Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL TEOREMA DI DIRICHLET SUI PRIMI NELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SERGIO VENTURINI

Presentata da:
GIUSEPPE ANTONIO
RECUPERO

Quinta Sessione
Anno Accademico 2017/2018

Introduzione

La scoperta dell'infinità dei numeri primi risale ai tempi di Euclide, intorno al III secolo a.C..

Il Teorema di Dirichlet, dimostrato nel 1835, afferma che esistono infiniti numeri primi non solo nell'insieme dei numeri naturali, ma anche in ognuna delle progressioni aritmetiche del tipo $qm + a$, al variare di $m \in \mathbb{N}$, dove il periodo q è primo con a. In questa tesi dimostreremo che

se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ è una funzione periodica di periodo q, cioè $f(n+q) = f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, nulla sugli interi non primi con q, allora

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} = -\frac{1}{\phi(q)} \sum_{k=1}^{q-1} f(k), \tag{1}$$

dove $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi e ϕ è la funzione *phi di Eulero* che ad ogni q associa il numero dei naturali minori di q e primi con q.

Questo enunciato implica il Teorema di Dirichlet. Infatti, data la progressione aritmetica $qm + a$, scegliendo come $f(n)$ la funzione indicatrice di tale progressione, troviamo che il limite a secondo membro vale $-1/\phi(q)$. Poiché $\log(\sigma - 1)$ tende a $-\infty$, la serie a primo membro è divergente, e quindi necessariamente i primi nella progressione $qm + a$ sono infiniti.

Per dimostrare (1), mostreremo prima l'esistenza del limite a primo membro e poi che tale limite coincide proprio con il secondo membro.

Occupiamoci dunque dell'esistenza del limite

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} \tag{2}$$

Osserviamo che le funzioni aritmetiche f per cui il limite esiste formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

La strategia che useremo per dimostrare l'esistenza del limite è la seguente:

1. mostreremo che il limite esiste se f è periodica e totalmente moltiplicativa, cioè se $f(n+q) = f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f(nm) = f(n)f(m)$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$;

2. mostreremo quindi che ogni funzione periodica è combinazione lineare di funzioni totalmente moltiplicative.

Concentriamoci sul primo passo. Per il Teorema di de l'Hopital, vale

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} = \lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma-1) \sum_{p\in\mathcal{P}} \left(-\frac{f(p)\log p}{p^\sigma}\right).$$

Ponendo

$$\tilde{L}(f,s) := \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{f(p)\log p}{p^s} \qquad \text{e} \qquad L(f,s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{n^s} \tag{3}$$

mostreremo che

$$\tilde{L}(f,s) = -\frac{L'(f,s)}{L(f,s)} + h_f(s), \tag{4}$$

con $h_f(s)$ serie di Dirichlet assolutamente convergente per $Re(s) > 1/2$.

Se mostriamo che $L(f,s)$ si estende meromorficamente in un intorno di $s = 1$, la teoria dei residui ci permette immediatamente di provare l'esistenza del limite (2) e di osservare che

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma-1) \sum_{p\in\mathcal{P}} \left(-\frac{f(p)\log p}{p^\sigma}\right) = \operatorname*{Ord}_{s=1} L(a,s) \tag{5}$$

Vedremo che per ottenere l'estensione meromorfa di $L(f,s)$ sarà sufficiente la periodicità della funzione aritmetica f.

Passiamo al secondo punto, con l'obiettivo di mostrare che ogni funzione aritmetica periodica di periodo q è combinazione lineare di funzioni totalmente moltiplicative aventi lo stesso periodo q. A questo scopo, risulta utile la teoria dei caratteri dei gruppi abeliani finiti. Descriviamo brevemente ma in dettaglio tale teoria, che servirà anche in seguito per il calcolo effettivo del limite espresso al secondo membro di (1).

Un carattere di un gruppo abeliano finito G non è altro che un omomorfismo

$$\chi : G \to \mathbb{C}^*$$

del gruppo G a valori nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ dei numeri complessi non nulli.

Mostreremo che c'è una corrispondenza biunivoca naturale tra i caratteri del gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_q^\times$ degli elementi invertibili del gruppo $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ e le funzioni totalmente moltiplicative su $\mathbb{N}$ periodiche di periodo q e nulle sugli interi non primi con q dette quindi semplicemente *caratteri di Dirichlet*.

Poiché i caratteri di un gruppo abeliano finito formano una base ortogonale dello spazio di tutte le funzioni complesse definite sul gruppo in questione ne seguirà che fissato il periodo q i caratteri di Dirichlet formano una base delle funzioni totalmente moltiplicative di periodo q nulle sugli interi non primi con q.

Questo concluderà positivamente la questione dell'esistenza del limite che compare nel primo membro della (1).

Passeremo infine al calcolo del limite

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} = -\frac{1}{\phi(q)} \sum_{k=1}^{q-1} f(k)$$

Utilizzando l'ortogonalità dei caratteri mostreremo che l'espressione

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{k=1}^{q-1} f(k)$$

altro non è che il coefficiente nello sviluppo di $f(n)$

$$f = \sum_{\chi} c_\chi \chi \tag{6}$$

rispetto alla base ortogonale formata dai caratteri di Dirichlet χ del cosiddetto *carattere principale* χ_0, ossia del carattere associato al omomorfismo banale $\mathbb{Z}_q^\times \to \mathbb{C}^*$.

Poiché

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} = \sum_{\chi} c_\chi \operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi, s)$$

sarà sufficiente dimostrare che $\operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi_0, s) = -1$ e che per ogni carattere non principale χ risulta $\operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi_0, s) = 0$ ossia che $L(\chi, s)$ è olomorfa per $s = 1$ e

$$L(\chi, 1) \neq 0.$$

Mostriamo ora in dettaglio il contenuto della tesi.

Dopo aver richiamato alcuni risultati di base sulle funzioni aritmetiche e sulla teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa, nelle prime due sezioni del capitolo 2 introduciamo e studiamo le prime proprietà delle serie di Dirichlet generate da funzioni aritmetiche f limitate

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{n^s}.$$

L'approccio al teorema di Dirichlet che abbiamo utilizzato ci permette di lavorare con tali serie esclusivamente in presenza di convergenza assoluta, con una libertà di movimento altrimenti non concessa.

Nella sezione 3 del secondo capitolo studieremo l'estensione meromorfa delle trasformate di Mellin di funzioni della forma $u(x)/x^d$ con $u(x) \in C^\infty([0, +\infty[)$ rapidamente decrescenti per $x \to +\infty$.

Dopo aver studiato le principali proprietà della funzione Γ di Eulero (sezione 4) mostreremo nella sezione 5 l'estensione olomorfa o meromorfa delle serie di Dirichlet generate da funzioni aritmetiche f periodiche.

Entreremo nel vivo della tesi nel capitolo 3.

Nella prima sezione mostreremo che vale l'espressione in (4) e nella seconda osserveremo i risultati della teoria dei caratteri dei gruppi finiti necessari ai nostri fini.

Termineremo la dimostrazione del Teorema di Dirichlet nelle ultime due sezioni.

In particolare, nella sezione 3 scriveremo il limite (1) in funzione degli ordini in $s = 1$ delle serie di Dirichlet associate ai caratteri che compaiono nella scomposizione (6) di f. Infine, nell'ultima sezione, dimostreremo che $L(\chi_0, s)$ ha un polo semplice in $s = 1$ e che per ogni carattere non principale vale

$$L(\chi, 1) \neq 0.$$

A tal fine utilizzeremo il Teorema di Ingham, esponendone una dimostrazione semplificata descritta da Bateman in [7].

Indice

Capitolo 1

Prerequisiti

Definizione 1.0.1. Si dice *funzione aritmetica* una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Notazione: Il valore di una funzione aritmetica f sull'elemento n sarà indicato, a seconda dei casi, come $f(n)$ o f_n.

Definizione 1.0.2. La *convoluzione di Dirichlet* di due funzioni aritmetiche f e g è la funzione aritmetica $f * g$ definita come

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

Definizione 1.0.3. Una funzione f aritmetica è detta *totalmente moltiplicativa* se $f(mn) = f(m)f(n)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$. Se invece questa proprietà vale solo per m, n coprimi, allora la funzione è detta *moltiplicativa*.

Teorema 1.0.1 (Prodotto di Eulero)**.** *Per ogni funzione aritmetica f moltiplicativa vale l'identità*

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a [5, pag.59-60] $\square$

Teorema 1.0.2 (De l'Hopital)**.** *Sia I intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili su I, con $|g(x)| \to +\infty$ per $x \to \bar{x}$ e tali che*

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Allora vale $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) = l$.

