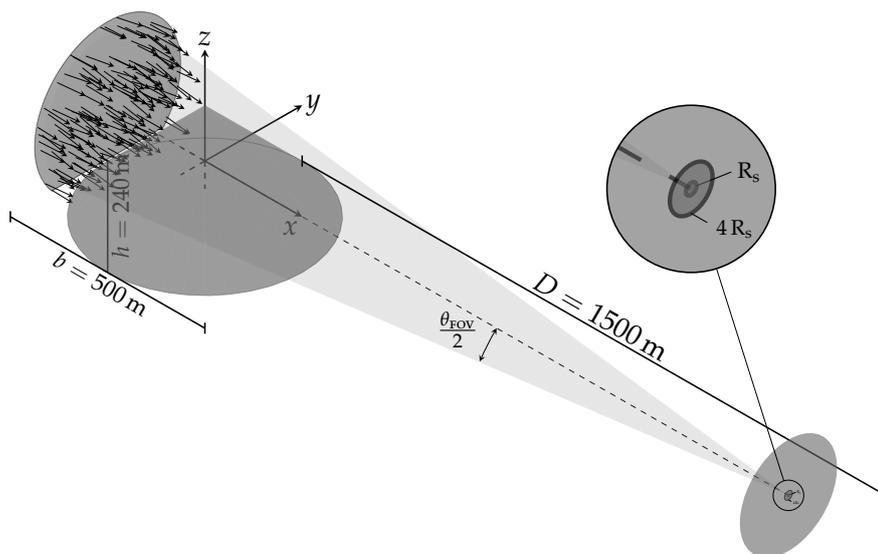


Figura 52: Schema geometrico della simulazione: il vulcano è rappresentato da un cono di altezza 240 m e diametro di base 500 m, posto a una distanza di 1500 m dal telescopio; questo è posto a 120 m di altezza con il piano dello specchio parallelo all'asse del cono; la sorgente di muoni è un segmento circolare parallelo al piano dello specchio e posto immediatamente dietro il cono, a una distanza di 1750 m dal telescopio. La distanza a cui è posto il telescopio permette di avere l'intera altezza del cono nel campo di vista. Nell'ingrandimento è mostrato lo specchio di raggio $R_s = 2.15 \text{ m}$ e la regione di $4R_s$ oltre la quale i muoni non vengono registrati.

Il modello semplificato di vulcanico si basa sulle caratteristiche del Cratere Sud-Est del Monte Etna. Lo schema geometrico implementato nella

simulazione è mostrato in figura 52:

- il vulcano è rappresentato da un cono di altezza h e diametro di base b ; per le simulazioni l'altezza è stata fissata a 240 m e la base a 500 m. È possibile inserire un cilindro, con diametro di base b_c arbitrario e asse coincidente con quello del cono, rappresentativo di un condotto interno al vulcano. In questo caso l'altezza del tronco di cono, h_t , è funzione della base del condotto

$$h_t = h(1 - b_c/b) \quad (66)$$

- l'origine del sistema di riferimento x - y - z è posta sull'asse del cono a metà dell'altezza, in modo che il centro della base abbia coordinate $(0, 0, -h/2)$. L'asse z coincide con l'asse del cono e l'asse x coincide con quello del telescopio;
- il piano dello specchio è posto a una distanza D dall'origine, per le simulazioni è stata fissata a 1500 m. In figura è evidenziata la regione $\rho < R_s$, in cui vengono "raccolti" i fotoni successivamente inviati al simulatore del telescopio, e la regione $\rho < 4R_s$, il cui significato verrà spiegato successivamente;
- la sorgente geometrica dei muoni è un segmento circolare formato da un cerchio parallelo al piano dello specchio, centrato sull'asse del telescopio e posto dietro al vulcano a una distanza dall'origine pari a metà della base, delimitato dal piano passante per la base del cono. Il raggio minimo assegnabile alla sorgente dipende dal campo di vista del telescopio

$$R_{\text{sor, min}} = (D + b/2) \tan \frac{\phi_{\text{FOV}}}{2} + 4R_s \quad (67)$$

ma, come verrà spiegato successivamente, è stata scelta una dimensione maggiore per tener conto di eventuali muoni deviati nelle vicinanze del telescopio durante la propagazione.

6.1.1 Sorgente dei muoni

La parametrizzazione dello spettro dei muoni atmosferici utilizzata è quella di Renyna-Bugaev (descritta nel capitolo 1) a un angolo zenitale di 85° .

Utilizzando come soglia energetica minima quella di emissione Čerenkov (~ 4.4 GeV), il flusso di muoni attesi sulla superficie utilizzata come sorgente (su un angolo solido di 2π sr) è di circa $4 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$. In una notte di osservazione, assumendo 8 ore per notte, il flusso è dell'ordine di 10^5 m^{-2} . Utilizzando il raggio minimo fornito dall'equazione 67 con il campo di vista di ASTRI ($\sim 10^\circ$), la simulazione di una notte di osservazione richiede la generazione di almeno $9.6 \cdot 10^9$ muoni. Se non ci fosse alcuna struttura nel campo di vista del telescopio il numero di muoni attesi sullo specchio (visibili dal telescopio) sarebbe di circa 8000 per notte, una frazione insignificante rispetto al numero di muoni simulati. In questo caso, per ridurre al minimo il numero di muoni sarebbe sufficiente ridurre l'intervallo angolare $\Delta\theta_s$ in cui i muoni vengono generati facendolo coincidere con il campo di vista del telescopio, portando così il numero di muoni necessari a circa $60 \cdot 10^6$ muoni per notte.

L'introduzione di una struttura tra la sorgente e il telescopio non permette però di far coincidere $\Delta\theta_s$ con il campo di vista del telescopio né di utilizzare come raggio della sorgente $R_{\text{sor,min}}$, poiché i muoni generati con direzione e posizione iniziali tali da non essere visibili al telescopio possono essere deviati dalla struttura e diventare visibili. Nella sezione successiva si cercherà di determinare i parametri $\Delta\theta_s$ e R_{sor} tali da minimizzare il numero di muoni da generare escludendo il minor numero possibile di eventi deviati nelle vicinanze dello specchio.

6.2 RIDUZIONE DEI TEMPI DI ESECUZIONE

Visto l'eccessivo numero di muoni necessario per simulare una notte di osservazione, è stato indispensabile evitare il tracciamento dei muoni che non sono visibili al telescopio, ossia che non passano nelle vicinanze o che incidono con un angolo fuori dal campo di vista, e il tracciamento dei fotoni Čerenkov che non arrivano sullo specchio. La riduzione del numero di eventi in input e output si basa sui risultati dello studio della propagazione dei muoni nella roccia e nell'aria (capitolo 4), sullo studio della geometria di emissione Čerenkov e sull'efficienza di ricostruzione degli anelli muonici sulla camera di ASTRI (sezione 5.1).

6.2.1 Muoni atmosferici

SORGENTE La riduzione del numero di muoni generati si basa sulle seguenti ipotesi:

1. il 99 % dei muoni che attraversano la struttura viene deviato al massimo di un angolo $\theta_{99}^r = 3^\circ$ (figura 34);
2. il 99 % dei muoni in 1500 m d'aria subisce una deviazione angolare massima $\theta_{99}^a = 1.5^\circ$ e uno scostamento laterale massimo $l_{99}^a = 35$ m (figura 36).

Il vincolo sulla deviazione angolare massima subita e sullo scostamento laterale massimo si traducono in una dimensione minima della sorgente e in un angolo solido minimo. Quest'ultimo è legato all'angolo massimo, rispetto all'asse del telescopio, che deve avere un muone per poter essere deviato nel campo di vista, ed è semplicemente dato dalla somma del campo di vista e della deviazione massima che un muone può subire in aria e nella struttura

$$\Delta\theta_s/2 = \theta_{\text{FOV}}/2 + \theta_{99}^r + \theta_{99}^a \approx 9.5^\circ \quad (68)$$

Nonostante il risultato ottenuto, nella simulazione è stato utilizzato un valore $\Delta\theta_s/2 = 10.5^\circ$, che permette di includere eventi più rari senza un aumento eccessivo del numero di muoni per notte. I muoni vengono generati, sulla superficie della sorgente, nell'angolo solido di una piramide quadrata con angoli al vertice pari a $\Delta\theta_s$ e asse parallelo a quello del telescopio

$$\Omega_s = 4 \arcsin\left(\sin^2 \frac{\Delta\theta_s}{2}\right) \approx 0.03 \text{ sr} \quad (69)$$

riducendo (rispetto a un angolo solido di 2π sr) il flusso di muoni di un fattore 200: da circa $14\,600\text{ m}^{-2}\text{ s}^{-1}$ a circa $80\text{ m}^{-2}\text{ s}^{-1}$.

La dimensione della sorgente è scelta in modo da raccogliere il maggior numero di muoni entro $4R_s$ nel piano dello specchio. In questo caso bisogna tener conto della deviazione massima dei muoni nella roccia e dello scostamento laterale massimo l_{99}^a nello strato d'aria tra il punto di uscita e il telescopio: un muone generato sul bordo della sorgente e deviato di un angolo θ_{99}^r nella roccia avrà un parametro di impatto minore di $4R_s$ se la dimensione angolare $\Delta\theta$ della sorgente è tale che

$$(D + b/2) [\tan \Delta\theta_s - \tan (\Delta\theta_s/2)] + D \tan \theta_{99}^r + l_{99}^a < 4R_s \quad (70)$$

Poiché $D = 1500\text{ m}$, $b = 500\text{ m}$, $l_{99}^a \simeq 35\text{ m}$, $\Delta\theta_s \simeq 10.5^\circ$ e $\theta_{99}^r \simeq 3^\circ$, l'equazione risulta verificata per tutti i muoni generati in un angolo solido sotteso da un cono di circa 12° di apertura, cioè su un disco, posto 250 m dietro la montagna, di raggio pari a circa 184 m , circa 1.29 volte il raggio minimo (equazione 67). Eliminato il segmento circolare sottostante la base della struttura, il numero di muoni necessari per simulare una notte di osservazione è $234 \cdot 10^6$.

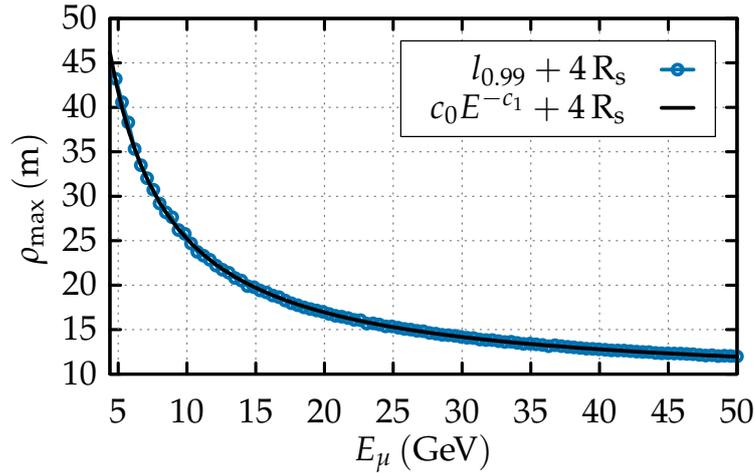


Figura 53: Parametro di impatto massimo in funzione dell'energia del muone ottenuto dalle simulazioni (punti) e parametrizzato dall'equazione 73 (curva continua): se questo è minore del parametro di impatto proiettato il tracciamento del muone viene interrotto.

MUONI TRACCIATI La riduzione del numero di muoni tracciati si basa sulle seguenti ipotesi:

1. la relazione tra energia e scostamento laterale massimo l_{99}^a subito dai muoni in 1500 m d'aria è descritta dalla seguente parametrizzazione

$$l_{99}^a = c_0 \left(\frac{E_\mu}{\text{GeV}} \right)^{-c_1} \quad [\text{m}] \quad (71)$$

dove $c_0 = 163.88$ e $c_1 = 0.99383$;

2. l'efficienza di ricostruzione degli eventi con $\rho > 4R_s$ è nulla.

Quando un muone emerge dalla struttura o (in caso non la attraversi) raggiunge il piano $y - z$ passante per l'origine, viene effettuata una proiezione della traiettoria sul piano dello specchio: se $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è il punto da cui si effettua la proiezione e p_x, p_y, p_z sono i coseni direttori, la distanza tra \mathbf{P}_0 e il punto di intersezione con il piano dello specchio ($\mathbf{P}_s = (D, y_s, z_s)$) è

$$d_s = \frac{D - x_0}{\cos \psi_x}$$

e il punto di impatto sul piano è

$$\begin{aligned} y_s &= y_0 + d \tan \psi_y \\ z_s &= z_0 + d \tan \psi_z \\ \rho_{\text{proi}} &= \sqrt{y_s^2 + z_s^2} \end{aligned} \quad (72)$$

dove gli angoli ψ_x, ψ_y e ψ_z sono gli angoli che la traiettoria forma con l'asse del telescopio

$$\begin{aligned} \psi_x &= \arccos p_x \\ \psi_y &= \arctan p_y / p_x \\ \psi_z &= \pi/2 - \arccos p_z \end{aligned}$$

L'idea è quella di terminare la traccia dei muoni con un parametro di impatto proiettato maggiore di $4R_s$. Ma, come visto in sezione 4.5, i muoni possono subire uno scostamento laterale rilevante in 1500 m (all'energia di soglia, anche di 35 m) e arrivare sul piano dello specchio con un parametro di impatto sensibilmente diverso da quello previsto (72), soprattutto alle basse energie. Per tener conto della dipendenza dall'energia dello scostamento laterale è stata utilizzata la parametrizzazione 71 per ricavare un parametro di impatto massimo ρ_{max} (figura 53)

$$\rho_{\text{max}}(E_\mu) = l_{99}^a(E_\mu) + 4R_s \quad (73)$$

Se il parametro di impatto proiettato, di un muone di energia E_μ , è maggiore di $\rho_{\text{max}}(E_\mu)$ il tracciamento viene interrotto. Questo permette di scartare la maggior parte dei muoni che non arrivano nelle vicinanze dello specchio e, contemporaneamente, tener conto di eventuali muoni deviati nelle vicinanze (in media, solo l'1% di questi eventi è scartato).

6.2.2 Fotoni Čerenkov

La riduzione del numero di fotoni Čerenkov è basata sulle seguenti ipotesi:

1. i muoni nel campo di vista del telescopio possono causare l'emissione di fotoni, che impattano sullo specchio, in una regione spaziale limitata;
2. l'interazione tra i fotoni e l'atmosfera è trascurabile.

La prima ipotesi permette di limitare la generazione dei fotoni Čerenkov in una regione di spazio nelle vicinanze del telescopio. La seconda ipotesi rende evitabile il tracciamento dei fotoni dal punto di emissione fino al punto di impatto col piano dello specchio.

REGIONE DI EMISSIONE Ricordando la geometria di emissione rappresentata in figura 40, di tutti i fotoni associati a un muone che impatta il piano dello specchio con un angolo ψ possono raggiungere lo specchio solo quelli emessi in un intervallo $[Y_{\min}, Y_{\max}]$

$$\begin{aligned} Y_{\min} &= x_{\min} \tan \psi - \rho \\ Y_{\max} &= x_{\max} \tan \psi - \rho \\ x_{\min} &= \frac{\rho - R_s}{\tan \psi - \tan(\psi - \theta_c)} \\ x_{\max} &= \frac{\rho + R_s}{\tan \psi - \tan(\psi - \theta_c)} \end{aligned} \quad (74)$$

dove, l'origine del sistema di riferimento $x - y$ in figura è stata traslata al centro dello specchio ottenendo il nuovo sistema di riferimento $x - Y$. In questo caso, l'intervallo di emissione è

$$\Delta d(\psi, \theta_c) = \frac{2\sqrt{2}R_s \tan \psi}{\tan \psi - \tan(\psi - \theta_c)} \quad (75)$$

Considerando un angolo massimo pari al campo di vista del telescopio, i fotoni associati ai muoni con energia maggiore di 5 GeV e che impattano con $\rho < 4R_s$ possono essere arrivare sullo specchio se emessi entro $Y \lesssim 18R_s$. Quando l'energia del muone tende a quella di soglia l'intervallo di produzione diverge. I muoni atmosferici con energia compresa tra la soglia E_{th} ($\simeq 4.37$ GeV) e 5 GeV sono una frazione trascurabile di quelli generati (circa 6 ogni dieci notti), di conseguenza i muoni che arrivano sul telescopio sono stati frenati nella struttura e il punto di emissione più lontano possibile coincide con il punto di uscita più lontano rispetto al telescopio (e nel suo campo di vista), cioè un punto con $x \simeq 1500$ m e $Y \simeq 140$ m. Entro questi limiti, i fotoni associati a muoni con angolo di incidenza di 5° possono arrivare sullo specchio se l'angolo Čerenkov è maggiore di 0.23° . Nonostante gli eventi con angolo Čerenkov minore siano di scarsa importanza, visto che la dimensione angolare di un pixel della camera di ASTRI è di 0.19° , l'emissione è stata permessa in una regione cilindrica con base pari a $100R_s$ sul piano dello specchio e negli ultimi 1500 m di atmosfera. In questo modo al telescopio sono visibili tutti i muoni, fatta eccezione per quelli con $\theta_c \lesssim 0.15^\circ$ ai limiti del campo di vista.

FOTONI TRACCIATI Il procedimento è analogo a quello sviluppato per i muoni nella sezione precedente. Quando il fotone Čerenkov viene generato, si effettua una proiezione della traiettoria sul piano dello specchio: se $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è il punto di emissione e p_x, p_y, p_z sono i coseni direttori, la distanza tra \mathbf{P}_0 e il punto di intersezione con il piano dello specchio ($\mathbf{P}_s = (D, y_s, z_s)$) sono

$$\begin{aligned} d_s &= \frac{D - x_0}{\cos \theta_x} \\ y_s &= y_0 + d \tan \theta_y \\ z_s &= z_0 + d \tan \theta_z \end{aligned} \quad (76)$$

dove gli angoli θ_x , θ_y e θ_z sono gli angoli che la traiettoria forma con l'asse del telescopio e sono calcolati come nel caso dei muoni. Se

$$\sqrt{y_s^2 + z_s^2} \leq R_s \quad (77)$$

le informazioni sul fotone vengono salvate e, successivamente, inviate in input al simulatore del telescopio. Dopo il controllo, il tracciamento del fotone viene sempre interrotto.

6.3 ANALISI DEI RISULTATI

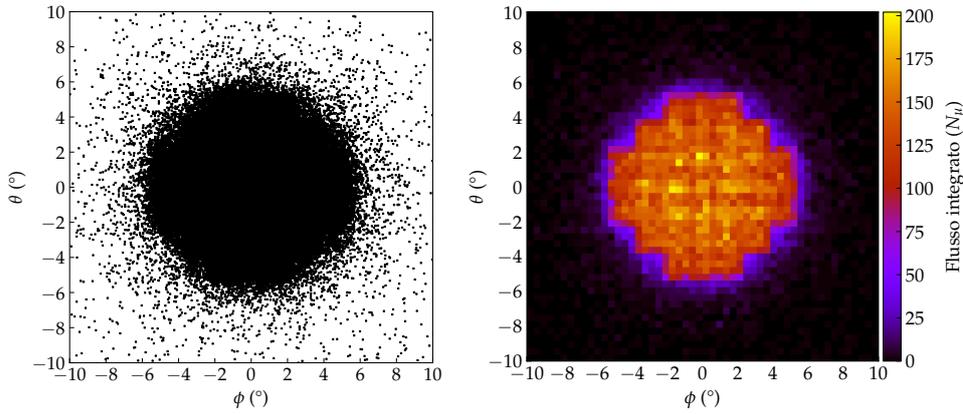


Figura 54: Risultato della simulazione di una notte di osservazione senza nessuna struttura nel campo di vista e senza nessun tipo di selezione. **Sinistra)** Grafico di dispersione della direzione degli eventi ricostruiti: parte degli eventi (visualizzati qui fino a 10°) vengono ricostruiti con un errore significativo sull'angolo. **Destra)** Il raggruppamento degli eventi in intervalli, in questo caso di dimensione pari a due pixel della camera ($0.38^\circ \times 0.38^\circ$), fornisce il flusso integrato dei muoni atmosferici.

Gli anelli muonici, ottenuti passando al simulatore del telescopio i fotoni Čerenkov simulati, sono stati ricostruiti utilizzando un rumore di fondo medio di 1 fotoelettrone per pixel. Riassumendo quanto visto nella sezione 5.1, ogni evento è descritto completamente dall'energia del muone (E_μ), dalla posizione di impatto sul piano dello specchio (\mathbf{P}) e dalla direzione di incidenza rispetto all'asse del telescopio: dall'energia del muone è possibile risalire all'angolo di emissione Čerenkov θ_c (equazione 12); della posizione sul piano di incidenza è sufficiente conoscere il parametro di impatto $\rho \equiv \sqrt{P_y^2 + P_z^2}$; l'angolo che la direzione di incidenza forma con l'asse del telescopio è definito dall'angolo azimutale (ϕ) e zenitale (θ). Per ricostruire ogni evento è necessario determinare queste quantità misurando i seguenti parametri dalle immagini:

- il raggio dell'anello R_c , da cui si stima θ_c ;
- il centro dell'anello (y_c, z_c) , da cui si stimano ϕ e θ .

Il parametro di impatto ρ può essere stimato tramite un'analisi della distribuzione di intensità dei pixel dell'anello [89] o può essere messo in relazione

con la distanza tra il centro dell'anello e il centro di gravità dell'immagine [86]. Solitamente, queste misure vengono effettuate con lo scopo di calibrare i telescopi Čerenkov e richiedono l'analisi di eventi che formano un anello completo sulla camera, escludendo così i muoni che impattano fuori dallo specchio, quelli con angoli di incidenza troppo grandi e quelli troppo vicini al centro dello specchio (se l'oscuramento dovuto allo specchio secondario è importante). Nell'ambito muografico questo tipo di misura non è necessaria: come visto in sezione 5.1 (figura 51), per gli eventi con $\rho > R_s$ esiste una relazione biunivoca tra il parametro di impatto e il numero di pixel su cui si esegue la ricostruzione. Questo permette di rimuovere gli eventi ad alto parametro di impatto attraverso una selezione basata sul numero minimo di pixel. Fissato un parametro di impatto, il numero di pixel attivi dipende dall'angolo di incidenza, dato che l'anello può finire parzialmente, o totalmente, fuori dal campo di vista. Una selezione in base al numero di pixel agisce anche in questo caso, escludendo gli eventi con angolo di incidenza troppo elevato.

La scelta del tipo di selezione richiede una valutazione della corrispondente efficienza di ricostruzione, la quale dipende dallo strumento e dal processo di ricostruzione implementato. A questo scopo è stata eseguita una procedura di *flat-fielding*, cioè un'analisi della risposta del rivelatore a un flusso uniforme di muoni, attraverso una simulazione della sorgente senza nessuna struttura nel campo di vista del telescopio. Gli eventi ricostruiti in una notte di osservazione sono mostrati in figura 54 (dove non è stato applicato nessun tipo di selezione): a sinistra sono mostrate le direzioni ricostruite, a destra il corrispondente flusso integrato in intervalli di dimensione pari a due pixel della camera di ASTRI ($0.38^\circ \times 0.38^\circ$).

6.3.1 Selezione ottimale

Come visto in sezione 4.5 (figure 31 e 36) i muoni che emergono dalla struttura con energia minore di 10 GeV vengono deviati (nella roccia e nell'aria), in media, di un angolo maggiore di circa 1.2° , a questo corrisponde una risoluzione spaziale di ricostruzione (equazione 43) di 30 m; viene naturale pensare di applicare una selezione in energia (che si traduce in una selezione basata sul raggio ricostruito) in modo da scartare questi eventi e migliorare la precisione di ricostruzione. Ma, come mostrato in figura 55, la precisione nella ricostruzione del raggio non è sufficiente per applicare questo tipo di selezione. Quasi tutti gli eventi che impattano fuori dallo specchio vengono ricostruiti con un errore sul raggio significativo (un esempio è mostrato in figura 57). In particolare, gli eventi con $\rho > 2R_s$ vengono ricostruiti con un raggio molto piccolo, indipendentemente dall'energia. Questo rende impossibile selezionare in base a R_c senza prima stimare il parametro di impatto.

In questo caso, a differenza di come visto nella sezione 5.1, l'errore di ricostruzione non è definito in base all'angolo di incidenza ma in base alla distanza, sulla camera, tra il centro dell'anello ricostruito e di quello simulato

$$d_\psi = \sqrt{(y_c - \phi_s)^2 + (z_c - \theta_s)^2} \quad (78)$$

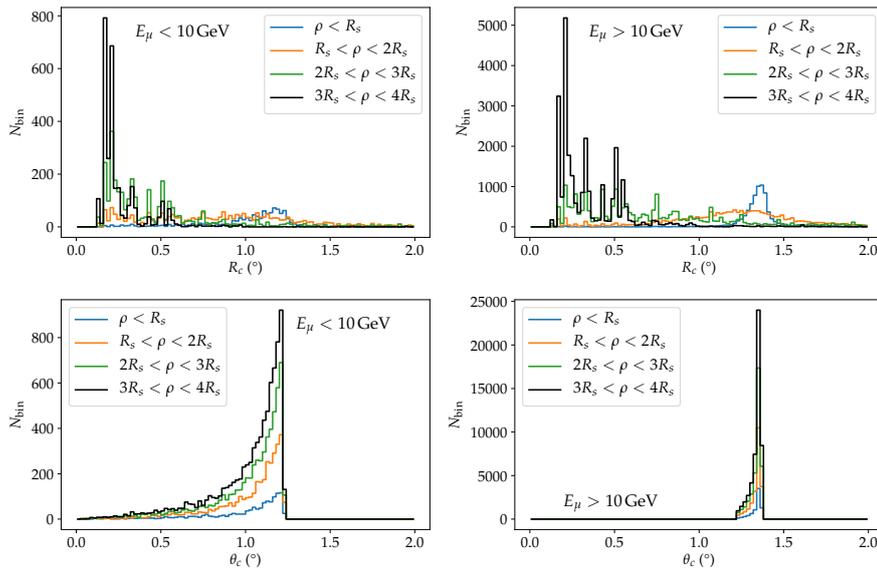


Figura 55: Distribuzione del raggio ricostruito (sopra) e teorico (sotto), per eventi con energia minore (sinistra) e maggiore (destra) di 10 GeV. All'aumentare del parametro di impatto gli eventi vengono ricostruiti con un raggio molto piccolo, indipendentemente dall'energia. Solo a $\rho < R_s$ la distribuzione è simile a quella attesa. Questo non permette di eseguire una selezione energetica basata sul raggio.

