

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Meccanismi di Trasporto dell'Energia in Astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Silvia Onorato

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Appello III
Anno accademico 2017-2018

Contents

Introduzione	3
1 Trasporto conduttivo	3
2 Trasporto radiativo negli interni stellari	4
2.1 Equazione del trasporto radiativo negli interni stellari	5
3 Opacità	6
3.1 Assorbimento Legato-Legato (BB)	7
3.2 Assorbimento Legato-Libero (BF)	7
3.3 Assorbimento Libero-Libero (FF)	7
3.4 Diffusione (scattering)	8
3.5 Leggi di Kramers	8
4 Trasporto radiativo nelle atmosfere stellari	9
4.1 Equazione del trasporto radiativo nelle atmosfere stellari	10
5 Trasporto convettivo	12
5.1 Gradiente adiabatico	12
5.2 Criterio di Schwarzschild	14
5.3 Equazione del flusso convettivo	16
Bibliografia	18

Abstract

Nel corso di tale trattazione verranno descritti i principali meccanismi di trasporto dell'energia negli interni e nelle atmosfere stellari, quali conduzione elettronica, trasporto radiativo e trasporto convettivo, discutendo le diverse condizioni in cui si verificano e le relative implicazioni.

Introduzione

Le stelle sono i costituenti fondamentali dell'Universo, sfere di gas in equilibrio idrostatico formatesi per collasso gravitazionale di nubi molecolari presenti nel mezzo interstellare delle galassie. Sono fatte essenzialmente di idrogeno (75%), elio (23%) e una piccola frazione di metalli, gli elementi più pesanti dell'elio (2%). La struttura di una stella può essere rappresentata schematicamente con un modello a due componenti: un nucleo di piccole dimensioni, ad alta temperatura, che produce energia e un involucro di dimensioni maggiori che la trasporta in superficie, dove viene poi irradiata.

Il trasporto di tale energia può avvenire in modi differenti, a seconda delle condizioni della struttura stellare:

MECCANISMO TRASPORTO	AGENTE
Conduzione	Elettroni
Radiazione	Fotoni
Convezione	Celle di gas

La convezione è descrivibile con lo spostamento verso la superficie di "celle" di gas, più calde della materia circostante, che si espandono adiabaticamente e che poi si dissolvono cedendo calore all'ambiente esterno. Conduzione e radiazione, invece, si basano sulla collisione di particelle energetiche con altre di minore energia.

Negli interni stellari, inoltre, potrebbe sembrare che il meccanismo principale sia la conduzione, visto che l'energia degli elettroni è molto maggiore di quella dei fotoni, tuttavia è necessario considerare il **libero cammino medio** (LCM), cioè la distanza media percorsa da una particella fra due urti successivi. Gli elettroni hanno un libero cammino medio molto minore di quello dei fotoni, cosa che impedisce loro di diffondere rapidamente l'energia. Quindi, la conduzione risulta essere un fenomeno trascurabile negli interni stellari, tranne che nel caso di *gas degeneri*.

1 Trasporto conduttivo

La meccanica quantistica prevede che, in condizioni di elevata degenerazione, quasi tutti gli stati di energia inferiori a un valore caratteristico detto **energia di Fermi**, siano occupati. Questo implica che un elettrone avente energia inferiore a quella di Fermi, interagendo con un altro, produca, con elevata probabilità, solamente uno scambio di livelli energetici fra i due, essendo questi già occupati dalle stesse particelle. Solo qualora l'interazione consenta all'elettrone meno energetico di occupare un livello libero (molto vicino o poco superiore a quello di Fermi) lo stato finale risulta diverso da quello iniziale, in quanto le due particelle occupano dei livelli energetici diversi da quelli di partenza. Essendo quest'ultimo caso particolarmente raro in ambiente degeneri, l'elettrone riesce a percorrere una distanza molto maggiore rispetto a quella che avrebbe compiuto in ambiente di gas perfetto prima di effettuare un'interazione efficace, aumentando così il suo LCM e l'efficienza della conduzione. Questo è quanto si verifica negli strati interni di una *Nana Bianca*, costituiti di materia degeneri.

Ricordiamo che la condizione di degenerazione può essere scritta come:

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < D \quad (1)$$

con $D = 1.3 \cdot 10^5 \text{ K cm}^2 \text{ g}^{-2/3}$.

L'efficienza del processo è tale che queste zone risultano essere quasi isoterme, con la temperatura che diminuisce significativamente solo negli strati superficiali non degeneri (*Figure 1*). L'envelope trasferisce il calore in modo meno efficiente, causando lente perdite di energia. Infine, il forte gradiente di temperatura vicino alla superficie crea delle zone di convezione.