Dimostrazione. Si veda l'articolo [6] $\square$

Teorema 1.0.3 (Liouville)**.** *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa limitata. Allora f è costante.*

Dimostrazione. Si veda [1, pag.118]. $\square$

Teorema 1.0.4 (Torinese di Cauchy)**.** *Se $f(z)$ è una funzione olomorfa sulla palla $B(z_0, \rho)$, allora su questa palla $f(z)$ è sviluppabile in serie di potenze.*

Dimostrazione. Si veda [1, pag.144]. $\square$

Teorema 1.0.5 (Weierstrass)**.** *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe su A aperto di $\mathbb{C}$. Suppongo che f_n converga a f uniformemente su ogni compatto di A. Allora f è olomorfa e la successione delle derivate (f'_n) converge uniformemente a f' sui compatti di A.*

Dimostrazione. Si veda [2, Pag. 234-235]. $\square$

Definizione 1.0.4. Sia $z_0 \in A$, con A aperto di $\mathbb{C}$. Sia f meromorfa su A, con $z_0 \in A$ singolarità isolata. Si definisce *residuo di f in z_0* e si indica con $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ il coefficiente a_{-1} dello sviluppo di Laurent in z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Proposizione 1.0.6. *Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa, con polo semplice in z_0. Allora*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)$$

Dimostrazione. Poiché z_0 è un polo semplice, i coefficienti a_n dello sviluppo di Laurent di f in z_0 sono nulli per $n < -1$. Osservo che, per $z \to z_0$

$$f(z)(z-z_0) = (z-z_0) \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-1}(z-z_0)^n \to a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

$\square$

Definizione 1.0.5. Data una funzione f meromorfa su un'insieme $A \subseteq \mathbb{C}$, dato $z_0 \in A$, si dice *ordine di f in z_0* il valore

$$\operatorname*{Ord}_{z=z_0} f(z) := \begin{cases} -n & \text{se } z_0 \text{ polo d'ordine } n; \\ 0 & \text{se } f \text{ olomorfa non nulla in } z_0 \\ n & \text{se } z_0 \text{ zero d'ordine } n. \end{cases}$$

Lemma 1.0.7. *Sia $g(z)$ una funzione meromorfa e sia z_0 un suo polo o un suo zero d'ordine n. Allora $g'(z)/g(z)$ ha polo semplice in z_0 e vale*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g'(z)}{g(z)} = \operatorname*{Ord}_{z=z_0} g(z)$$

Dimostrazione. Se z_0 è uno zero o un polo d'ordine n per g, allora esiste una funzione $h(z)$, olomorfa e non nulla in z_0, tale che $g(z) = (z - z_0)^n h(z)$, con $n > 0$ se z_0 è uno zero, $n < 0$ se è un polo. Allora

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n(z - z_0)^{n-1}h(z) + (z - z_0)^n h'(z)}{(z - z_0)^n h(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Dunque $g'(z)/g(z)$ ha un polo semplice in z_0 e il residuo in z_0 è proprio n. $\square$

Teorema 1.0.8 (Teorema dei residui)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ insieme aperto connesso limitato, con ∂D differenziabile a tratti, siano $z_1, ..., z_n \in D$, sia f olomorfa su $\overline{D} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$. Allora*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Dimostrazione. Si veda [1, pag. 196]. $\square$

Notazione: per $s \in \mathbb{C}$, indico con σ la sua parte reale e con τ la sua parte immaginaria.

Definizione 1.0.6. La *Zeta di Riemann* è la funzione definita su $\{\sigma > 1\}$ come

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

Definizione 1.0.7. È detta *funzione phi di Eulero* la funzione ϕ che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali minori di n e primi con n.

Capitolo 2

Serie di Dirichlet

Definizione 2.0.1. Si dice *serie di Dirichlet* una serie della forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \tag{2.1}$$

con i coefficienti $a_n \in \mathbb{C}$ e la variabile $s \in \mathbb{C}$.

2.1 Convergenza assoluta

Proposizione 2.1.1. *Se la serie di Dirichlet* (2.1) *converge assolutamente in* $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$*, allora converge assolutamente nel semipiano* $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_0\}$.

Dimostrazione. Considerando la serie dei moduli, basta osservare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < +\infty$$

□

Da questa proprietà segue immediatamente la correttezza delle seguenti definizioni.

Definizione 2.1.1. Una serie di Dirichlet ha *ascissa di convergenza assoluta* $\sigma_a := \inf\{x \in \mathbb{R}$ t.c. la serie converge assolutamente per $\sigma \geq x\}$.

La retta $\sigma = \sigma_a$ è detta *linea di assoluta convergenza.*

L'insieme $\sigma > \sigma_a$ è detto *semipiano di assoluta convergenza.*

Definizione 2.1.2. Una serie di Dirichlet è detta *assolutamente convergente* se $\sigma_a < +\infty$.

Definizione 2.1.3. Data f funzione aritmetica, chiamo *funzione generatrice di f* la serie di Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}$$

Proposizione 2.1.2. *Siano F e G funzioni generatrici rispettivamente di f e g, con ascisse di convergenza assoluta σ_F e σ_G. Allora la funzione generatrice H di $f*g$ converge assolutamente per $\sigma > \max\{\sigma_F, \sigma_G\}$ e coincide con $F \cdot G$.*

Dimostrazione. Per $\sigma > \sigma_0 := \max\{\sigma_F, \sigma_G\}$, la funzione $H(s)$ ha convergenza assoluta: infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(f*g)(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} |f(d)||g(n/d)| = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|f(d)|}{d^\sigma} \frac{|g(k)|}{k^\sigma} < +\infty$$

poiché $F(s)$ e $G(s)$ convergono assolutamente per $\sigma > \sigma_0$. In tali punti, vale

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(k)}{k^s} \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{g(m)}{m^s} \right) = \sum_k \sum_m \frac{f(k)}{k^s} \frac{g(m)}{m^s} = \\ &= \sum_n \frac{1}{n^s} \sum_{km=n} f(k)g(m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s} = H(s) \end{aligned}$$

□

2.2 Proprietà analitiche

Teorema 2.2.1. *La funzione $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}$ è olomorfa nel semipiano di assoluta convergenza $\sigma > \sigma_a$, con derivata*

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)\log n}{n^s}$$

Dimostrazione. Sia C un compatto del semipiano di assoluta convergenza $\{\sigma > \sigma_a\}$. Per $s \in C$ vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{s \in C} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_a}} < +\infty$$

cioè la serie ha convergenza normale e, dunque, uniforme. Per il teorema di Weierstrass 1.0.5, F è olomorfa e la serie delle derivate converge uniformemente alla derivata $F'(s)$, cioè

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)\log n}{n^s}$$

$\square$

Per induzione, la k-esima derivata nel semipiano $\sigma > \sigma_a$ è dunque

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)(\log n)^k}{n^s}$$

Teorema 2.2.2. *Sia $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}$, con $f(n) \geq 0$ $\forall n \geq n_0$, assolutamente convergente nel semipiano $\sigma > c$, con c finito. Se F è olomorfa in un intorno di $s = c$, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che la serie converge assolutamente nel semipiano $\sigma > c - \epsilon$.*

Dimostrazione. Si riporta la dimostrazione usata in [2, pag.237].

Poiché la serie converge assolutamente su $\sigma > c$, per il teorema 2.2.1 la serie è dunque olomorfa su questo semipiano. In particolare, lo è nel punto $a := 1 + c$. Poiché $F(s)$ è olomorfa in un intorno di c, esiste un $\epsilon > 0$ tale che $F(s)$ è olomorfa sulla palla $B(a, 1 + \epsilon)$. Per il Teorema Torinese di Cauchy 1.0.4, allora su tale palla $F(s)$ è sviluppabile in serie di potenze, in questo modo:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k$$

Esplicitando la k-esima derivata di F nel punto a

$$F^{(k)}(a) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)(\log n)^k n^{-a}$$

e sostituendola nell'espressione di $F(s)$ trovo la doppia serie

$$F(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a-s)^k}{k!} f(n)(\log n)^k n^{-a}$$

Questa espressione, in particolare, vale nel punto $s = c - \epsilon'$, con $0 < \epsilon' < \epsilon$. Poiché per ipotesi $f(n) \geq 0$ per $n \geq n_0$ e $a - s = 1 + \epsilon' > 0$, i termini della doppia serie sono non negativi e posso dunque scambiare le due sommatorie, ottenendo

$$F(c-\epsilon') = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(1+\epsilon')\log n]^k}{k!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^a} e^{(1+\epsilon')\log n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^{c-\epsilon'}}$$

Dunque la serie converge assolutamente per $s = c - \epsilon'$ e, di conseguenza, sul semipiano $\sigma > c - \epsilon'$.

$\square$

2.3 La trasformata di Mellin

Notazione: in questa sezione, utilizzeremo le notazioni seguenti:

- u, v sono funzioni sull'intervallo $(0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$;
- f, g sono funzioni su $B^1 := \{z \in \mathbb{C}\ t.c. |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$
- F, G sono funzioni sul piano complesso $\mathbb{C}$ o su suoi sottoinsiemi (es. semipiani di convergenza, $\mathbb{C}$ eccetto insieme discreto di punti, ecc...)

Definizione 2.3.1. La *Trasformata di Mellin* di una funzione $u : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ è data da

$$\{\mathcal{M}u\}(s) := \int_0^{+\infty} u(x)x^{s-1}dx = \int_0^{+\infty} u(x)x^s\ \frac{dx}{x}$$

La seconda espressione evidenzia come la trasformata di Mellin possa essere vista come una trasformata sul gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+$, grazie alla proprietà di invarianza $d(ax)/(ax) = dx/x$.

Definizione 2.3.2. Una funzione $u : (a, +\infty) \to \mathbb{C}$ si dice *rapidamente decrescente* se $u(x) = O(x^{-n})$, per $x \to +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.1. *Sia $u : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ rapidamente decrescente, sia $d := \min\{n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n u(x) \in C^\infty([0, +\infty))$. Allora la trasformata di Mellin di u $\{\mathcal{M}u\}(s)$ converge assolutamente su $\{s \in \mathbb{C}$ t.c. $\sigma := Re(s) > d\}$*

Dimostrazione. Indico con $\sigma = Re(s)$. Spezzo la trasformata di Mellin in due integrali, che studierò separatamente.

$$\{\mathcal{M}u\}(s) = \underbrace{\int_0^1 u(x)x^{s-1}dx}_{(I)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} u(x)x^{s-1}dx}_{(II)}$$

(II) Studio il comportamento della funzione integranda all'infinito.
Per $x \to +\infty$, poiché per ipotesi vale $|u(x)| = O(x^{-n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ricava che $|u(x)x^{s-1}| = O(x^{-n+\sigma-1})$. Dunque l'integrale *(II)* converge assolutamente per $\sigma < n + 1$. Ciò vale per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi *(II)* converge

assolutamente su tutto il piano complesso.

(I) Poiché la funzione $x^d u(x)$ è continua nel punto 0, allora l'integrale

$$\int_0^1 u(x)x^{s-1}dx = \int_0^1 u(x)x^d x^{s-d-1}dx$$

converge assolutamente per $Re(s-d-1) > 1$, cioè per $\sigma > d$.