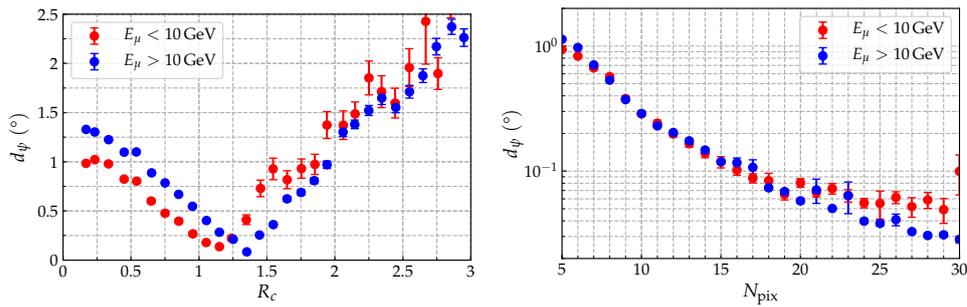


Figura 56: Errore di ricostruzione medio in funzione del raggio ricostruito (sinistra) e del numero di pixel utilizzati per la ricostruzione (destra).

In figura 56 (sinistra) è mostrato l'errore di ricostruzione medio in funzione del raggio ricostruito R_c : d_ψ cresce quasi linearmente allontanandoci dal raggio Čerenkov critico. Come descritto in sezione 5.1 (figura 47) gli eventi ricostruiti con un raggio molto maggiore di θ_c sono quelli registrati dalla camera come archi di piccola estensione angolare che presentano molti pixel allineati. Per scartare questi eventi è stato scelto come parametro di selezione il raggio ricostruito per il quale la precisione di ricostruzione media è circa uguale allo scattering medio ($\sim 0.5^\circ$) subito dai muoni nella struttura

$$R_c^{\max} = 1.9^\circ \quad (79)$$

In figura 56 (destra) è mostrato d_ψ in funzione del numero di pixel N_{pix} con quest'ultima selezione applicata. In questo caso esiste una relazione biunivoca tra la precisione media e il numero di pixel e, come prima, è stato scelto come secondo parametro di selezione il numero di pixel per il

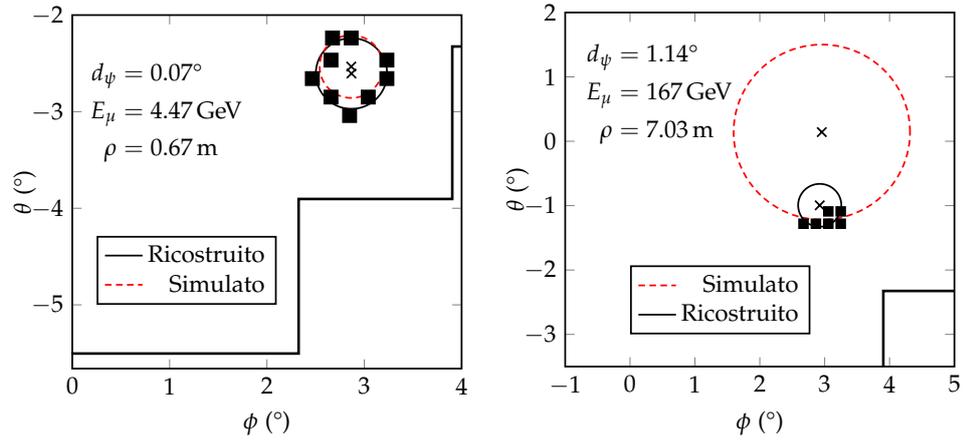


Figura 57: Esempio di ricostruzione di eventi con un basso numero di pixel. L'immagine a sinistra è causata da un muone di bassa energia che impatta sullo specchio. L'immagine di destra, invece, è dovuta a un muone di alta energia che impatta con un grande parametro di impatto. In entrambi i casi il raggio ricostruito è di circa 0.3° e senza conoscere il parametro di impatto non è possibile distinguere i due tipi di eventi. La linea continua ai margini della figura rappresenta il bordo della camera.

quale l'errore di ricostruzione medio è dell'ordine della metà dello scattering medio

$$N_{\text{pix}}^{\text{min}} = 7 \quad (80)$$

La condizione di selezione è quindi

$$(N_{\text{pix}} \geq 7) \wedge (R_c < 1.9^\circ) \quad (81)$$

Gli effetti della selezione sono mostrati in figura 58:

- Per $\rho < 1 R_s$ viene selezionato più del 90% degli eventi ricostruiti, a $2 R_s$ metà vengono scartati e a $4 R_s$ tutti.
- La percentuale di selezione è del 100% per gli eventi ricostruiti con una precisione maggiore di un centesimo di grado e rimane oltre il 90% fino alla precisione di un decimo di grado. Mentre, la percentuale di scarto supera l'80% per gli eventi con errore di ricostruzione maggiore di 0.7° . Nessun evento con errore maggiore di 3° viene selezionato.
- Mentre l'energia (quindi l'angolo Čerenkov teorico) influisce debolmente sulla percentuale di selezione (circa il 30% oltre 0.5°), questa è molto sensibile al raggio ricostruito; a riprova della scarsa precisione nella ricostruzione di quest'ultimo.

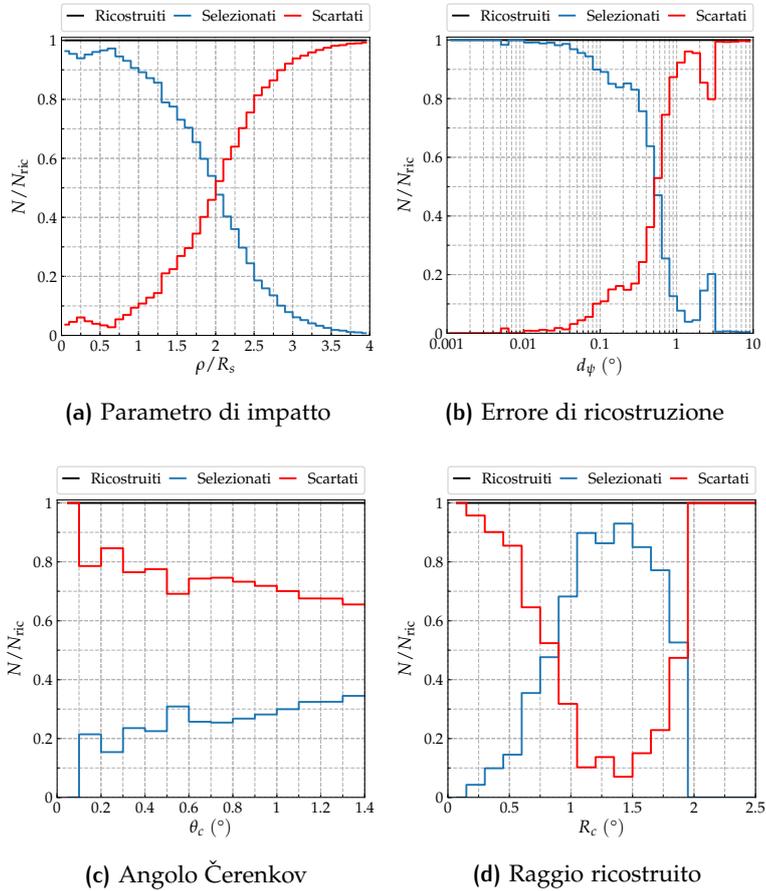


Figura 58: Distribuzioni, relative al caso senza selezione, di alcune quantità degli eventi selezionati (blu) e scartati (rosso) attraverso l'applicazione della condizione 81. **a)** Distribuzione del parametro di impatto: maggiore è il parametro di impatto minore è il numero di eventi selezionati. **b)** Distribuzione dell'errore di ricostruzione: vengono scartati gli eventi con errori maggiori, migliorando la precisione di ricostruzione media. **c)** Distribuzione dell'angolo Čerenkov teorico: la selezione è quasi indipendente dall'energia (a 5 GeV θ_c è circa 0.67°). **d)** Distribuzione del raggio ricostruito: la maggior parte degli eventi con raggio minore di 0.5° viene scartata.

6.3.2 Area di raccolta efficace

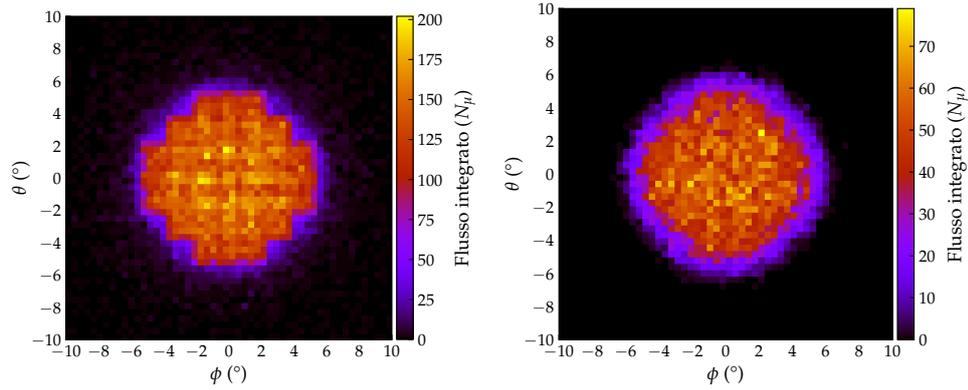


Figura 59: Risultato della simulazione di una notte di osservazione senza nessuna struttura nel campo di vista; a sinistra non è applicata nessuna selezione, mentre a destra è applicata la condizione 81. La risoluzione è di due pixel della camera ($0.38^\circ \times 0.38^\circ$).

Gli effetti della selezione sul flat field sono mostrati in figura 59. Nel caso di una notte di osservazione il numero di eventi selezionati è circa un terzo del numero di eventi ricostruiti: il 90% degli eventi è selezionato entro un angolo di 5° , mentre tutti gli eventi oltre (circa) 6° vengono scartati. Per poter stimare il numero di eventi attesi, attraverso lo spettro di Reyna-Bugaev a 85° , è necessario definire un'area efficace di raccolta che tenga conto della dipendenza dell'efficienza di ricostruzione dal parametro di impatto e dall'angolo di incidenza.

Sia ψ è l'angolo di incidenza e ρ il parametro di impatto, l'area efficace di raccolta è definita come

$$A_{\text{eff}}^{\tilde{N}, \tilde{R}}(\psi) \equiv 2\pi \int_0^\infty \rho E_{\text{ric}}^{\tilde{N}, \tilde{R}}(\psi, \rho) d\rho \quad (82)$$

dove \tilde{N} e \tilde{R} sono i parametri di selezione. Questa rappresenta l'area di raccolta che dovrebbe avere il telescopio per rivelare lo stesso numero di eventi se la sua efficienza di ricostruzione fosse del 100%. L'efficienza di ricostruzione $E_{\text{ric}}^{\tilde{N}, \tilde{R}}(\psi, \rho)$ è calcolata come rapporto tra il numero di eventi selezionati (ad un angolo ψ e con un parametro di impatto ρ) e il numero totale di eventi che hanno almeno un fotone Čerenkov associato che impatta sullo specchio. In figura 60 è mostrata l'efficienza di ricostruzione per $\tilde{N} = 4, 5, 6, 7$ e $\tilde{R} = 1.9$ (sinistra), e la corrispondente funzione integranda dell'equazione 82 (destra), per eventi con angolo di incidenza minore di 4.5° : utilizzando la condizione 81 l'efficienza di ricostruzione è nulla a $4R_s$ dal centro dello specchio e l'area efficace è di circa 66 m^2 ; selezionando anche gli eventi con un numero minore di pixel l'area efficace aumenta notevolmente perché aumenta la frazione di selezioni a grandi parametri di impatto, e, di conseguenza, aumenta l'errore di ricostruzione medio.

CORREZIONE ANGOLARE Fissata la condizione di selezione, come accennato in precedenza, per poter stimare il numero di eventi atteso in un certo tempo di osservazione e lungo una certa direzione è necessario conoscere l'area efficace di raccolta $A_{\text{eff}}(\psi)$; come vedremo nella prossima sezione,

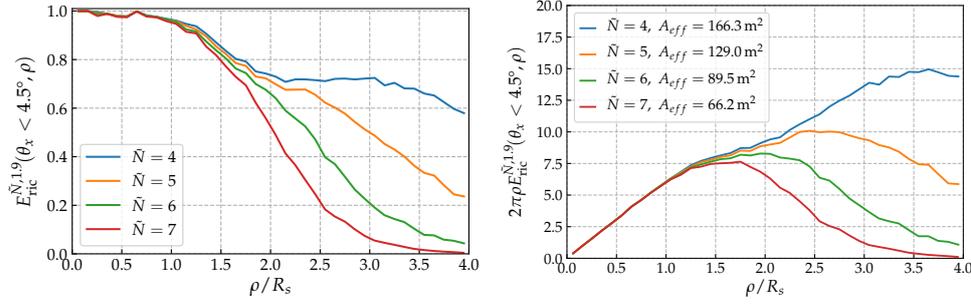


Figura 60: Efficienza di ricostruzione (sinistra) per $\tilde{N} = 4, 5, 6, 7$ e $\tilde{R} = 1.9$ e corrispondente funzione integranda dell'equazione 82 (destra). L'area efficace converge nell'intervallo di integrazione $0R_s-4R_s$ a partire da $\tilde{N} = 7$.

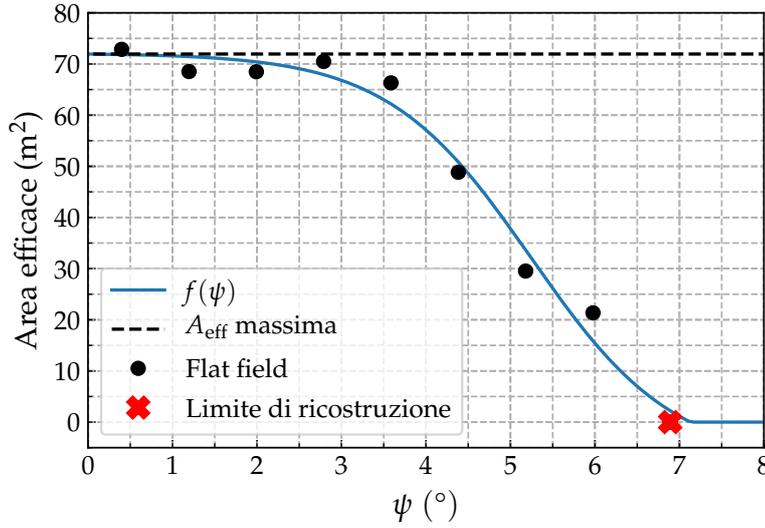


Figura 61: Fit dell'area efficace in funzione dell'angolo di incidenza ottenuta dal flat field (punti neri). È stata assunta un'area efficace nulla a circa 7° (punto rosso) pari all'angolo oltre il quale nessun fotone può entrare nel campo di vista.

questa è necessaria al fine di stimare lo spessore di roccia attraversato. Per tener conto della dipendenza dell'area efficace dall'angolo di incidenza si può procedere in due modi equivalenti:

1. si tiene conto dell'area efficace lungo la linea di vista durante il processo di ricostruzione dello spessore;
2. si considera come area efficace quella lungo l'asse del telescopio e si corregge l'immagine relativamente a questa.

Per una questione di semplicità di implementazione è stato scelto quest'ultimo metodo: dal flat field si estrae l'efficienza di ricostruzione (equazione 82) per angoli di incidenza diversi e si esegue un fit dei dati utilizzando come modello la seguente funzione

$$f(\psi) = \frac{1 + \text{sign} \hat{f}(\psi)}{2} \hat{f}(\psi), \text{ con } \hat{f}(\psi) = \frac{a}{e^{b(x-\psi_{off})} + 1} + c \quad (83)$$

Il fit viene eseguito considerando l'area efficace nulla ad un angolo

$$\psi_{\max} \simeq 6.9^\circ \quad (84)$$

pari alla massima estensione angolare della camera più il raggio Čerenkov critico. In figura 61 è mostrato il risultato utilizzando la condizione 81. Una volta eseguito il fit la correzione del flusso di un pixel centrato ad un angolo $\psi_{i,j}$ dall'asse del telescopio sarà

$$F_{i,j}^{\text{corr}} = \begin{cases} 0, & \text{se } C(\psi_{i,j}) \geq C_{\max} \\ C(\psi_{i,j})F_{i,j}, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (85)$$

Il fattore di correzione è definito come

$$C(\psi_{i,j}) \equiv \frac{f(0)}{f(\psi_{i,j})} \quad (86)$$

dove $f(0)$ è l'area efficace lungo l'asse del telescopio. La correzione applicata al flat field è mostrata in figura 62: in questo caso i pixel con un fattore di correzione maggiore di $C_{\max} = 5$ sono stati esclusi. L'immagine non è uniforme a causa della bassa statistica.

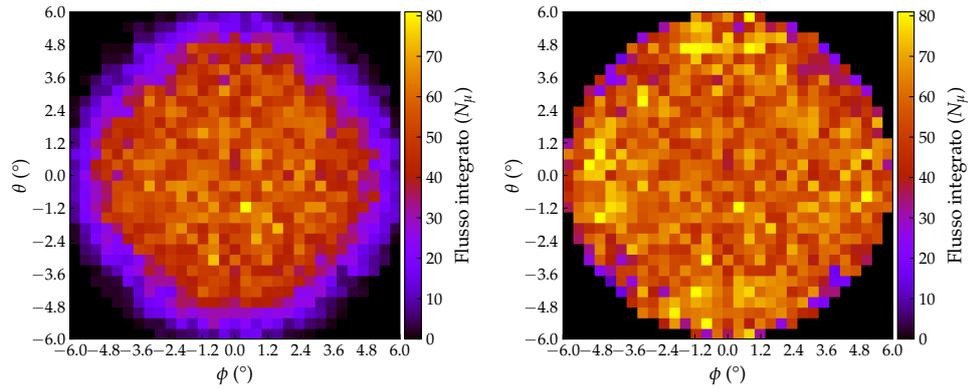


Figura 62: Risultato della correzione (destra) del flat field (sinistra) tramite l'equazione 85. La scala del flusso dell'immagine corretta è compresa tra il massimo e il minimo del flusso dell'immagine originale, in modo da evidenziare la correzione. A causa della bassa statistica l'immagine non è uniforme.

6.3.3 Energia minima di rivelazione

Un altro parametro necessario per la ricostruzione degli spessori è l'energia minima di rivelazione. Sia $S(E_\mu)$ lo spettro normalizzato degli eventi di cui almeno un fotone arriva sullo specchio, e sia $\tilde{S}(E_\mu)$ lo spettro normalizzato degli eventi ricostruiti e selezionati attraverso la condizione 81. Il rapporto tra i due spettri

$$R(E_\mu) = \frac{\tilde{S}(E_\mu)}{S(E_\mu)} \quad (87)$$

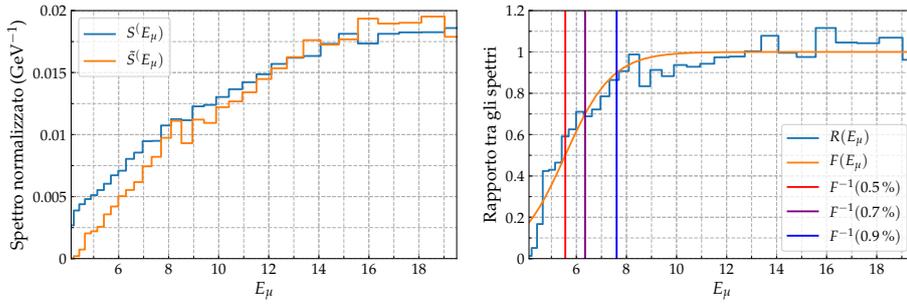


Figura 63: Sinistra) Spettro degli eventi di cui almeno fotone arriva sullo specchio e spettro degli eventi selezionati con la condizione 81. **Destra)** Rapporto tra gli spettri e fit ottenuto con la funzione modello 88; le linee verticali mostrano l'energia corrispondente a riduzioni del 10%, 30% e 50%.

è stato parametrizzato usando come funzione modello

$$F(E_\mu) = \frac{1}{e^{b(E_\mu - E_{\text{off}})} + 1} \quad (88)$$

dove l'energia E_{off} è l'energia alla quale lo spettro è ridotto del 50%. I risultati applicati al flat field sono mostrati in figura 63: lo spettro è ridotto del 10% a circa 7.6 GeV, del 30% a 6.3 GeV e del 50% a 5.5 GeV. L'energia minima è definita come quella a cui la riduzione è del 30%

$$E_\mu^{\text{min}} \equiv F^{-1}(0.7) \quad (89)$$

6.3.4 Ricostruzione degli spessori

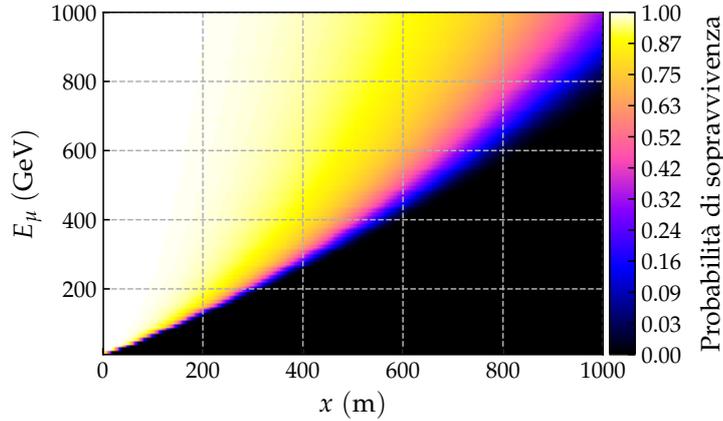


Figura 64: Probabilità che un muone di energia E_μ sopravviva all'attraversamento di uno spessore x di roccia standard con un'energia maggiore di $E_{\text{th}} = 4.4$ GeV.

Come già discusso nella sezione 4.4, è possibile ottenere una relazione intensità-spessore conoscendo lo spettro dei muoni prima dell'attraversamento e la probabilità $P_{\text{th}}(E_\mu, x, E_{\text{th}})$ che ha un muone di energia E_μ di emergere da uno spessore x di roccia con un'energia sufficiente per l'emissione di fotoni Čerenkov (cioè maggiore di E_{th}). Poiché nelle simulazioni è stato

utilizzato uno spettro di Reyna-Bugaev ad un angolo fisso di 85° , il numero di eventi ricostruiti attesi in un tempo di integrazione Δt , entro un angolo solido Ω e su un'area efficace di ricostruzione A_{eff} è

$$I(X, \Delta t, \Omega, A_{\text{eff}}) = \Delta t \Omega A_{\text{eff}} \int_{E_{\mu}^{\text{min}}}^{\infty} P_{E_{\text{th}}}(x, E_{\mu}) \Phi_{R-B}(E_{\mu}, 85^\circ) dE_{\mu} \quad (90)$$

La probabilità di sopravvivenza è stata calcolata dalle simulazioni con un'e-

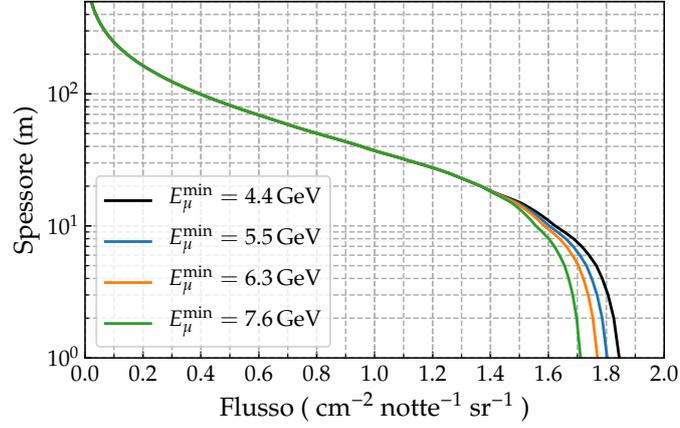


Figura 65: Flusso integrato in funzione dello spessore di roccia attraversato. La relazione, a bassi spessori, è sensibile alla scelta dell'energia minima di rivelazione.

nergia di soglia $E_{\text{th}} = 4.4 \text{ GeV}$ ed è mostrata in figura 64. La funzione inversa della 90 è mostrata in figura 65 per diversi valori di E_{μ}^{min} : a bassi spessori, la precisione con cui lo spessore viene ricostruito dipende dalla precisione con cui si stima l'energia minima di rivelazione.

Se $F_{i,j}^{\text{corr}}$ è il flusso integrato corretto di un pixel dell'immagine e Ω_{pix} l'angolo solido sotteso, lo spessore di roccia attraversato dai muoni lungo la linea di vista del pixel è

$$x_{i,j} = I^{-1}(F_{i,j}^{\text{corr}}, \Omega_{\text{pix}}, A_{\text{eff}}, \Delta t) \quad (91)$$

7

RISULTATI

In questo capitolo vengono presentati e discussi i risultati della simulazione delle muografie con condotti di 35 m, 70 m e 140 m.

Nella sezione 7.1 descrivo l'analisi statistica applicata per determinare se, in un determinato tempo di osservazione, la differenza tra il risultato senza condotto e quello con i diversi condotti sia significativa. Questo approccio serve per valutare la capacità del telescopio di distinguere una differenza di spessore.

Nella sezione 7.2 discuto i risultati ottenuti dalle simulazioni, mostrati graficamente per ogni dimensione del condotto.

7.1 ANALISI DELLE MUOGRAFIE

Tramite una mappa di densità dell'edificio vulcanico è possibile evidenziare la presenza di eventuali condotti. La conoscenza della geometria di questi permette a sua volta di comprendere meglio la dinamica delle eruzioni fornendo informazioni che, integrate con quelle tradizionali, possono aiutare a prevedere lo stile eruttivo. Attualmente i modelli fluidodinamici delle eruzioni si basano su una geometria cilindrica del condotto magmatico e su dimensioni approssimative, ma sia la dimensione sia la geometria influiscono fortemente sui risultati delle previsioni.