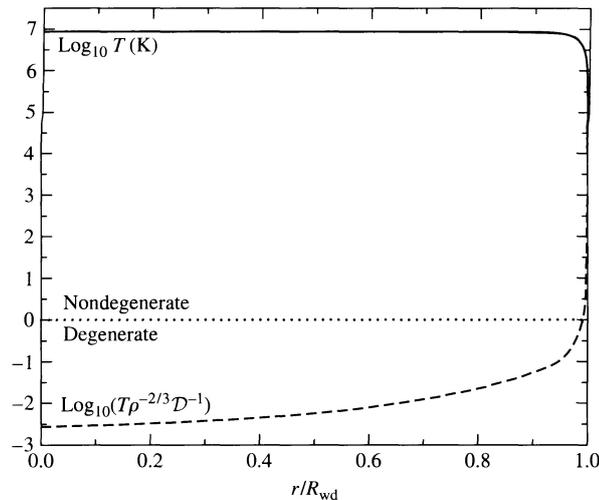


Figure 1: Temperatura e grado di degenerazione all'interno di un modello di Nana Bianca. La linea punteggiata orizzontale segna il confine tra degenerazione e non degenerazione come descritto dall'equazione (1).

2 Trasporto radiativo negli interni stellari

Mentre i fotoni si diffondono verso l'esterno attraverso il materiale stellare, seguono un percorso casuale chiamato **random walk**. La *Figure 2* mostra un fotone che subisce uno spostamento vettoriale netto d come risultato degli N passi diretti casualmente, ciascuno di lunghezza ℓ (libero cammino medio):

$$\vec{d} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \dots + \vec{\ell}_N$$

Prendendo il prodotto scalare di d con se stesso otteniamo:

$$\begin{aligned}
\vec{d} \cdot \vec{d} &= \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_N \\
&\quad + \vec{\ell}_2 \cdot \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 \cdot \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_2 \cdot \vec{\ell}_N \\
&\quad + \dots + \vec{\ell}_N \cdot \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_N \cdot \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_N \cdot \vec{\ell}_N \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{\ell}_i \cdot \vec{\ell}_j
\end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}
d^2 &= N\ell^2 + \ell^2 [\cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} + \dots + \cos \theta_{1N} \\
&\quad + \cos \theta_{21} + \cos \theta_{23} + \dots + \cos \theta_{2N} \\
&\quad + \dots + \cos \theta_{N1} + \cos \theta_{N2} + \dots + \cos \theta_{N(N-1)}] \\
&= N\ell^2 + \ell^2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \cos \theta_{ij}
\end{aligned}$$

dove θ_{ij} è l'angolo tra il vettore $\vec{\ell}_i$ e $\vec{\ell}_j$.

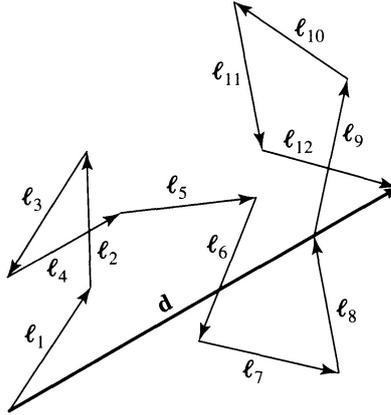


Figure 2: Spostamento \vec{d} di un fotone che si muove casualmente.

Per un gran numero di scambi diretti casualmente, la somma dei coseni tende a zero, dando come risultato uno spostamento d correlato alla dimensione di ogni passo ℓ :

$$d = \ell\sqrt{N}$$

Ne consegue che il trasporto di energia per via radiativa può essere poco efficiente e che non bisogna pensarlo come un flusso ordinato di fotoni che si propaga verso l'esterno alla velocità della luce; infatti, i fotoni prodotti nel nucleo del Sole impiegano 10^6 anni per arrivare in superficie.

2.1 Equazione del trasporto radiativo negli interni stellari

Il **gradiente di pressione radiativo** è dato da:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{rad},$$

dove κ è l'opacità della materia stellare e F_{rad} il flusso radiativo verso l'esterno. Inoltre, differenziando l'equazione:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4 \quad (2)$$

con $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.6 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$, dove $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann, vediamo che il gradiente di pressione radiativo può anche essere espresso come:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr}.$$

Uguagliando le due relazioni, otteniamo:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} F_{rad}.$$

Infine, se usiamo l'espressione del flusso radiativo scritto in termini della luminosità radiativa locale della stella al raggio r ,

$$F_{rad} = \frac{L_r}{4\pi r^2},$$

il **gradiente termico per il trasporto radiativo** diventa:

$$\boxed{\left. \frac{dT}{dr} \right|_{rad} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}} \quad (3)$$

All'aumentare del flusso o dell'opacità, il gradiente di temperatura deve diventare più ripido (più negativo) se la radiazione deve trasportare tutta la luminosità prodotta verso l'esterno. La stessa situazione vale quando aumenta la densità o diminuisce la temperatura.

