

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea Magistrale in Fisica del Sistema Terra

**UN MODELLO DI ONDA D'URTO
PRODOTTA DA UNA ERUZIONE
VULCANICA ESPLOSIVA**

Relatore:
Prof. Michele Dragoni

Presentata da:
Dalila Santoro

Sessione II
Anno Accademico 2017/2018

Abstract

Il seguente lavoro di tesi ha come obiettivo lo sviluppo di un modello di forte onda d'urto generata da eruzioni vulcaniche di tipo esplosivo. In particolare si considera la propagazione di un'onda d'urto sferica originata da una forte esplosione, cioè dal rilascio istantaneo di una grande quantità di energia in un piccolo volume, assumendo che il gas nel quale si propaga l'onda sia un gas perfetto e che l'onda sia a piccola distanza dalla sorgente. Si considera come ipotesi il mezzo nel quale si propaga l'onda come un fluido isotropo e omogeneo. Inoltre si trascura l'interazione del fronte d'onda con la superficie terrestre, considerando la pressione, la densità e la temperatura del mezzo come pari a quelle dell'aria a livello del mare. Scopo principale della tesi è la determinazione delle formule che definiscono le variabili del fronte d'onda e del flusso del fluido per la regione dietro il fronte d'urto. Segue l'applicazione del modello ad eruzioni vulcaniche di tipo esplosivo con diversi valori di energia e il confronto dei risultati con le osservazioni disponibili.

Indice

Introduzione	4
1 Eruzioni vulcaniche esplosive	6
1.1 Classificazione delle eruzioni vulcaniche	6
1.1.1 Eruzioni vulcaniche effusive	7
1.1.2 Eruzioni vulcaniche esplosive	7
1.2 Caratteristiche generali di una eruzione	20
1.2.1 Indice di esplosività vulcanica	21
1.2.2 Massa dei prodotti eruttivi	22
1.2.3 Energia di una eruzione vulcanica	22
1.2.4 Onda d'urto	23
2 Dinamica dei gas e onde d'urto	26
2.1 Dinamica dei gas	26
2.1.1 Numero di Mach	26
2.2 Definizione di onda d'urto	27
2.3 Onda d'urto adiabatica	30
2.4 Onda d'urto per un gas perfetto	33
2.5 Variabili in funzione del numero di Mach	38
2.6 Onda d'urto di forte intensità	44
3 Il modello	47
3.1 Onda d'urto sferica	47
3.2 La regione interna al fronte d'onda	49
3.2.1 Determinazione della variabile Z	53
3.2.2 Determinazione della variabile V	56

3.2.3	Determinazione della variabile G	61
3.3	Calcolo della costante β	64
3.4	Variabili all'interno dell'onda d'urto	67
3.4.1	Pressione	67
3.4.2	Velocità	69
3.4.3	Densità	71
3.4.4	Energia	72
3.4.5	Temperatura	74
3.4.6	Entropia	76
4	Discussione	78
4.1	Caratteristiche del fronte d'onda	79
4.1.1	Posizione del fronte d'onda	79
4.1.2	Velocità del fronte d'onda	80
4.1.3	Discontinuità della pressione	82
4.1.4	Densità del flusso di energia	84
4.1.5	Discontinuità della temperatura	86
4.1.6	Differenza di entropia	88
4.1.7	Intensità sonora	90
4.1.8	Conseguenze fisiche dell'onda d'urto	92
4.2	Confronto con casi reali	94
	Conclusioni	98
	Bibliografia	100

Introduzione

Il fenomeno delle onde d'urto associate ad eruzioni vulcaniche risulta raramente descritto in quanto per essere osservato necessita di particolari condizioni di visibilità, sebbene tali onde accompagnino sempre le eruzioni esplosive di forte intensità.

Il primo riconoscimento di una onda d'urto visibile è relativamente recente e venne effettuato dal vulcanologo Frank Perret durante le eruzioni esplosive del Vesuvio del 1906 [Nairn, 1976].

Lo studio condotto nella presente tesi ha portato all'analisi delle variabili relative ad una onda d'urto conseguenza di una forte esplosione, come è tipicamente quella di una eruzione vulcanica "esplosiva" medio-grande, illustrandone le caratteristiche di pressione, velocità, densità, temperatura, energia ed entropia sia all'interno che all'esterno della stessa onda.

Per definire l'ambito dell'analisi è stata necessaria, nel primo capitolo, una illustrazione della fenomenologia dei vulcani per una corretta classificazione in termini di indice di esplosività vulcanica e grandezza ed energia di una esplosione vulcanica [Pyle, 1995]. Ciò ha portato ad una suddivisione e descrizione delle eruzioni vulcaniche *effusive* e delle eruzioni vulcaniche *esplosive*. Queste ultime sono il tipo di attività vulcanica più violenta e distruttiva che produce grandi quantità di materiale piroclastico trasportato verso l'alto e lateralmente. Risulta evidente il maggiore, o esclusivo interesse, delle onde d'urto generate a seguito del verificarsi della seconda tipologia di eruzione.