Per valutare la capacità del telescopio di distinguere una differenza di spessore, in questo lavoro di tesi sono state simulate quattro osservazioni muografiche del modello di vulcano con condotti cilindrici di dimensione diversa, ognuna della durata di 30 notti. Oltre al caso senza condotto, sono stati scelti i seguenti diametri: 140 m, 70 m e 35 m. Queste dimensioni sono solo indicative e sono servite per analizzare i risultati dell'osservazione in un intervallo di differenze di spessore abbastanza ampio.

Prima di proseguire con l'analisi dei risultati introduciamo alcune grandezze utili per lo scopo. Riprendendo la configurazione della geometria di simulazione discussa nella sezione 6.1, se h è l'altezza del cono, b il diametro di base, d_c il diametro del condotto e D la distanza a cui è posto il telescopio:

- l'altezza rispetto alla base della struttura, proiettata a una distanza D lungo la linea di vista, è

$$Z = h/2 + D \tan \theta \quad (92)$$

- la distanza orizzontale dal centro della struttura, proiettata a una distanza D lungo la linea di vista, è

$$Y = D \tan \theta \quad (93)$$

- lo spessore di roccia lungo la linea di vista, a $\phi = 0$ (figura 66 a sinistra), è

$$x_{d_c} = \frac{b}{\cos \theta} \left(1 - \frac{Z(\theta)}{h}\right) + \frac{b^2}{2h} \left(1 - \frac{Z(\theta)}{h}\right) \frac{\tan \theta}{\cos \theta - \frac{b}{2h} \sin \theta} - \frac{d_c}{\cos \theta} \quad (94)$$

Il cammino all'interno del condotto lungo la linea di vista è semplicemente $\delta x = d_c / \cos \theta$, e, quindi, il rapporto tra lo "spessore" di condotto e lo spessore di roccia senza condotto è

$$\frac{\delta x}{x_0} = \frac{d_c}{b \left(1 - \frac{Z(\theta)}{h}\right) + \frac{b^2}{2h} \left(1 - \frac{Z(\theta)}{h}\right) \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{b}{2h} \sin \theta}} \simeq \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (95)$$

Essendo il condotto riempito d'aria, il rapporto è pari al contrasto di densità lungo la linea di vista. Per come sono state calcolate, le equazioni sono valide finché il *punto di uscita* della linea di vista è sulla superficie esterna del cono, cioè in un intervallo

$$-\arctan \frac{h}{2D + b} < \theta < \arctan \frac{2h_t - h}{2D + d_c} \quad (96)$$

dove h_t è l'altezza del tronco di cono che si ottiene inserendo il condotto nella geometria. In figura 66 (destra) sono mostrati i risultati dell'applicazione dell'equazione 94 e dell'equazione 95 calcolate per condotti di 140 m, 70 m e 35 m, ottenuti con i parametri utilizzati nelle simulazioni (si veda la sezione 6.1). È importante notare che l'altezza a cui si ha un certo valore di $\delta x / x_0$ è maggiore per condotti più piccoli ma il corrispondente spessore di roccia x_{d_c} è maggiore per condotti più grandi. Ad esempio, il rapporto $\delta x / x_0$ è pari a 0.4 a un'altezza di 65 m con il condotto di 140 m, a 158 m con quello da 70 m e a 200 m con quello da 35 m, mentre gli spessori lungo la linea di vista sono, alle rispettive altezze, di 210 m, 105 m e 52 m. Se lo spessore di roccia è maggiore il flusso atteso è minore, quindi il tempo necessario per riuscire a distinguere una differenza di flusso dovuta a una differenza di spessore non dipende unicamente $\delta x / x_0$ ma anche dallo spessore x_{d_c} , cioè dalla topografia della struttura in esame.

Dato che il profilo verticale dello spessore di roccia, per condotti di qualsiasi dimensione, è determinabile analiticamente (equazione 94), attraverso la relazione intensità-spessore (equazione 90) è possibile determinare il profilo verticale del flusso atteso in N notti di osservazione e in pixel di dimensione angolare ω_{pix}

$$I(\theta)_{d_c} = \Delta t_N \Omega_{\text{pix}} A_{\text{eff}}(\theta) \int_{E_{\mu}^{\min}}^{\infty} P_{E_{\text{th}}}(x_{d_c}(\theta), E_{\mu}) \Phi_{R-B}(E_{\mu}, 85^{\circ}) dE_{\mu} \quad (97)$$

dove $A_{\text{eff}}(\theta)$ è il profilo dell'area di raccolta efficace, E_{μ}^{\min} è l'energia minima di rivelazione, $P_{E_{\text{th}}}$ è la probabilità di sopravvivenza dei muoni nella roccia standard, Φ_{R-B} è lo spettro di Reyna-Bugaev usato nelle simulazioni e $\Omega_{\text{pix}} = 4 \arcsin(\sin^2 \omega_{\text{pix}} / 2)$ è l'angolo solido sotteso dal pixel. Per valutare la capacità dello strumento di distinguere una variazione dello spessore di roccia in un certo tempo di osservazione si devono confrontare i risultati

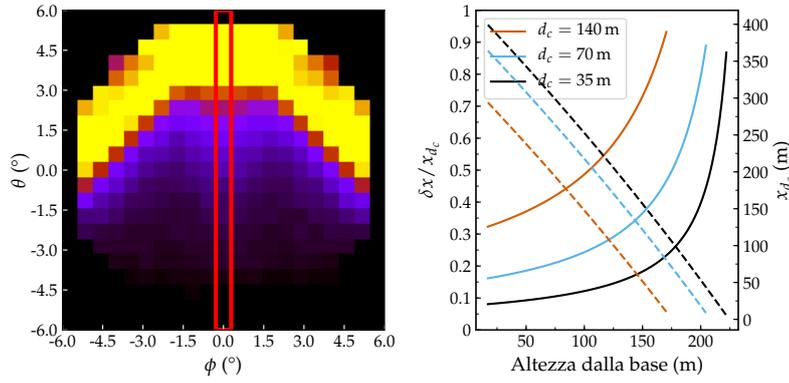


Figura 66: **Sinistra)** Lungo l’asse del cono ($\phi = 0$, regione in rosso) lo spessore di roccia in assenza di condotto, x_0 , e il rapporto, $\delta x/x_0$, con lo “spessore” di condotto, δx , lungo la linea di vista, in funzione dell’angolo θ , sono stati determinati analiticamente (equazioni 94 e 95). **Destra)** Rapporto $\delta x/x_0$ (curve continue, asse di sinistra) e spessore di roccia (curve tratteggiate, asse di destra) lungo la linea di vista in funzione dell’altezza dalla base, per condotti di 35 m, 70 m e 140 m.

delle simulazioni delle muografie con condotti diversi con il flusso integrato atteso, e simulato, in assenza di condotto. Una differenza nel numero di conteggi *può* essere legata a una differenza di spessore ma una corretta analisi statistica è necessaria per poter attribuire un certo grado di validità all’ipotesi.

ANALISI STATISTICA Una differenza di spessore, $\delta x = x_2 - x_1$, lungo un pixel (i, j) è detta *risolta* se la differenza del flusso integrato dei muoni sopravvissuti all’attraversamento dei due spessori è significativa. Sia $n_{i,j}$ il flusso integrato del pixel (i, j) nella muografia della struttura con condotto, e $\mu_{i,j}$ quello ottenuto senza condotto, entrambi acquisiti in N notti di osservazione e con pixel di uguali dimensioni. Assumendo che la statistica sia poissoniana e che i conteggi di ogni pixel siano indipendenti dagli altri, la significatività della differenza di conteggi in ogni pixel è valutata attraverso il rapporto di verosimiglianza proposto da Li e Ma [90]

$$\lambda = \left(\frac{n_{i,j} + \mu_{i,j}}{2n_{i,j}} \right)^{n_{i,j}} \left(\frac{n_{i,j} + \mu_{i,j}}{2\mu_{i,j}} \right)^{\mu_{i,j}} \quad (98)$$

assumendo come ipotesi nulla l’assenza del condotto. La differenza tra i due casi è considerata significativa se

$$S_{\text{Li-Ma}} \equiv \sqrt{-2 \ln \lambda} \geq 5 \quad (99)$$

Se i conteggi $n_{i,j}$ e $\mu_{i,j}$ non sono pochi (maggiori di circa 10 eventi per pixel), $S_{i,j}^2$ segue una distribuzione χ^2 a un grado di libertà ed $S_{i,j}$ corrisponde al “livello σ ” di significatività. La probabilità che un pixel con un valore $S_{i,j}$ maggiore di S sia dovuto a una differenza di spessore nella struttura è

$$p_c = \text{erf} \frac{S}{\sqrt{2}} \quad (100)$$

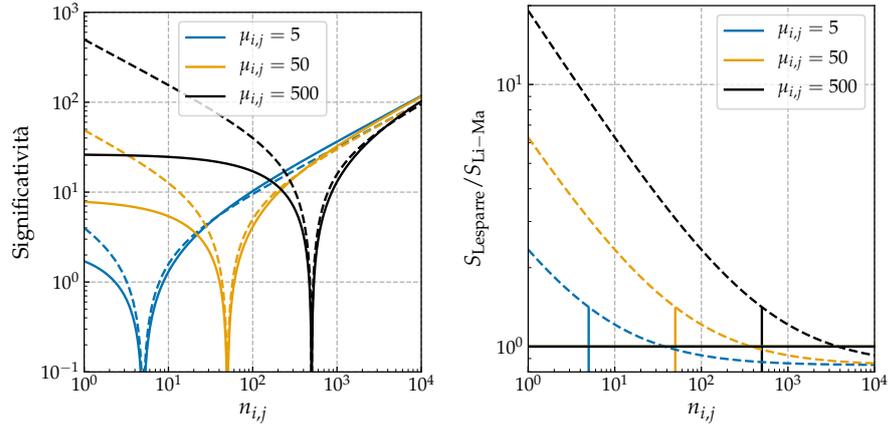


Figura 67: Confronto tra la significatività stimata con la [99](#) ($S_{\text{Li-Ma}}$, curva continue) e la [101](#) (curva tratteggiata), per valori dei contee senza condotto, $\mu_{i,j}$, pari a 5, 50 e 500. A valori minori di $\mu_{i,j}$ la significatività data dalla [101](#) diverge (sinistra). Le significatività sono confrontabili quando $n_{i,j}$ è maggiore di $\mu_{i,j}$; Il rapporto tra $S_{\text{Li-Ma}}$ e la [101](#) (destra) converge a circa 0.9 al crescere di $n_{i,j}$.

In figura [67](#) è mostrato il confronto tra la significatività di Li e Ma e quella usata in Lesparre et al. [[15](#)]

$$S_{\text{Lesparre}} = \frac{|n_{i,j} - \mu_{i,j}|}{\sqrt{n_{i,j}}} \quad (101)$$

Quest'ultimo metodo, rispetto al Li e Ma, sovrastima in modo evidente la significatività quando il valore $\mu_{i,j}$ è maggiore o confrontabile con $n_{i,j}$ e la sovrastima peggiora al diminuire di quest'ultimo. Quando $n_{i,j}$ è molto maggiore di $\mu_{i,j}$ la significatività è leggermente sottostimata, convergendo asintoticamente, al crescere di $n_{i,j}$, a circa $0.9 S_{\text{Li-Ma}}$. Il metodo [101](#) non tiene conto di possibili fluttuazioni statistiche del valore di $\mu_{i,j}$, di conseguenza può essere utilizzato confrontando una misura muografica con il valore atteso del flusso ma non quando si confrontano due misure muografiche (ad esempio, per rilevare variazioni temporali della densità media).

7.2 RISULTATI

Per valutare la capacità dello strumento di risolvere le differenze di spessore ho fatto due tipi di analisi:

1. ho confrontato il risultato delle simulazioni con condotti diversi con il risultato della simulazione senza condotto, con lo stesso tempo di osservazione e con la stessa risoluzione, utilizzando l'equazione [99](#) con

$$\begin{aligned} n_{i,j} &= F_{i,j}^{\text{corr},d_c} \\ \mu_{i,j} &= F_{i,j}^{\text{corr},0m} \end{aligned} \quad (102)$$

dove $F_{i,j}^{\text{corr},d_c}$ è il flusso ottenuto con un condotto di diametro d_c , dopo la correzione angolare descritta nel capitolo [6](#);

2. ho confrontato il risultato delle simulazioni al centro del cono (figura 66), in funzione dell'altezza dalla base, con il valore del flusso integrato atteso in assenza di condotto utilizzando l'equazione 99 con

$$\begin{aligned} n_{i,j} &= F_{i,0}^{\text{corr},dc} \\ \mu_{i,j} &= I_{i,0}^{0m} \end{aligned} \quad (103)$$

dove $I_{i,0}^{0m}$ è il flusso atteso in assenza di condotto, al centro del cono, ottenuto con l'equazione 97. Per come è definita la 94, l'analisi è valida da un'altezza minima di circa 20 m per tutti i condotti a un'altezza massima di circa 165 m, 195 m e 210 m rispettivamente per i condotti di 140 m, 70 m e 35 m.

- 1) In figura 68 è mostrato il risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione in assenza di condotto. In questo caso, gli eventi selezionati sono stati raggruppati in intervalli di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$, corrispondenti ad una risoluzione spaziale di circa 10 m. I risultati di questa simulazione sono confrontanti con quelli delle altre simulazioni raggruppando in intervalli della stessa dimensione e utilizzando lo stesso numero di notti di osservazione. Nelle pagine successive sono mostrati i risultati della simulazione di 30 notti di osservazione per i diversi condotti simulati e i relativi confronti; in tutte le figure, il flusso corretto è ottenuto utilizzando un fattore di correzione massimo (equazione 85) $C_{\text{max}} = 3$ e gli spessori sono stati ricostruiti utilizzando l'equazione 91. La presenza del condotto si presenta come un eccesso di flusso nelle regioni centrali del cono (lungo l'asse) e una diminuzione di spessore ricostruito rispetto al caso senza condotto in figura 68.

Nelle figure 69, 73 e 77 sono mostrati i risultati in 30 notti di osservazione per, rispettivamente, i condotti di 140 m, 70 m e 35 m. Le figure sono state ottenute raggruppando gli eventi in pixel di dimensione $0.57^\circ \times 0.57^\circ$ ad eccezione del condotto di 35 m (figura 77) in cui sono stati utilizzati pixel di $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ a cui corrispondono delle risoluzioni spaziali rispettivamente di 15 m e 10 m. La mappa del flusso (sopra) e dello spessore (sotto) è stata ottenuta applicando un'interpolazione lineare per evidenziare la geometria del vulcano.

Nelle figure 70, 71 e 72 sono mostrati i risultati di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione ottenuti con il condotto di 140 m e pixel di dimensione $0.57^\circ \times 0.57^\circ$. In ogni figura, i pixel evidenziati con un punto bianco rappresentano quelli in cui la differenza di flusso con la struttura senza condotto ha una significatività maggiore di, rispettivamente, 1σ , 3σ e 5σ . Il condotto è risolto più velocemente al centro, dove la differenza di spessore lungo la linea di vista è maggiore: in una notte di osservazione il condotto è risolto nei primi 60 m dalla sommità a 3σ e nei primi 30 m a 5σ ; già dopo 10 notti è risolto, rispettivamente, fino a 50 m e a 70 m dalla base; è risolto a 5σ per tutta l'altezza dopo 20 notti. Risolvere il condotto, cioè ottenere una differenza di flusso significativa rispetto al caso senza condotto, per tutta la sua estensione orizzontale richiede un tempo maggiore poiché allontanandoci dal centro la differenza di spessore lungo la linea di vista diminuisce: servo-

no 30 notti per risolvere orizzontalmente il condotto a 3σ fino a 40 m dalla base e fino a circa 90 m a 5σ .

Nelle figure 74, 75 e 76 sono mostrati i risultati di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione ottenuti con il condotto di 70 m e pixel di dimensione $0.57^\circ \times 0.57^\circ$. In ogni figura, i pixel evidenziati con un punto bianco rappresentano quelli in cui la differenza di flusso con la struttura senza condotto ha una significatività maggiore di, rispettivamente, 1σ , 3σ e 5σ . Al centro, in una notte di osservazione il condotto è risolto nei primi 50 m dalla sommità a 3σ e solo nei primi 15 m a 5σ ; dopo 10 notti è risolto, anche se non perfettamente, fino a 50 m dalla base a 3σ e fino a 120 m a 5σ ; a 30 notti è risolto a 3σ per tutta l'altezza e a 5σ fino a 100 m dalla base. In 30 notti il condotto è risolto orizzontalmente a 3σ fino a 100 m dalla base e fino a circa 150 m a 5σ .

Nelle figure 78, 79 e 80 sono mostrati i risultati di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione ottenuti con il condotto di 35 m e pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$. In ogni figura, i pixel evidenziati con un punto bianco rappresentano quelli in cui la differenza di flusso con la struttura senza condotto ha una significatività maggiore, rispettivamente, di 1σ , 3σ e 5σ . Al centro, in una notte di osservazione il condotto non è risolto né a un livello 3σ né 5σ ; dopo 10 notti solo i primi 40 m dalla sommità sono risolti a 3σ e solo i primi 10 m a 5σ , mentre a 30 notti sono risolti rispettivamente i primi 70 m e i primi 40 m. In 30 notti il condotto è risolto orizzontalmente a 3σ fino a 50 m dalla sommità e fino a circa 40 m a 5σ .

2) I risultati del secondo tipo di analisi sono mostrati in figura 81, utilizzando pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ per tutti i condotti. Per ogni condotto è stata calcolata una mappa di significatività in funzione del numero di notti e dell'altezza dalla base (asse a sinistra); a quest'ultima corrisponde un certo contrasto di densità (asse a destra) che dipende dalla dimensione del condotto secondo l'equazione 95. Le curve di uguale significatività sono state ottenute applicando all'immagine un filtro gaussiano con deviazione standard pari a 2 pixel, dunque le curve possono essere assunte con un'incertezza di 2 notti e di 20 m. Come spiegato nella sezione 7.1, il fatto che con condotti diversi il tempo necessario per risolvere un certo contrasto di densità non sia lo stesso è dovuto al fatto che anche lo spessore di roccia lungo la linea di vista dipende dall'altezza. Confrontando le due analisi con il caso del condotto di 35 m si vede che i risultati sono consistenti a partire da 10 notti, mentre con meno notti di osservazione il condotto risulta risolto più velocemente nella seconda analisi. Questo può essere spiegato dal fatto che la prima analisi si basa sul confronto tra due osservazioni, mentre la seconda si basa sul confronto tra un'osservazione e il risultato atteso, ignorando possibili fluttuazioni di quest'ultimo che diminuiscono aumentando la statistica.

I risultati della seconda analisi, che per tempi di osservazione abbastanza lunghi portano agli stessi risultati della prima, sono stati confrontati con i risultati teorici ottenuti nuovamente utilizzando l'equazione 99 con

$$\begin{aligned} n_{i,j} &= I_{i,0}^{dc} \\ \mu_{i,j} &= I_{i,0}^{0m} \end{aligned} \quad (104)$$

dove $I_{i,0}^d$ e $I_{i,0}^{0m}$ sono rispettivamente il flusso atteso con e senza condotto, al centro del cono, ottenuto con l'equazione 97 e con pixel di $0.38^\circ \times 0.38^\circ$.

La mappa di densità teorica nel caso dei diversi condotti è mostrata in figura 82, dove a sinistra è mostrata la mappa attesa in 30 notti e a destra quella ottenuta nel numero di notti necessario per risolvere il condotto fino alla base a un livello di significatività 5σ . L'altezza attesa a cui è possibile risolvere un condotto nelle prime 30 notti è consistente con i risultati della seconda analisi. Estrapolando, ci si aspetta che

- il condotto da 140 m sia risolto per tutta la sua altezza in circa 60 notti a 5σ ;
- il condotto da 70 m in circa 110 notti a 3σ e 320 notti a 5σ ;
- il condotto da 35 m in circa 500 notti a 3σ e 1400 notti a 5σ ;

Il livello 1σ non è stato considerato perché, come visibile nelle figure 70, 74 e 78, anche dopo osservazioni di 30 notti si ottengono troppi "falsi positivi" dovuti a fluttuazioni statistiche.

EFFETTO DELLA RISOLUZIONE SPAZIALE I risultati della seconda analisi sono stati ottenuti con pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ indipendentemente dal diametro del condotto sia per fare un confronto diretto con i diversi tempi di risoluzione associati sia per avere un buon numero di valori dell'ordinata nelle mappe di significatività. I risultati della prima analisi sono stati ottenuti con pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ per il condotto di 35 m e $0.57^\circ \times 0.57^\circ$ per i condotti di 140 m e 70 m. Nel primo caso per avere un'estensione orizzontale del condotto di almeno 3 pixel e nel secondo caso per evidenziare che con condotti di grandi dimensioni è possibile risolvere il condotto in tempi brevi e con un'alta risoluzione spaziale.

Il tempo necessario a risolvere una differenza di spessore dipende dal numero di eventi attesi, il quale dipende anche dall'angolo solido sotteso dal pixel. Ad esempio, raggruppando 2×2 pixel della muografia del condotto di 35 m il tempo stimato per risolvere completamente il condotto è di circa 130 notti a 3σ e 360 notti a 5σ , invece di 500 e 1400 notti (figura 82). In figura 83 è mostrato, per il condotto di 35 m, il flusso integrato ottenuto con pixel di dimensione (dall'alto verso il basso) $1.14^\circ \times 1.14^\circ$, $0.76^\circ \times 0.76^\circ$ e $0.38^\circ \times 0.38^\circ$. Alla dimensione più grande corrisponde una risoluzione spaziale di 30 m, dell'ordine della dimensione del condotto. In questo caso il condotto è risolto in 30 notti fino a circa 40 m dalla base a 3σ e fino a circa 100 m a 5σ . A parità di significatività, l'altezza dalla base fino a cui è risolto aumenta al diminuire della dimensione dei pixel.

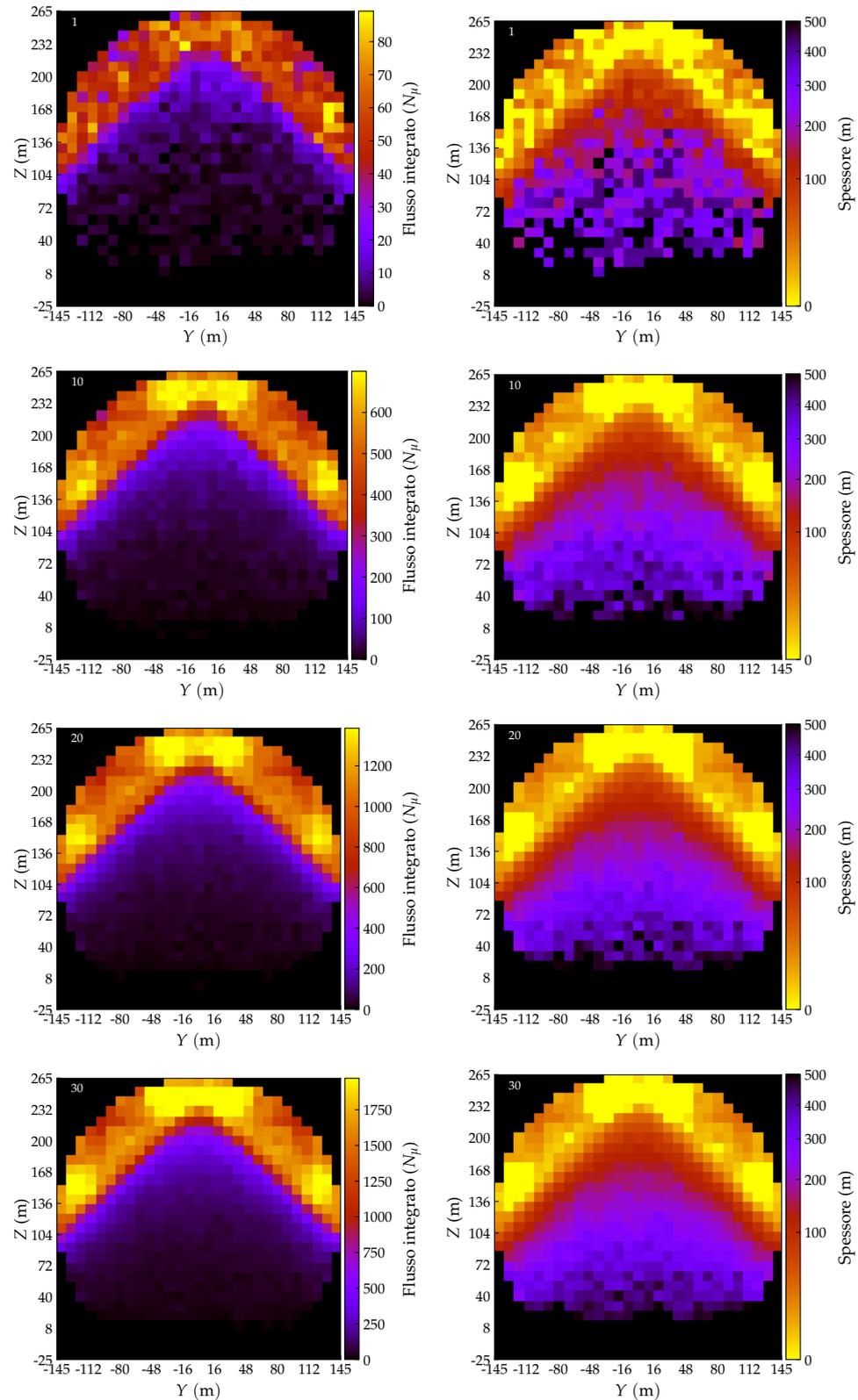


Figura 68: Risultati della simulazione della muografia del cono senza condotto in 1, 10, 20 e 30 notti di osservazioni (dall'alto). A sinistra è mostrato il flusso integrato, a destra lo spessore di roccia ricostruito. La dimensione dei pixel è di $0.38^\circ \times 0.38^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 10 m.