3 Opacità

L'opacità della materia stellare è una misura della resistenza offerta dalla materia al passaggio di radiazione di data frequenza ed è quantificata tramite il *coefficiente monocromatico di assorbimento per unità di massa e area* κ_ν , già visto precedentemente.

L'opacità è causata da una molteplicità di processi atomici che, schematicamente, possono essere di due tipi:

- **Assorbimento:** il fotone viene assorbito e perde la propria identità (non riappare più alla frequenza ν che aveva quando è stato assorbito).
- **Diffusione:** il fotone viene deviato, causando una diminuzione di flusso nella radiazione osservata.

In maggior dettaglio, i processi si distinguono in:

PROCESSO	DESCRIZIONE	PROCESSO INVERSO
<i>Assorbimento Legato-Legato (BB)</i>	Fotoeccitazione	Emissione
<i>Assorbimento Legato-Libero (BF)</i>	Fotoionizzazione	Ricombinazione
<i>Assorbimento Libero-Libero (FF)</i>		Bremsstrahlung
<i>Diffusione (scattering)</i>	Effetto Compton	

3.1 Assorbimento Legato-Legato (BB)

È un processo di assorbimento selettivo, che si verifica solo quando un elettrone in uno stato di energia E_1 assorbe un fotone di data frequenza ν_{BB} e si porta in uno stato di energia superiore E_2 :

$$h\nu_{BB} = E_2 - E_1$$

Si tratta di un fenomeno importante nelle atmosfere stellari, poiché causa delle *righe spettrali*, ma poco rilevante negli interni dove, essendoci temperature più alte, gran parte degli atomi sono ionizzati e pochi elettroni si trovano nello stato legato.

3.2 Assorbimento Legato-Libero (BF)

È un processo detto **fotoionizzazione** e si verifica quando un elettrone, posto in uno stato legato di energia E_1 , assorbe un fotone di energia superiore al potenziale di ionizzazione χ_{ion} , portandosi su un'orbita libera di energia E_3 :

$$h\nu_{BF} = E_3 - E_1 > \chi_{ion}$$

L'elettrone, a seconda delle condizioni dell'ambiente in cui si viene a trovare, potrà poi perdere parte della sua energia cinetica collidendo con le particelle circostanti ed essere ricatturato da un altro atomo (**ricombinazione**) emettendo un fotone di energia minore. Questo processo, dunque, degrada l'energia.

3.3 Assorbimento Libero-Libero (FF)

Si verifica quando un elettrone libero avente energia E_3 assorbe un fotone di energia $h\nu_{FF}$ e si porta su un altro stato libero E_4 :

$$h\nu_{FF} = E_4 - E_3$$

In questo caso, non ci sono restrizioni per l'energia del fotone; l'unica condizione necessaria affinché avvenga questo fenomeno è che l'elettrone si trovi nel campo elettrico di uno ione, la cui presenza garantisce la conservazione della quantità di moto.

3.4 Diffusione (scattering)

Dal punto di vista classico, il processo è rappresentabile come una collisione tra due particelle (fotone-elettrone) ed è legato alla **sezione d'urto Thomson** dell'elettrone, che non dipende dalla frequenza del fotone. Quindi, lo scattering avviene in egual modo a tutte le frequenze. Inoltre, se l'energia del fotone di frequenza ν_s è tale che

$$h\nu_s \ll mc^2$$

dove m è la massa della particella con cui il fotone urta, allora la particella praticamente non si muove. Questo vale quasi sempre negli interni stellari, tranne nelle zone ad altissima temperatura, dove i fotoni sono molto energetici. Se i fotoni coinvolti nella collisione hanno energie elevate, lo scattering diventa poco efficiente e gli effetti dell'elettrodinamica quantistica riducono la sezione d'urto Thomson. Si deve usare, in questo caso, la **sezione d'urto di Klein-Nishina**, derivante dalla meccanica quantistica relativistica.

L'effetto di questo processo è di ritardare l'uscita del fotone dalla stella perché ne viene continuamente cambiata la direzione, diminuendo l'intensità del fascio di radiazione nella direzione di propagazione.