Partendo dalla definizione di onda d'urto come "regione di piccolo spessore entro il quale le proprietà dinamiche di un flusso (la velocità, la pressione, la densità ecc.) cambiano rapidamente" [Landau e Lifshitz, 1987] è stata sviluppata analiticamente, nel secondo capitolo, la predetta transizione come una discontinuità attraverso la quale le variabili fisiche sono soggette ad un salto improvviso, rispettando le leggi di conservazione fondamentali.

Analizzando il caso di un'onda d'urto adiabatica è stato determinato il rapporto di densità, pressione e temperatura tra due superfici separate dall'onda, nonché la densità di flusso di massa e le velocità del gas sia davanti che dietro l'onda d'urto; per comodità di trattazione tali parametri sono stati rideterminati ed esplicitati in funzione del "numero di Mach" che è una quantità adimensionale definita come il rapporto tra la velocità di un oggetto in moto in un fluido e la velocità del suono nel fluido considerato. A completamento dello studio e come modello delle onde d'urto associate alle eruzioni vulcaniche, nel terzo capitolo viene illustrata la propagazione di un'onda d'urto sferica originata da una forte esplosione, cioè dal rilascio istantaneo di una grande quantità di energia in un piccolo volume, assumendo come ipotesi che il gas nel quale si propaga l'onda sia un gas perfetto e che l'onda sia a piccola distanza dalla sorgente, dove è ancora forte. Queste distanze sono comunque grandi se paragonate con le dimensioni della sorgente: per questo motivo si può affermare che l'energia è rilasciata da un punto detto origine. Si assume che il mezzo nel quale si propaga l'onda sia un fluido isotropo e, poiché si considera l'onda a piccola distanza dalla sorgente, omogeneo. Inoltre si trascura l'interazione del fronte d'onda con la superficie terrestre, considerando la pressione, la densità e la temperatura del mezzo come pari a quelle dell'aria a livello del mare.

Con le predette condizioni si determinano le formule che definiscono le variabili del fronte d'onda e del flusso del fluido per la regione dietro il fronte d'urto, utilizzando come base di partenza tre equazioni: la prima per esprimere la conservazione della materia (equazione di continuità), la seconda per esplicitare il moto del fluido ed infine la terza equazione per esprimere la conservazione dell'energia [*Landau e Lifshitz*, 1987]. Successivamente si determinano i rapporti delle variabili della regione dietro il fronte e quelli sull'onda d'urto.

Nel quarto capitolo vengono illustrati le variabili del fronte d'onda, precedentemente descritte, per diversi valori di energia stimati per eruzioni vulcaniche esplosive medio-grandi. I risultati del modello vengono infine confrontati con le osservazioni disponibili.

Capitolo 1

Eruzioni vulcaniche esplosive

1.1 Classificazione delle eruzioni vulcaniche

Con il termine *vulcano* si indica "una frattura della superficie terrestre dalla quale possono uscire magma, ceneri e gas" [Jackson, 1997]. Un vulcano nasce quando il magma, generalmente meno denso delle rocce circostanti, risale in superficie.

Sebbene l'immaginario comune associ ai vulcani la classica forma a cono, come nel caso del Vesuvio o dell'Etna in Italia, diverse sono le forme con cui si presentano. Variano, infatti, dai piccoli coni di cenere ai grandi cumuli di lava che si innalzano per chilometri dal fondo dell'oceano, oppure si possono trovare anche altri tipi di strutture, come Yellowstone (Stati Uniti d'America), che non possono essere identificati come elementi che si distinguono dall'ambiente circostante. Le diverse tipologie di strutture presenti sulla Terra sono il frutto di differenti tipologie di eruzioni e di magma diversi [Simkin e Siebert, 2015].

Le classificazioni delle eruzioni vulcaniche sono molteplici, ma la principale riguarda la suddivisione in eruzioni *effusive* ed eruzioni *esplosive*. In alcuni casi le eruzioni sono soltanto esplosive, mentre in altri casi sono prevalentemente effusive. Tuttavia è possibile che una eruzione vulcanica presenti le caratteristiche di entrambe le tipologie di eruzione.

1.1.1 Eruzioni vulcaniche effusive

Il termine *effusivo* indica una estrusione non esplosiva di magma, comprendendo le colate ed i duomi lavici. Variando da eruzioni subaeree a quelle che avvengono a grandi profondità nell'oceano, le eruzioni effusive sono onnipresenti sulla superficie terrestre. Per avere questo tipo di comportamento, è necessario che i gas contenuti all'interno del magma vengano rilasciati prima che la pressione interna causi una esplosione. Per questo motivo le eruzioni effusive sono spesso precedute da fumarole oppure avvengono in seguito ad eruzioni esplosive, fenomeni, questi, che hanno come effetto comune quello di diminuire la pressione interna della camera magmatica. Il magma è prevalentemente basaltico, con circa il 50% di SiO_2 , caratterizzato da una alta temperatura, una bassa presenza di gas e bassa viscosità.