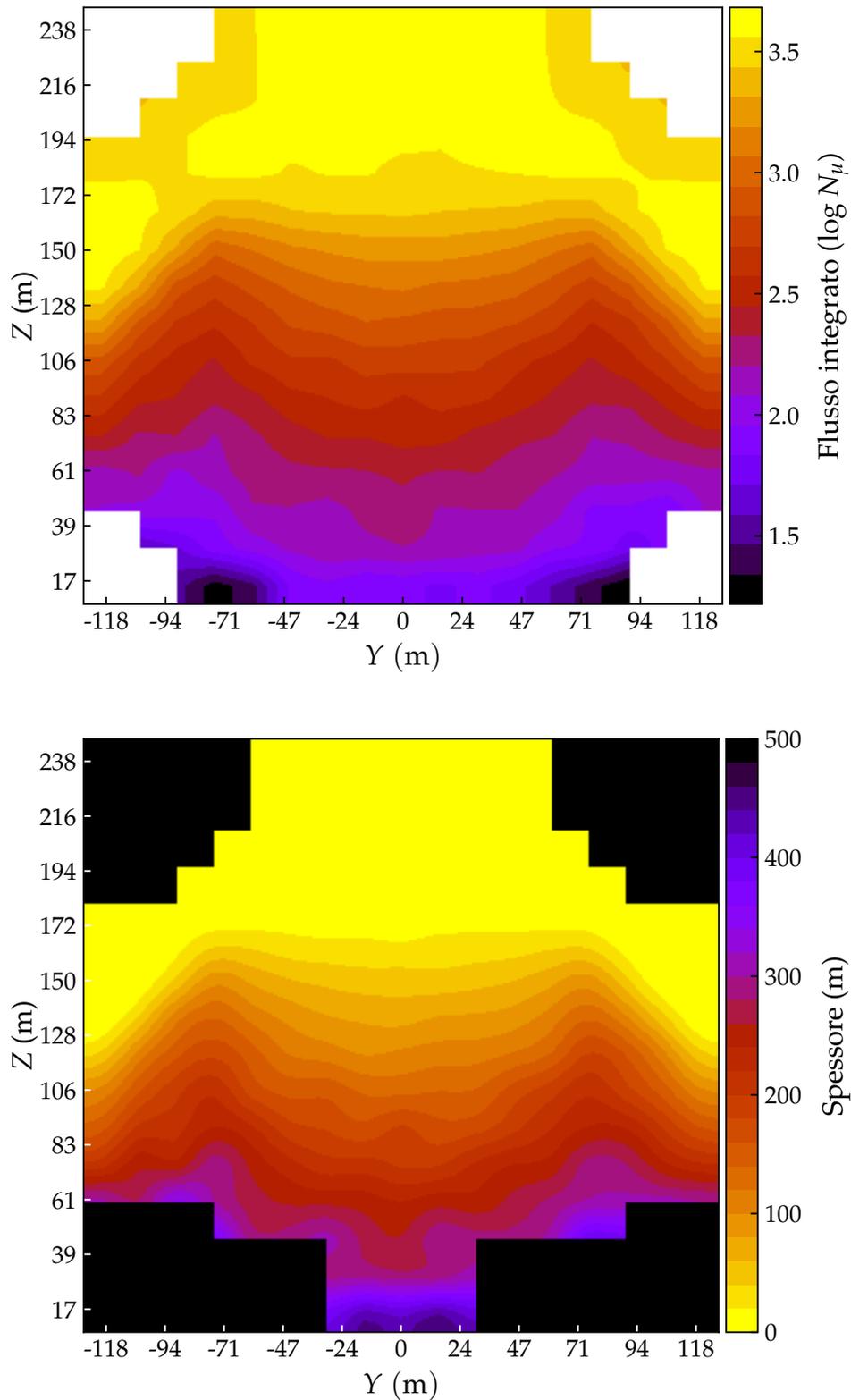


Figura 69: Risultato della simulazione di 30 notti di osservazione con un condotto di 140 m. Sopra il flusso misurato, sotto gli spessori ricostruiti. Le immagini sono state ottenute con pixel di dimensione $0.57^\circ \times 0.57^\circ$ e interpolate linearmente per evidenziare la struttura del cono. La scala di colori per gli spessori ricostruiti è in intervalli di 20 m. Il condotto si presenta come un eccesso di flusso lungo l'asse del cono e una diminuzione di spessore rispetto al caso senza condotto in figura 68.

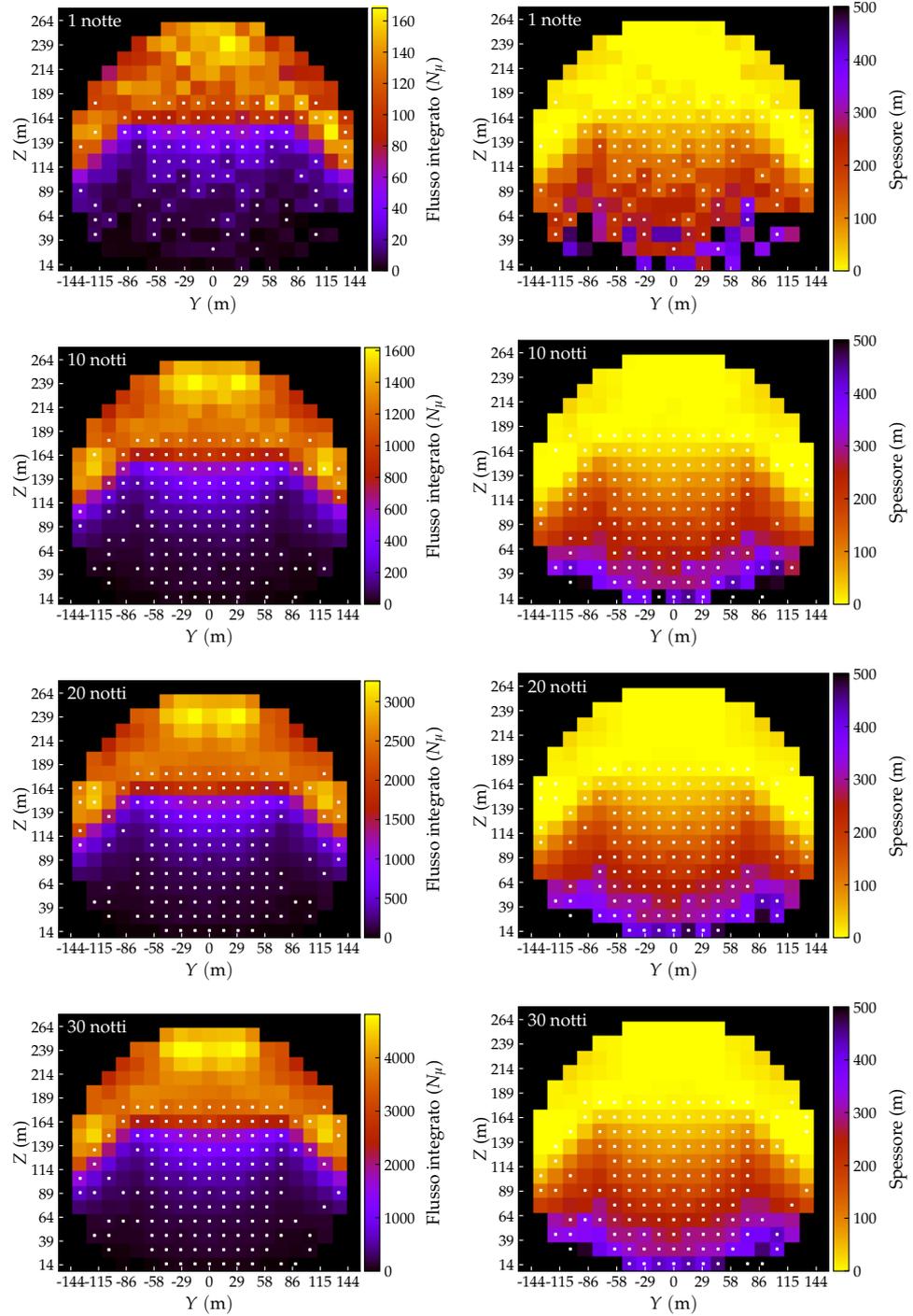


Figura 70: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 140 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 1σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 15 m.

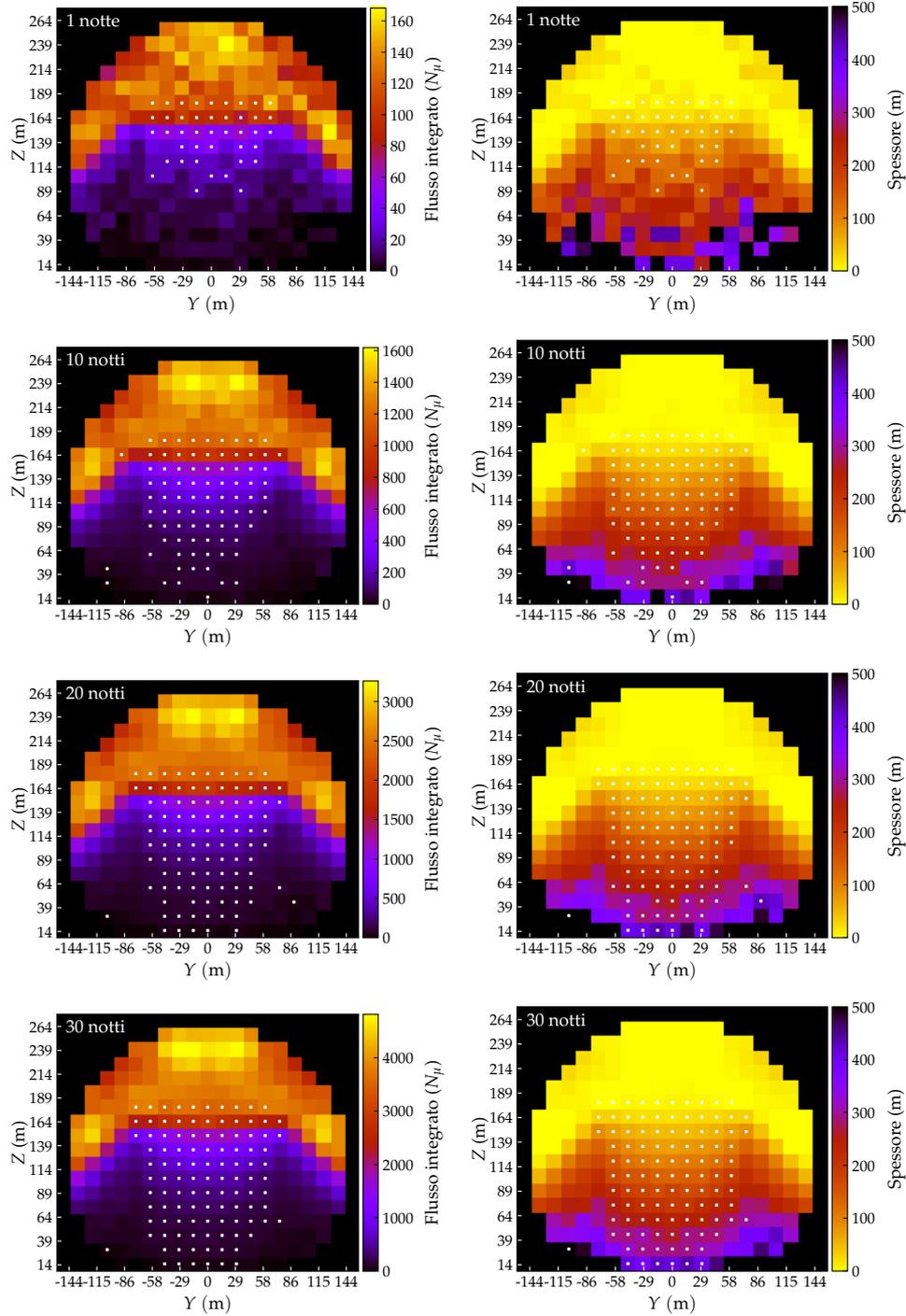


Figura 71: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 140 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 3σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 15 m.

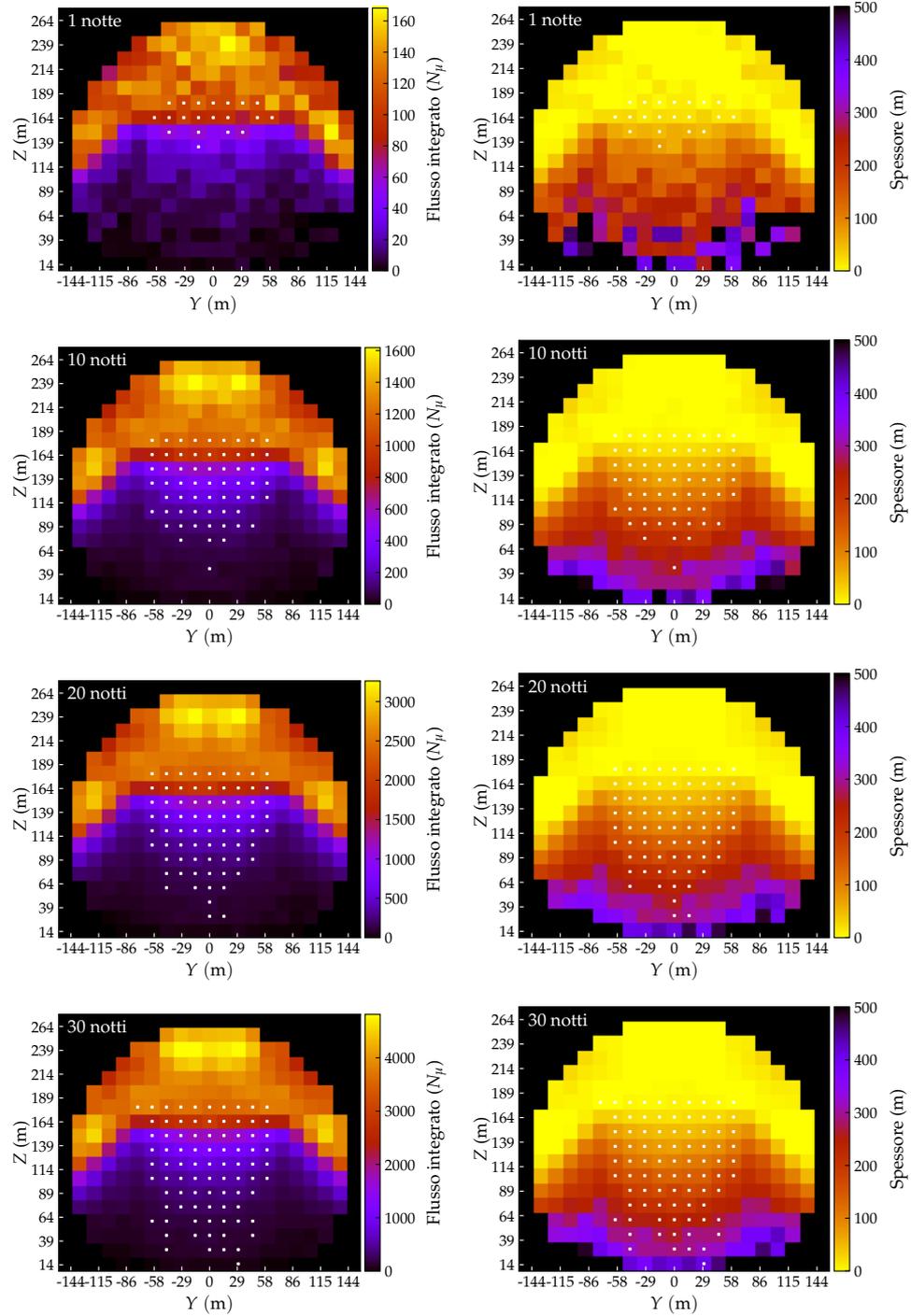


Figura 72: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 140 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 5σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 15 m..

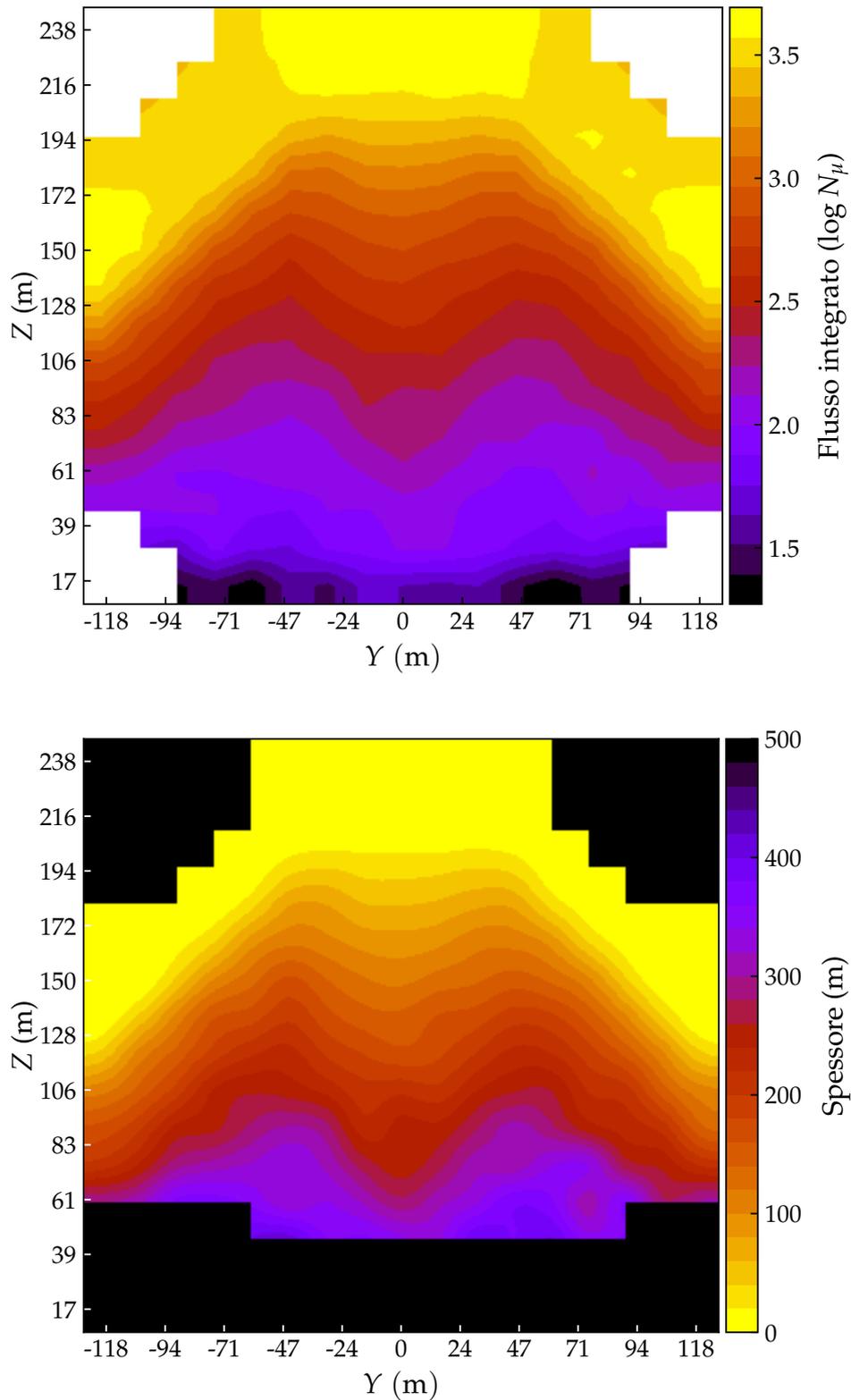


Figura 73: Risultato della simulazione di 30 notti di osservazione con un condotto di 70 m. Sopra il flusso misurato, sotto gli spessori ricostruiti. Le immagini sono state ottenute con pixel di dimensione $0.57^\circ \times 0.57^\circ$ e interpolate linearmente per evidenziare la forma del cono. La scala di colori per gli spessori ricostruiti è in intervalli di 20 m.

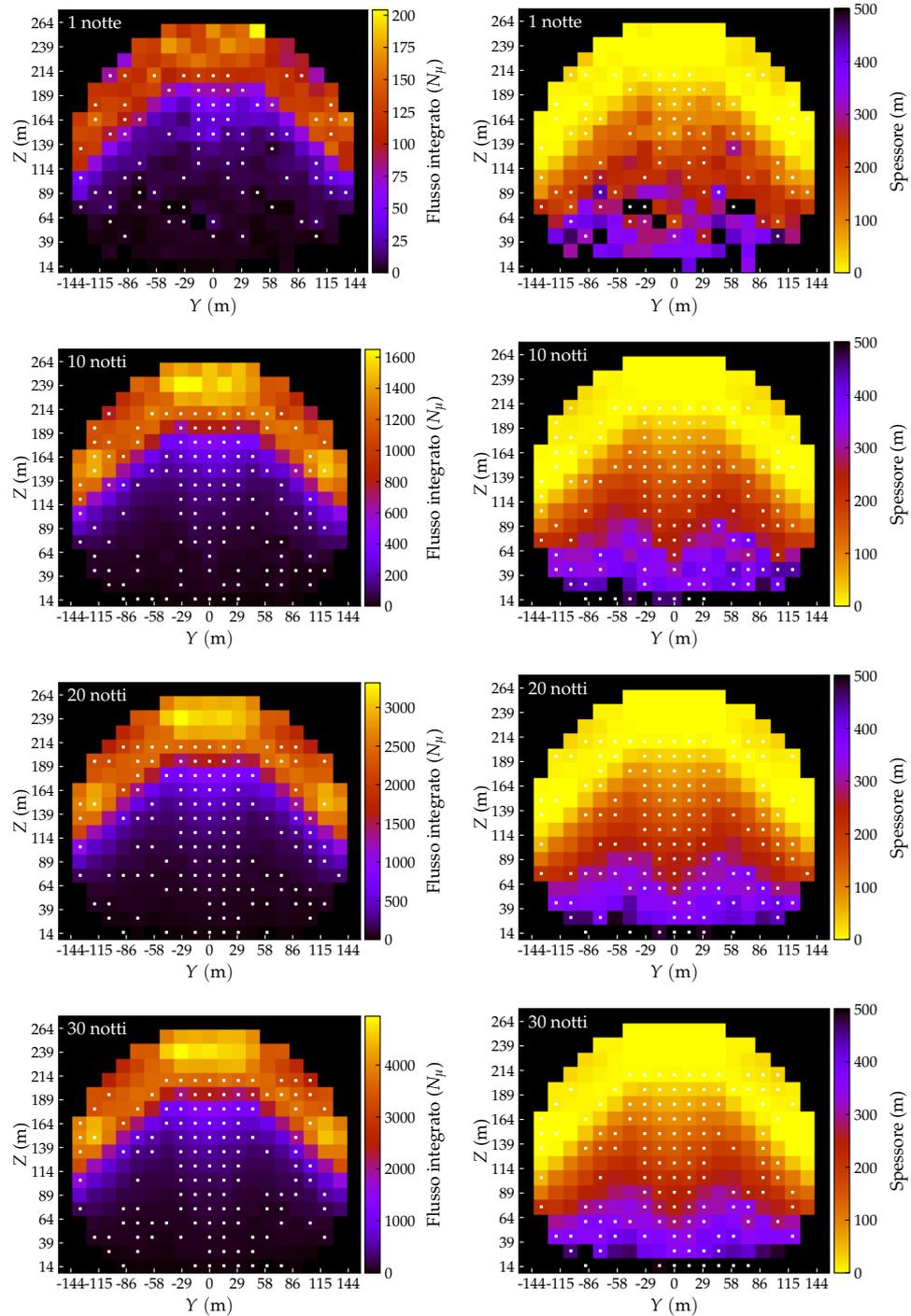


Figura 74: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 70 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 1σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 15 m.

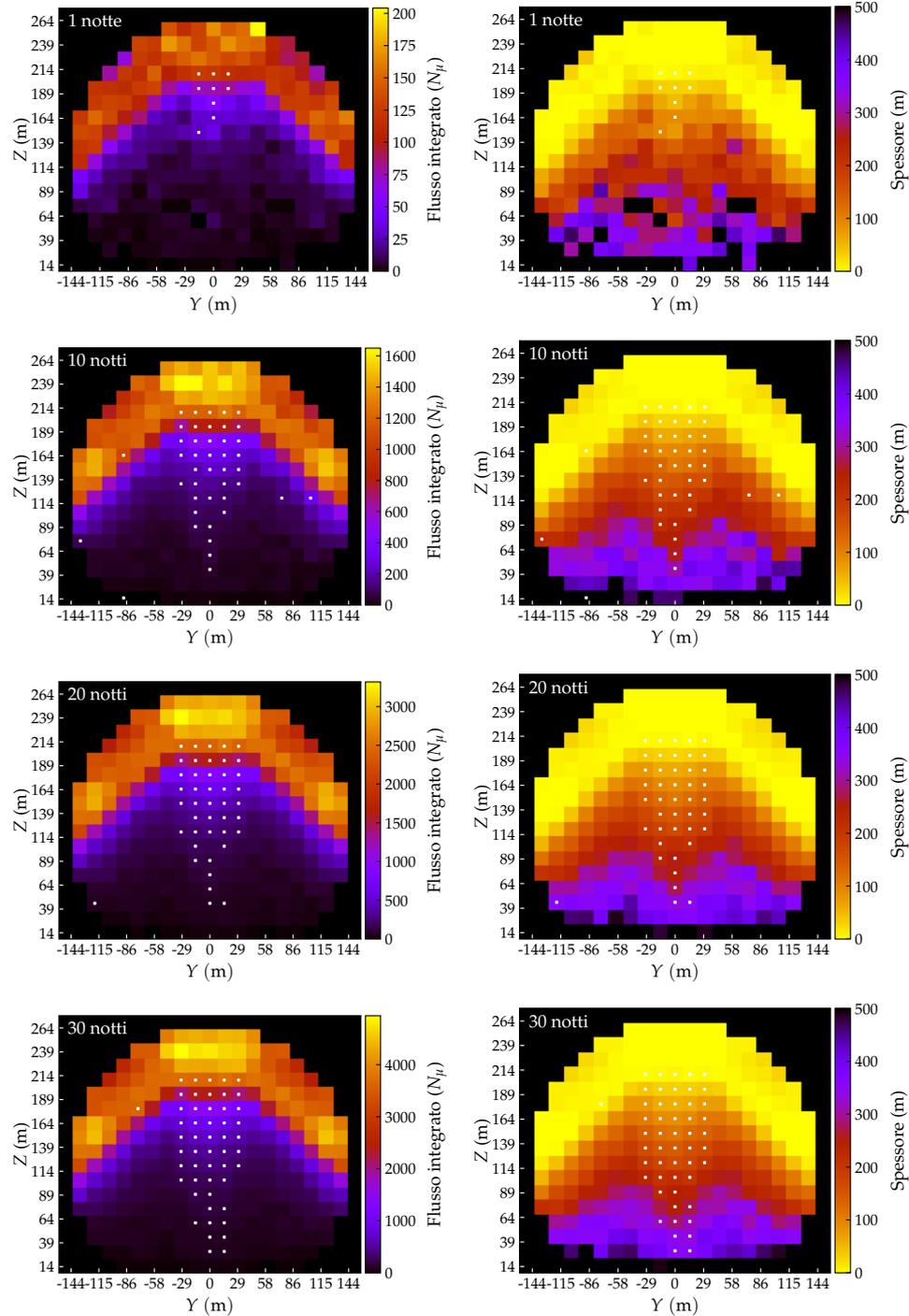


Figura 75: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 70 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 3σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 15 m.