3.5 Leggi di Kramers

Mediante una complessa caratterizzazione di questi processi, è possibile ottenere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_{FF} \propto 10^{22} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_E \propto 0.2(1+X) \end{cases}$$

dove X è l'abbondanza in massa di H, Y quella di He e Z quella dei metalli. È, infine, opportuno fare alcune considerazioni:

- κ_E prevale su κ_{BF} e κ_{FF} quando la densità è bassa e/o la temperatura è alta.
- Tutte le relazioni dipendono da $(1+X)$, perché tutte dipendono dal numero di elettroni, in quanto $\mu_e = \frac{2}{X+1}$ dove μ_e è il peso molecolare medio degli elettroni.
- κ_{BF} dipende da Z perché negli interni stellari H e He sono quasi sempre ionizzati e gli elementi pesanti sono i soli che hanno ancora elettroni per produrre transizioni BF.
- κ_{FF} dipende da $(X+Y)$, in quanto H e He ionizzati contribuiscono in maniera significativa al numero di elettroni nel plasma stellare.
- Il coefficiente numerico di κ_{FF} è molto più piccolo di quello di κ_{BF} , allora l'assorbimento FF prevale sul BF solo se Z è piccolo, quindi in stelle vecchie, povere di metalli.
- Per quanto detto precedentemente, κ_E non dipende dalla frequenza.

4 Trasporto radiativo nelle atmosfere stellari

La radiazione elettromagnetica che forma lo spettro osservato proviene dall'atmosfera stellare, dagli strati trasparenti più esterni, e la temperatura determina le caratteristiche principali di tali spettri.

Per descrivere in che modo la luce viaggia attraverso il gas che costituisce la stella, è necessario definire l'**intensità specifica**:

$$I_\lambda = \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega} \left[\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{sr}} \right]$$

Cioè, la quantità di radiazione avente una lunghezza d'onda tra λ e $\lambda + d\lambda$ che passa nell'unità di tempo dt attraverso l'area dA e in un angolo solido $d\Omega$.

Quando la materia e la radiazione sono in equilibrio, tutti i processi di assorbimento ed emissione avvengono allo stesso "rate" e le condizioni da soddisfare per trovarsi in *Equilibrio Termodinamico* (TE) sono:

1. I_ν isotropa, indipendente dalla direzione;
2. I_ν indipendente dalla composizione chimica;
3. Temperatura uniforme.

Una stella, tuttavia, non è in perfetto TE perché:

- C'è un flusso di radiazione uscente dalla superficie;
- La temperatura della stella cambia strato per strato.

Per questi motivi, nelle atmosfere stellari si parla di *Equilibrio Termodinamico Locale* (LTE).

L'atmosfera è pensata come composta da vari strati con temperature crescenti man mano che ci si sposta verso l'interno, ma costante e uniforme all'interno di ciascuno strato. È possibile attribuire una temperatura a ogni strato se la scala di distanza su cui la temperatura cambia in maniera significativa è più grande del libero cammino medio delle particelle e dei fotoni.

Secondo il modello di atmosfera adottato per il Sole, l'*altezza di scala di temperatura* nella **fotosfera**, la regione da cui provengono i fotoni osservati, risulta molto maggiore del libero cammino medio degli atomi; quindi, per le particelle la temperatura nella fotosfera è effettivamente in buona approssimazione costante.

Ora, poiché la temperatura in una stella decresce verso l'esterno, dall'equazione (2) deduciamo che la P_{rad} è minore a grande distanza dal centro; conseguentemente, si genera un gradiente nella pressione di radiazione che produce un flusso netto di fotoni verso la superficie. Il flusso di radiazione verso l'esterno è, dunque, un processo estremamente lento in cui i fotoni, continuamente assorbiti e riemessi, si spostano verso la superficie a causa della differenza di pressione di radiazione.

Seguiamo, quindi, il flusso che dall'interno si muove verso l'atmosfera stellare. Il primo contributo da parametrizzare è quello fornito dai processi di **emissione**, che

tendono ad aumentare l'intensità della radiazione a una data λ ; quest'ultima, dI_λ , è proporzionale alla densità del gas ρ e alla distanza percorsa dal fotone nella direzione del fascio di radiazione ds :

$$dI_\lambda = j_\lambda \rho ds$$

dove j_λ è il coefficiente di emissione.

Come già visto, negli interni stellari l'opacità del mezzo è determinata dai dettagli dell'interazione tra radiazione e particelle. In ogni processo di **assorbimento** un fotone è sottratto alla direzione di propagazione del flusso di radiazione, perché assorbito o deviato, e il parametro che ne tiene conto è proprio l'opacità κ_λ , nelle diverse forme precedentemente descritte.

Considerando il solo contributo dell'assorbimento avremo:

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho ds \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = -\kappa_\lambda \rho ds$$

Integrando tra 0 e s e considerando un gas di opacità e densità costanti otteniamo:

$$I_{\lambda,f} = I_{\lambda,0} \cdot e^{-\kappa_\lambda \rho s} \quad (4)$$

L'intensità del fascio diminuisce di un fattore "e" su una lunghezza caratteristica:

$$l = \frac{1}{\kappa_\lambda \rho}$$

Questo termine risulta essere dello stesso ordine di grandezza dell'altezza di scala della temperatura, dunque per i fotoni la temperatura della fotosfera non è costante e l'assunzione di LTE si rivela essere poco consistente.