1.1.2 Eruzioni vulcaniche esplosive

Le eruzioni vulcaniche esplosive sono il tipo di attività vulcanica più violenta e distruttiva che produce grandi quantità di materiale piroclastico trasportato verso l'alto o lateralmente e possono avere effetti devastanti sia sulla popolazione che sull'ambiente circostante.

Poichè ogni eruzione è diversa dalle altre, i geofisici hanno preferito suddividere ulteriormente tali categorie in eruzioni *hawaiiane*, *stromboliane*, *surtseyane*, *vulcaniane* e *pliniane* (che a loro volta sono divise in *subpliniane*, *pliniane* e *ultrapliniane*).

Eruzioni hawaiiane

Le eruzioni hawaiiane, che prendono il nome dalle isole Hawaii, sono le forme di vulcanismo meno violente. La loro bassa esplosività è la conseguenza di un magma a bassa viscosità, come il basalto e l'andesite basaltica. Sebbene questi due tipi di eruzione presentino caratteristiche diverse non è raro trovare entrambe le tipologie in una stessa eruzione vulcanica.

Le eruzioni hawaiane iniziano spesso con uno sciame sismico e con la creazione di fessure nel terreno. Tali fessure, che si allungano per chilometri, possono produrre grandi effusioni di lava [Vergniolle e Mangan, 2015]. Gradualmente, in un periodo di tempo che può variare da alcune ore a giorni, il raffreddamento, che avviene in modo diverso lungo tutta la lunghezza della fessura a causa delle irregolarità nello spessore, porta alla solidificazione della parete nei punti più stretti. Quindi, parte della fessura viene sigillata e diventa una sorgente puntiforme caratterizzata dalla presenza di una "fontana di lava" che può raggiungere un'altezza di 100 – 500 m e, in qualche caso, quote anche maggiori. In questo caso possono essere espulsi circa $50 - 1000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ di lava. Le temperature di eruzione oscillano tra i $1150 \text{ }^\circ\text{C}$, come nel caso dell'eruzione del vulcano Izu-Oshima (Giappone) nel 1986-1987, e i $1216 \text{ }^\circ\text{C}$, come si verificò nell'eruzione del Kilauea (Hawaii) del 1959 [Vergniolle e Mangan, 2015].

Un esempio di eruzione hawaiana è dato proprio dai vulcani delle isole Hawaii, come il Kilauea. Il vulcano Kilauea è situato nell'isola Hawaii, la più grande tra quelle presenti nell'omonimo arcipelago. La sua più lunga eruzione recente avvenne nel periodo 1969-1971 e venne definita eruzione del *Mauna Ulu* ("montagna crescente" in hawaiano). L'eruzione del Mauna Ulu del 1969-1971 fu la prima degli ultimi 150 anni a durare per un periodo superiore a qualche settimana, presentando una grande varietà di comporta-



Figura 1.1: *Cascate di lava formata dai flussi alimentati dal cratere Mauna Ulu (visibile al centro della immagine a sinistra) [da: <https://volcano.si.edu>].*

menti.

Furono eruttati circa $185 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ di magma basaltico da fessure lunghe 4 km con un

tasso di effusione di $3 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{giorno}$. L'eruzione può essere divisa in quattro fasi. La prima, terminata il 30 dicembre 1969, fu caratterizzata da 12 brevi episodi di alte fontane di lava intervallate da periodi di debole attività vulcanica della durata di pochi giorni. La seconda fase, tra il 31 dicembre 1969 e giugno 1970, fu caratterizzata da debole attività vulcanica e nessun episodio di fontana lavica. Le pareti delle fessure iniziarono a crollare fino a formare un lago di lava. La terza fase fu simile alla prima, con fontane di lava che raggiunsero quote inferiori rispetto a quelli della prima fase. L'ultima fase portò ad una lenta e progressiva fine dell'eruzione. L'attività fu concentrata nel lago di lava centrale il quale iniziò ad abbassarsi di livello ad un tasso di 70 cm/giorno fino a quando, il 15 ottobre 1971, rimase soltanto il cratere [Swanson et al., 1979].

Eruzioni stromboliane

Le eruzioni stromboliane, che prendono il nome dal vulcano Stromboli in Italia, sono forme di vulcanismo più energetiche rispetto a quelle hawaiane.

Le eruzioni stromboliane iniziano con le stesse caratteristiche di una eruzione hawaiana o, alternativamente, con una esplosione. Il magma coinvolto presenta spesso una viscosità maggiore, sia a causa di una temperatura di eruzione più bassa, sia per il coinvolgimento di un magma con una maggiore componente di silicio come, per esempio, l'andesite basaltica. L'emissione di gas si presenta episodicamente, portando sovrapressioni più grandi ed eruzioni più energetiche rispetto allo stile hawaiano. Inoltre il flusso di gas relativo alla lava nelle eruzioni stromboliane è considerevolmente più grande rispetto a quello delle eruzioni hawaiane. Le esplosioni stromboliane avvengono caratteristicamente ad intervalli quasi regolari. Per esempio l'attività del vulcano Stromboli è caratterizzata da una media di 3 – 5 esplosioni/ora, mentre i rari episodi più violenti presentano una ciclicità di 100-1000 esplosioni all'ora [Vergnolle e Mangan, 2015].