Dunque l'integrale $\{\mathcal{M}u\}(s) = (I) + (II)$ converge assolutamente per $\sigma > d$. $\square$

Teorema 2.3.2. *Nelle ipotesi del teorema 2.3.1, la trasformata di Mellin* $\{\mathcal{M}u\}(s)$ *è olomorfa su* $\{s \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \sigma := Re(s) > d\}$.

Dimostrazione. Sia $f(x,\sigma,\tau) := u(x)x^{\sigma-1+i\tau}$. In questo modo, si ha che

$$\{\mathcal{M}u\}(s) = \int_0^{+\infty} f(x,\sigma,\tau)dx$$

Per mostrare che $\{\mathcal{M}u\}(s)$ è olomorfa e calcolarne la derivata, verifico la condizione di Cauchy-Riemann

$$i\frac{\partial}{\partial\sigma}\{\mathcal{M}u\}(s) = \frac{\partial}{\partial\tau}\{\mathcal{M}u\}(s)$$

$$\text{cioè se} \qquad i\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^{+\infty} f(x,\sigma,\tau)dx = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{+\infty} f(x,\sigma,\tau)dx$$

Per scambiare i simboli di derivata e integrale, userò il teorema della convergenza dominata.

Innanzitutto, calcolo le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma}(x,\sigma,\tau) = u(x)\log(x)x^{\sigma-1+i\tau} \qquad \frac{\partial f}{\partial\tau}(x,\sigma,\tau) = iu(x)\log(x)x^{\sigma-1+i\tau}$$

Come visto nella dimostrazione del teorema 2.3.1, per $\sigma > d$ la funzione $f(x,\sigma,\tau)$ è integrabile rispetto a x sull'intervallo $(0,+\infty)$.

Per $x \in (0,1)$, osservo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial\sigma}(x,\sigma,\tau)\right| &= \left|u(x)\log(x)x^{\sigma-1}\right| \leq \\ &\leq \left|u(x)\log(x)x^{d+\epsilon-1}\right| = \left|u(x)x^d\log(x)x^{\epsilon/2}x^{\epsilon/2-1}\right| =: g(x)\end{aligned}$$

con $g(x)$ integrabile su $(0,1)$ poiché $u(x)x^d$ continua e $\log(x)x^{\epsilon/2} \to 0$ per $x \to 0$. Applicando il teorema della convergenza dominata, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^1 f(x,\sigma,\tau)dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial\sigma}(x,\sigma,\tau)dx$$

Invece, per $x \in (1, +\infty)$, poiché $u(x)$ è rapidamente decrescente, per ogni σ, per ogni n naturale e per una certa costante c vale

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \sigma}(x, \sigma, \tau)\right| = \left|u(x)\log(x)x^{\sigma-1}\right| \le cx^{\sigma-1-n} =: h(x)$$

Scegliendo $n > \sigma$, $h(x)$ è integrabile su $(1, +\infty)$ e applicando il teorema della convergenza dominata si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\int_1^{+\infty} f(x, \sigma, \tau)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \sigma}(x, \sigma, \tau)dx$$

Dunque posso dire che

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\mathcal{M}u\right\}(s) = \frac{\partial}{\partial \sigma}\int_0^{+\infty} f(x, \sigma, \tau)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \sigma}(x, \sigma, \tau)dx$$

Con un ragionamento analogo trovo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\mathcal{M}u\right\}(s) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{+\infty} f(x, \sigma, \tau)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \tau}(x, \sigma, \tau)dx = \\ &= \int_0^{+\infty} i\frac{\partial f}{\partial \sigma}(x, \sigma, \tau)dx = i\frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\mathcal{M}u\right\}(s)\end{aligned}$$

dunque $\{\mathcal{M}u\}$ rispetta le condizioni di Cauchy-Riemann e la sua derivata è $\int_0^1 u(x)\log(x)x^{s-1}dx$. □

Teorema 2.3.3. *Nelle ipotesi del teorema 2.3.1, la trasformata di Mellin* $\{\mathcal{M}u\}(s)$ *si estende ad una funzione meromorfa con poli semplici negli interi* $\le d$.

Dimostrazione. Come visto nel teorema precedente, l'integrale $\int_1^{+\infty} u(x)x^{s-1}dx$ è olomorfo su tutto $\mathbb{C}$.

Per $\sigma > d$, studio la funzione $\int_0^1 u(x)x^{s-1}dx$. Sia $k \in \mathbb{N}$. Considero lo sviluppo di Taylor fino all'ordine k di $x^d u(x)$ in $x = 0$.

$$u(x)x^d = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j + r_k(x) \qquad \text{con} \qquad r_k(x) = o(x^k)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x)x^{s-1}dx &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^{j+s-d-1}dx + \int_0^1 r_k(x)x^{s-d-1}dx \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \int_0^1 x^{j+s-1-d}dx + \int_0^1 r_k(x)x^{s-d-1}dx \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{s+j-d} + \int_0^1 r_k(x)x^{s-d-1}dx\end{aligned}$$

L'ultimo integrale converge assolutamente per $\sigma > d-k$, poiché $|r_k(x)| = o(x^k)$. Inoltre derivando $r_k(x)x^{s-d-1}$ ottengo la funzione $r_k(x)\log(x)x^{s-d-1}$, il cui integrale tra 0 e 1 converge assolutamente per ogni $\sigma > d-k$. Dunque $\int_0^1 r_k(x)x^{s-d-1}dx$ è una funzione olomorfa sul semipiano $\sigma > d-k$.

L'espressione trovata permette di estendere la trasformata di Mellin tramite una funzione meromorfa su $\sigma > d-k$, con poli semplici negli interi $d-j$, con $j = 0, ..., k$ e relativi residui α_j. Poiché k è scelto arbitrariamente nell'insieme dei numeri naturali, è possibile estendere la trasformata di Mellin meromorficamente su tutto il piano complesso, con poli in tutti gli interi minori o uguali a d. $\square$

Lemma 2.3.4. *Se $f(z)$ è olomorfa su D^1, con $f(0) = 0$, allora $f(e^{-t})$ è rapidamente decrescente.*

Dimostrazione. Sia $f(z) = \alpha_1 z + o(z)$ lo sviluppo al primo ordine di f in 0. Allora per $z \to 0$ vale $|f(z)| \leq C|z|$. Ponendo $z = e^{-t}$, per $t \to +\infty$ si ha $|f(e^{-t})| \leq Ce^{-t} = O(t^{-n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $f(e^{-t})$ è rapidamente decrescente. $\square$

Lemma 2.3.5. *Sia $f : A \to \mathbb{C}$, con A intorno di $\overline{D^1}$, f meromorfa su A, olomorfa su B^1, con $f(0) = 0$. Sia $d = \min\{n \in \mathbb{N}$ tale che $f(z)(1-z)^n$ sia una funzione olomorfa in $1\}$. Allora la trasformata di Mellin*

$$\left\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\right\}(s) := \int_0^{+\infty} f(e^{-t})t^s \frac{dt}{t}$$

converge per $\sigma := Re(s) > d$ e si estende ad una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli semplici negli interi $\leq d$.

Dimostrazione. Per il lemma 2.3.4, la funzione $u(t) := f(e^{-t})$ è rapidamente decrescente. Poiché f è olomorfa su D^1, la funzione $u(t) \in \mathbb{C}^\infty((0, +\infty))$. Inoltre, grazie all'ipotesi su d, $t^d u(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, +\infty))$ Posso dunque applicare il teorema 2.3.3, ottenendo la tesi. $\square$

2.4 La funzione Gamma di Eulero

Al fine di descrivere l'estensione olomorfa di una serie di Dirichlet su tutto il piano complesso, attraverso la trasformata di Mellin, risulta necessario introdurre la funzione Γ di Eulero.

Definizione 2.4.1. Per $\sigma > 0$, la Gamma di Eulero è definita come

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

Proposizione 2.4.1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

Dimostrazione.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt = \qquad \text{(Integrazione per parti)}$$

$$= \left[t^s(-e^{-t})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} st^{s-1}(-e^{-t})dt = s\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = s\Gamma(s)$$

□

Corollario 2.4.2. *$\forall n \in \mathbb{N}$, vale $\Gamma(n+1) = n!$.*

Dimostrazione. Si osserva che $\Gamma(1) = 1$ e si applica la proposizione 2.4.1 □

Osservazione 2.4.3. *La funzione $\Gamma(s)$ è olomorfa sul semipiano $\sigma > 0$, con derivata*

$$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\log(t)dt$$

Teorema 2.4.4. *$\Gamma(s)$ si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, eccetto che negli interi non positivi, in cui ha poli semplici.*

Dimostrazione. $\Gamma(s)$ è esprimibile come una trasformata di Mellin:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^s\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} f(e^{-t})t^s\frac{dt}{t} = \left\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\right\}(s)$$

con $f(t) = t$. La funzione f è olomorfa su $\mathbb{C}$ (dunque non ha polo in 1) e vale $f(0) = 0$. Per il lemma 2.3.5, la funzione $\Gamma(s)$ è olomorfa su $\sigma > 0$ e si estende ad una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, con poli semplici negli interi negativi e in 0. □

Teorema 2.4.5 (Legge di riflessione di Eulero)**.**

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, dalla definizione di $\Gamma(s)$ osservo che, per $\sigma > 0$,

$$|\Gamma(s)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}t^s\frac{dt}{t}\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}t^\sigma\frac{dt}{t} = \Gamma(\sigma)$$

Usando la ricorrenza dimostrata in 2.4.1, valida per $\sigma > -1$, si osserva che

$$\lim_{|\tau|\to+\infty} |\Gamma(s)| = \lim_{|\tau|\to+\infty}\left|\frac{\Gamma(s+1)}{s}\right| = \lim_{|\tau|\to+\infty}\frac{|\Gamma(s+1)|}{|s|} \leq \lim_{|\tau|\to+\infty}\frac{\Gamma(\sigma+1)}{|s|} \leq$$

$$\leq \Gamma(2)\lim_{|\tau|\to+\infty}\frac{1}{|s|} = 0$$

uniformemente sull'insieme $\{\sigma \in \mathbb{R}, 0 \leq \sigma \leq 1\}$, poiché $|s| \to +\infty$ per $|\tau| \to +\infty$.