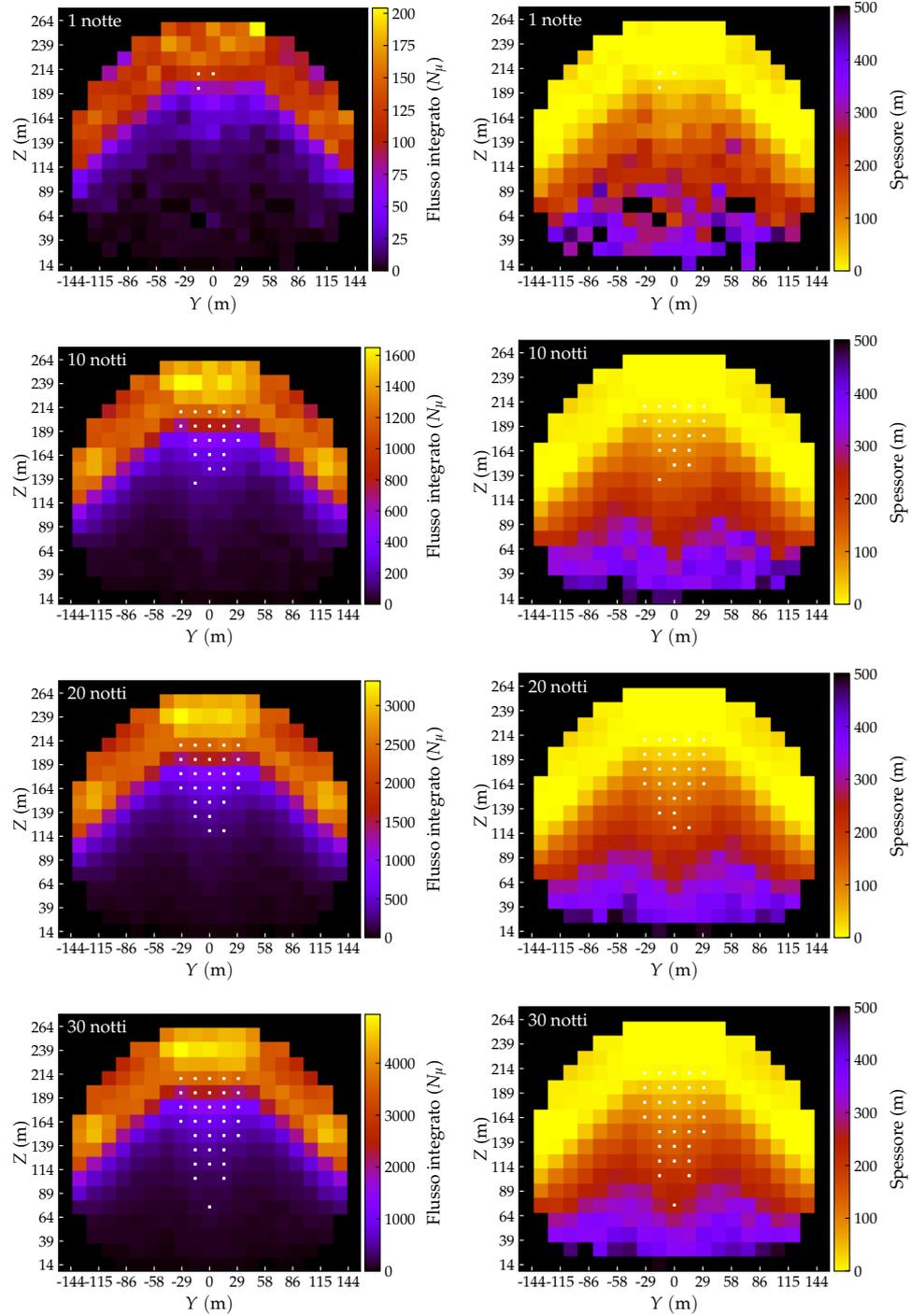


Figura 76: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 70 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 5σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 15 m.

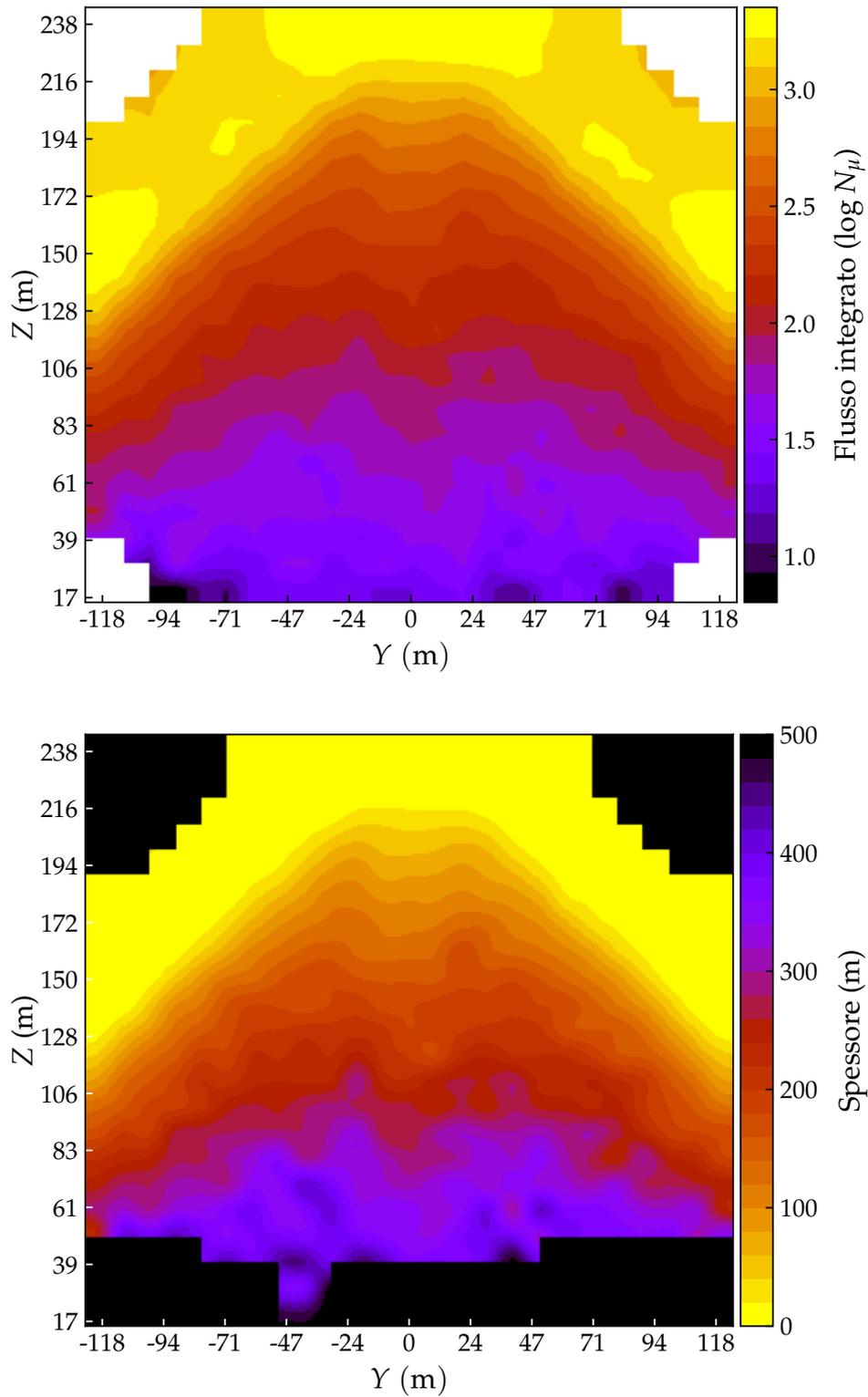


Figura 77: Risultato della simulazione di 30 notti di osservazione con un condotto di 35 m. Sopra il flusso misurato, sotto gli spessori ricostruiti. Le immagini sono state ottenute con pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ e interpolate linearmente per evidenziare la forma del cono. La scala di colori per gli spessori ricostruiti è in intervalli di 20 m.

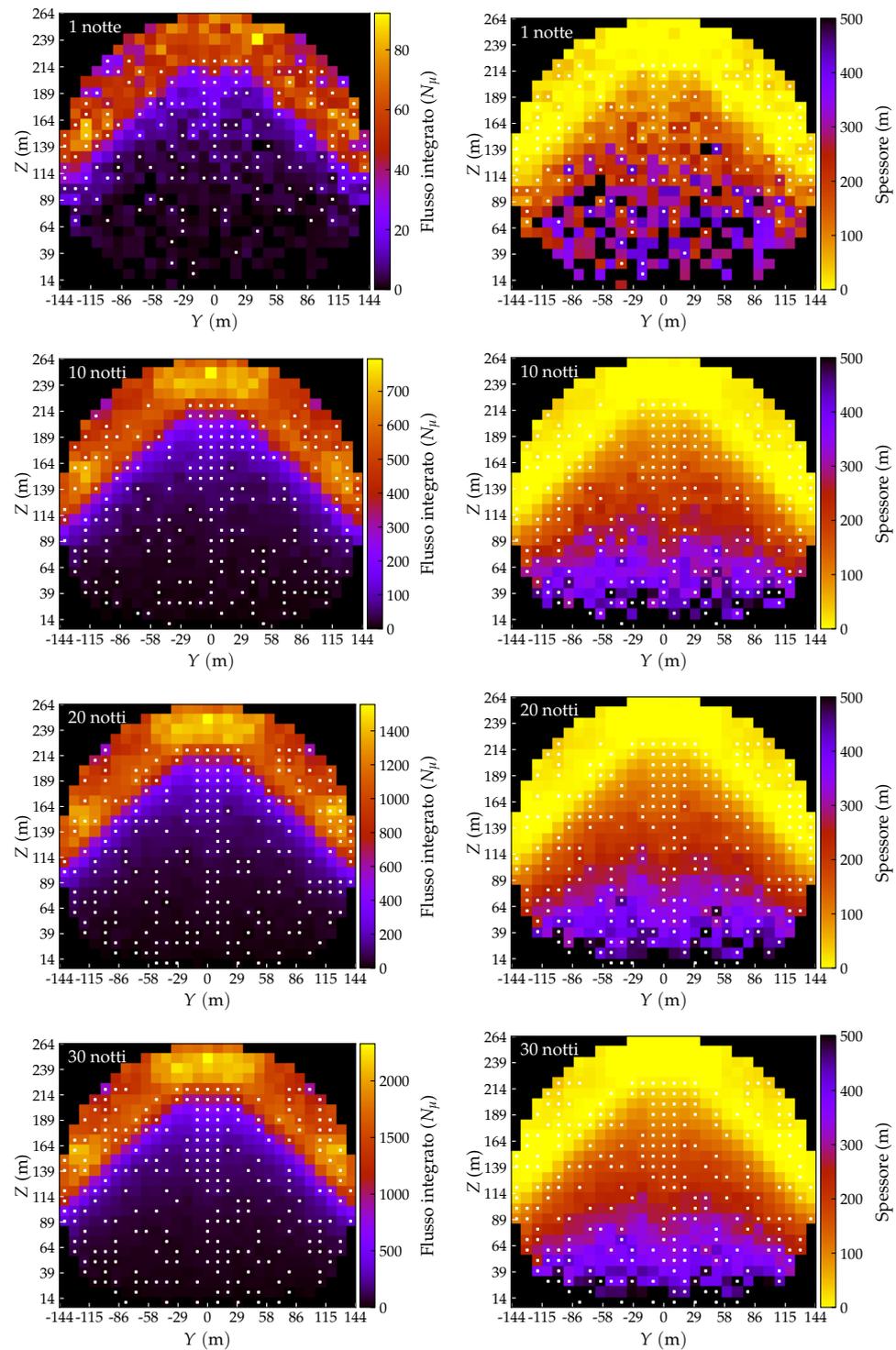


Figura 78: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 35 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 1σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.38^\circ \times 0.38^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 10 m.

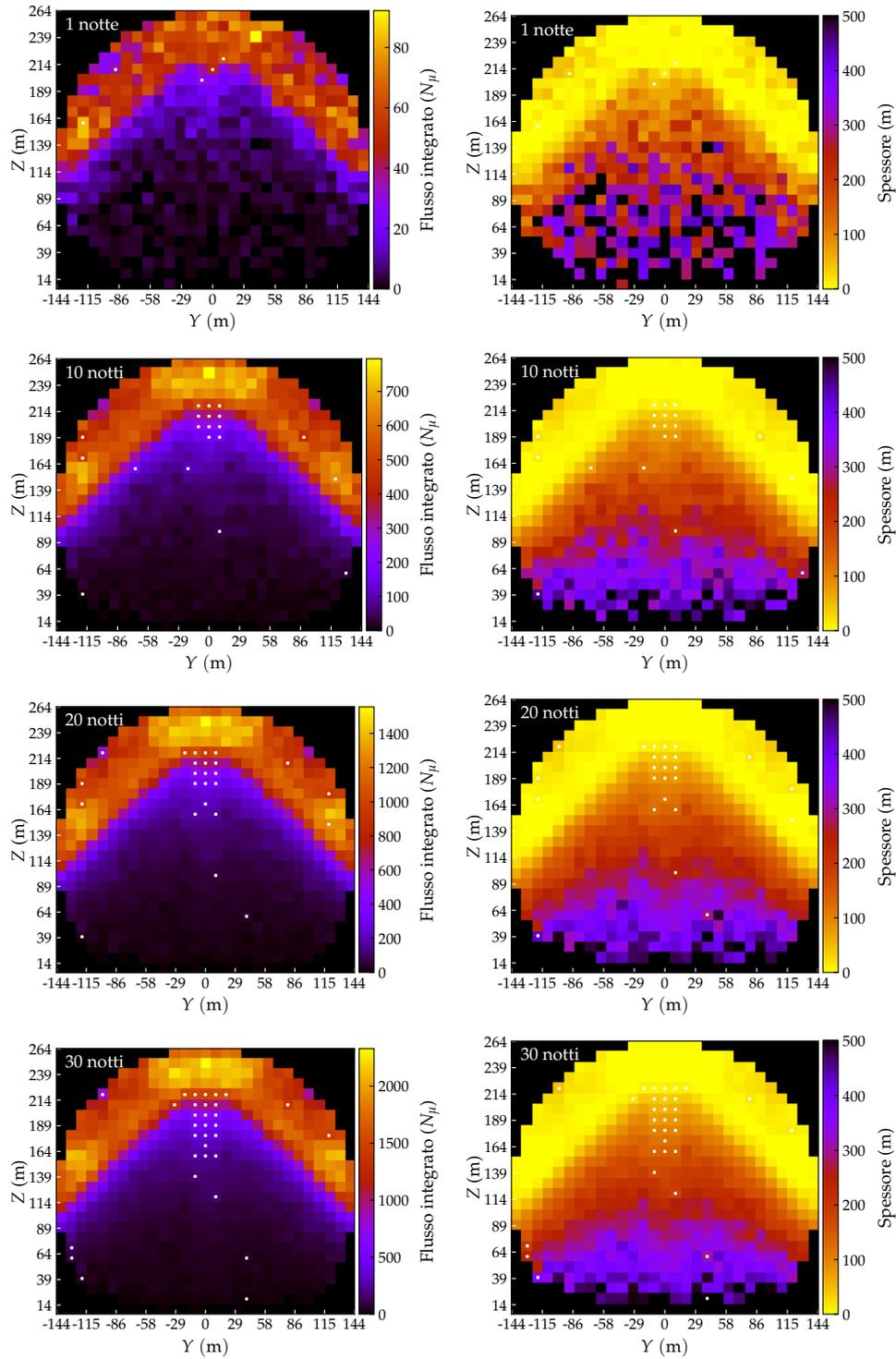


Figura 79: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 35 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 3σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.38^\circ \times 0.38^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 10 m.

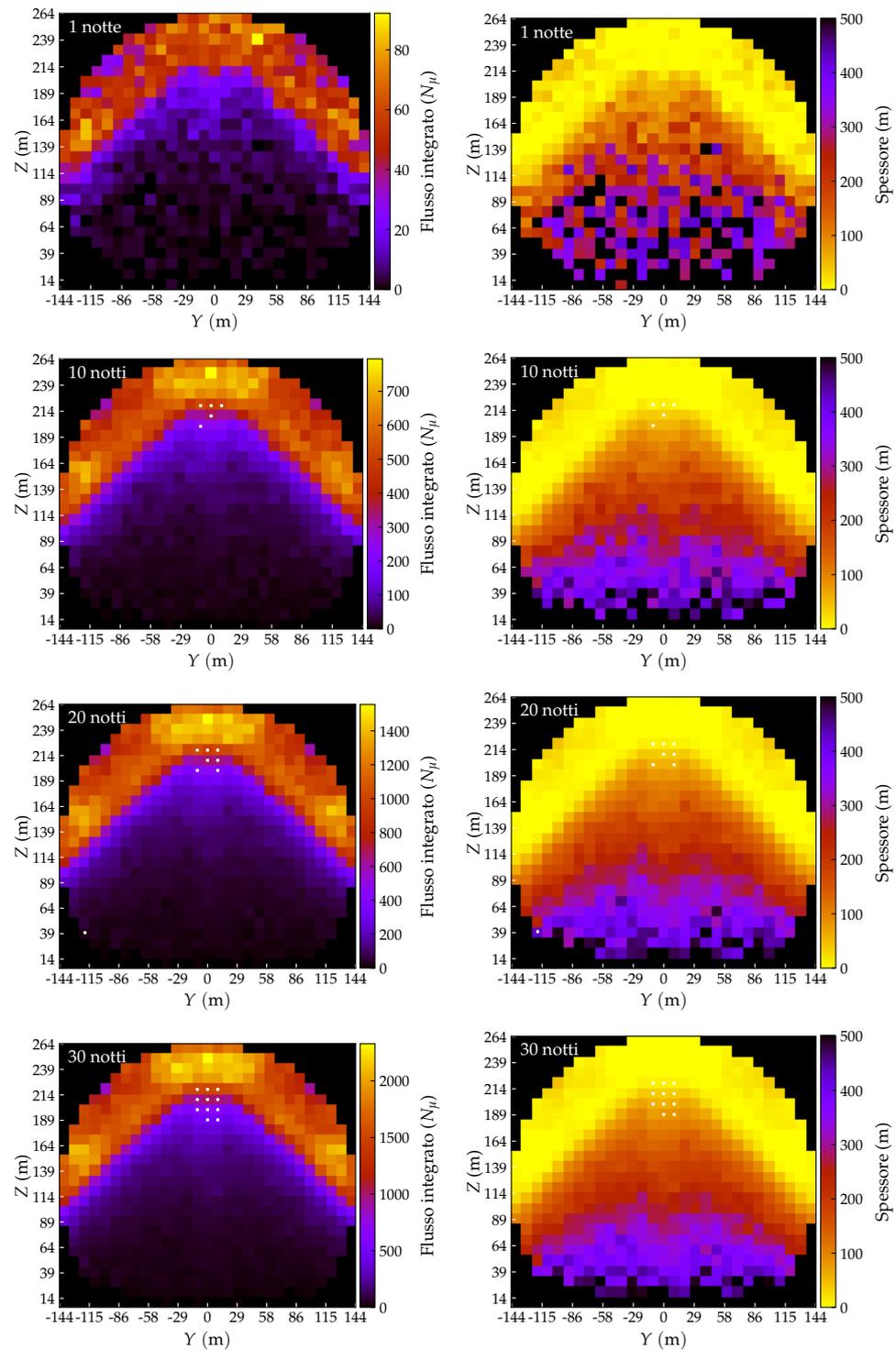


Figura 80: Risultato della simulazione di 1, 10, 20 e 30 notti di osservazione con un condotto di 35 m (dall'alto). I pixel sotto la sommità e risolti con un livello di significatività maggiore di 5σ sono evidenziati con un punto bianco. La dimensione dei pixel è di $0.38^\circ \times 0.38^\circ$, corrispondente a una risoluzione spaziale di 10 m.

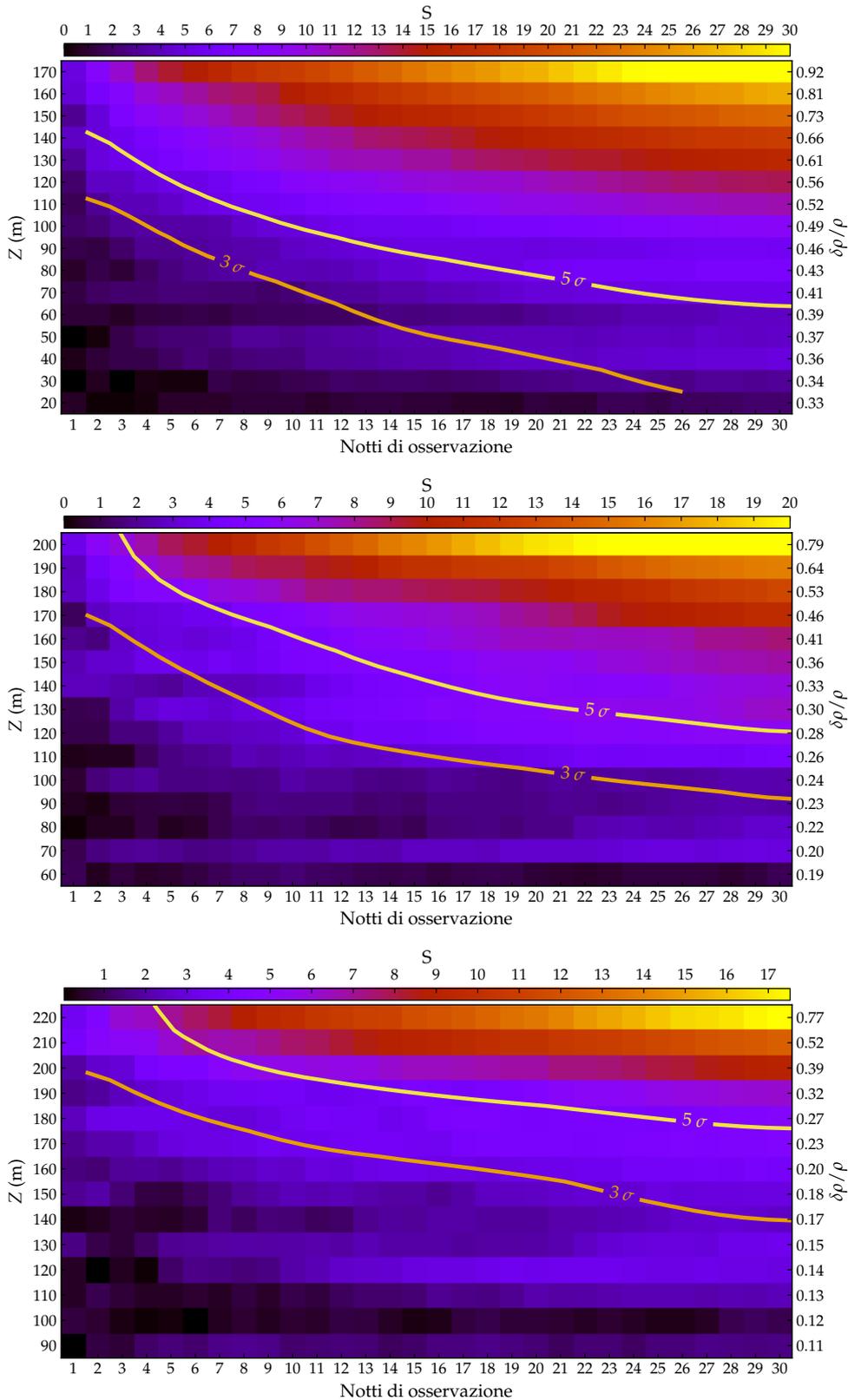


Figura 81: Significatività sull'asse del cono per condotti di 140 m, 70 m e 35 m (dall'alto), in funzione del numero di notti di osservazione e dell'altezza rispetto alla base (asse di sinistra) e del corrispondente contrasto di densità (asse di destra). Le curve di uguale significatività (3σ e 5σ) sono state ottenute applicando all'immagine un filtro gaussiano con deviazione standard pari a 2 pixel. Le mappe sono state ottenute con pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ e intervalli temporali di una notte.