Lo Stromboli (in figura (1.2)), isola vulcanica dell'arcipelago delle Eolie, si innalza per 924 m sul livello del mare ma rappresenta la parte emergente di uno stratovulcano alto 2500 m.

È uno dei vulcani più attivi del mondo ed è caratterizzato da persistente attività esplosiva, chiamata appunto stromboliana. L'attività consiste in un degassamento continuo di



Figura 1.2: *Ripresa aerea dei crateri stromboliani [da <https://ingvulcani.wordpress.com/>].*

circa 6000 – 12000 tonnellate al giorno di H_2O , CO_2 , SO_2 , HCl e HF , episodi occasionali di attività esplosiva più intensa, accompagnata da flussi di lava. Le lievi esplosioni producono getti di gas ed espellono lava, cenere e roccia solida ad una altezza di 10 – 100 m, mentre le esplosioni maggiori espellono blocchi con dimensioni dell'ordine del metro a centinaia di metri di distanza dal cratere. In media le esplosioni maggiori hanno un tasso di ricorrenza di 1 – 2 eventi all'anno. L'attuale morfologia è il risultato di numerose fasi di attività articolate in diversi cicli eruttivi che si sono susseguiti a partire da oltre 100.000 anni fa [Bertagnini et al., 2003].

Eruzioni surtesyane

Questo tipo di eruzione prende il nome dal vulcano Surtsey (Islanda) la cui eruzione nel 1963 permise di avere maggiori informazioni riguardo l'influenza esplosiva dell'acqua nei confronti dell'eruzione. Eruzioni simili sono avvenute anche per altri vulcani che, grazie all'accumulo di materiali piroclastici, sono emersi dall'acqua e per quei vulcani subaerei dotati di acquiferi. In questo caso si creano sistemi vulcanici in cui è presente il magma

ad alte temperature in prossimità di un fluido, generalmente acqua, che viene mantenuto a temperatura ambiente grazie al materiale che lo separa dal magma. I prodotti finali sono una miscela eterogenea di particelle iuvenili, gas magmatico, vapore, piccoli blocchi di roccia e spesso acqua liquida. Non è raro che all'interno della colonna eruttiva siano contemporaneamente presenti acqua liquida e vapore. Il volume dei materiali piroclastici emessi varia da 10^4 a 10^9 m³ su scale di tempo variabili da un'ora a diversi anni.

Il magma è prevalentemente a composizione basaltica o andesitica, sebbene sia possibile trovare anche magma con una maggiore componente silicea [White e Houghton, 2015].

Il vulcano Surtsey fa parte del sistema vulcanico *Vestmannaeyjar*, per lo più sottomarino, situato in Islanda. La sua unica eruzione documentata durò per circa 3.5 anni durante i quali furono emessi più di 10^9 m³ di magma da cinque crateri diversi. L'evento fu caratterizzato da due diverse fasi: quella surtseyana che permise al vulcano di emergere dall'acqua e una fase finale dove l'eruzione fu prevalentemente stromboliana e hawaiana. L'eruzione iniziò, senza essere notata, dal cratere *Surtur I* un centinaio di metri al di sotto del livello del mare e i materiali piroclastici, non riuscendo a fuoriuscire dall'acqua a causa della pressione idrostatica, si accumularono a formare le pendici del nuovo vulcano fino a raggiungere la quota di 10 m sotto la superficie. Il 14 novembre 1963, una nera colonna eruttiva emerse dalla superficie del mare fino a raggiungere la quota di circa 100 m. Attorno alla colonna, come è possibile vedere nella figura (1.3), si formò un bianco anello circolare la cui forma è definita da un'onda d'urto sferica. La turbolenza presente alla superficie del mare fu probabilmente dovuta ai moti convettivi di acqua calda, mentre il vapore uscente dal mare fu dovuto alla presenza di bolle di vapore. Il giorno seguente il vulcano emerse dalla superficie e, quando raggiunse una quota tale da non permettere all'acqua di raggiungere il cratere, l'eruzione perse il suo carattere esplosivo, a favore di colate e fontane di lava. [White e Houghton, 2015].

Il 28 dicembre dello stesso anno l'attività piroclastica iniziò da un altro cratere, il *Surtla*, a 2 km dal Surtur I ma, a differenza di quest'ultimo, non emerse dalla superficie e la sua attività si concluse nel gennaio 1964. Successivamente iniziò ad eruttare il cratere *Surtur II*, prima con una fase esplosiva poi con una fase effusiva terminata a maggio dello stesso anno. Le eruzioni dei crateri *Syrtingur* e *Jólnir*, la prima caratterizzata da una fase esplosiva e una effusiva mentre la seconda fu solo esplosiva, formarono due isole che vennero completamente distrutte con il cessare dell'attività vulcanica. L'attività vulca-



Figura 1.3: *Eruzione del vulcano Surtsey del 1963 [White e Houghton, 2015].*

nica del cono centrale, che nel frattempo passò ad una fase effusiva, terminò nel 1967 e, da allora, non ci sono state altre eruzioni. Questo, insieme ad altri fattori quali l'azione del vento e dell'acqua, sta portando alla progressiva scomparsa del vulcano [Schipper et al., 2015].