4.1 Equazione del trasporto radiativo nelle atmosfere stellari

In base ai due elementi che determinano la variazione di intensità del fascio di radiazione possiamo scrivere:

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds$$

L'intensità del fascio di radiazione cambia a causa del fatto che alcuni fotoni vengono assorbiti e sostituiti da fotoni emessi dal materiale locale (gas). Il tasso con cui i due processi avvengono determina quanto rapidamente l'intensità del flusso di radiazione varia, quindi il rapporto tra emissione e assorbimento descrive la tendenza dei fotoni della radiazione ad essere sostituiti da una sorgente "locale":

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho + j_\lambda \rho \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

Il rapporto tra il coefficiente di emissione e di assorbimento è chiamato **funzione sorgente** S_λ , e descrive come avviene la rimozione e sostituzione dei fotoni del fascio con quelli generati localmente.

Otteniamo così l'**equazione del trasporto nelle atmosfere stellari**:

$$\boxed{-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda} \quad (5)$$

Per rendere più agevole la trattazione dell'equazione del trasporto nelle atmosfere, introduciamo la **profondità ottica** τ , definita come segue:

$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds$$

dove s è la distanza misurata lungo il cammino della radiazione.

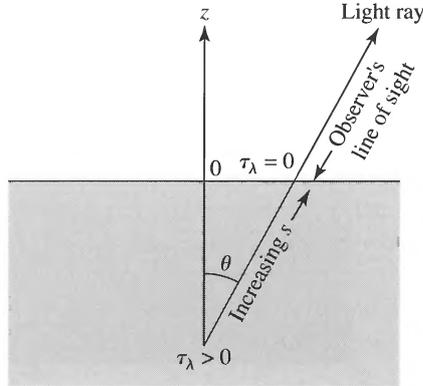


Figure 3: Profondità ottica τ_λ misurata indietro lungo il percorso di un raggio.

Un'assunzione spesso adottata è $\tau_\lambda = 0$ per tutte le lunghezze d'onda in corrispondenza dello strato di atmosfera più esterno. Con questa definizione di τ possiamo scrivere la relazione (4) come:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} \cdot e^{-\tau_\lambda} \quad (6)$$

Così, la profondità ottica nel punto di partenza è $\tau_\lambda = 1$ quando l'intensità della radiazione diminuisce di un fattore "e" prima di uscire dall'atmosfera. Ne consegue che:

PROFONDITÀ OTTICA	GAS
$\tau_\lambda \gg 1$	Otticamente spesso (<i>thick</i>)
$\tau_\lambda \ll 1$	Otticamente sottile (<i>thin</i>)

Dato che τ dipende da λ , il gas può essere otticamente spesso ad una certa lunghezza d'onda e otticamente sottile a un'altra.

Infine, possiamo calcolare la differenza di profondità ottica tra la posizione iniziale ($s = 0$), in cui la radiazione viene generata, e la posizione finale, dopo aver percorso la distanza s :

$$\Delta\tau_\lambda = \tau_{\lambda,f} - \tau_{\lambda,0} = - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

Assumendo $\tau_{\lambda,f} = 0$, possiamo calcolare la profondità ottica di un fascio luminoso che ha attraversato una distanza s per raggiungere la sommità dell'atmosfera:

$$\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

Tenendo conto di queste relazioni, l'equazione (5) può essere scritta come:

$$\boxed{\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda} \quad (7)$$

dove sia la profondità ottica che la distanza s sono definite lungo la traiettoria del flusso di radiazione.

5 Trasporto convettivo

La convezione è un meccanismo di trasporto dell'energia che si innesca quando il gradiente termico supera un certo valore critico, causando un aumento del calore trasportato. Possiamo pensare il plasma stellare come costituito da tante "celle": inizialmente, la resistenza a spostarle è elevata e l'attrito tra loro è maggiore della spinta verso l'alto, ma quando il gradiente termico oltrepassa un certo valore allora la spinta verso la superficie aumenta e s'innescano il fenomeno.

Come già introdotto, è possibile visualizzare il processo come lo spostamento verso l'alto di una "cella" che appare più calda della materia circostante. Assumendo che si espanda *adiabaticamente*, risulta più leggera del fluido che la circonda e tende a salire sempre più, incontrando materiale a temperatura via via minore, per poi dissolversi cedendo il suo calore all'ambiente esterno.