Adesso considero la funzione $F(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s)$. Poiché la funzione Γ ha poli semplici negli interi non positivi, $F(s)$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ e in $s = 0$ ha un polo semplice. Inoltre, poiché $\Gamma(1-s)$ è continua in 0, con valore 1, nel punto 0 il residuo di $F(s)$ è uguale al residuo di $\Gamma(s)$:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{s=0} F(s) = \operatorname*{Res}_{s=0} \Gamma(s) &= \lim_{s\to 0} s\Gamma(s) = \qquad \text{(Oss. 1.0.6)} \\ &= \lim_{s\to 0} \Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1. \end{aligned}$$

Per la proprietà di ricorrenza 2.4.1, $F(s) = -s\Gamma(s)\Gamma(-s)$, mentre

$$F(s+1) = \Gamma(s+1)\Gamma(-s) = s\Gamma(s)\Gamma(-s) = -F(s)$$

Riassumendo, F è una funzione con periodo 2, con poli semplici posti sugli interi, con residuo 1 sui pari, -1 sui dispari. Inoltre $F(s) \to 0$ per $|\tau| \to +\infty$. Anche la funzione $G(s) := \pi/(\sin(\pi s))$ possiede queste proprietà. Dunque la funzione $H(s) := F(s) - G(s)$ risulta olomorfa periodica limitata. Per il Teorema di Liouville 1.0.3, allora $H(s)$ è costante. In particolare, poiché $F(s)$ e $G(s)$ tendono a 0 per $\tau \to +\infty$, si ha che $H(s) \equiv 0$, cioè $F(s) = G(s)$. □

Corollario 2.4.6. *La funzione $\Gamma(z)$ non ha zeri*

Dimostrazione. Dalla legge di riflessione di Eulero 2.4.5, si osserva che

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z) = \pi$$

Se $z \in \mathbb{Z}^+$, allora $\Gamma(z) = (z-1)! \neq 0$. Se $z \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, allora $\Gamma(z)$ ha un polo per 2.4.4, dunque non è nulla.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, allora $\sin(\pi z)$, $\Gamma(z)$ e $\Gamma(1-z)$ sono olomorfe per il teorema 2.4.4. Dunque $\Gamma(z) \neq 0$. □

Corollario 2.4.7. *La funzione $1/\Gamma(s)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$, con zeri semplici negli interi non positivi.*

Dimostrazione. La funzione $\Gamma(s)$ è olomorfa per $\sigma > 0$ per l'osservazione 2.4.3 e si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, con poli semplici negli interi non positivi, per il teorema 2.4.4. Inoltre $\Gamma(s)$ non ha zeri per il corollario 2.4.6. Dunque la funzione $1/\Gamma(s)$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, con zeri semplici negli interi non positivi. □

2.5 Estensione sul piano complesso

Lemma 2.5.1. *Sia $f : A \to \mathbb{C}$, con A intorno di $\overline{D^1}$, meromorfa su A, olomorfa su D^1, con $f(0) = 0$ e poli semplici su ∂D^1. Se $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ è lo sviluppo di f in $z = 0$, allora $|a_n| = O(1)$.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ tale che $B(0, 1+\epsilon) \subseteq A$. Siano $z_1, ..., z_k$ i poli di f. Sia $D = B(0, 1+\epsilon) \setminus \overline{B(0,\epsilon)}$. Poiché $f(z)/z^{n+1}$ è olomorfa su $D \setminus \{z_1, ...z_k\}$, per il teorema dei residui 1.0.8 vale

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1+\epsilon} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

Per le proprietà dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$, vale

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1+\epsilon} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz - \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi}2\pi(1+\epsilon) \sup_{|z|=1+\epsilon} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| + \left|\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| = \\
&= (1+\epsilon)\frac{M}{(1+\epsilon)^{n+1}} + \left|\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{(1+\epsilon)^n} + \sum_{j=1}^{k} \left|\operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|
\end{aligned}$$

Il primo addendo tende a 0 per $n \to \infty$. Per quanto riguarda gli altri addendi, osservo che per j fissato, poiché z_j è un polo semplice di $f(z)$, esiste una funzione $g_j(z)$ olomorfa in z_j tale che $f(z) = g_j(z)/(z - z_j)$. Essendo z_j polo semplice anche per $f(z)/(z^{n+1})$, il residuo si calcola come

$$\operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \lim_{z \to z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}}(z - z_j) = \lim_{z \to z_j} \frac{g_j(z)}{z^{n+1}} = \frac{g_j(z_j)}{z_j^{n+1}}$$

e il suo modulo dunque è pari a $|g_j(z_j)|/|z_j^{n+1}| = |g_j(z_j)|$, limitato, costante al variare di $n \in \mathbb{N}$.

A questo punto si può affermare che $|a_n| = O(1)$. □

Mediante la Γ di Eulero è possibile mettere in relazione la trasformata $\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\}$ e la serie di Dirichlet avente gli stessi coefficienti dello sviluppo di Taylor di f in 0.

Teorema 2.5.2. *Sia $f : A \to \mathbb{C}$, con A intorno di $\overline{D^1}$, f meromorfa su A, olomorfa su D^1, con $f(0) = 0$ e poli semplici su ∂D^1. Considero il suo sviluppo in serie in* 0

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

e la serie di Dirichlet corrispondente

$$F(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Allora per $\sigma > 1$ la serie $F(s)$ converge assolutamente e vale:

$$\Gamma(s)F(s) = \int_0^{+\infty} f(e^{-t})t^s \frac{dt}{t} =: \left\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\right\}(s)$$

Dimostrazione. Per il lemma 2.5.1, i coefficienti a_n sono limitati, cioè $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{a_n}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n^\sigma}$$

converge per $\sigma > 1$, cioè $F(s)$ converge assolutamente per $\sigma > 1$.

Osservo che la funzione f rispetta le ipotesi del lemma 2.3.5, con $d = 0$ se f non ha polo in 1, oppure $d = 1$. In ogni caso, ciò significa che la trasformata $\{\mathcal{M}u\}(s)$ converge assolutamente per $\sigma > 1$. Per tali valori, sviluppando $f(e^{-t})$ in serie, si ottiene:

$$\{\mathcal{M}u\}(s) = \int_0^{+\infty} f(e^{-t})t^s \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nt} t^s \frac{dt}{t}$$

Per scambiare somma e integrale, applico il teorema della convergenza dominata alle funzioni

$$F_m(t) := \sum_{n=1}^{m} a_n e^{-nt} t^{s-1} \qquad F(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nt} t^{s-1}$$

Innanzitutto mostro che esiste una funzione $G(t)$ tale che $|F_m(t)| \leq G(t)$ per ogni $t \in (0, +\infty)$. Infatti

$$\begin{aligned}
|F_m(t)| &= \left|\sum_{n=1}^{m} a_n e^{-nt} t^{s-1}\right| \leq M \sum_{n=1}^{m} e^{-nt} t^{\sigma-1} \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} t^{\sigma-1} = \\
&= M \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - 1\right) t^{\sigma-1} = \qquad \text{(Serie geometrica con ragione } e^{-t} < 1\text{)} \\
&= M \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{\sigma-1} =: G(t)
\end{aligned}$$

Osservo che tale funzione $G(t)$ è integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} G(t)dt = \int_0^1 M\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^{\sigma-1}dt + \int_1^{+\infty} M\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^{\sigma-1}dt =$$
$$= \int_0^1 M\frac{t}{1-e^{-t}}e^{-t}t^{\sigma-2}dt + \int_1^{+\infty} M\frac{1}{1-e^{-t}}\left(e^{-t}t^{\sigma-1}\right)dt$$

Poiché le funzioni e^{-t} e $t/(1-e^{-t})$ sono continue e limitate nell'intervallo $(0,1)$, il primo integrale converge per $\sigma > 1$. Il secondo integrale converge per ogni σ, poiché la funzione $1/(1-e^{-t})$ è continua e limitata nell'intervallo $(1, +\infty)$, mentre la funzione e^{-t} è rapidamente decrescente.

A questo punto è possibile applicare il teorema della convergenza dominata, per cui vale

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty} F_m(t)dt = \int_0^{+\infty} F(t)dt$$

Posso dunque scambiare i segni di somma e integrale, ottenendo

$$\begin{aligned}\{\mathcal{M}u\}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-nt}t^s\frac{dt}{t} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^s\frac{du}{u} = \qquad \text{(Cambio di variabile } u = nt\text{)} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-u}u^s\frac{du}{u}\right) = F(s)\Gamma(s)\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5.3. *Suppongo che valgano le ipotesi del teorema 2.5.2.*

- *Se $f(z)$ è olomorfa in $z = 1$, allora $F(s)$ si estende olomorficamente su $\mathbb{C}$.*
- *Se $f(z)$ ha un polo in $z = 1$, allora $F(s)$ è olomorfa per $\sigma > 1$ e si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, con un unico polo semplice in $s = 1$;*

Dimostrazione. Nel teorema 2.5.2 si è visto che, per $\sigma > 1$, vale

$$\Gamma(s)F(s) = \int_0^{+\infty} f(e^{-t})t^s\frac{dt}{t} = \left\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\right\}(s)$$

da cui si ricava l'espressione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\right\}(s)$$

Studio separatamente le funzioni $1/\Gamma(s)$ e $\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\}(s)$.

Per il corollario 2.4.7, la funzione $1/\Gamma(s)$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, con zeri semplici negli interi non positivi.