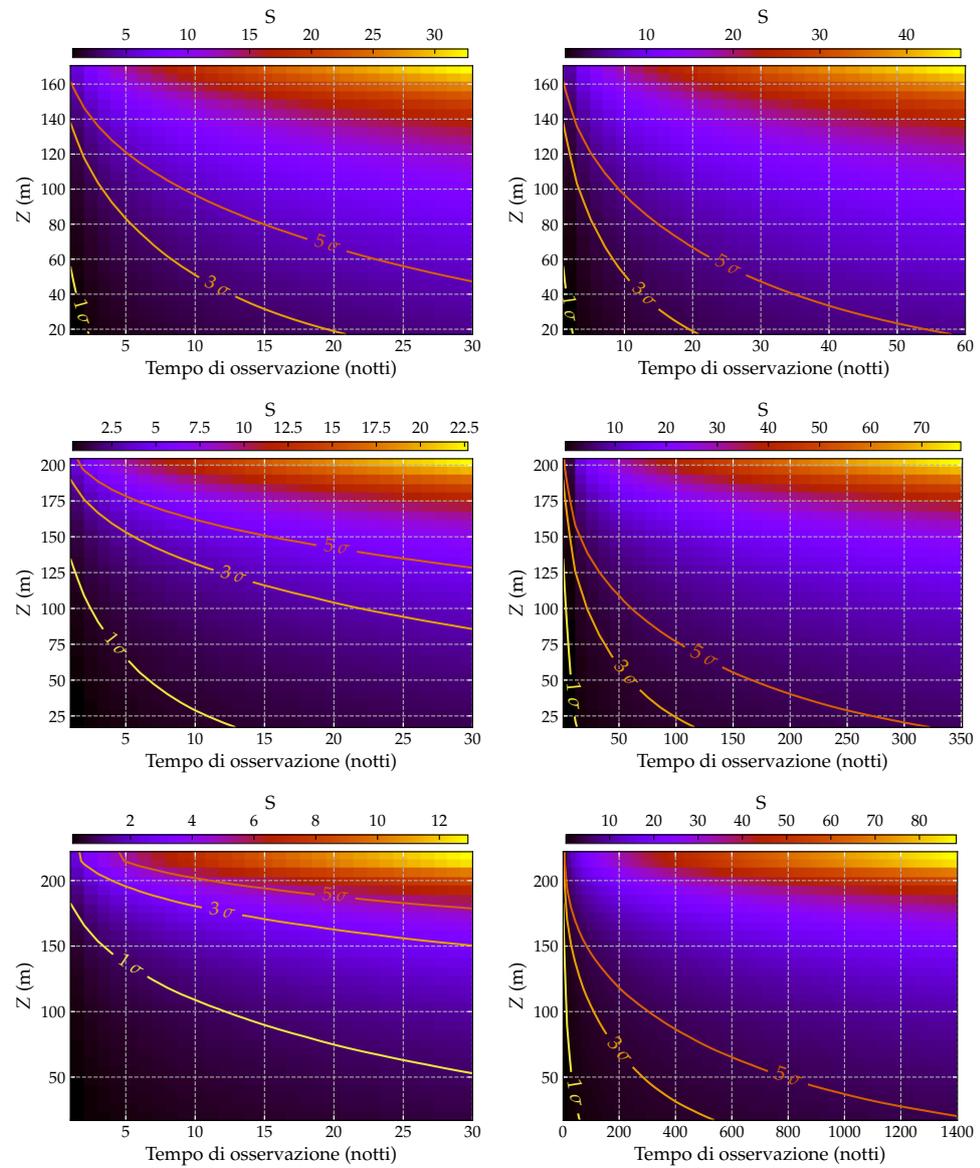


Figura 82: Mappa di significatività attesa al centro del cono per condotti di 140 m, 70 m e 35 m (dall'alto), in funzione del numero di notti, dell'altezza dalla base (asse di sinistra) e del contrasto di densità corrispondente (asse di destra). Le mappe sono state ottenute con pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ e intervalli temporali di una notte, utilizzando il flusso atteso con e senza condotto. A sinistra sono mostrate le mappe in un intervallo temporale di 30 giorni, a destra nel tempo necessario per risolvere il condotto con una significatività di 5σ .

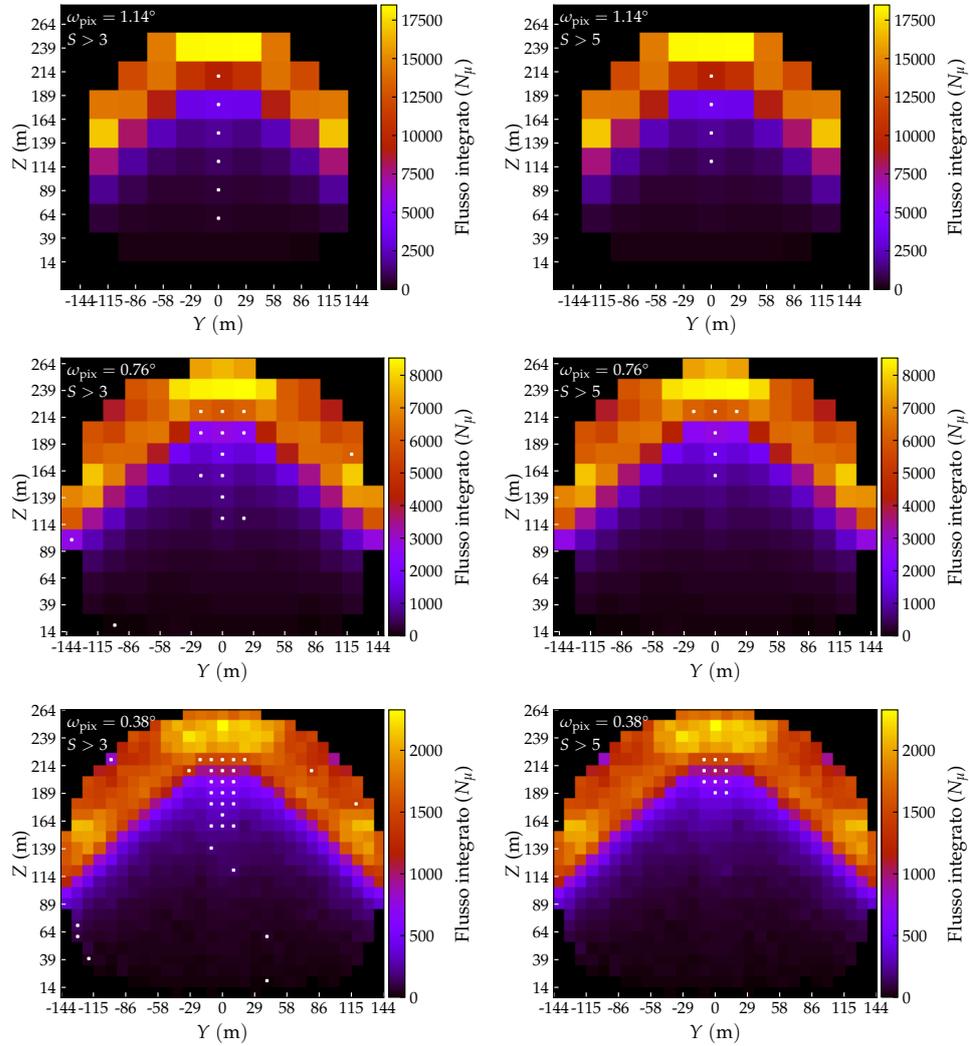


Figura 83: Effetti del raggruppamento degli eventi in pixel di diversa dimensione sulla significatività della differenza di flusso nel caso del condotto di 35 m e con 30 notti di osservazione. È mostrato il raggruppamento degli eventi in pixel di dimensione $1.14^\circ \times 1.14^\circ$ (sopra), $0.76^\circ \times 0.76^\circ$ (centro) e $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ (sotto). I pixel evidenziati con un punto bianco hanno una significatività maggiore di 3σ (sinistra) e di 5σ (destra). A parità di significatività, l'altezza dalla base fino a cui è risolto aumenta al diminuire della dimensione dei pixel, cioè aumentando la risoluzione angolare.

Una conoscenza dettagliata della struttura interna degli edifici vulcanici è di importanza fondamentale per lo sviluppo di modelli previsionali utili a determinare lo stato di attività e il rischio vulcanico associato. I rivelatori di particelle comunemente utilizzati per la muografia vulcanica soffrono della contaminazione dalle particelle cariche di bassa energia prodotte negli sciami adronici innescati dai raggi cosmici e diffuse durante la propagazione in atmosfera. Per riuscire a visualizzare alterazioni sequenziali della struttura associabili a eventi eruttivi è necessario ottenere muografie ad alta risoluzione con un ottimo rapporto segnale-rumore, cosa che richiede un'opportuna schermatura dei rivelatori aumentandone sia il peso sia il costo e rendendone difficile il trasporto, soprattutto nelle regioni vulcaniche attive dove il rischio a cui si espone il personale coinvolto non è trascurabile.

In questo contesto, l'utilizzo di telescopi Čerenkov, originariamente pensati per applicazioni astrofisiche, nel campo dell'imaging muonico rappresenta un'alternativa promettente, in quanto tali telescopi non soffrono del rumore di fondo registrato dai rivelatori a scintillazione comunemente utilizzati. Le potenzialità di questi strumenti devono essere valutate attraverso apposite simulazioni e misure di laboratorio propedeutiche allo sviluppo di un prototipo da progettare esclusivamente per la rivelazione dei muoni. Lo scopo di questo lavoro di tesi è stato quello di simulare delle osservazioni muografiche utilizzando il prototipo di telescopio Čerenkov ASTRI SST-2M, in modo da studiare le capacità, in tale contesto, di questo tipo di telescopi.

Il modello semplificato di vulcano che ho utilizzato si basa sulle caratteristiche del Cratere Sud-Est del Monte Etna, il quale può essere osservato dal sito di installazione del prototipo. La geometria usata nelle simulazioni consiste in un cono di base 500 m e altezza 240 m; per rappresentare il condotto vulcanico ho inserito un cilindro, con diversi valori del diametro, pieno d'aria e coassiale al cono; il telescopio è posto ad una distanza di 1500 m dal centro del cono in modo da avere l'intera altezza della struttura nel campo di vista. Come spettro dei muoni atmosferici di input ho utilizzato quello di Reyna-Bugaev a un angolo zenitale di 85° , valido nell'intervallo energetico 1 GeV-2000 GeV. La simulazione GEANT4 da me implementata simula il passaggio dei muoni nel vulcano e nella regione di atmosfera tra questo e il rivelatore. In quest'ultima regione viene simulata anche l'emissione dei fotoni Čerenkov e quelli che, per ogni muone, arrivano sullo specchio vengono successivamente passati in input al simulatore del telescopio. Per determinare la direzione di arrivo dei muoni ho implementato un algoritmo di ricostruzione che, per ogni immagine ottenuta dal simulatore, stima il centro e il raggio dell'anello muonico.

Ho sviluppato il lavoro in 4 fasi:

1. ho implementato delle simulazioni con lo scopo di studiare l'interazione muone-materia, in particolare per valutare la probabilità di soprav-

vivenza da parte del muone e la sua deviazione angolare nella roccia e il processo di emissione di radiazione Čerenkov in atmosfera;

2. ho implementato un algoritmo di ricostruzione degli anelli muonici e ne ho valutato il comportamento nel caso particolare di muoni con direzione parallela all'asse del telescopio;
3. con i risultati delle prime due fasi ho implementato la simulazione delle muografie in modo da ridurre drasticamente i tempi di calcolo cercando di non alterare l'affidabilità della simulazione;
4. ho eseguito una procedura di flat fielding per ottimizzare la condizione di selezione degli eventi ricostruiti e stimare i parametri caratteristici del telescopio.

FASE 1 Lo scopo di questa fase (discussa dettagliatamente nel capitolo 4) è quello di validare il codice implementato e di studiare la propagazione dei muoni nella roccia e nell'aria. In particolare:

- ho effettuato un confronto tra la relazione intensità-spessore calcolata attraverso la probabilità di sopravvivenza ottenuta dalle simulazioni, in cui si tiene conto della dispersione delle perdite energetiche dei muoni e la relazione calcolata in modo semi-analitico a partire dalle perdite energetiche medie teoriche di riferimento. I risultati mostrano che fino a spessori dell'ordine di 1 km la differenza tra le due relazioni è trascurabile. A spessori maggiori è necessario utilizzare la probabilità di sopravvivenza per stimare correttamente il flusso atteso;
- ho valutato la deviazione angolare subita dai muoni durante l'attraversamento del modello di vulcano e nello strato di atmosfera che lo separa dal telescopio. L'angolo di scattering, mediato su tutte le energie, dei muoni che emergono dalla struttura dipende dallo spessore di roccia attraversato e, in un intervallo di spessori 0 m-500 m, è in media di 0.5° , circa due volte la dimensione di un pixel della camera di ASTRI (0.19°). Lo scattering in 1500 m d'aria risulta essere di circa 0.5° per i muoni vicino alla soglia di emissione Čerenkov, mentre già a energie maggiori di circa 20 GeV è minore di 0.1° . A prescindere dalle capacità dello strumento, lo scattering medio dei muoni limita la precisione angolare di un'osservazione muografica; i risultati ottenuti portano a una risoluzione spaziale, a 1500 m di distanza, dell'ordine di 15 m. Bisogna sottolineare che i risultati sono mediati su tutto lo spettro dei muoni sopravvissuti all'attraversamento e, di questi, circa il 15% emerge con un'energia minore o dell'ordine dell'energia minima di rivelazione; escludendo questi ultimi lo scattering medio è di 0.4° nella roccia e 0.6° nell'aria. Dei risultati emersi in questa fase due sono stati utili per lo sviluppo della simulazione sulla muografia: meno dell'1% dei muoni subisce deviazioni angolari maggiori di 3° ; lo scostamento laterale massimo subito dal 99% dei muoni nei 1500 m d'aria è inversamente proporzionale alla loro energia.

FASE 2 Lo scopo di questa fase (discussa ampiamente nel capitolo 5 e in parte nella sezione 4.6) è quello di studiare l'emissione Čerenkov in atmosfera e di analizzare le capacità di ricostruzione degli archi Čerenkov dell'algoritmo da me implementato (di cui una parte è descritta nell'appendice B). In particolare:

- ho valutato in modo semi-analitico il numero di fotoni attesi sullo specchio del telescopio e il numero di pixel della camera attivati attesi al variare del parametro di impatto (la distanza tra il punto di impatto sul piano dello specchio e il centro dello stesso), nel caso particolare di muoni con direzione parallela all'asse del telescopio (per i muoni fuori asse il numero di fotoni attesi è minore). I risultati, in 1500 m d'aria, mostrano una drastica diminuzione del numero di fotoni attesi a circa $10 R_s$ (dove R_s è il raggio dello specchio) per muoni vicino alla soglia di emissione e a poco meno di $30 R_s$ nel caso ultra-relativistico. La richiesta che il numero di pixel attivi attesi sia maggiore di 3 (numero minimo per la ricostruzione) è più restrittiva e porta a un parametro di impatto massimo di circa $4 R_s$ nel caso ultra relativistico;
- con questi risultati ho successivamente effettuato delle simulazioni per verificare le capacità di ricostruzione dell'algoritmo sviluppato, simulando muoni in asse e con un parametro di impatto minore di $10 R_s$ e trascurando le perdite energetiche e lo scattering nell'aria. L'algoritmo è stato testato inizialmente senza considerare il rumore di fondo nelle immagini degli archi muonici, successivamente è stata valutata e confrontata la capacità di ricostruzione con un fondo medio di 1, 3 e 5 foto-elettroni (pe) per pixel. I risultati mostrano una buona capacità dell'algoritmo di mantenere la morfologia del segnale durante il processo di isolamento dell'arco muonico dal rumore di fondo; per i muoni che impattano sullo specchio l'errore di ricostruzione peggiora aumentando il fondo medio (al centro dello specchio, con un fondo di 5 pe l'errore medio è di 0.04°) ma in ogni caso è minore di 0.1° . Per tutti i livelli di rumore investigati la precisione di ricostruzione è minore dell'angolo di scattering dei muoni nella roccia a parametri di impatto minori di $1.5 R_s$ e l'efficienza di ricostruzione è nulla a distanze maggiori di circa $4 R_s$.

FASE 3 Durante questa fase (discussa nelle sezioni 6.1 e 6.2) le geometrie della simulazione (a parte quella dell'edificio vulcanico) sono state studiate in modo da ridurre considerevolmente il numero di muoni da simulare per ottenere una notte di osservazione. Inoltre ho fatto alcune assunzioni per ridurre, in tempo reale all'interno della simulazione, il numero di muoni e fotoni da tracciare. In base alla massima deviazione angolare nella roccia ($\simeq 3^\circ$), al massimo scostamento laterale in aria ($\simeq 35$ m) e al massimo parametro di impatto ($\simeq 4 R_s$), trovati nella *fase 1* e nella *fase 2*,

- ho stimato un raggio minimo per la sorgente geometrica dei muoni (un segmento circolare posto dietro l'edificio vulcanico) pari a 184 m;

- in ogni punto della sorgente, ho generato i muoni nell'angolo solido di 0.03 sr , pari a quello sotteso da una piramide quadrata con angoli al vertice di 21° e asse parallelo a quello del telescopio.

Nonostante la buona riduzione del numero di muoni da generare, è stato necessario evitare il tracciamento dei fotoni Čerenkov e dei muoni che non passano nelle vicinanze dello specchio:

- per evitare il tracciamento dei muoni ho implementato un controllo nel punto di uscita dalla montagna tenendo conto dello scostamento laterale massimo in funzione dell'energia: se il muone può subire una deviazione tale da impattare entro $4 R_s$ allora il tracciamento viene continuato, altrimenti interrotto;
- poiché ho trascurato l'interazione dei fotoni con l'aria, i fotoni non vengono mai tracciati. Quando un fotone è generato viene stimato il punto di impatto e, se questo è sullo specchio (cioè entro $1 R_s$), le informazioni utili vengono scritte su file. Per ridurre il numero dei fotoni generati ho limitato l'emissione a una regione cilindrica, coassiale al telescopio, con un raggio di 215 m e un'altezza di 1500 m.

FASE 4 Tra i parametri in output dell'algoritmo di ricostruzione, le quantità più importanti sono le stime del raggio dell'arco muonico, le coordinate del centro e il numero di pixel su cui è stato eseguito il processo di ricostruzione: un basso numero di pixel, o un raggio ricostruito di dimensioni eccessive, corrispondono a una scarsa precisione di ricostruzione. Rimuovere questo tipo di eventi permette di ottenere una risoluzione angolare migliore. A questo scopo, in questa fase (descritta in sezione 6.3) ho simulato una notte di osservazione del flusso dei muoni atmosferici rimuovendo dalle simulazioni la struttura vulcanica e lasciando solo la sorgente del campo di vista del telescopio. Da questa ho determinato dei parametri utili alla fase di analisi delle muografie:

- poiché l'errore di ricostruzione decresce con il numero di pixel su cui si esegue, ho scartato gli eventi ricostruiti con un numero di pixel minore di 7 e un raggio ricostruito maggiore di 1.9° , a cui corrisponde un errore di ricostruzione minore, o al massimo dell'ordine, della deviazione angolare subita dai muoni;
- a questa (più in generale, a qualsiasi) condizione di selezione corrisponde una certa efficienza di ricostruzione in funzione del parametro di impatto. Ho utilizzato quest'ultima per stimare l'area efficace di raccolta dei muoni del telescopio mediata sull'energia e in funzione dell'angolo rispetto all'asse. Lungo questo risulta essere di circa 72 m^2 . Tramite la variazione dell'area efficace in funzione dell'angolo ho eseguito una correzione angolare del flusso misurato;
- confrontando lo spettro dei muoni selezionati con lo spettro dei muoni simulati ho stimato l'energia minima di rivelazione, la quale, con la condizione di selezione usata, è dell'ordine di 10 GeV;

- il flusso integrato in funzione della direzione di osservazione si ottiene raggruppando gli eventi in pixel della dimensione angolare desiderata. Con i parametri determinati precedentemente stimo il numero di eventi attesi in ogni pixel e applico la formula di inversione per ottenere la stima dello spessore di roccia lungo la linea di vista corrispondente al pixel.

RISULTATI Ho simulato 30 notti di osservazione (assumendo ogni notte di 8 ore) senza condotto e con condotti di 140 m, 70 m e 35 m. Per valutare il tempo di osservazione necessario per distinguere una variazione nello spessore di roccia, rispetto alla struttura senza condotto, ho fatto le seguenti analisi:

- 1) ho confrontato il flusso ottenuto senza condotto con quello ottenuto con i diversi condotti, a parità di tempo di osservazione;
- 2) ho confrontato il flusso al centro del cono in funzione dell'altezza dalla base ottenuto con i vari condotti con quello atteso in assenza di condotto.

Verificare la presenza ed, eventualmente, misurare le dimensioni di condotti magmatici in un edificio vulcanico permette di costruire modelli dettagliati di predizione dei fenomeni eruttivi. Per attribuire una significatività alla differenza di flusso, con la quale considerare la differenza di spessore risolta, ho scelto un opportuno metodo statistico descritto in dettaglio nella sezione 7.1. Per le osservazioni muografiche con rivelatori di particelle in letteratura si considera una soglia di 1σ , mentre in questo lavoro ho considerato significatività maggiori poiché tale livello non è risultato affidabile nel definire una differenza di flusso significativa, probabilmente per le grandi fluttuazioni dovute, principalmente, al basso numero di conteggi in 30 notti di osservazione.

Nella seconda analisi, tutti i confronti sono stati fatti con pixel di dimensione angolare $0.38^\circ \times 0.38^\circ$, corrispondenti a una risoluzione spaziale di 10 m, e mostrano che:

- il condotto di 140 m è risolto con una significatività 3σ fino a un'altezza dalla base di 70 m (su circa 170 m di altezza) in 10 notti e fino a 30 m in 25 notti. A un livello 5σ è risolto in 10 notti fino a 100 m e dopo 30 notti fino a circa 60 m;
- il condotto di 70 m è risolto con una significatività 3σ fino a un'altezza dalla base di 120 m (su circa 200 m di altezza) in 9 notti e fino a 90 m in 30 notti. A un livello 5σ è risolto in 10 notti fino a 160 m e a 30 notti fino a circa 120 m;
- il condotto da 35 m risulta risolto a un livello 3σ fino a un'altezza di 170 m (su circa 220 m) in 10 notti di osservazione e fino a 140 m. A un livello 5σ è risolto fino a 200 m e in 30 notti fino a circa 180 m.

Dopo circa 10 notti, i risultati sono confrontabili con quelli attesi. Ho utilizzato questi ultimi per stimare il tempo necessario per risolvere il centro del condotto fino alla base: i condotti di 140 m, 70 m e 35 m sono risolti a 5σ in

circa, rispettivamente, 60, 300 e 1400 notti; mentre a 3σ in circa 25, 100 e 500 notti.

Nella prima analisi ho utilizzato dei pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ per il condotto di 35 m e di $0.57^\circ \times 0.57^\circ$ per gli altri; queste corrispondono, rispettivamente, a risoluzioni spaziali di 10 m e 15 m. In 30 notti di osservazione e con queste risoluzioni si ha che:

- il condotto di 140 m è risolto totalmente (per tutta la sua estensione orizzontale) a 3σ fino a 40 m dalla base e a 5σ fino a 90 m;
- il condotto di 70 m è risolto totalmente a 3σ fino a 100 m dalla base e a 5σ fino a 150 m;
- il condotto di 35 m è risolto totalmente a 3σ fino a 50 m dalla sommità e a 5σ fino a 40 m.

Aumentando la dimensione dei pixel il tempo necessario si riduce, a meno che la dimensione non sia molto maggiore della regione in cui è presente una variazione di spessore. Ad esempio, raggruppando i pixel di dimensione $0.38^\circ \times 0.38^\circ$ in gruppi di 3×3 (ottenendo pixel di dimensione $1.14^\circ \times 1.14^\circ$) il condotto di 35 m, in 30 notti, è risolto a un livello 3σ fino a 50 m dalla base e a 5σ fino a 120 m, cioè ad altezze molto minori rispetto al caso precedente, rispettivamente di 160 m e 190 m.

8.1 PROSPETTIVE FUTURE

L'uso dei telescopi Čerenkov ad immagine per effettuare muografie vulcaniche è una tecnica del tutto inedita con la quale sarà possibile aumentare drasticamente il rapporto segnale-rumore delle osservazioni muografiche rispetto a quello ottenuto con i rivelatori comunemente utilizzati.

Questo lavoro di tesi è propedeutico alla progettazione dell'ottica e della camera di un telescopio Čerenkov dedicato esclusivamente alla muografia e che, quindi, rispetto al telescopio ASTRI, non richiederà un sistema di puntamento complesso che complica e appesantisce la struttura e la meccanica del telescopio. L'idea è infatti quella di progettare un prototipo che sia facilmente trasportabile e rimovibile su sistemi mobili e alimentati da pannelli solari per ridurre sia i costi (rispetto ai comuni rivelatori di particelle multi-strato) che l'impatto ambientale (per esempio in zone come il parco dell'Etna). Questo obiettivo può essere raggiunto solo con dettagliate simulazioni GEANT4 nonché con diverse misure di laboratorio sui rivelatori di fotomoltiplicatori al silicio (SiPM, i quali sono meno costosi e consumano meno energia rispetto ai tubi fotomoltiplicatori tradizionali) e sull'elettronica, che per scopi muografici dovrà lavorare in *single-photon counting* (quest'ultimo studio è oggetto di un'altra tesi di Laurea) in modo da migliorare il rapporto segnale-rumore e, di conseguenza, la ricostruzione degli archi muonici.

Dal punto di vista delle simulazioni diversi aspetti possono essere migliorati, tra i quali:

- la diffusione e l'assorbimento dei fotoni Čerenkov in atmosfera devono essere considerati e valutati per definire un'opportuna regione di

emissione, in modo sia da ridurre le dimensioni e, quindi, i tempi di esecuzione, sia di migliorare l'affidabilità dei risultati;

- deve essere considerata una rappresentazione realistica dell'edificio vulcanico, ad esempio utilizzando un modello digitale di elevazione (una mappa topografica tridimensionale) del Cratere Sud-Est dell'Etna;
- utilizzando una proiezione dello spessore dell'edificio vulcanico su tutto il campo di vista sarebbe possibile ridurre il numero di muoni da tracciare in base alla loro probabilità di sopravvivenza lungo la direzione in cui sono generati e ottenere delle mappe di significatività di tutta la struttura;
- l'algoritmo di ricostruzione deve essere migliorato in modo tale da aumentare la precisione di ricostruzione dei muoni che impattano fuori dallo specchio e, di conseguenza, l'area efficace di raccolta;
- deve essere aumentata la statistica per il flat fielding in modo da ottenere una stima migliore dell'energia minima di rivelazione, poter determinare l'area efficace su tutto il campo di vista (invece che solo rispetto all'angolo fuori asse) e poter considerare selezioni sugli eventi più restrittive (con un numero minimo di pixel maggiore di 7).

In questa appendice sono descritti i processi fisici (a cui è stato fatto riferimento nei capitoli 3 e 4) corrispondenti alle principali perdite di energia dei muoni nella materia:

- perdite per ionizzazione;
- perdite per bremsstrahlung;
- perdite per produzione di coppie;
- perdite per interazioni foto-nucleari.