Eruzioni vulcaniane

Le eruzioni vulcaniane sono uniche nel loro genere in quanto sono brevi eruzioni della durata variabile dai secondi ai minuti, in grado di espellere bombe di lava incandescente e blocchi di roccia frammentata a distanze inferiori ai 5 km. Sono caratterizzate da violente esplosioni, da onde d'urto atmosferiche, dall'emissione di tefra e dai depositi che presentano diversi rapporti in percentuale tra componenti iuvenili e non iuvenili dove i primi sono composti da magma frammentato che varia, in composizione, dall'andesite basaltica alla dacite. Le eruzioni vulcaniane avvengono nei crateri centrali degli stratovulcani e, in qualche caso, dai così detti "duomi di lava" e dai laghi craterici. In quest'ultimo caso il pericolo principale per l'uomo e la maggiore causa delle morti è il formarsi dei "lahars",

colate di fango composte da materiale piroclastico e acqua che scorre lungo le pendici di un vulcano. La natura esplosiva di questo tipo di eruzione può essere dovuta a diversi fattori: l'interazione del magma che risale i condotti con l'acqua esterna, come nel caso delle eruzioni che coinvolgono i laghi craterici, e il collasso della roccia sotto il quale si era accumulato del gas magmatico. Le eruzioni vulcaniane vengono considerate i precursori delle eruzioni pliniane e subpliniane, anche se possono essere la fase dominante di un singolo evento. Il termine *vulcaniano* fu coniato da Mercalli nel 1907 per descrivere le eruzioni che avvennero nell'isola di Vulcano, in Italia, tra il 1888 e il 1890.

L'isola di Vulcano, che s'innalza per più di 600 metri sul livello del mare da una profondità di più di 1000 metri, è costituita da numerosi centri vulcanici tra cui due attivi, La Fossa e Vulcanello, che sono stati in eruzione in tempi storici. La sua complessa morfologia è dovuta alla sovrapposizione di diverse strutture vulcaniche generatesi dall'alternarsi di fasi costruttive, con attività effusiva o esplosiva a bassa energia, e fasi distruttive caratterizzate da violente eruzioni esplosive [Di Vito et al., 2014]. Le eruzioni del 1888-1890 sono quelle più documentate in quanto sono avvenute in un periodo in cui i vulcanologi stavano lavorando alla registrazione e alla classificazione dei diversi tipi di eruzione [*Morrissey e Mastin*, 2015].

Dal cratere si elevò una colonna di vapore alta più di 2 chilometri lanciando in aria cenere bianca e finissima, lapilli e massi che, cadendo al suolo a distanza anche di un chilometro, crearono voragini di diversi metri [*Di Vito et al.*, 2014]. Durante le eruzioni del 1888-1890, le onde d'urto generate da alcune esplosioni vulcaniche ruppero i vetri delle finestre nella città di Lipari, a 7 km di distanza dal vulcano mentre i boati delle esplosioni più forti furono uditi anche ad una distanza di 45 km. Le eruzioni con caratteristiche vulcaniane hanno prodotto le più alte velocità di emissione, pari a 200 – 400 m/s, rispetto a qualsiasi altro tipo di eruzione. Le eruzioni furono caratterizzate dalla presenza di esplosioni discrete intervallate da periodi di riposo della durata di alcuni minuti o anche ore. L'esplosione più grande seguì l'intervallo di riposo più lungo [*Morrissey e Mastin*, 2015]. Dal 1890 il cratere de La Fossa presenta un'intensa attività fumarolica, con temperature di circa 500 °C [*Di Vito et al.*, 2014].

Un altro esempio è dato dal monte Ngauruhoe, stratovulcano attivo della Nuova Zelanda. Si tratta del vulcano più giovane del complesso vulcanico del Monte Tongariro,

di cui costituisce un cono secondario.