Per affrontarne la trattazione, è opportuno definire alcune grandezze:

Calori specifici

$$\begin{aligned} c_V &= \left. \frac{dQ}{dT} \right|_V = \frac{3}{2}nR \quad \text{calore specifico a volume costante} \\ c_P &= \left. \frac{dQ}{dT} \right|_P = \frac{5}{2}nR \quad \text{calore specifico a pressione costante} \end{aligned} \quad (8)$$

con n numero di moli di gas e $R = k_B N_A = 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg } K^{-1} \text{ mol}^{-1}$ costante universale dei gas, dove $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg } K^{-1}$ è la costante di Boltzmann e $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ è la costante di Avogadro.

Equazione di stato per i gas perfetti

$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu H} \quad (9)$$

dove μ è il peso molecolare medio del gas considerato e H la massa del nucleo di idrogeno (massa del protone).

Equazione di stato in caso di trasformazione adiabatica ($dQ = 0$)

$$P \propto \rho^\gamma \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (10)$$

5.1 Gradiente adiabatico

Facendo il logaritmo e derivando in dr l'equazione (9), otteniamo:

$$\frac{d \log P}{dr} = \frac{d \log \rho}{dr} + \frac{d \log T}{dr} - \frac{d \log \mu}{dr}$$

Supponendo $\mu = \text{cost.}$ avremo:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \quad (11)$$

Ora, facendo il logaritmo, differenziando e derivando in dr l'equazione (10), si ottiene:

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \Leftrightarrow \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr}$$

che, sostituita in (11), dà:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} \Leftrightarrow \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dP}{dr}$$

Da cui ricaviamo l'espressione del **gradiente adiabatico**:

$$\boxed{\frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}} \quad (12)$$

Essa è scrivibile in forma più compatta:

$$\frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{dove il LHS è } \frac{d \log T}{d \log P} \equiv \nabla$$

Quindi:

$$\boxed{\nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} \quad (13)$$

In caso di gas monoatomico:

$$\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow \nabla_{ad} = 0.4$$

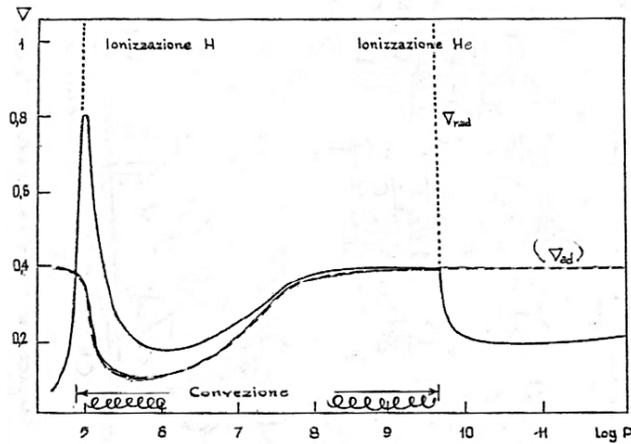


Figure 4: Andamenti dei gradienti logaritmici di temperatura nella zona subatmosferica di una stella di sequenza principale.

In *Figure (4)* è possibile notare come il gradiente adiabatico diminuisca nelle zone a ionizzazione parziale. Questo dipende dai calori specifici, che parametrizzano la quantità di calore richiesto per aumentare di un kelvin la temperatura dell'unità di massa del gas: in tali zone, parte dell'energia viene spesa per ionizzare il gas ed è necessario più calore per aumentare la temperatura. Quindi, c_P e c_V aumentano e γ si avvicina a 1.

Gas monoatomico	$\gamma = 5/3$	$\nabla_{ad} = 0.4$
Gas parzialmente ionizzato	$\gamma = 1.1$	$\nabla_{ad} = 0.1$

5.2 Criterio di Schwarzschild

È il criterio utilizzato in ogni punto della stella per stabilire se la regione in esame sia stabile o meno rispetto alla convezione. Consideriamo un elemento di materia, ad una certa distanza r dal centro, che subisce uno spostamento radiale verso la superficie della stella in modo adiabatico. Esso si espande finché la sua pressione non si equilibra con quella del mezzo. Se l'elemento continua a salire è in equilibrio instabile e s'innesca la convezione; se scende, esso pesa più dell'ambiente circostante, quindi vi è equilibrio stabile e non c'è convezione.