Se $f(z)$ è olomorfa in $z = 1$, per il lemma 2.3.5, con $d = 0$, la trasformata $\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\}(s)$ si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$ con poli semplici negli interi minori o uguali di 0. In questi punti $1/\Gamma(s)$ ha zeri semplici, dunque il prodotto $F(s) = \{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\}(s)/\Gamma(s)$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

Se invece $f(z)$ ha polo in 1, semplice per ipotesi, per il lemma 2.3.5 la trasformata $\{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\}(s)$ avrà un ulteriore polo semplice in 1. Poiché $1/\Gamma(s)$ non si annulla in 1, il prodotto $F(s) = \{\mathcal{M}(f(e^{-t}))\}(s)/\Gamma(s)$ si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, con polo semplice in 1. $\square$

Esempio 2.1. La funzione ζ di Riemann è olomorfa per $\sigma > 1$ e si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, con un unico polo semplice in $s = 1$.

Dimostrazione. La funzione $\zeta(s)$ è la serie di Dirichlet generata dalla funzione aritmetica $\mathbf{1}(n) \equiv 1$. Osservo che la serie di potenze corrispondente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}(n) z^n = \frac{1}{1-z} - 1$$

rispetta le ipotesi del teorema 2.5.2, poiché è olomorfa su D^1, meromorfa su un suo intorno, si annulla in $z = 0$ e ha un polo semplice in $z = 1$. Allora per il teorema 2.5.3 la funzione $\zeta(s)$ è olomorfa per $\sigma > 1$ e ha estensione meromorfa su $\mathbb{C}$, con un polo semplice in $s = 1$. $\square$

Capitolo 3

Primi nelle progressioni aritmetiche

3.1 Le funzioni L

Solitamente, con la notazione $L(s,\chi)$ vengono indicate le serie di Dirichlet generate da particolari funzioni aritmetiche χ, che saranno definite in seguito. Con abuso di notazione, utilizzerò l'espressione $L(a,s)$ per indicare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

dove a_n è una qualsiasi funzione aritmetica.

Studio le proprietà di tali funzioni L, quando generate da particolari funzioni aritmetiche.

Definizione 3.1.1. $TMP_q := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ totalmente moltiplicative, con $a(n+q) = a(n)$, con $a(n) = 0$ se $MCD(n,q) > 1\}$.

Osservazione 3.1.1. *Se $a \in TMP_q$, allora a è limitata. In particolare $|a_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$*

Dimostrazione. a è limitata poiché periodica. Suppongo per assurdo che esista n tale che $|a_n| > 1$. Poiché a è totalmente moltiplicativa, si avrà

$$|a_{n^h}| = |a_n^h| = |a_n|^h \to +\infty \qquad \text{per } h \to +\infty$$

il che è assurdo poiché a è limitata. □

Studio le proprietà analitiche di $L(a,s)$.

Teorema 3.1.2. *Sia $a \in TMP_q$.*

- *Se $a_1 + ... + a_q \neq 0$, allora $L(a,s)$ si estende a una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, con polo semplice in 1;*

- *Se $a_1 + ... + a_q = 0$, allora $L(a,s)$ si estende a una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$;*

Dimostrazione. Considero la serie di potenze

$$r(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Osservo che

$$\begin{aligned}(1-z^q)r(z) &= (1-z^q)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+q} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+q} z^{n+q} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=q+1}^{+\infty} a_n z^n = \\ &= \sum_{n=1}^{q} a_n z^n =: p(z)\end{aligned}$$

L'espressione $r(z) = p(z)/(1-z^q)$ permette di estendere la funzione $r(z)$ a una funzione razionale su $\mathbb{C}$, con una singolarità nel punto 1. Studio questa singolarità nei due casi.

Se $a_1 + ... + a_q \neq 0$, poiché $1/(1-z^q)$ ha un polo semplice in 1, anche $r(z)$ ha un polo d'ordine 1 nel punto 1. Per il teorema 2.5.3, la funzione $L(a,s)$ è olomorfa sul semipiano $\sigma > 1$ e si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, con polo semplice nel punto 1.

Se invece $a_1 + ... + a_q = 0$, nel punto 1 lo zero semplice di $p(z)$ e il polo semplice di $1/(1-z^q)$ fanno sì che la singolarità della funzione $r(z)$ nel punto 1 sia apparente. Per il teorema 2.5.3, la funzione $L(a,s)$ è olomorfa sul semipiano $\sigma > 0$ e si estende olomorficamente su $\mathbb{C}$ □

Corollario 3.1.3. *Sia $a \in TMP_q$. Allora*

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1)\frac{L'(a,\sigma)}{L(a,\sigma)} = \operatorname*{Ord}_{s=1} L(a,s)$$

Dimostrazione. Per il lemma 1.0.7, se $L(a,s)$ ha polo o zero nel punto 1, allora la derivata logaritmica $L'(a,s)/L(a,s)$ ha polo semplice in 1, con residuo pari a $\operatorname*{Ord}_{s=1} L(a,s)$. Ricordando le proprietà del residuo in un polo semplice, ottengo dunque

$$\lim_{\sigma\to 1^+}(\sigma-1)\frac{L'(a,\sigma)}{L(a,\sigma)} = \operatorname*{Res}_{s=1}\frac{L'(a,\sigma)}{L(a,\sigma)} = \operatorname*{Ord}_{s=1} L(a,s)$$

Se invece $L(a,s)$ è olomorfa non nulla in 1, banalmente sia il limite sia l'ordine valgono 0. $\square$

La funzione di Von Mangoldt permetterà di mettere in relazione $L'(a,s)/L(a,s)$ con la serie

$$\sum_p \frac{a_p \log p}{p^s}$$

Definizione 3.1.2. La funzione di Von Mangoldt è definita come

$$\Lambda(n) =: \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ \log p & \text{se } n = p^k \quad \text{con } p \text{ primo} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osserva immediatamente che $\Lambda(n) \leq \log n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.1.4.

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

Dimostrazione. Se $n = 1$, la tesi è banalmente verificata. Altrimenti considero la scomposizione in fattori primi $n = p_1^{h_1} \cdot ... \cdot p_k^{h_k}$. I divisori di n saranno della forma $p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_k^{l_k}$, con $l_j \leq h_j$ per ogni j. Poiché la funzione di Von Mangoldt è non nulla solo sulle potenze dei primi, la somma si scriverà come

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{h_j} \Lambda(p_j^l) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{h_j} \log p_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \log(p_j^{h_j}) = \log(p_1^{h_1} \cdot ... \cdot p_k^{h_k}) = \log n$$

$\square$

Teorema 3.1.5. *Data $a \in TMP_q$, per $\sigma > 1$ vale*

$$\sum_p \frac{a_p \log p}{p^s} = -\frac{L'(a,s)}{L(a,s)} - h_a(s)$$

con h_a olomorfa per $\sigma > 1/2$.

Dimostrazione. La funzione $L(a, s)$ è olomorfa per $\sigma > 1$ per il teorema 3.1.2. Anche la funzione

$$l(a, s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s}$$

è olomorfa per $\sigma > 1$ poiché $\Lambda(n) \leq \log n$ e $|\log n| = O(n^\epsilon)$ per ogni $\epsilon > 0$.

Per il teorema 2.1.2, il prodotto di due serie di Dirichlet è la serie di Dirichlet avente come coefficiente la convoluzione dei coefficienti. In questo caso, ciò significa che

$$\begin{aligned}
L(a, s)l(a, s) &= \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{d|n} a_d \Lambda(d) a_{n/d} \right) \frac{1}{n^s} = \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n \left(\sum_{d|n} \Lambda(d) \right) \frac{1}{n^s} = && (a_n \text{ è tot. moltiplicativa}) \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{a_n \log n}{n^s} = && \text{(Lemma 3.1.4)} \\
&= -L'(a, s) && \text{(Teorema 2.2.1)}
\end{aligned}$$

La funzione

$$\frac{L'(a, s)}{L(a, s)} = -\sum_{n\geq 1} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s}$$

è olomorfa per $\sigma > 1$. In particolare, per definizione di $\Lambda(n)$,

$$\begin{aligned}
\frac{L'(a, s)}{L(a, s)} &= -\sum_{p} \sum_{m\geq 1} \frac{a_{p^m} \Lambda(p^m)}{p^{ms}} = \\
&= -\sum_{p} \sum_{m\geq 1} \frac{a_p^m \log p}{p^{ms}} = \\
&= -\sum_{p} \frac{a_p \log p}{p^s} - \underbrace{\sum_{p} \sum_{m\geq 2} \frac{a_p^m \log p}{p^{ms}}}_{h_a(s)}
\end{aligned}$$

Osservo che

$$
\begin{aligned}
|h_a(s)| &= \left| \sum_p \sum_{m\geq 2} \frac{a_p^m \log p}{p^{ms}} \right| \leq \sum_p \log(p) \sum_{m\geq 2} \left(\frac{|a_p|}{p^\sigma}\right)^m = \\
&= \sum_p \log(p) \frac{|a_p|^2}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1-\frac{|a_p|}{p^\sigma}} \leq \qquad (\text{Poiché } |a_n| \leq 1) \\
&\leq \sum_p \frac{\log p}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1-\frac{|a_p|}{p^\sigma}} \leq \sum_p \frac{\log p}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

che converge uniformemente per $\sigma > 1/2$ poiché $\log p = O(p^\epsilon)$ per ogni $\epsilon > 0$. Dunque $h_a(s)$ è olomorfa per $\sigma > 1/2$. □

Teorema 3.1.6. *Se $a \in TMP_q$, allora*

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma - 1) \sum_p \frac{a_p \log p}{p^\sigma} = -\operatorname*{Ord}_{s=1} L(a,s)$$

Dimostrazione. Dall'uguaglianza trovata in 3.1.5, moltiplicando entrambi i membri per $(\sigma - 1)$ e passando al limite si ottiene

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma - 1) \sum_p \frac{a_p \log p}{p^\sigma} = \lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma - 1) \left[-\frac{L'(a,\sigma)}{L(a,\sigma)} - h_a(s) \right] = -\operatorname*{Ord}_{s=1} L(a,s)$$

per quanto visto nel corollario 3.1.3 e poiché h_a è olomorfa per $\sigma > 1/2$. □

3.2 I caratteri di Dirichlet

Definizione 3.2.1. Si dice *carattere* di un gruppo finito G ogni omomorfismo $f : G \to \mathbb{C}^*$. Denoto con $\hat{G}$ l'insieme di tali caratteri.