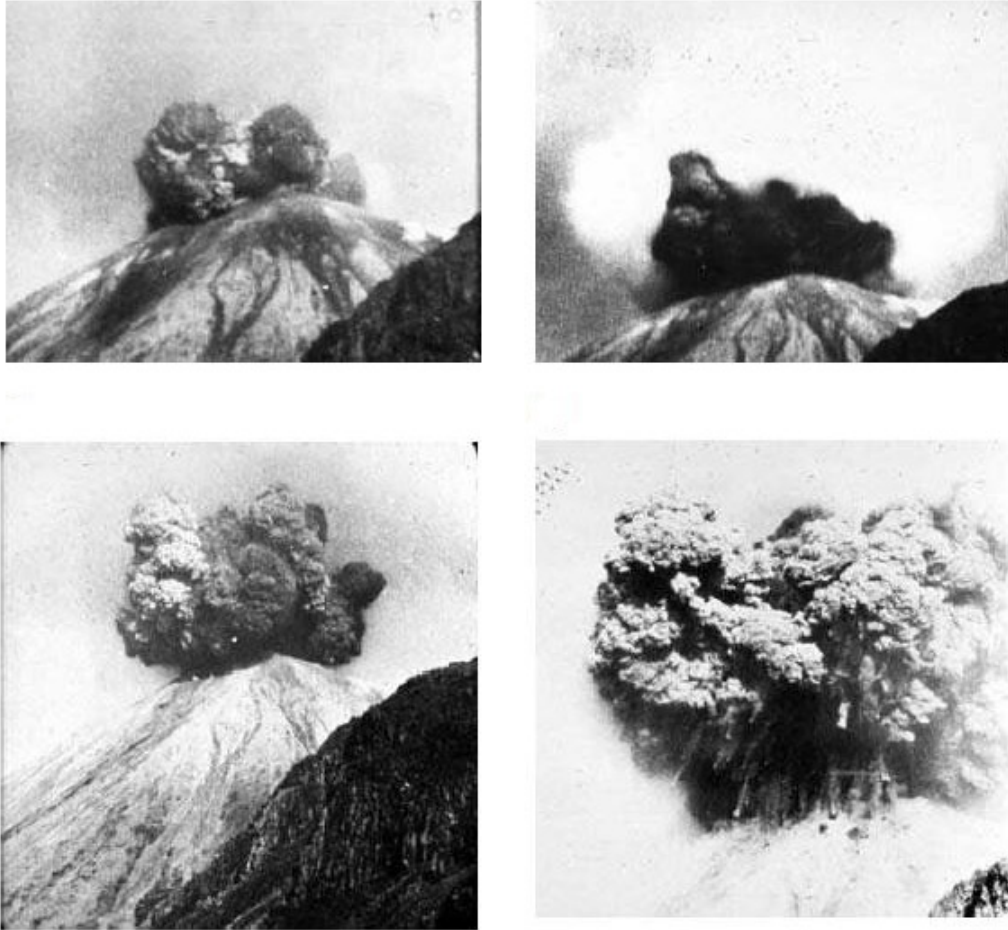


Figura 1.4: *Eruzione del vulcano Ngauruhoe del 1975 [Morrissey e Mastin, 2015].*

L'eruzione del 1975, durata 11 mesi, fu una delle prime eruzioni vulcaniane ben documentate, caratterizzata dalla presenza di visibili onde d'urto dovute ad esplosioni generate sulla sommità del cratere. Dopo un periodo iniziale con una fase prevalentemente subpliniana, caratterizzata dall'emissione di gas e vapore e accompagnata da un forte terremoto, seguirono nove esplosioni provenienti dal cratere centrale [*Morrissey e Mastin, 2015*]. Ogni eruzione fu un evento isolato, preceduto da un periodo di 20 – 60 minuti durante il quale l'emissione di ceneri e l'attività sismica diminuì a livelli molto bassi [*Nairn, 1976*].

Ogni esplosione generò un'onda d'urto visibile che si espanse rapidamente attraverso le nubi.

Ogni onda d'urto precedette l'emissione di una densa nube di gas altamente pressurizzato che di materiali solidi. Questi blocchi solidi, simili a proiettili, raggiunsero il suolo mentre, contemporaneamente, le componenti di gas e cenere continuarono a muoversi verso l'alto. Relativo all'eruzione del vulcano Ngauruhoe del 1975, in figura (1.4) è possibile apprezzare lo sviluppo pressochè sferico della nube piroclastica, vista da diverse angolazioni, mentre nella figura in alto a destra è presente, in bianco, la nube di condensazione che si forma in seguito al passaggio dell'onda d'urto. Durante l'eruzione la base della nube di condensazione si espanse verso l'alto ad una velocità di circa 190 m/s per raggiungere una quota di circa 220 m al di sopra del cratere [Nairn, 1976]. Blocchi solidi con un diametro di circa 0.8 m sono stati ritrovati anche nei depositi formati da cenere a distanza di circa 2.8 km dal cratere [Morrissey e Mastin, 2015].

Il volume totale dei depositi fu dell'ordine di 10^6 m³.

Precedentemente, ci furono altre eruzioni simili nel 1954 e nel 1974, anche se queste non sono ben documentate come quella del 1975 [Morrissey e Mastin, 2015].

Un ulteriore esempio è dato dal vulcano Sakurajima (Giappone), uno dei più attivi al mondo. Si tratta di uno stratovulcano andesitico situato nel nord della baia di Kagoshima nell'isola di Kyushu. La sua recente fase di eruzione, iniziata nel 1955, è caratterizzata da un tasso di eruzioni annuali pari a circa 400 eventi esplosivi i quali avvengono generalmente nel cratere presente sulla cima del vulcano. Il continuo monitoraggio cui è soggetto il vulcano, ne ha permesso lo studio; inoltre, un sistema di videocamere ha permesso di catturare le immagini delle onde d'urto associate alle eruzioni esplosive.