Punto di partenza (1)	Punto di arrivo (2)
$r; \rho_1^* = \rho_1; P_1^* = P_1; T_1^* = T_1$	$r + dr; P_2^* = P_2$

In base a quanto detto, possiamo stabilire la **condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo**:

$$\boxed{\rho_2^* > \rho_2} \quad (14)$$

L'elemento viene trasportato in modo adiabatico:

$$\begin{aligned} P\rho^{-\gamma} = \text{cost.} &\Leftrightarrow P_2^*\rho_2^{*\gamma} = P_1^*\rho_1^{*\gamma} \Leftrightarrow \rho_2^* = \left(\frac{P_2^*}{P_1^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_1^* \\ &\Rightarrow \rho_2^* = \rho_1^* \left(\frac{P_2^*}{P_1^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_2 \end{aligned}$$

Considerando l'ultima tabella e che P_2 e ρ_2 sono scrivibili come sviluppo in serie di Taylor, si ha:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_2 &\Leftrightarrow \rho_1 \left(\frac{P_1 + \frac{dP}{dr}dr}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr}dr \\ &\Leftrightarrow \rho_1 \left(1 + \frac{1}{P_1} \left(\frac{dP}{dr}dr\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr}dr \end{aligned}$$

Sviluppando il termine tra parentesi come una serie di Taylor, otteniamo:

$$\rho_1 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P_1} \frac{dP}{dr}dr\right) > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr}dr \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_1}{P_1} \frac{dP}{dr}dr > \frac{d\rho}{dr}dr$$

Da cui si ricava la **forma esatta e generale della condizione di stabilità "contro" i moti convettivi**:

$$\boxed{-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}} \quad (15)$$

Ora, supponendo che valga la (9), scrivendola in forma logaritmica e differenziandola, ricaviamo:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$

Che, sostituito nella (15), dà:

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$

Notiamo, però, che questi gradienti sono negativi, poiché sia la pressione che la temperatura diminuiscono all'aumentare di r . Prendiamo, allora, il valore assoluto della relazione, che diventa:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right| > \frac{1}{T} \left| \frac{dT}{dr} \right| \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > \frac{P}{T} \left| \frac{dT}{dP} \right| \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > \frac{d \log T}{d \log P}$$

Quindi, sfruttando le relazioni trovate precedentemente, il **criterio di Schwarzschild** è scrivibile come:

$$\boxed{\nabla_{ad} > \nabla} \quad (16)$$

In generale:

$\nabla > \nabla_{ad}$	CONVEZIONE
$\nabla < \nabla_{ad}$	NO CONVEZIONE

E, con buona approssimazione, $\nabla \sim \nabla_{rad}$.

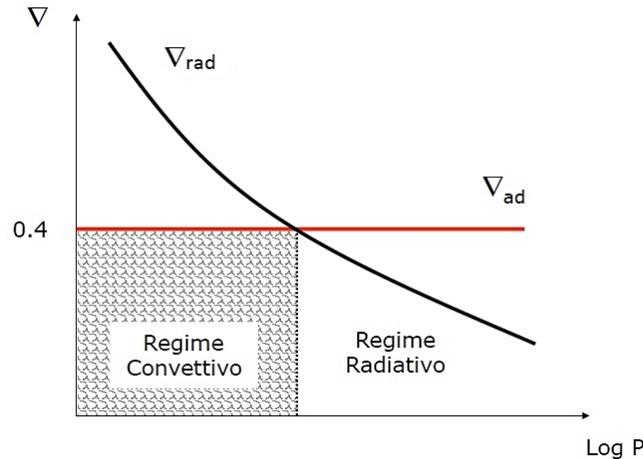


Figure 5: Separazione tra i due regimi in funzione del criterio di Schwarzschild.

Possiamo schematizzare le condizioni che favoriscono l'innesco del trasporto convettivo esaminando le dipendenze dell'equazione (3) e la *Figure 4*:

- Grande opacità \Rightarrow grande ∇_{rad} ;
- Regioni a ionizzazione parziale \Rightarrow piccolo ∇_{ad} ;
- Regioni centrali, in cui il rate di produzione energetica dipende molto da $T \Rightarrow$ forte $F_{rad} \Rightarrow$ grande ∇_{rad} .

Infine, è necessario fare alcune considerazioni sul bordo della regione a regime convettivo. Si assume come confine il punto in cui le "celle" hanno accelerazione uguale a zero. Tuttavia, la velocità sarà diversa da zero, quindi gli elementi sconfinano nella regione radiativa e tendono a rimescolarne una parte. Questo fenomeno è importante specialmente quando la convezione avviene nelle regioni nucleari e l'estensione della regione convettiva ha effetti sulla quantità di combustibile nucleare a disposizione. Tale fenomeno prende il nome di **overshooting**.