Tabella 3: Simboli e valori delle principali costanti fisiche che verranno utilizzate in questa tesi.

Quantità	Simbolo	Valore	Unità
Carica dell'elettrone	e	$1.602\,176\,620\,8(98) \cdot 10^{-19}$	C
Massa del muone	m_μ	105.658 374 5(24)	MeV/c ²
Massa dell'elettrone	m_e	0.510 998 946 1(31)	MeV/c ²
Raggio classico dell'elettrone	r_e	$2.817\,940\,322\,7(19) \cdot 10^{-15}$	m
Velocità della luce nel vuoto	c	$2.997\,924\,58 \cdot 10^7$	m/s
Costante di struttura fine	α	$7.297\,352\,566\,4(17) \cdot 10^{-3}$	
Costante di Planck ridotta	\hbar	$6.582\,119\,514(40) \cdot 10^{-16}$	eV s
Numero di Avogadro	N_A	$6.022\,140\,857 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Numero atomico	Z		
Numero di massa	A		
Energia totale	E		
Energia cinetica	T		
Energia trasferita (in un processo)	ϵ		
Frazione di energia trasferita	ν		

A.1 PERDITA DI ENERGIA PER IONIZZAZIONE

Una particella carica che si muove in un mezzo perde energia attraverso collisioni anelastiche con gli elettroni atomici, queste portano gli elettroni in uno stato eccitato o alla ionizzazione dell'atomo coinvolto. In quest'ultimo caso, se la particella è un muone l'energia massima trasferibile a un elettrone è [91]

$$T_{\max} = \frac{2m_e c^2 (\gamma^2 - 1)}{1 + 2\gamma(m_e/m_\mu) + (m_e/m_\mu)^2} \quad (105)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone, m_μ è la massa del muone e γ è il fattore di Lorentz.

PERDITE CONTINUE L'energia depositata in un materiale può essere minore di quella attesa poiché alcuni elettroni possono acquisire un'energia molto elevata e avere quindi un'alta capacità di penetrazione. Se lo strato di materiale è relativamente sottile, l'elettrone può uscire dalla regione di interesse senza depositare tutta l'energia acquistata. Di conseguenza si utilizza spesso l'*equazione di Bethe-Bloch ristretta* [91] per trattare la parte continua delle perdite per ionizzazione utilizzando l'effettiva energia massima trasferita, T_{cut} , a cui è sensibile il rivelatore

$$\left. \frac{dE_\mu}{dx} \right|_{T < T_{cut}} = k \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{up}}{\langle I \rangle^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{T_{up}}{T_{max}} \right) - \delta - \frac{2C_e}{Z} \right] \quad (106)$$

dove

$$k = 2\pi r_e^2 m_e c^2 n_{el}$$

$$\gamma = E_\mu / m_\mu c^2$$

$$\beta^2 = 1 - (1/\gamma^2)$$

$$T_{up} = \min(T_{cut}, T_{max})$$

n_{el} : densità elettronica del materiale

$\langle I \rangle$: potenziale medio di ionizzazione

δ : correzione di densità

C_e : correzione di shell

In particolare:

- il potenziale medio di ionizzazione, $\langle I \rangle$, di un materiale viene valutato sperimentalmente misurando lo stopping power per protoni, deuteroni e particelle alfa. GEANT4, per ogni elemento, tabula i valori raccomandati dall'*International Commission on Radiation Units & Measurements* (ICRU). Una variazione dell'ordine del 10% sul valore assunto porta ad una deviazione di qualche punto percentuale dello stopping power [77];
- la correzione di densità, δ , tiene conto della variazione dello stopping power dovuta alla densità dei materiali. All'aumentare dell'energia della particella il suo campo elettrico aumenta in direzione perpendicolare al moto, di conseguenza aumentano le collisioni ad alto parametro d'urto e lo stopping power aumenta come $\ln \beta\gamma$ (detta *salita relativistica*). Però l'estensione del campo elettrico è limitata dalla schermatura dovuta alla polarizzazione del mezzo stesso, la quale riduce la salita relativistica. Questo effetto è significativo nel caso di materiali ad alta densità, nei solidi porta ad una riduzione della salita relativistica, ad alti $\beta\gamma$, di circa un fattore 2 [92];
- la correzione di shell, C_e , tiene conto degli effetti che si manifestano quando la velocità della particella è confrontabile con quella elettronica, cosa che avviene con gli elettroni degli orbitali atomici più interni. Per elementi leggeri la correzione è necessaria a basse energie, mentre è sempre valida per gli elementi più pesanti.

PERDITE DISCRETE L'energia trasferita agli elettroni viene campionata dalla sezione d'urto differenziale del processo [91]

$$\frac{d\sigma_{\text{BB}}}{d\epsilon}(T, \epsilon) = 2\pi r_e^2 m_e c^2 Z \frac{z^2}{\beta^2} \frac{1}{T^2} \left[1 - \beta^2 \frac{T}{T_{\text{max}}} \right] \quad (107)$$

dalla quale, integrando da 0 a T_{cut} , si ottengono le perdite continue (106). La 107, e quindi anche la 106, è valida solo se la particella primaria ha una velocità molto maggiore di quella degli elettroni negli orbitali atomici. Per i muoni l'energia cinetica deve essere [91]

$$T \gg 2 \frac{m_\mu}{m_p} \simeq 0.1 \text{ MeV} \quad (108)$$

Inoltre a energie maggiori di 1 GeV è necessario introdurre delle correzioni radiative alla sezione d'urto differenziale per tener conto del processo di bremsstrahlung dei muoni nel campo degli elettroni atomici [93]

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon}(T, \epsilon) = \frac{d\sigma_{\text{BB}}}{d\epsilon}(T, \epsilon) \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{2\epsilon}{m_e} \right) \ln \left(1 + \frac{4m_e T(T - \epsilon)}{m_\mu^2 (2\epsilon + m_e)} \right) \right] \quad (109)$$

Questa correzione corrisponde ad un aumento dello stopping power elettronico del 2% a 100 GeV e del 4% a 1000 GeV.

A.2 PERDITE RADIATIVE

A.2.1 Bremsstrahlung

Quando una particella carica attraversa un mezzo viene accelerata dal campo elettrico degli atomi, emettendo una frazione della propria energia sotto forma di fotoni.

Per i muoni, a energie maggiori di 10 GeV, le perdite per bremsstrahlung rappresentano circa il 37% della perdita radiativa media totale. Mentre, in termini di energia frazionaria trasferita, il processo domina a $\nu > 0.1$. La sezione d'urto differenziale del processo è [91]

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon}(T, \epsilon) = \frac{16}{3} \alpha N_A \left(\frac{m_e}{m_\mu} r_e \right)^2 \frac{Z}{\epsilon A} (Z\Phi_n + \Phi_e) \left(1 - \nu + \frac{3}{4} \nu^2 \right) \quad (110)$$

valida se $\epsilon < T - m_\mu c^2$, altrimenti $\frac{d\sigma}{d\epsilon}(T, \epsilon) = 0$. I termini $\Phi_n(T)$ e $\Phi_e(T)$ rappresentano i contributi del campo elettrico del nucleo e degli elettroni atomici.

PERDITE CONTINUE In maniera analoga a quanto fatto per la ionizzazione si definisce la *perdita di energia ristretta* per perdite frazionarie ν minori di una certa soglia ν_{cut}

$$\left. \frac{dE_\mu}{dx} \right|_{\nu < \nu_{\text{cut}}} = \int_0^{\epsilon_{\text{cut}}} \epsilon \sigma(T, \epsilon) d\epsilon = T \int_0^{\nu_{\text{cut}}} \epsilon \sigma(T, \epsilon) d\nu \quad (111)$$

che corrisponde alla perdita media totale se

$$\nu_{\text{cut}} > \nu_{\text{max}} = \frac{T}{T + m_\mu} \quad (112)$$

Come nel caso della ionizzazione, la 111 è utile sia nel caso in cui si deve tener conto dell'energia massima trasferita rivelabile sia nel caso di simulazioni esplicite. Queste in particolare necessitano di modelli ristretti per evitare la produzione di un numero eccessivo di secondarie e ridurre così i tempi di calcolo.

A.2.2 Produzione di coppie

La produzione di coppie e^-e^+ avviene quando un muone di alta energia irradia un fotone virtuale il quale interagisce direttamente con il campo elettrico atomico

$$\mu + N \longrightarrow \mu + N + e^- + e^+ \quad (113)$$

È il processo più importante dal punto di vista delle perdite energetiche: rappresenta il 10% delle perdite radiative medie a 1 GeV, raggiunge le perdite per bremsstrahlung ($\approx 40\%$) a 10 GeV e a energie maggiori di 100 GeV converge ad una frazione di circa del 50%.

L'andamento in funzione delle perdite frazionarie della sezione d'urto del processo (mostrata in figura 84) varia da ν^{-2} a ν^{-3} e domina sugli altri processi radiativi fino a energie trasferite dell'ordine di $0.1E_\mu$. Una descrizione dettagliata della sezione d'urto e dell'implementazione del processo è consultabile in *Geant4 Physics Reference Manual* [91] e nelle citazioni al suo interno.

A.2.3 Interazioni foto-nucleari

L'interazione foto-nucleare è un processo di scattering muone-nucleo

$$\mu + N \longrightarrow \mu + (\text{adroni}) \quad (114)$$

che avviene attraverso lo scambio di un fotone virtuale. Queste interazioni anelastiche sono importanti a energie maggiori di 10 GeV e per energie frazionarie trasferite maggiori di 10^{-2} e rappresentano il 10% dello stopping power totale. La sezione d'urto del processo (e degli altri processi) nel ferro è mostrata in figura 84.

Una descrizione dettagliata della sezione d'urto e dell'implementazione del processo è consultabile in *Geant4 Physics Reference Manual* [91] e nelle citazioni al suo interno.

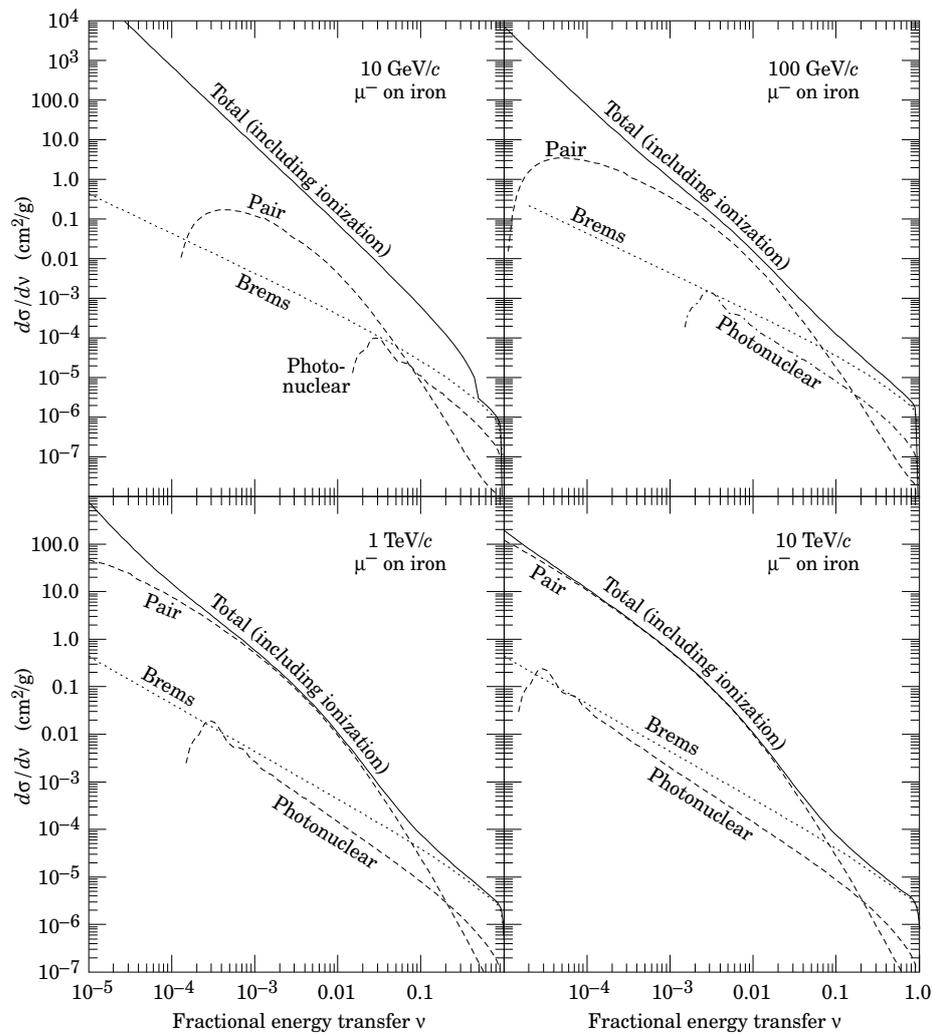


Figura 84: Sezione d'urto differenziale totale e dei singoli processi radiativi, in funzione dell'energia frazionaria trasferita, per muoni nel ferro. Fonte: Groom et al. [77].

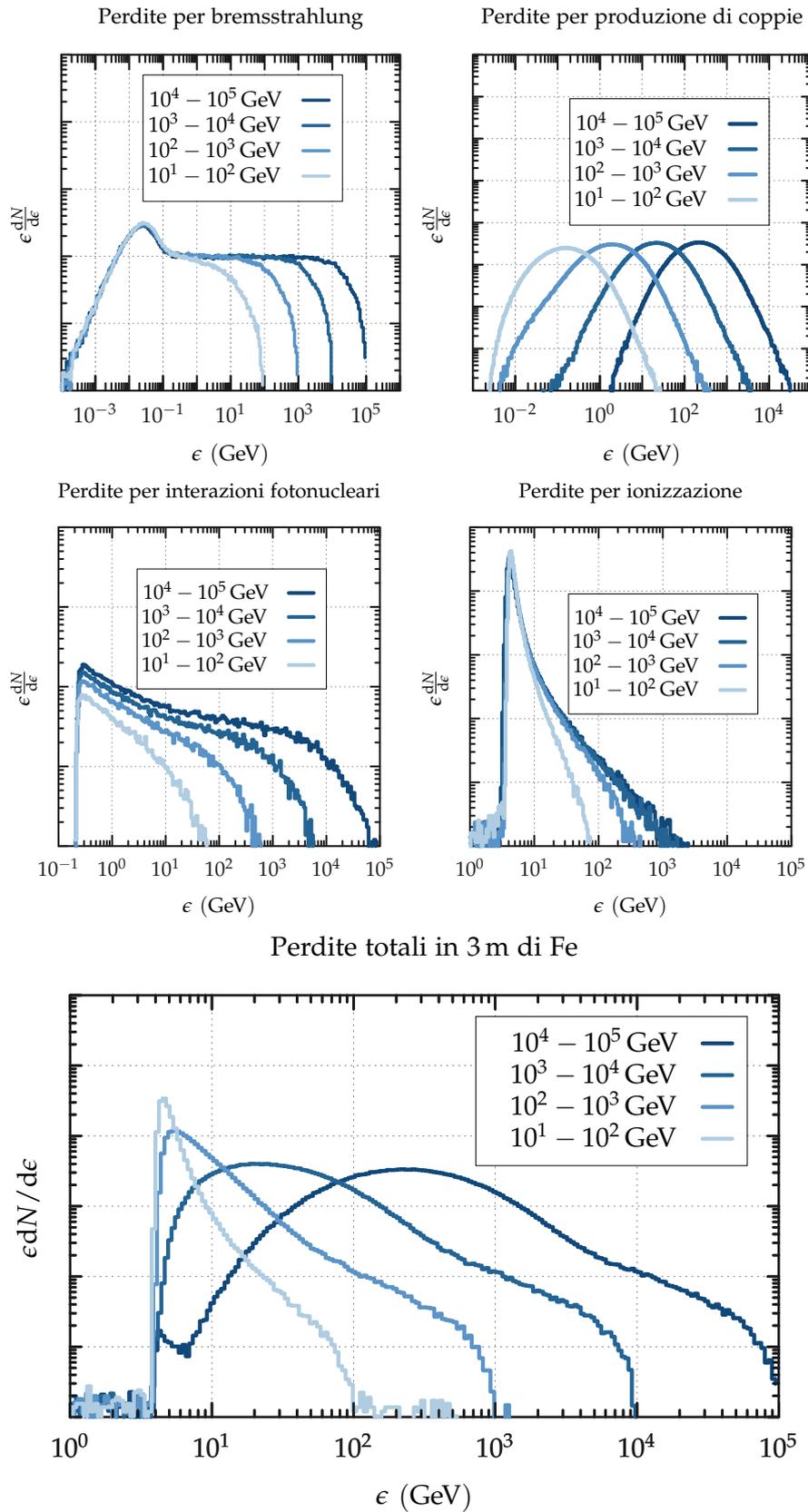


Figura 85: Perdite energetiche in 3 m di ferro per muoni con energia compresa tra 10^1 GeV e 10^5 GeV. La perdita di energia per ionizzazione più probabile è di 4 GeV a tutte le energie. Le perdite per produzione di coppie hanno un picco per perdite frazionarie di circa $\nu = 10^{-3}$ ma lo spettro è più esteso, mentre le perdite di energia per bremsstrahlung e interazioni foto-nucleari sono quasi a spettro piatto, con un cut-off all'energia di incidenza. Le distribuzioni sono riscalate di un fattore ϵ per semplificarne la visualizzazione.

B | ANALISI DELLE IMMAGINI

In questa appendice viene descritta una parte dell'algoritmo da me sviluppato per la pulizia e l'analisi delle immagini degli anelli muonici ottenute con il simulatore del telescopio ASTRI SST-2M. Tra le fasi principali dell'algoritmo, descritte nella sezione 5.1, quelle più critiche sono la verifica della condizione di trigger della camera e la rimozione dei pixel isolati. Per entrambe le fasi, ho implementato un algoritmo di ricerca dei gruppi di pixel contigui descritto in dettaglio nel seguito. Per completezza ho riportato anche le porzioni di codice relative all'implementazione del metodo nelle due fasi.

Un'immagine è descritta da tre vettori paralleli¹ (x , y e pe) i quali contengono le coordinate dei pixel attivi sulla camera e il segnale registrato corrispondente. Nel seguito, con il termine *coordinate* si intende la posizione del pixel sulla camera e con *posizione* l'indice del pixel nei vettori x , y e pe . *Disattivare* un pixel attivo equivale a rimuoverlo dai vettori. Note le coordinate (ix, iy) di un pixel, è possibile risalire alla sua posizione nei vettori dei pixel attivi tramite la funzione `FindIndex(ix, iy, x, y)`; se il pixel non è tra quelli attivi la funzione ritorna il valore -1000.

B.1 CONDIZIONE DI TRIGGER

La condizione di trigger è verificata quando sono presenti almeno un numero N_t di pixel contigui con valore maggiore di una certa soglia $n_{pe,t}$. Disattivati i pixel sotto la soglia, il problema consiste nel determinare se nell'immagine è presente *almeno* un gruppo composto da *almeno* N_t pixel contigui. L'idea alla base dell'algoritmo, illustrata in figura 86, è quella di cercare i pixel attivi adiacenti a ogni pixel attivo e, ricorsivamente, cercare i pixel adiacenti a quelli appena trovati ma verificando che non siano già stati trovati in precedenza.

Per implementare il metodo sono state definite 4 funzioni:

- la funzione `NearbyPixels(i, x, y)` esegue un controllo in una finestra di coordinate di dimensione 3×3 , centrata nell' i -esimo pixel attivo, e ritorna la posizione di tutti i pixel attivi presenti, a eccezione del pixel centrale;
- la funzione `NewNearbyPixels(i, oldNearbyPixels, x, y)` è simile alla precedente ma ritorna soltanto le posizioni dei pixel non presenti nel vettore `oldNearbyPixels`;

¹ Vettori contenenti in ogni posizione delle proprietà associabili a un concetto comune (qui, il pixel). Per eventuali sviluppi futuri uno stile di programmazione orientato agli oggetti sarebbe più appropriato.

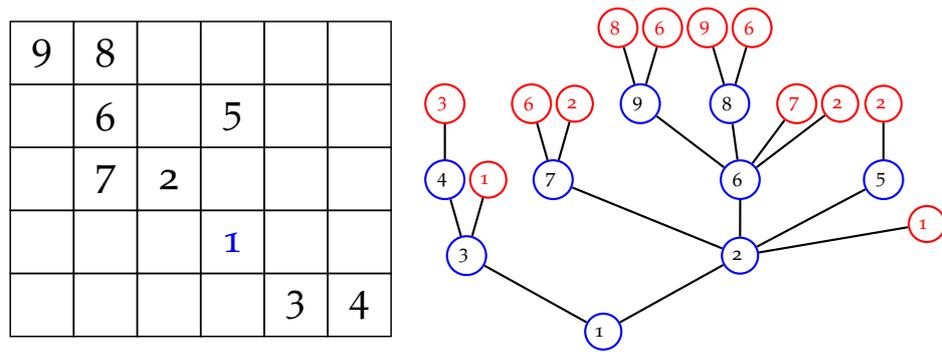


Figura 86: Illustrazione, tramite grafo ad albero, dell'algoritmo implementato per la ricerca dei gruppi di pixel contigui, nel caso di un gruppo di 9 pixel. **Sinistra)** I pixel sono identificati dalla loro posizione nel vettore dei pixel attivi. **Destra)** Nell'esempio, l'algoritmo inizia dal pixel con indice 1 e trova i pixel adiacenti: il 2 e il 3. Successivamente trova i pixel adiacenti al 3 e al 2. Per semplicità, consideriamo il pixel 3: vengono trovati due pixel: uno *nuovo*, il 4 (in blu), e uno *vecchio*, l'1 (in rosso). Il pixel 4 ha come adiacente solo il pixel 3, già trovato in precedenza. Il ramo creato dal pixel 2 è più ampio, ma il processo è identico al precedente: la ricerca viene eseguita su ogni pixel nuovo e si ferma quando vengono trovati solo pixel vecchi.

- la funzione booleana `Contiguous(i, pixelsFound, x, y, Nmin)` è verificata quando il pixel *i*-esimo fa parte di un gruppo di almeno *Nmin* pixel contigui. Inizialmente cerca i pixel adiacenti all'*i*-esimo che non sono presenti nel vettore `pixelsFound`² e li inserisce in quest'ultimo. Successivamente la funzione viene richiamata in modo ricorsivo per ogni nuovo pixel adiacente. In questo modo il vettore `pixelsFound` tiene conto dei pixel trovati ad ogni chiamata e la funzione ritorna `true` se il loro numero raggiunge *Nmin*. Se questo non avviene e non viene trovato nessun nuovo pixel, la funzione ritorna `false`.
- la funzione booleana `IsTriggered(x, y, pe, Nmin, cut)` è verificata se esiste almeno un gruppo di *Nmin* pixel contigui con valore maggiore della soglia *cut*. Disattivati (cioè, rimossi dai vettori *x*, *y* e *pe*) tutti i pixel con valore inferiore alla soglia, viene applicata la funzione `Contiguous` ad ogni pixel rimasto e se viene trovato un pixel che la verifica la funzione ritorna `true`.

```

1 vector<int> NearbyPixels(int index,
2                          vector<double> x,
3                          vector<double> y)
4 {
5     vector<int> indices;
6
7     int ix = (int)x[index];
8     int iy = (int)y[index];
9
10    for (int j=ix-1; j<ix+2; j++)
11    {
12        for (int k=iy-1; k<iy+2; k++)
13        {

```

² Alla prima chiamata il vettore deve contenere la posizione, *i*, del pixel iniziale.

```

14     if ( ( j == ix ) && ( k == iy ) ) continue;
15     index = FindIndex(j,k,x,y);
16     if ( index != -1000) indices.push_back(index);
17 }
18 }
19 return indices;
20 }
21
22 vector<int> NewNearbyPixels(int index ,
23                             vector<int> oldNearbyPixels ,
24                             vector<double> x ,
25                             vector<double> y)
26 {
27     vector<int> nearbyPixs = NearbyPixels(index , x , y);
28     vector<int> positions;
29
30     if (oldNearbyPixels.size() < 1) return nearbyPixs;
31
32     for (int i=0; i<nearbyPixs.size(); i++)
33     {
34         for (int j=0; j<oldNearbyPixels.size(); j++)
35         {
36             if (nearbyPixs[i] == oldNearbyPixels[j])
37             {
38                 positions.push_back(i);
39             }
40         }
41     }
42
43     for (int k=0; k<positions.size(); k++)
44     {
45         nearbyPixs.erase(nearbyPixs.begin()+positions[k]-k);
46     }
47
48     return nearbyPixs;
49 }
50
51
52 bool Contiguous(int index ,
53                 vector<int>& pixelsFound ,
54                 vector<double> x ,
55                 vector<double> y ,
56                 int Nmin)
57 {
58     vector<int> newPixels = NewNearbyPixels(index , pixelsFound , x , y);
59     pixelsFound.insert(pixelsFound.end() ,
60                       newPixels.begin() , newPixels.end());
61
62     for (int i=0; i<newPixels.size(); i++)
63     {
64         Contiguous(newPixels[i] , pixelsFound , x , y , Nmin);
65         if (pixelsFound.size() >= Nmin) return true;
66     }
67
68     return false;
69 }
70
71
72 bool IsTriggered(vector<double> x ,
73                 vector<double> y ,

```

```

74         vector<double> pe,
75         int Nmin,
76         double cut)
77 {
78     vector<int> positions;
79     double peCut = cut;
80
81     for (int i=0; i<x.size(); i++)
82     {
83         if (pe[i] < peCut) positions.push_back(i);
84     }
85
86     for (int k=0; k<positions.size(); k++)
87     {
88         x.erase(x.begin() + positions[k] - k);
89         y.erase(y.begin() + positions[k] - k);
90         pe.erase(pe.begin() + positions[k] - k);
91     }
92
93     for (int i=0; i<x.size(); i++)
94     {
95         vector<int> foundPixels {i};
96         if ( Contiguous(i, foundPixels, x, y, Nmin) ) return true;
97     }
98
99     return false;
100 }

```

B.2 RIMOZIONE DEI PIXEL ISOLATI

Il metodo di ricostruzione descritto nella sezione 5.1 è molto sensibile alla presenza di gruppi di pixel isolati. Questi, come mostrato in figura 87, causano problemi di ricostruzione anche nel caso di un anello completo. Poiché i gruppi isolati sono dovuti al rumore del fondo cielo, un'opportuna scelta della soglia di taglio ne può limitare fortemente la presenza. Stimate la media $\langle n \rangle$ e la deviazione σ_n del fondo, vengono disattivati tutti i pixel con valori inferiori alla soglia

$$\tau_k = \langle n \rangle + k\sigma_n \quad (115)$$

È stata utilizzata una soglia τ_5 in modo da ridurre drasticamente la probabilità che due, o più, pixel adiacenti isolati sopravvivano al processo di taglio. Tuttavia, nel caso in cui la stima di $\langle n \rangle$ e σ_n non sia corretta, la probabilità di avere pixel isolati, o coppie di pixel isolate, con valori oltre la soglia τ_5 non è trascurabile. Per far fronte al problema, è stato implementato un metodo che, per ogni pixel attivo, trova il gruppo di contigui a cui appartiene e applica le seguenti azioni:

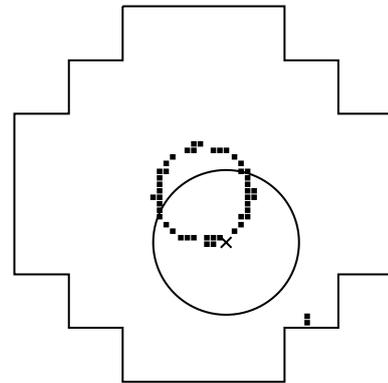


Figura 87: Effetto della presenza di gruppi isolati sul processo di minimizzazione.