Proposizione 3.2.1. *Se $|G| = n$, i caratteri di G assumono come valori le radici n-esime dell'unità.*

Dimostrazione. Per ogni $a \in G$ vale $a^n = e$, con e elemento neutro del gruppo. Dunque $f(a)^n = f(a^n) = f(e) = 1$, cioè $f(a)$ è una radice n-esima dell'unità. □

Lemma 3.2.2. *Sia $G = G_1 \times G_2$. Allora $|\hat{G}| = |\hat{G}_1||\hat{G}_2|$.*

Dimostrazione. Considero $\phi : \hat{G}_1 \times \hat{G}_2 \to \hat{G}$ tale che $\phi(f_1, f_2) := f_1 \otimes f_2$, dove $(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) := f_1(g_1)f_2(g_2)$.

Considero $\psi : \hat{G} \to \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$, tale che $\psi(f) = (f_{G_1}, f_{G_2})$, dove $f_{G_1}(g_1) = f(g_1, e)$ e $f_{G_2}(g_2) = f(e, g_2)$. Si verifica facilmente che f_{G_1} è un carattere di G_1 e f_{G_2} è un carattere di G_2.

Mostro che $\phi \circ \psi = id_{\hat{G}}$ e $\psi \circ \phi = id_{\hat{G}_1 \times \hat{G}_2}$. Per ogni $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$, vale

$$\begin{aligned}((\phi \circ \psi)(f))\,(g_1, g_2) &= (\phi(f_{G_1}, f_{G_2}))\,(g_1, g_2) = (f_{G_1} \otimes f_{G_2})(g_1, g_2) = \\ &= f_{G_1}(g_1) f_{G_2}(g_2) = f(g_1, e) f(e, g_2) = f(g_1, g_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\psi \circ \phi)(f_1, f_2))\,(g_1, g_2) &= (\psi(f_1 \otimes f_2))\,(g_1, g_2) = (f_{G_1}, f_{G_2})(g_1, g_2) = \\ &= (f_1 \otimes f_2)(g_1, e)(f_1 \otimes f_2)(e, g_2) = \\ &= f_1(g_1) f_2(e) f_1(e) f_2(g_2) = \\ &= f_1(g_1) f_2(g_2) = (f_1, f_2)(g_1, g_2)\end{aligned}$$

Ho così dimostrato che ϕ e ψ sono una l'inversa dell'altra e dunque che $|\hat{G}| = |\hat{G}_1||\hat{G}_2|$. □

Proposizione 3.2.3. *Se G è un gruppo abeliano con cardinalità n, allora esistono n caratteri di G.*

Dimostrazione. Poiché G è abeliano, si può scrivere come prodotto di gruppi ciclici $G_1, ..., G_k$ e vale $|G| = |G_1| \cdot ... \cdot |G_k|$. Indico con $\hat{G}$ l'insieme dei caratteri del gruppo G. Dimostro per induzione su k.

Se $k = 1$, cioè $G = G_1$ è ciclico, esiste un generatore a. Poiché per ogni $b \in G$ esiste $m \leq n$ tale che $b = a^m$, un carattere è ben definito una volta scelto il suo valore sull'elemento a. Poiché i valori possibili sono tutte e sole le n radici n-esime dell'unità, esistono n caratteri del gruppo G, cioè $|G| = |\hat{G}|$.

Suppongo che la tesi valga per tutti i gruppi che siano prodotto di k gruppi ciclici. Allora, posto $G' := G_1 \times ... \times G_k$, se $G = G_1 \times ... \times G_{k+1} = G' \times G_{k+1}$, per il lemma 3.2.2 e per ipotesi d'induzione, vale $|\hat{G}| = |\hat{G'}||\hat{G}_{k+1}| = |G'||G_{k+1}| = |G_1| \cdot ... \cdot |G_k| \cdot |G_{k+1}| = |G|$. □

L'insieme dei caratteri di un gruppo abeliano finito G forma un gruppo abeliano con l'operazione

$$(f, g) \mapsto fg \qquad \text{con } (fg)(a) := f(a)g(a)$$

con elemento neutro $f_0(n) \equiv 1$, detto *carattere principale*, e inverso f^{-1}, dato da $f^{-1}(a) := \overline{f(a)}$.

Proposizione 3.2.4. *Sia f carattere su G gruppo finito. Allora:*

$$\sum_{n \in G} f(n) = \begin{cases} |G| & \textit{se } f \equiv 1 \\ 0 & \textit{se invece esiste } n_0 \in G \textit{ tale che } f(n_0) \neq 1; \end{cases}$$

Dimostrazione. Si riporta la dimostrazione usata in [2, Pag.136].

Se $f(n) = 1$ per ogni $n \in G$, banalmente la somma sarà uguale alla cardinalità di G. Se invece esiste $n_0 \in G$ tale che $f(n_0) \neq 1$, allora

$$S := \sum_{n \in G} f(n) = \sum_{n \in G} f(n_0 n) = \sum_{n \in G} f(n_0) f(n) = f(n_0) S$$

Dunque $S(1 - f(n_0)) = 0$, che implica $S = 0$. □

Particolare importanza rivestono i caratteri del gruppo $\mathbb{Z}_q^\times$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Poiché questo insieme ha cardinalità $\phi(q)$, le osservazioni precedenti, in questo caso, mostrano che tali caratteri formano un gruppo di cardinalità $\phi(q)$ e assumono come valori le radici $\phi(q)$-esime dell'unità.

Definiti a priori solo sugli elementi di $\mathbb{Z}_q^\times$, possono essere estesi come funzioni aritmetiche sugli interi.

Definizione 3.2.2. Una funzione aritmetica χ è detta *carattere di Dirichlet modulo* q se estende un carattere f di $\mathbb{Z}_q^\times$ sugli interi in questo modo:

$$\chi(n) = \begin{cases} f(n + q\mathbb{Z}) & \text{se } MCD(q,n) = 1 \\ 0 & \text{se } MCD(q,n) \geq 2 \end{cases}$$

Definizione 3.2.3. Il *carattere principale di Dirichlet* χ_0 è dato da

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 1 & \text{se } MCD(q,n) = 1, \\ 0 & \text{se } MCD(q,n) \geq 2. \end{cases}$$

Identificheremo i caratteri di $\mathbb{Z}_q^\times$ con le loro estensioni su $\mathbb{Z}$, con l'ovvia distinzione per cui $\chi(n)$ indica la funzione aritmetica χ calcolata sull'intero n, mentre $\chi(n + q\mathbb{Z})$ è il carattere χ calcolato sulla classe di n nel gruppo $\mathbb{Z}_q^\times$.

Definizione 3.2.4. Indicheremo con $X(q)$ il gruppo dei $\phi(q)$ caratteri di Dirichlet modulo q.

Lemma 3.2.5. *$X(q) \subseteq TMP_q$, cioè i caratteri di Dirichlet sono funzioni totalmente moltiplicative, con periodo q, con $\chi(n) = 0$ se $MCD(n,q) = 1$.*

Dimostrazione. Basta verificare che ogni χ sia totalmente moltiplicativa, poiché le altre due proprietà sono vere per definizione. Sia f il carattere di $\mathbb{Z}_q^\times$ che definisce χ. Siano m, n interi.

Se $MCD(q,mn) \geq 2$, allora $MCD(q,m) \geq 2$ oppure $MCD(q,n) \geq 2$, dunque $\chi(m) = 0$ oppure $\chi(n) = 0$, per cui $\chi(mn) = 0 = \chi(m)\chi(n)$.

Se $MCD(q,mn) = 1$, allora $MCD(q,m) = MCD(q,n) = 1$ e vale $\chi(mn) = f(mn + q\mathbb{Z}) = f((m + q\mathbb{Z})(n + q\mathbb{Z})) = f(m + q\mathbb{Z})f(n + q\mathbb{Z}) = \chi(m)\chi(n)$ □

La proposizione 3.2.4 permette di ottenere i due risultati seguenti, riguardanti la somma dei valori $\chi(n)$ al variare di χ o al variare di n.

Corollario 3.2.6.

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } n \equiv 1 \pmod q \\ 0 & \textit{se } n \not\equiv 1 \pmod q \end{cases}$$

Dimostrazione. La funzione δ_n che ad ogni χ associa il valore $\chi(n)$ è un omomorfismo sul gruppo $X(q)$. Applicando 3.2.4 ottengo

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} |X(q)| = \phi(q) & \text{se } \delta_n \equiv 1 \\ 0 & \text{se esiste } \chi \in X(q) \text{ tale che } \delta_n(\chi) \neq 1 \end{cases}$$

Poiché $\delta_n \equiv 1$ se e solo se $n \equiv 1 \pmod q$, si ottiene la tesi. □

Corollario 3.2.7.

$$\sum_{n=1}^{q} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } \chi = \chi_0 \\ 0 & \textit{se } \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Ricordando che la funzione χ è l'estensione sugli interi di f, omomorfismo sul gruppo $\mathbb{Z}_q^\times$, e applicando 3.2.4 ottengo

$$\sum_{n=1}^{q} \chi(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_q^\times} f(n) = \begin{cases} |\mathbb{Z}_q^\times| = \phi(q) & \text{se } f \equiv 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché $f \equiv 1$ se e solo se $\chi = \chi_0$, la tesi è dimostrata. □

Proposizione 3.2.8.

$$\sum_{n=1}^{q} \chi_1(n)\overline{\chi_2(n)} = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Poiché il prodotto di due caratteri è un carattere, posto $\chi(n) := \chi_1(n)\overline{\chi_2(n)}$ per la proposizione 3.2.7, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{q} \chi_1(n)\overline{\chi_2(n)} = \sum_{n=1}^{q} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \text{se } \chi = \chi_0, \text{ cioè se } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{se } \chi \neq \chi_0, \text{ cioè se } \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}$$

□

3.3 Il Teorema di Dirichlet

Fissati $q \in \mathbb{N}$ e $a \in \{1, ..., q-1\}$ con $MCD(q, a) = 1$, considero la progressione aritmetica $\{qm + a,$ con $m \geq 0\}$. Il Teorema di Dirichlet afferma che tali progressioni contengono infiniti numeri primi.