Generalmente le eruzioni sono di tipo vulcaniano, sebbene non manchino anche eruzioni effusive e non esplosive [Morrissey e Mastin, 2015]. L'eruzione del 1914 fu una delle più grandi avvenute in Giappone nel XX secolo. Anticipato da una serie di terremoti, l'evento si manifestò con una colonna di fumo bianco e successivamente con forti esplosioni. In seguito alle esplosioni, iniziò una fase effusiva con una quantità di lava effusa pari a 1.6 km³ che fu in grado di collegare il vulcano alla vicina penisola di Osumi [Yokoyama, 1997].

La fonte delle eruzioni vulcaniane del Sakurajima è stata definita a partire dai dati sismici e geodetici. Nel momento in cui il vulcano si gonfia senza essere accompagnato

da una eruzione, il magma viene trasportato alla profondità di 2 – 6 km. Quando il magma sale, i volatili si separano dalla componente liquida e si accumulano al di sopra del magma superficiale. Quando viene raggiunta una pressione critica, il gas accumulato viene rilasciato attraverso il condotto che è collegato al cratere. È probabile che il rilascio dei gas sia la fonte dei terremoti che precedono l'eruzione [*Morrissey e Mastin, 2015*].

Eruzioni pliniane

Durante le eruzioni pliniane, la maggior parte della massa viene rilasciata durante la formazione di un'alta colonna eruttiva di cenere che viene dispersa su di un'ampia area a causa dei venti. Il nome deriva da Plinio il Giovane che descrisse, in alcune lettere inviate a Tacito, l'eruzione del Vesuvio del 79 d.C.. Da allora ci sono state numerose eruzioni pliniane, soprattutto lungo i margini convergenti delle placche litosferiche, tra le quali le eruzioni del Monte Sant'Elena (Stati Uniti d'America) del 1980, di El Chichón (Messico) del 1982 e del Pinatubo (Filippine) del 1991 hanno permesso di comprendere meglio questo stile eruttivo.

Durante l'eruzione pliniana, una miscela di gas e particelle viene espulsa ad una velocità di circa 100 – 400 m/s. Il volume dei materiali espulsi è tipicamente di 0.1 – 10 km³ con un tasso di emissione di 10⁶ – 10⁸ kg/s. Diversamente dai fenomeni descritti precedentemente, la durata di questi eventi varia da pochi minuti a poche ore. Tale classe di eruzione può essere ulteriormente suddivisa in eruzioni *subpliniane* e *ultrapliniane*, dove con il primo termine si identificano quelle eruzioni caratterizzate da un tasso di emissione di circa 10⁶ kg/s e una massa eruttata di circa 10¹¹ kg, mentre con il secondo l'intensità eruttiva è maggiore di 10⁸ kg/s e la massa emessa è maggiore di 10¹³ kg [*Cioni et al, 2015*].

L'eruzione del 79 d.C. risulta essere il principale episodio eruttivo del Vesuvio, che ha riversato sulle aree circostanti circa 4 km³ di magma, sotto forma di cenere e pomici, nel giro di poco più di un giorno. Nelle due lettere che scrisse a Tacito, Plinio il Giovane descrisse l'eruzione come "una nube nera e terrificante, lacerata da lampeggianti soffi di fuoco che si esplicavano in linee sinuose e spezzate [...] emettendo delle fiamme dalla forma allungata". Un primo indizio della crescente attività nella zona fu un terremoto locale nel 62, documentato da Tacito e Seneca. Successivamente, nei giorni precedenti

l'eruzione, i tremori vennero sentiti in diversi paesi in prossimità del vulcano. Il 24 Ottobre del 79 si sviluppò una colonna verticale di cenere e pomici, con un tasso di emissione di $40000 \text{ m}^3/\text{s}$ [Cioni et al, 1982].

I prodotti dell'eruzione formano depositi distinti di roccia piroclastica nelle pendici a sud e a sud-ovest che si presentano in maniera stratificata in seguito a successive fasi esplosive. Un tipo di deposito è quello formato principalmente da pomici presenti nella nube verticale e la sua distribuzione è interamente controllata dalla direzione del vento. I flussi piroclastici formano un secondo tipo di deposito dovuto a una valanga caotica di pomici, cenere e gas che si muove lungo le pendici del vulcano. La loro distribuzione è interamente controllata dalla topografia del territorio e si accumulano nelle valli mentre sono assenti nelle pendici più ripide. Il terzo tipo è il deposito dell'onda basale, caratterizzato da una nube turbolenta di cenere e gas bollente che viaggia a terra alla velocità di circa 100 km/ora . La città di Ercolano che si trova a 7 km a ovest del Vesuvio, fu interamente coperta da uno strato di 20 m di depositi piroclastici la cui origine può essere dovuta o ad una colata di fango oppure a flussi piroclastici [Sigurdsson et al., 1982]. Enorme fu la perdita di vite umane durante l'eruzione; in seguito agli scavi di Pompei, è stato stimato un numero di vittime di circa 2000 persone.