- disattiva il pixel se è isolato;
- disattiva i pixel se il gruppo ha meno di $N_t + 1$ elementi e nessuno dei pixel ha valore maggiore di τ_6 .

Per implementare il metodo sono state definite 2 funzioni:

- la funzione `FindContiguous(i, pixelsFound, x, y)` è simile alla funzione `Contiguous` utilizzata per la condizione di trigger (descritta nella sezione B.1), ma, in questo caso, si limita a inserire tutti i pixel del gruppo di contigui, di cui fa parte l' i -esimo, nel vettore `pixelsFound`;
- la funzione `DropIsolatedPixels(x, y, pe, mean, rms, sigmaValue, minPixels)`, per ogni pixel attivo controlla la dimensione del gruppo di contigui a cui appartiene. Se questa è minore o uguale a `minPixels`, vengono disattivati i pixel isolati e i gruppi in cui non sono presenti pixel con valore maggiore di

$$\text{threshold} = \text{mean} + \text{sigmaValue} * \text{rms}$$

dove i valori `mean`, `sigmaValue` e `rms` corrispondono ai termini $\langle n \rangle$, k e σ_n della 115.

```

101 void FindContiguous(int index,
102                    vector<int>& pixelsFound,
103                    vector<double> x,
104                    vector<double> y)
105 {
106     vector<int> newPixels = NewNearbyPixels(index, pixelsFound, x, y);
107     pixelsFound.insert(pixelsFound.end(),
108                      newPixels.begin(), newPixels.end());
109
110     for (int i=0; i<newPixels.size(); i++)
111     {
112         FindContiguous(newPixels[i], pixelsFound, x, y);
113     }
114
115     return;
116 }
117
118 void DropIsolatedPixels(vector<double>& x,
119                       vector<double>& y,
120                       vector<double>& pe,
121                       double mean,
122                       double rms,
123                       double sigmaValue,
124                       int minPixels)
125 {
126     vector<int> positions;
127     double threshold = mean + sigmaValue * rms;
128
129     for (int i=0; i<x.size(); i++)
130     {
131         vector<int> contiguousPixels {i};
132         FindContiguous(i, contiguousPixels, x, y);
133
134         if ( (contiguousPixels.size() <= minPixels) )
135         {

```

```
136     bool aboveThreshold = false;
137
138     for (int j=0; j<contiguousPixels.size(); j++)
139     {
140         if ( pe[contiguousPixels[j]] > threshold)
141         {
142             aboveThreshold = true;
143         }
144     }
145
146     if(!aboveThreshold || contiguousPixels.size() == 1)
147     {
148         for (int j=0; j<contiguousPixels.size(); j++)
149         {
150             positions.push_back(contiguousPixels[j]);
151         }
152     }
153 }
154
155
156 DropDuplicate(positions);
157
158 for (int k=0; k<positions.size(); k++)
159 {
160     x.erase(x.begin() + positions[k] - k);
161     y.erase(y.begin() + positions[k] - k);
162     pe.erase(pe.begin() + positions[k] - k);
163 }
164
165 }
```

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 1	Cataloghi Fermi-LAT	17	
Tabella 2	Spessori ed energie utilizzate per la validazione		42
Tabella 3	Principali simboli e costanti fisiche	125	

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1	Spettro delle componenti dei raggi cosmici	3
Figura 2	Spettro dei raggi cosmici	4
Figura 3	Modelli dello spettro dei muoni atmosferici	9
Figura 4	Potere penetrante di muoni, elettroni e protoni	10
Figura 5	Muografia vulcanica	11
Figura 6	Rivelazione dei muoni con telescopi Čerenkov	13
Figura 7	Il cielo γ visto da EGRET e dal Fermi-LAT	16
Figura 8	Sciami elettromagnetici e sciami adronici	19
Figura 9	Effetto Čerenkov: polarizzazione del mezzo	20
Figura 10	Effetto Čerenkov: formazione fronte d'onda conico	21
Figura 11	Tecnica stereoscopica di imaging Čerenkov	23
Figura 12	Diagramma circolare delle sorgenti TeVCat	25
Figura 13	Prototipi per il Čerenkov Telescope Array	26
Figura 14	Futura disposizione dei due array del CTA	27
Figura 15	Il prototipo ASTRI SST-2M	29
Figura 16	PSF del sistema ottico di ASTRI SST-2M	30
Figura 17	Campionamento per "rigetto e composizione"	32
Figura 18	Schema di interazione muone-materia	38
Figura 19	Geometria della simulazione dell'interazione con uno strato di materiale	39
Figura 20	Stopping power medio nel ferro simulato	40
Figura 21	Validazione dello stopping power medio	43
Figura 22	Validazione dello stopping power per il ferro	44
Figura 23	Validazione dello stopping power per la roccia	45
Figura 24	Perdite frazionarie di energia in 5 m di roccia	47
Figura 25	Stima del range	48
Figura 26	Probabilità di sopravvivenza nella roccia	49
Figura 27	Curve di uguale probabilità di sopravvivenza	50
Figura 28	Confronto tra R_{CSDA} , $R_{0,05}$ e $R_{0,95}$	50
Figura 29	Energia minima nella roccia	51
Figura 30	Confronto tra $I_{E_{\text{th}}}(X)$ e $I_{E_{\text{th}}}^{\text{CSDA}}(X)$	52
Figura 31	Angolo di scattering in funzione di $E_{\mu,f}$ e $E_{\mu,i}$	53
Figura 32	Distribuzione dell'angolo di scattering per diversi intervalli di spessore e energie finali	54
Figura 33	Scostamento laterale in funzione di $E_{\mu,f}$	55
Figura 34	Scattering in funzione dello spessore di roccia	56
Figura 35	Distribuzione angolare per fasci monocromatici	56
Figura 36	Scattering e scostamento laterale in 1500 m d'aria	57
Figura 37	Uniformità spaziale dell'emissione Čerenkov	57
Figura 38	Uniformità angolare dell'emissione Čerenkov	59
Figura 39	Spettro Čerenkov atteso e simulato	60
Figura 40	Geometria di emissione Čerenkov	63
Figura 41	Distribuzione dei fotoni sul piano dello specchio	65

Figura 42	Numero di fotoni attesi sullo specchio	66
Figura 43	Estensione angolare degli archi muonici	67
Figura 44	Esempi di anelli muonici e ricostruzioni	68
Figura 45	Illustrazione dei parametri di ricostruzione	69
Figura 46	Confronto tra MIGRAD e BFGS	70
Figura 47	Archi con piccola estensione angolare	71
Figura 48	Ricostruzione in funzione di ρ	71
Figura 49	Esempio di condizione di trigger	72
Figura 50	Esempio di pulizia delle immagini degli anelli	75
Figura 51	Ricostruzione con fondi medi differenti	76
Figura 52	Schema geometrico della simulazione	77
Figura 53	Parametro di impatto massimo	80
Figura 54	Flat field	83
Figura 55	Angolo Čerenkov ricostruito	85
Figura 56	Errore di ricostruzione	85
Figura 57	Ricostruzione degli eventi con pochi pixel	86
Figura 58	Effetti della selezione	87
Figura 59	Simulazione della sola sorgente con selezione	88
Figura 60	Stima dell'area efficace	89
Figura 61	Area efficace in funzione dell'angolo di incidenza	89
Figura 62	Flat field corretto	90
Figura 63	Stima dell'energia minima di rivelazione	91
Figura 64	Probabilità di sopravvivenza nella roccia	91
Figura 65	Relazione spessore-flusso integrato	92
Figura 66	Spessori lungo l'asse del cono	95
Figura 67	Confronto tra significatività	96
Figura 68	Risultati in assenza di condotto	100
Figura 69	Condotto di 140 m	101
Figura 70	Condotto di 140 m: 1σ	102
Figura 71	Condotto di 140 m: 3σ	103
Figura 72	Condotto di 140 m: 5σ	104
Figura 73	Condotto di 70 m	105
Figura 74	Condotto di 70 m: 1σ	106
Figura 75	Condotto di 70 m: 3σ	107
Figura 76	Condotto di 70 m: 5σ	108
Figura 77	Condotto di 35 m	109
Figura 78	Condotto di 35 m: 1σ	110
Figura 79	Condotto di 35 m: 3σ	111
Figura 80	Condotto di 35 m: 5σ	112
Figura 81	Significatività al centro del cono	113
Figura 82	Significatività attesa al centro del cono	114
Figura 83	Risoluzione angolare e significatività	115
Figura 84	Sezioni d'urto differenziali nel ferro	129
Figura 85	Perdite di energia in 3 m di ferro	130
Figura 86	Algoritmo di ricerca di pixel contigui	132
Figura 87	Effetto della presenza di gruppi di pixel isolati	134

BIBLIOGRAFIA

- [1] Theodor Wulf. «On the radiation of high penetrating power that exists in the atmosphere». In: *Zeitschrift für Physik* 1 (1909), pp. 152–157.
- [2] Victor F. Hess. «The origins of penetrating radiation». In: *Zeitschrift für Physik* 14 (1913), pp. 612–617.
- [3] Werner H. G. Kollhörster. «Measurements of the penetrating radiation in the free balloon at high altitudes (Aero-physical developments Halle, Essay 6)». In: *Zeitschrift für Physik* 14 (1913), pp. 1153–1156.
- [4] D. Pacini. «Sulle radiazioni penetranti». In: *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei* 18 (1909), pp. 123–129.
- [5] D. Pacini. «La radiazione penetrante alla superficie ed in seno alle acque». In: *Il Nuovo Cimento* 3 (dic. 1912), pp. 93–100.
- [6] Per Carlson e Alessandro De Angelis. «Nationalism and internationalism in science: the case of the discovery of cosmic rays». In: *The European Physical Journal H* 35.4 (mar. 2011), p. 309.
- [7] Luis Alvarez e Arthur H. Compton. «A Positively Charged Component of Cosmic Rays». In: *Physical Review* 43 (10 mag. 1933), pp. 835–836.
- [8] Thomas H. Johnson. «Coincidence Counter Studies of the Corpuscular Component of the Cosmic Radiation». In: *Physical Review* 45 (9 mag. 1934), pp. 569–585.
- [9] Bruno Rossi. «Directional Measurements on the Cosmic Rays Near the Geomagnetic Equator». In: *Physical Review* 45 (3 feb. 1934), pp. 212–214.
- [10] C. Patrignani e Particle Data Group. «Review of Particle Physics». In: *Chinese Physics C* 40.10 (2016).
- [11] Maurizio Spurio. «Acceleration Mechanisms and Galactic Cosmic Ray Sources». In: *Particles and Astrophysics: A Multi-Messenger Approach*. Springer International Publishing, 2015, pp. 165–201.
- [12] Maurizio Spurio. «Diffusion of Cosmic Rays in the Galaxy». In: *Particles and Astrophysics: A Multi-Messenger Approach*. Springer International Publishing, 2015, pp. 133–163.
- [13] Michael Unger, Glennys R. Farrar e Luis A. Anchordoqui. «Origin of the ankle in the ultrahigh energy cosmic ray spectrum, and of the extragalactic protons below it». In: *Phys. Rev. D* 92 (12 dic. 2015).
- [14] S. Cecchini e M. Spurio. «Atmospheric muons: experimental aspects». In: *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems* 1.2 (2012), pp. 185–196.
- [15] N. Lesparre et al. «Geophysical muon imaging: feasibility and limits». In: *Geophysical Journal International* 183.3 (2010), pp. 1348–1361.

- [16] D. Reyna. *A Simple Parameterization of the Cosmic-Ray Muon Momentum Spectra at the Surface as a Function of Zenith Angle*. Rapp. tecn. hep-ph/0604145. Apr. 2006.
- [17] S. Cecchini e M. Sioli. «Cosmic Ray Muon Physics». In: *ArXiv High Energy Physics - Experiment e-prints* (feb. 2000).
- [18] D. P. Bhattacharyya. «Effect of solar modulation on the low energy sea level muon spectrum near the geomagnetic equator.» In: *Australian Journal of Physics* 31 (ott. 1978), pp. 451–453.
- [19] E. -P. George. «Cosmic rays measure overburden of tunnel». In: *Commonwealth Engineer* 455 (lug. 1955).
- [20] L. W. Alvarez et al. «Search for Hidden Chambers in the Pyramids». In: *Science* 167 (feb. 1970), pp. 832–839.
- [21] S. Minato. «Feasibility study on cosmic-ray nondestructive testing through structural analysis of subway stations». In: *NDT International* 20.4 (1987), pp. 231–234.
- [22] Kunihiro Morishima et al. «Discovery of a big void in Khufu's Pyramid by observation of cosmic-ray muons». In: *Nature* 552 (nov. 2017), p. 386.
- [23] Konstantin N. Borozdin et al. «Radiographic imaging with cosmic-ray muons». In: *Nature* 422 (mar. 2003), p. 277.
- [24] S Riggi et al. «A large area cosmic ray detector for the inspection of hidden high-Z materials inside containers». In: *Journal of Physics: Conference Series* 409.1 (2013), p. 012046.
- [25] Konstantin Borozdin et al. «Cosmic Ray Radiography of the Damaged Cores of the Fukushima Reactors». In: *Phys. Rev. Lett.* 109 (15 ott. 2012), p. 152501.
- [26] K Nagamine et al. «Method of probing inner-structure of geophysical substance with the horizontal cosmic-ray muons and possible application to volcanic eruption prediction». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 356.2 (1995), pp. 585–595.
- [27] Hiroyuki K.M. Tanaka et al. «High resolution imaging in the inhomogeneous crust with cosmic-ray muon radiography: The density structure below the volcanic crater floor of Mt. Asama, Japan». In: *Earth and Planetary Science Letters* 263.1 (2007), pp. 104–113.
- [28] Hiroyuki K. M. Tanaka et al. «Cosmic-ray muon imaging of magma in a conduit: Degassing process of Satsuma-Iwojima Volcano, Japan». In: *Geophysical Research Letters* 36.1 (gen. 2009).
- [29] Luca Lista. «Attraverso la roccia: la tecnologia della radiografia muonica». In: *Asimmetrie* 23 (ott. 2017).
- [30] H.K.M. Tanaka et al. «Development of an emulsion imaging system for cosmic-ray muon radiography to explore the internal structure of a volcano, Mt. Asama». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 575.3 (2007), pp. 489–497.

- [31] H. K. M. Tanaka et al. «Imaging the conduit size of the dome with cosmic-ray muons: The structure beneath Showa-Shinzan Lava Dome, Japan». In: *Geophysical Research Letters* 34 (nov. 2007).
- [32] Hiroyuki K. M. Tanaka, Taro Kusagaya e Hiroshi Shinohara. «Radiographic visualization of magma dynamics in an erupting volcano». In: *Nature Communications* 5 (mar. 2014).
- [33] C. Cârloganu et al. «Towards a muon radiography of the Puy de Dôme». In: *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems* 2 (feb. 2013), pp. 55–60.
- [34] Nolwenn Lesparre et al. «Density muon radiography of La Soufrière of Guadeloupe volcano: comparison with geological, electrical resistivity and gravity data». In: *Geophysical Journal International* 190.2 (2012), pp. 1008–1019.
- [35] Daniele Carbone et al. «An experiment of muon radiography at Mt Etna (Italy)». In: *Geophysical Journal International* 196.2 (2014), pp. 633–643.
- [36] Ryuichi Nishiyama et al. «Monte Carlo simulation for background study of geophysical inspection with cosmic-ray muons». In: *Geophysical Journal International* 206.2 (2016), pp. 1039–1050.
- [37] O. Catalano et al. «Volcanoes muon imaging using Cherenkov telescopes». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 807 (2016), pp. 5–12.
- [38] M. Del Santo et al. «Looking inside volcanoes with the Imaging Atmospheric Cherenkov Telescopes». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 876 (2017). The 9th international workshop on Ring Imaging Cherenkov Detectors (RICH2016), pp. 111–114.
- [39] S. M. Matz et al. «Gamma-ray line emission from SN1987A». In: *Nature* 331 (feb. 1988).
- [40] S. Hayakawa. «Propagation of the Cosmic Radiation through Interstellar Space». In: *Progress of Theoretical Physics* 8.5 (1952), pp. 571–572.
- [41] G. W. Clark, G. P. Garmire e W. L. Kraushaar. «Observation of High-Energy Cosmic Gamma Rays». In: *Astrophysical Journal, Letters* 153 (set. 1968), p. L203.
- [42] R. C. Hartman et al. «The Third EGRET Catalog of High-Energy Gamma-Ray Sources». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 123.1 (1999), p. 79.
- [43] W. B. Atwood et al. «The Large Area Telescope on the Fermi Gamma-Ray Space Telescope Mission». In: *The Astrophysical Journal* 697.2 (2009), p. 1071.
- [44] A.A. Moiseev et al. «Observation and simulations of the backslash effects in high-energy gamma-ray telescopes containing a massive calorimeter». In: *Astroparticle Physics* 22.3 (2004), pp. 275–283.

- [45] F. Acero et al. «Fermi Large Area Telescope Third Source Catalog». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 218.2 (2015), p. 23.
- [46] M. Ajello et al. «3FHL: The Third Catalog of Hard Fermi -LAT Sources». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 232.2 (2017), p. 18.
- [47] F. Aharonian et al. «High energy astrophysics with ground-based gamma ray detectors». In: *Rept. Prog. Phys.* 71 (2008).
- [48] J.A. Hinton e W. Hofmann. «Teraelectronvolt Astronomy». In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 47.1 (2009), pp. 523–565.
- [49] Maurizio Spurio. «Indirect Cosmic Rays Detection: Particle Showers in the Atmosphere». In: *Particles and Astrophysics: A Multi-Messenger Approach*. Springer International Publishing, 2015, pp. 87–131.
- [50] J. Holder. «TeV gamma-ray astronomy: A summary». In: *Astroparticle Physics* 39-40 (2012). Cosmic Rays Topical Issue, pp. 61–75.
- [51] J V Jelley. «Cherenkov radiation and its applications». In: *British Journal of Applied Physics* 6.7 (1955), p. 227.
- [52] J. D. Jackson. «Cherenkov Radiation». In: *Classical Electrodynamics*. 3rd. John Wiley & Sons, lug. 1998, pp. 637–640.
- [53] CTA Consortium. *Cherenkov Telescope Array*. 2018. URL: <https://www.cta-observatory.org/>.
- [54] Scott Wakely e Deirdre Horan. *TeVcat*. 2018. URL: <http://tevcat2.uchicago.edu/>.
- [55] H. E. S. S. Collaboration et al. «The H.E.S.S. Galactic plane survey». In: *Astronomy and Astrophysics* 612 (apr. 2018).
- [56] Javier Rico. «Overview of MAGIC results». In: *Nuclear and Particle Physics Proceedings* 273-275 (2016). 37th International Conference on High Energy Physics (ICHEP), pp. 328–333.
- [57] M. Actis et al. «Design concepts for the Cherenkov Telescope Array CTA: an advanced facility for ground-based high-energy gamma-ray astronomy». In: *Experimental Astronomy* 32.3 (dic. 2011), pp. 193–316.
- [58] T. Hassan et al. «Monte Carlo performance studies for the site selection of the Cherenkov Telescope Array». In: *Astroparticle Physics* 93 (2017), pp. 76–85.
- [59] P. Cumani et al. «Baseline telescope layouts of the Cherenkov Telescope Array». In: *ArXiv e-prints* (set. 2017).
- [60] D. Mazin, J. Cortina e M. Teshima. «Large size telescope report». In: *6th International Symposium on High Energy Gamma-Ray Astronomy*. Vol. 1792. American Institute of Physics Conference Series. Gen. 2017.
- [61] G. Pühlhofer. «The medium size telescopes of the Cherenkov telescope array». In: *6th International Symposium on High Energy Gamma-Ray Astronomy*. Vol. 1792. American Institute of Physics Conference Series. Gen. 2017.
- [62] M. C. Maccarone et al. «The Site of the ASTRI SST-2M Telescope Prototype». In: *ArXiv e-prints* (lug. 2013).

- [63] M. C. Maccarone. «ASTRI for the Cherenkov Telescope Array». In: *ArXiv e-prints* (set. 2017).
- [64] Giovanni Pareschi. *The ASTRI SST-2M prototype and mini-array for the Cherenkov Telescope Array (CTA)*. 2016.
- [65] E. Giro et al. «First optical validation of a Schwarzschild Couder telescope: the ASTRI SST-2M Cherenkov telescope». In: *Astronomy & Astrophysics* 608 (2017), A86.
- [66] D. Impiombato et al. «Characterization and performance of the ASIC (CITIROC) front-end of the ASTRI camera». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 794 (2015), pp. 185–192.
- [67] D. Impiombato et al. «Procedures for the relative calibration of the SiPM gain on ASTRI SST-2M camera». In: *Experimental Astronomy* 43.1 (feb. 2017), pp. 1–17.
- [68] O. Catalano. Private communication. Giu. 2018.
- [69] Annie Hou et al. «Statistical Tools for Classifying Galaxy Group Dynamics». In: *The Astrophysical Journal* 702.2 (2009), p. 1199.
- [70] G. Bohm e G. Zech. *Introduction to statistics and data analysis for physicists*. DESY, 2010.
- [71] J.C. Butcher e H. Messel. «Electron number distribution in electron-photon showers in air and aluminium absorbers». In: *Nuclear Physics* 20 (1960), pp. 15–128.
- [72] S. Agostinelli et al. «Geant4-a simulation toolkit». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 506.3 (2003), pp. 250–303.
- [73] GEANT4 Collaboration. *Guide For Physics Lists*. Release 10.4. Dic. 2017.
- [74] Paolo Lipari e Todor Stanev. «Propagation of multi-TeV muons». In: *Phys. Rev. D* 44 (11 dic. 1991), pp. 3543–3554.
- [75] P. H. Barrett et al. «Interpretation of Cosmic-Ray Measurements Far Underground». In: *Reviews of Modern Physics* 24 (lug. 1952), pp. 133–178.
- [76] K. A. Olive et al. «Review of Particle Physics». In: *Chin. Phys.* C38 (2014), p. 090001.
- [77] Donald E. Groom, Nikolai V. Mokhov e Sergei I. Striganov. «Muon stopping power and range tables 10 MeV–100 TeV». In: *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 78.2 (2001), pp. 183–356.
- [78] Razmik Mirzoyan. «Cherenkov light imaging in astro-particle physics». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 766. Supplement C (2014), pp. 39–42.
- [79] Philip E. Ciddor. «Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared». In: *Appl. Opt.* 35.9 (mar. 1996), pp. 1566–1573.
- [80] Eric W. Weisstein. «Circle Line Picking» *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. 2018. URL: <http://mathworld.wolfram.com/CircleLinePicking.html>.

- [81] G. Vacanti et al. «Muon ring images with an atmospheric Čerenkov telescope». In: *Astroparticle Physics* 2.1 (1994), pp. 1–11.
- [82] T. Mineo et al. «Using muon rings for the optical calibration of the ASTRI telescopes for the Cherenkov Telescope Array». In: *Software and Cyberinfrastructure for Astronomy IV*. Vol. 9913. Proceedings of the SPIE. Lug. 2016, 99132R.
- [83] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. 2nd. Wiley-Interscience, 1987.
- [84] I. Antcheva et al. «ROOT — A C++ framework for petabyte data storage, statistical analysis and visualization». In: *Computer Physics Communications* 182.6 (2011), pp. 1384–1385.
- [85] F. James e M. Roos. «Minuit: A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations». In: *Comput. Phys. Commun.* 10 (1975), pp. 343–367.
- [86] M. Gaug et al. «Using Muon Rings for the Optical Throughput Calibration of the Cherenkov Telescope Array». In: (2017).
- [87] CTA Consortium. «Optimized next-neighbor image cleaning method for Cherenkov Telescopes». In: *ArXiv e-prints* (lug. 2013).
- [88] E. V. Bugaev et al. «Atmospheric muon flux at sea level, underground, and underwater». In: *Phys. Rev. D* 58 (5 lug. 1998), p. 054001.
- [89] F. Goebel et al. «Absolute energy scale calibration of the MAGIC telescope using muon images». In: *International Cosmic Ray Conference* 5 (2005), p. 179.
- [90] T. P. Li e Y. Q. Ma. «Analysis methods for results in gamma-ray astronomy». In: *The Astrophysical Journal* 272 (set. 1983), pp. 317–324.
- [91] GEANT4 Collaboration. *Geant4 Physics Reference Manual*. Release 10.4. Dic. 2017.
- [92] S. Braibant, G. Giacomelli e M. Spurio. «Rivelazione e rivelatori di particelle». In: *Particelle e interazioni fondamentali*. 1st. Springer, 2009, pp. 13–46.
- [93] S. R. Kelner, R. P. Kokoulin e A. A. Petrukhin. «Bremsstrahlung from muons scattered by atomic electrons». In: *Phys. Atom. Nucl.* 60 (1997), pp. 576–583.