Il risultato fondamentale da dimostrare è il seguente teorema

Teorema 3.3.1. *Se $f \in V_q := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ t.c. $f(n+q) = f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f(n) = 0$ se $MCD(n, q) > 1\}$, allora*

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} = -\frac{1}{\phi(q)} \sum_{k=1}^{q-1} f(k)$$

Per maggior semplicità, denoto con $\{i_1, ..., i_{\phi(q)}\}$ l'insieme dei numeri naturali minori di q e primi con q.

Assumendo valido il teorema 3.3.1, applicandolo alle funzioni indicatrici

$$I_{q,i_j}(n) := \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv i_j \pmod q, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \text{si ottiene}$$

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{I_{q,i_j}(p)}{p^\sigma} = -\frac{1}{\phi(q)} \sum_{k=1}^{q-1} I_{q,i_j}(k) = -\frac{1}{\phi(q)}$$

Poiché la funzione $(\log(\sigma - 1))^{-1} \to -\infty$ per $\sigma \to 1^+$, mentre il limite è un numero finito non nullo, necessariamente

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{I_{q,i_j}(p)}{p^\sigma} = +\infty$$

dunque la cardinalità dell'insieme degli indici su cui viene effettuata la somma è infinita. Poiché $I_{q,i_j}(n)$ è non nulla solo se $n \equiv i_j \pmod q$, tale insieme non è altro che $\{p \in \mathcal{P}$ t.c. $p \equiv i_j \pmod q\}$. È così dimostrato il Teorema di Dirichlet.

Per iniziare, osservo che V_q è uno spazio vettoriale di dimensione $\phi(q)$. Infatti una generica funzione $f \in V_q$ è ben definita se sono noti i suoi valori sui $\phi(q)$ elementi del gruppo $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. L'insieme delle funzioni indicatrici $\{I_{q,i_j}$, per $j = 1, ..., \phi(q)\}$, è una base di V_q e ogni funzione f può essere scritta come

$$f = f(i_1) I_{q,i_1} + ... + f(i_{\phi(q)}) I_{q,i_{\phi(q)}}$$

Tentare di dimostrare il teorema usando direttamente le funzioni indicatrici non dà risultati. Sarà necessario seguire un percorso diverso che parta, innanzitutto, dalle funzioni per cui il limite esiste.

Definizione 3.3.1.

$$D_q := \left\{ f \in V_q \quad | \text{ esiste finito } \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_p \frac{f(p)}{p^\sigma} \right\}$$

Usando la linearità del limite, è semplice verificare che D_q forma un sottospazio vettoriale di V_q.

Lemma 3.3.2. *Sia I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, siano $f : I \to \mathbb{C}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ derivabili su I. Suppongo che, dato $\bar{x} \in I$, valgano*

$$\lim_{x \to \bar{x}} |g(x)| = +\infty \text{ e } \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \quad \text{Allora } \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Dimostrazione. Considero parte reale e parte immaginaria di f e f'. Si ha

$$f(x) = f_r(x) + i f_i(x) \qquad \text{e} \qquad f'(x) = f'_r(x) + i f'_i(x)$$

Le coppie di funzioni f_r, g e f_i, g rispettano le ipotesi del Teorema di De L'Hopital 1.0.2, dunque si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f_r(x) + i f_i(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{f_r(x)}{g(x)} + i \frac{f_i(x)}{g(x)} \right) = \\ &= \lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{f'_r(x)}{g'(x)} + i \frac{f'_i(x)}{g'(x)} \right) = \qquad \text{(Teorema di De l'Hopital 1.0.2)} \\ &= \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'_r(x) + i f'_i(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.3. *$TMP_q \subseteq D_q$. Inoltre, per $a \in TMP_q$, vale la formula*

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_p \frac{a_p}{p^\sigma} = \operatorname*{Ord}_{s=1} L(a, s)$$

Dimostrazione. Poiché $(\log(\sigma - 1))^{-1} \to -\infty$ per $\sigma \to 1^+$, per il lemma 3.3.2, vale

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_p \frac{a_p}{p^\sigma} &= \lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \left(- \sum_p \frac{a_p \log p}{p^\sigma} \right) = \\ &= \operatorname*{Ord}_{s=1} L(a, s) \qquad \text{(Teorema 3.1.6)} \end{aligned}$$

□

Il prossimo obiettivo sarà dimostrare che le funzioni in TMP_q formano una base di V_q. Se ciò è vero, infatti, vale $V_q \subseteq D_q$, cioè il limite esisterà finito per tutte le funzioni f con periodo q, nulle sugli $n \in \mathbb{N}$ non coprimi con q. Infine, non resterà che calcolarne esplicitamente il valore.

A questo proposito, risultano estremamente utili le proprietà dei caratteri di Dirichlet. Avevamo già visto in 3.2.5 che l'insieme $X(q)$ dei caratteri di Dirichlet modulo q è incluso nell'insieme TMP_q. Mostro che è vero anche il viceversa.

Teorema 3.3.4. *Ogni $a \in TMP_q$ è un carattere di Dirichlet modulo q.*

Dimostrazione. Sia $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_q$. Affinché valga la definizione di carattere di Dirichlet, basta costruire un omomorfismo ψ dal gruppo $\mathbb{Z}_q^\times$ a S^1 tale che valga $a = \tilde{\psi} \circ \pi$, dove

$$\tilde{\psi}(n) = \begin{cases} \psi(n) & \text{se } MCD(n, q) = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $Q = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq q-1, MCD(n, q) = 1\}$. Per ogni $m \in \mathbb{Z}_q^\times$ esiste un unico $n \in Q$ tale che $[n]_{\mathbb{Z}_q^\times} = m$, cioè un unico rappresentante della classe di associatura di m in $\mathbb{Z}_q^\times$. Definisco $\psi(m) := a(n)$. La condizione $a = \tilde{\psi} \circ \pi$ è verificata per costruzione. Resta da mostrare che ψ è un omomorfismo.

Innanzitutto $\psi(1) \overset{def}{=} a(1) = 1$. Siano $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_q^\times$, con $m = m_1 m_2$. Siano n, n_1, n_2 i rispettivi rappresentanti in Q. Vale $[n] = [n_1][n_2] = [n_1 n_2]$, dunque

$$\psi(m) \overset{def}{=} a(n) = a(n_1 n_2 + qk) = a(n_1 n_2) = a(n_1)a(n_2) \overset{def}{=} \psi(m_1)\psi(m_2)$$

ψ è quindi un omomorfismo. $\square$

L'insieme $X(q)$ non solo è contenuto in V_q, per definizione di V_q, ma, come si mostrerà adesso, ne costituisce una base ortogonale rispetto alla forma sesquilineare $<, >$, definita su V_q in questo modo:

$$< f, g >= \sum_{k=1}^{q-1} f(k)\overline{g(k)}$$

Proposizione 3.3.5. *L'insieme $X(q)$ dei $\phi(q)$ caratteri di Dirichlet modulo q è una base ortogonale per V_q. Inoltre $< \chi, \chi >= \phi(q)$ per ogni $\chi \in X(q)$*

Dimostrazione. Usando la proprietà 3.2.8 si osserva che

$$< \chi_i, \chi_j >= \sum_{k=1}^{q-1} \chi_i(k)\overline{\chi_j(k)} = \begin{cases} \phi(q) & \text{se } \chi_i = \chi_j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In uno spazio vettoriale di dimensione $\phi(q)$, $\phi(q)$ vettori ortogonali formano automaticamente una base. $\square$

Si ricavano facilmente le espressioni per le coordinate di una funzione f rispetto a tale base.

Proposizione 3.3.6. *Sia* $f = \sum_\chi c_\chi \chi$.

$$\textit{Allora} \qquad c_\chi = \frac{1}{\phi(q)} < f, \chi >$$

$$\textit{In particolare} \qquad c_{\chi_0} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{k=1}^{q-1} f(k)$$

Dimostrazione. La tesi deriva direttamente dalla sesquilinearità della forma $<,>$, dall'ortogonalità dei caratteri e dalla proprietà $< \chi, \chi >= \phi(q)$ $\square$

Riepilogando, ho visto che valgono le inclusioni $X(q) = TMP_q \subseteq D_q$ e che l'insieme $X(q)$ è una base per V_q. Ciò significa che $V_q \subseteq D_q$, cioè il limite esiste finito per le funzioni aritmetiche f di periodo q, nulle sugli interi non coprimi con q.

È interessante notare che, nel caso in cui la funzione f sia proprio una delle funzioni I_{q,i_j}, la coordinata c_{χ_0} sia esattamente $1/\phi(q)$, cioè il valore finale del limite che si intende calcolare.

Adesso posso usare la base $X(q)$ per calcolare esplicitamente il limite.

Teorema 3.3.7. *Per ogni* $f \in V_q$ *vale*

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^\sigma} = \sum_\chi c_\chi \operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi, s)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_p \frac{f(p)}{p^\sigma} &= \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_\chi c_\chi \sum_p \frac{\chi(p)}{p^\sigma} = \qquad \text{(Oss. 3.3.6)} \\ &= \sum_\chi c_\chi \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^\sigma} = \\ &= \sum_\chi c_\chi \operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi, s) \qquad \text{(Teorema 3.3.3)} \end{aligned}$$

$\square$

Il teorema 3.3.1 che si intende dimostrare afferma che il limite valga $-c_{\chi_0}$. Ciò è vero se

$$\operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi, s) = \begin{cases} -1 & \text{se } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{se } \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

Dimostrare questa proprietà sarà l'obiettivo della prossima e ultima sezione.