5.3 Equazione del flusso convettivo

Al momento, non esiste una trattazione esatta del moto turbolento a cui sono soggette le "celle" convettive ed è, quindi, necessario introdurre approssimazioni e parametrizzazioni del loro LCM. Quella più utilizzata è nota come **mixing length theory** (teoria della lunghezza di rimescolamento): il moto degli elementi convettivi è parametrizzato da una *lunghezza di rimescolamento* ℓ , la distanza media percorsa nella regione convettiva prima che si dissolvano nell'ambiente circostante. ℓ viene definito in funzione di un parametro libero α , fissato in modo che le strutture convettive calcolate riproducano le osservazioni, e dell'*altezza scala di pressione* H_P , la distanza caratteristica entro cui la pressione si riduce di un fattore "e".

$$\boxed{\ell = \alpha \cdot H_P} \quad (17)$$

Dove, quindi:

$$\frac{1}{H_P} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \quad (18)$$

In generale:

$\ell \ll H_P$	CONVEZIONE NON EFFICIENTE
$\ell \gg H_P$	ELEMENTO CONVETTIVO PERDE SIGNIFICATO

Dunque, solitamente $\ell \sim H_P$ e $0.5 < \alpha < 2$. Maggiore è α e maggiore risulta l'efficienza della convezione. Inoltre, ricordiamo che la condizione necessaria affinché si sviluppi la convezione è che il gradiente di temperatura reale sia maggiore di quello adiabatico:

$$\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \equiv \frac{d\Delta T}{dr} \quad (19)$$

dove il RHS è il *gradiente superadiabatico*.

Ora, consideriamo in una zona convettiva un elemento di massa dm che si sposti di una certa quantità ℓ partendo da una distanza r dal centro della stella. Il **flusso di energia trasportata** sarà:

$$F_{conv} = c_P \Delta T \frac{1}{2} \rho v \quad (20)$$

Dove ΔT è la differenza di temperatura tra l'elemento e l'ambiente, $c_P \Delta T$ è l'energia termica per grammo trasportata dalla "cella" convettiva mentre si sposta a pressione costante e $\frac{1}{2} \rho v$ è il flusso di massa media che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo, tenendo conto che ci sono elementi che salgono e che scendono.

Scrivendo ΔT in funzione del gradiente superadiabatico:

$$\Delta T = \frac{d\Delta T}{dr} \cdot \ell$$

e applicando la (19), otteniamo:

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_P \left(\left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right) \cdot \ell \quad \Leftrightarrow \quad F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_P \ell \left(\left. \frac{dT}{dP} \right|_{ad} - \frac{dT}{dP} \right) \frac{dP}{dr} \frac{P}{T} \frac{T}{P}$$

Ricordando, inoltre, che $\frac{d \log T}{d \log P} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP}$ e utilizzando la (18) si ha:

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_P \ell (\nabla_{ad} - \nabla) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \quad \Leftrightarrow \quad F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_P \frac{\ell}{H_P} (\nabla - \nabla_{ad}) T$$

Da cui, tramite la (17), ricaviamo l'equazione del **flusso convettivo in funzione di ∇** :

$$\boxed{F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_P \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T} \quad (21)$$

Riscriviamo ora la (3) in funzione di ∇ :

$$\begin{aligned} F_{rad} &= -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad \Leftrightarrow \quad F_{rad} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dP} \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \frac{P}{T} \\ &\Leftrightarrow \quad F_{rad} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \nabla \end{aligned}$$

Sostituendovi la (18), otteniamo l'equazione del **flusso radiativo in funzione di ∇** :

$$\boxed{F_{rad} = \frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_P} \nabla} \quad (22)$$

Possiamo adesso impostare l'**equazione generale del flusso**:

$$F = F_{rad} + F_{conv} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_P} \nabla + \frac{1}{2} \rho v c_P \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T = \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

Ricaviamo, infine, l'espressione generale del **gradiente vero**:

$$\boxed{\nabla = \frac{\frac{L_r}{4\pi r^2} + \frac{1}{2} \rho v c_P \alpha (\nabla_{ad}) T}{\frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_P} + \frac{1}{2} \rho v c_P \alpha T}} \quad (23)$$

Quindi:

- Per $v \rightarrow 0$ (NO CONVEZIONE) $\Rightarrow \nabla \rightarrow \nabla_{rad}$
- Per $v \nearrow$ (CONVEZIONE) $\Rightarrow \nabla \rightarrow \nabla_{ad}$

References

- [1] Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie - *An Introduction to Modern Astrophysics*, Second Edition, PEARSON Addison-Wesley, 2007.
- [2] Le stelle e la loro evoluzione,
<http://www.bo.astro.it/universo/letture/webcorso/webleggere/ferraro/fe1.html>
- [3] Appunti e dispense del corso di "Astrofisica stellare" del Prof. F. R. Ferraro.
- [4] Appunti e dispense del corso di "Processi di Radiazione e MHD" del Prof. D. Dallacasa.
- [5] Appunti e dispense del corso di "Astronomia" del Prof. A. Cimatti.