3.4 Proprietà di $L(\chi, s)$

Teorema 3.4.1. *La funzione $L(\chi_0, s)$ è olomorfa per $\sigma > 1$ e si estende ad una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, con polo semplice in 1.*
La funzione $L(\chi, s)$, con $\chi \neq \chi_0$, è olomorfa per $\sigma > 0$ e si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Usando il corollario 3.2.7 e il teorema 3.1.2, si ha che:

- Se $\chi \neq \chi_0$, allora $\chi(1) + ... + \chi(q)$=0 e dunque $L(\chi, s)$ si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, con polo semplice in 1;

- Se $\chi = \chi_0$, allora $\chi(1) + ... + \chi(q) = \phi(q) \neq 0$ e dunque $L(\chi, s)$ si estende olomorficamente su $\mathbb{C}$.

□

Questa prima proprietà permette di dire che $\operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi_0, s) = -1$ e che $\operatorname*{Ord}_{s=1} L(\chi, s) \geq 0$. Resta da mostrare che, per $\chi \neq \chi_0$, $L(\chi, 1) \neq 0$.

Per farlo, userò il procedimento descritto da P.T. Bateman nell'articolo [7], dimostrando il teorema di Ingham.

Lemma 3.4.2. *La serie*

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

diverge.

Dimostrazione. Poiché la funzione aritmetica costante $\mathbf{1}(n) \equiv 1$ è totalmente moltiplicativa, osservo che per il teorema 3.1.5 vale

$$\sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} = -\frac{L'(\mathbf{1}, s)}{L(\mathbf{1}, s)} - h_{\mathbf{1}}(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - h_{\mathbf{1}}(s),$$

con $h_{\mathbf{1}}(s)$ olomorfa in $s = 1$. Come visto nell'esempio 2.1, la funzione $\zeta(s)$ ha un polo semplice in $s = 1$, dunque anche $\zeta'(s)/\zeta(s)$ ha un polo in $s = 1$ e valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\log(\sigma - 1)} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} &= \lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \left(- \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} \right) = && \text{(De l'Hopital 1.0.2)} \\
&= \lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \\
&= \operatorname*{Res}_{s=1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = && \text{(Prop. 1.0.6)} \\
&= \operatorname*{Ord}_{s=1} \zeta(s) = && \text{(Lemma 1.0.7)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Dunque il limite è finito non nullo e poiché per $\sigma \to 1$ si ha $1/\log(\sigma - 1) \to -\infty$, necessariamente vale

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} = +\infty,$$

da cui segue che la serie $\sum_p 1/p$ diverge. $\square$

Teorema 3.4.3 (Ingham)**.** *Sia $a(n)$ una funzione aritmetica totalmente moltiplicativa limitata. Suppongo che $L(a, s)$ sia assolutamente convergente per $\sigma > 1$. Se $L(a, s)$ ha estensione olomorfa su un intorno del semipiano $\{\sigma \geq 1/2\}$, allora $L(a, 1) \neq 0$.*

Dimostrazione. Suppongo per assurdo che $L(a, 1) = 0$.
La funzione $L^*(a, s) := L(\overline{a}, s) = \overline{L(a, \overline{s})}$ è olomorfa su un intorno di $\{\sigma \geq 1/2\}$, con uno zero semplice in $s = 1$. La funzione $F(s) = \zeta(s)^2 L(a, s) L^*(a, s)$ è olomorfa sullo stesso intorno, poiché il polo doppio di $\zeta(s)^2$ in $s = 1$ è annullato dagli zeri di L e L^*. Mostro che $F(s)$ si può scrivere come serie di Dirichlet a termini positivi. Per $\sigma > 1$ vale

$$\begin{aligned}
F(s) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \right)^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\bar{a}(n)}{n^s} \right) = \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-2} \left(1 - \frac{a(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\bar{a}(p)}{p^s} \right)^{-1} = \qquad (*)
\end{aligned}$$

A partire da questa espressione, dimostro prima che $F(s)$ è una serie di Dirichlet a termini non negativi e poi che i coefficienti relativi ai termini p^2, con p primo, sono maggiori o uguali a 1.

Considero lo sviluppo di Taylor di $\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} z^n/n$. Allora

$$\frac{1}{1-z} = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right)$$

Applicando questo sviluppo per $z = 1/p^s$, $z = a(p)/p^s$ e $z = \bar{a}(p)/p^s$, dall'espressione (*) ottengo

$$\begin{aligned}
F(s) &= \prod_p \exp\left(2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/p^s)^k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a(p)/p^s)^k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\bar{a}(p)/p^s)^k}{k}\right) = \\
&= \prod_p \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 + a(p)^k + \bar{a}(p)^k}{kp^{ks}}\right) = \\
&= \prod_p \left[1 + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 + a(p)^k + \bar{a}(p)^k}{kp^{ks}}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 + a(p)^k + \bar{a}(p)^k}{kp^{ks}}\right)^2 + ...\right]
\end{aligned}$$

Poiché $F(s)$ è prodotto di serie di Dirichlet, è della forma $\sum_{n=1}^{+\infty} b(n)n^{-s}$. Poiché $a(n)$ è totalmente moltiplicativa limitata, vale $|a(n)| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque è non negativo il termine

$$2 + a(p)^k + \bar{a}(p)^k = 2 + 2Re(a(p)^k) \geq 0$$

e dunque $b(n) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Riassumendo, $F(s)$ è una serie di Dirichlet a coefficienti non negativi, convergente per $\sigma > 1$, olomorfa su un intorno di $\{\sigma \geq 1/2\}$. Per il teorema 2.2.2, tale serie converge nel punto $s = 1/2$.

Dall'espressione $(*)$, tramite lo sviluppo di Taylor $1/(1-z) = \sum_{n\geq 0} z^n$, applicato nei tre casi $z = 1/p^s$, $z = a(p)/p^s$ e $z = \bar{a}(p)/p^s$, si ha

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + ...\right)\left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p)^2}{p^{2s}} + ...\right)\left(1 + \frac{\bar{a}(p)}{p^s} + \frac{\bar{a}(p)^2}{p^{2s}} + ...\right)$$

da cui si ricava il coefficiente del termine p^2-esimo, cioè

$$\begin{aligned}
b(p^2) &= 3 + 2\cdot a(p) + 2\cdot \bar{a}(p) + a(p)^2 + a(p)\cdot\bar{a}(p) + \bar{a}(p)^2 = \\
&= 2 - a(p)\bar{a}(p) + [1 + a(p) + \bar{a}(p)]^2 \geq \\
&\geq 2 - |a(p)|^2 \geq 1
\end{aligned}$$

Nel punto $s = 1/2$ la serie diverge. Infatti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n^{1/2}} \geq \sum_p \frac{b(p^2)}{p} \geq \sum_p \frac{1}{p} = +\infty \qquad \text{(Lemma 3.4.2)}$$

$\square$

Un generico carattere non principale χ è totalmente moltiplicativo e limitato; la corrispondente funzione $L(\chi, s)$ è assolutamente convergente per $\sigma > 1$ e per il teorema 3.1.2 si estende a una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$. Il teorema di Ingham garantisce quindi che $L(\chi, 1) \neq 0$.

È interessante notare che il Teorema di Ingham 3.4.3 è ottimale, nel senso che non vale se la costante $1/2$ è sostituita da un numero reale $c > 1/2$. Si può dimostrare ciò con un controesempio, che coinvolge la funzione di Liouville.

Definizione 3.4.1. È detta *funzione di Liouville* la funzione che, data la scomposizione in fattori primi $n = p_1^{e_1}...p_r^{e_r}$, associa ad n il valore

$$\lambda(n) := (-1)^{\sum_{k=1}^{r} e_k}$$

Osservazione 3.4.4. *$\lambda(n)$ è totalmente moltiplicativa e vale*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n \textit{ è un quadrato;} \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Proposizione 3.4.5. *$L(\lambda, s)$ è assolutamente convergente e olomorfa sul semipiano $\{\sigma > 1\}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che $|\lambda(n)| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'olomorfia è conseguenza del teorema 2.2.1. $\square$

Proposizione 3.4.6.

$$L(\lambda, s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

Dimostrazione. Per $\sigma > 1$ vale

$$\begin{aligned}
L(\lambda, s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda * \mathbf{1})(n)}{n^s} = && \text{(Prop. 2.1.2)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2)^s} = && \text{(Oss. 3.4.4)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \zeta(2s)
\end{aligned}$$

□

Corollario 3.4.7. *$L(\lambda, s)$ si estende meromorficamente su $\mathbb{C}$, ha uno zero in $s = 1$ e un polo in $s = 1/2$.*

A questo punto posso mostrare che il Teorema di Ingham 3.4.3 è ottimale. Suppongo per assurdo che il teorema continui a valere, pur avendo come ipotesi che la serie abbia estensione olomorfa su un intorno di $\{\sigma \geq c\}$, con $c > 1/2$. Allora la funzione $\lambda(n)$ rispetta tutte le ipotesi, perché è totalmente moltiplicativa, perché $L(\lambda, s)$ è assolutamente convergente per $\sigma > 1$, con estensione olomorfa su $\{\sigma \geq 1/2\}$. Allora $L(\lambda, 1) \neq 0$, il che è assurdo poiché $L(\lambda, 1) = 0$.

Bibliografia

[1] Theodore W. Gamelin. *Complex Analysis*. Springer, 2003.

[2] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1976.

[3] Jean Pierre Serre. *A course in Arithmetic*. Springer, 1973.

[4] Gerald Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*. Cambridge University Press, 1995.

[5] Marius Overholt. *A Course in Analytic Number Theory*. American Mathematical Society, 2014.

[6] Angus Ellis Taylor. *L'Hospital's rule*. The American Mathematical Monthly, Gennaio 1952

[7] Paul T. Bateman. *Theorem of Ingham implying that Dirichlet's L-Functions have no zeros with real part one*. Le Enseignement Mathematique, 1997