Un altro esempio di questo tipo di eruzione è dato dall'eruzione del vulcano El Chichón del 1982. El Chichón è un piccolo cono di tufo trachandesitico che occupa una parte isolata della regione del Chiapas in Messico. Tra la fine di marzo e l'inizio di aprile del 1982 la sua eruzione avvenne dopo 500 anni di inattività e fu caratterizzata dalla presenza di 10 episodi esplosivi. Fu preceduto da circa un mese di intensa attività sismica con una frequenza crescente da 25 eventi al giorno a 60 eventi all'ora [Cioni et al, 2015]. Il 28 marzo il vulcano eruttò in modo esplosivo producendo una colonna eruttiva che raggiunse una quota di 18.5 km e una caduta di ceneri fino a una distanza di 200 km dal cratere. Tuttavia questa fase non fu caratterizzata dalla presenza di flussi piroclastici né da onde basali. Successivamente, seguirono piccole eruzioni e due eruzioni esplosive. Quest'ultime produssero due colonne eruttive alte 32 km e 29 km e furono caratterizzate dalla presenza di flussi piroclastici e da onde basali. L'intero evento durò una settimana e causò circa 2000 vittime [De la Cruz-Reyna e Martin Del Pozzo, 2009]. L'eruzione del vulcano El Chichón fu la prima i cui effetti sul clima furono ben documentati. La colonna eruttiva iniettò grandi quantità di aerosol ricchi di solfuri, soprattutto SO_2 , in



Figura 1.5: *Cratere del vulcano El Chichón dopo l'eruzione del 1982 [Tilling, 2009].*

stratosfera. La nube di aerosol si diffuse rapidamente in tutto il globo con quantità totale di SO_2 rilasciata pari a $3.3 \cdot 10^9$ kg. Gli effetti climatici furono un riscaldamento di $4^\circ C$ nella stratosfera equatoriale, dovuto all'assorbimento di radiazione solare da parte di H_2SO_4 , e un raffreddamento alla superficie dell'emisfero nord di $0.2^\circ C$ [Cioni et al, 2015].

Un ulteriore esempio di eruzione pliniana è dato da quella del Pinatubo del 1991. Il vulcano Pinatubo è uno stratovulcano situato presso l'isola di Luzón, nelle Filippine, relativamente sconosciuto prima dell'eruzione del 1991. Con una massa di materiali eruttati pari a 10 km^3 [Gudmundsson, 2016], corrispondente a una quantità di magma dacitico prodotto pari a circa 5.5 km^3 , la fase eruttiva del 1991 è considerata una delle più grandi del XX secolo. I flussi piroclastici raggiunsero una distanza radiale di $12 - 16$ km, colpendo direttamente un'area di quasi 400 km^2 e alterando profondamente il territorio. Nei mesi antecedenti l'evento, la zona di interesse era stata caratterizzata da una intensa attività sismica, da una variabile emissione di SO_2 e dall'emissione di vapore e cenere. Successivamente, il formarsi di un duomo di lava fu il primo segnale visivo che la

crescente attività del Pinatubo era dovuta al magma. La prima grande eruzione iniziò il 12 giugno e fu caratterizzata dalla presenza di due colonne eruttive (figura (1.6)), segno della presenza di due diversi crateri, che raggiunsero la quota di 19 km.



Figura 1.6: *Eruzione del vulcano Pinatubo nel 1991 [da: <https://volcano.si.edu>].*

I giorni successivi furono caratterizzati da eruzioni multiple, l'ultima delle quali, il 15 giugno, provocò il collasso del vulcano e il formarsi di una caldera. L'eruzione del 1991 produsse la più grande nube stratosferica di SO_2 mai osservata dai moderni strumenti con una emissione di circa $17 \cdot 10^9$ kg di anidride solforosa, più del doppio di quella prodotta durante l'eruzione di El Chichón del 1982. Gli aerosol di solfati prodotti a partire dall'anidride solforosa si diffusero in tutto il globo nell'arco di tre settimane e raggiunse la copertura totale entro un anno dall'eruzione. Gli effetti climatici furono un raffreddamento di $0.5 - 0.6$ °C nell'emisfero settentrionale e un raffreddamento di 0.4 °C a livello globale.

Sebbene l'eruzione del Pinatubo sia stata una delle più grandi in assoluto, il numero delle vittime causate fu contenuto perchè il continuo monitoraggio del vulcano in seguito alle

prime scosse sismiche permise la previsione dell'eruzione e l'evacuazione degli abitanti della zona [Newhall e Punongbayan, 1996].

1.2 Caratteristiche generali di una eruzione

Un vulcano è considerato *attivo* se ha eruttato almeno una volta negli ultimi 10000 anni, altrimenti viene considerato *estinto*. Se il tempo trascorso dall'ultima eruzione è inferiore al periodo di riposo massimo registrato in precedenza, un vulcano attivo viene detto *quiescente*. La durata di ogni eruzione si estende per diversi ordini di grandezza, da circa un giorno per le scale più piccole a diversi anni per le scale più grandi.

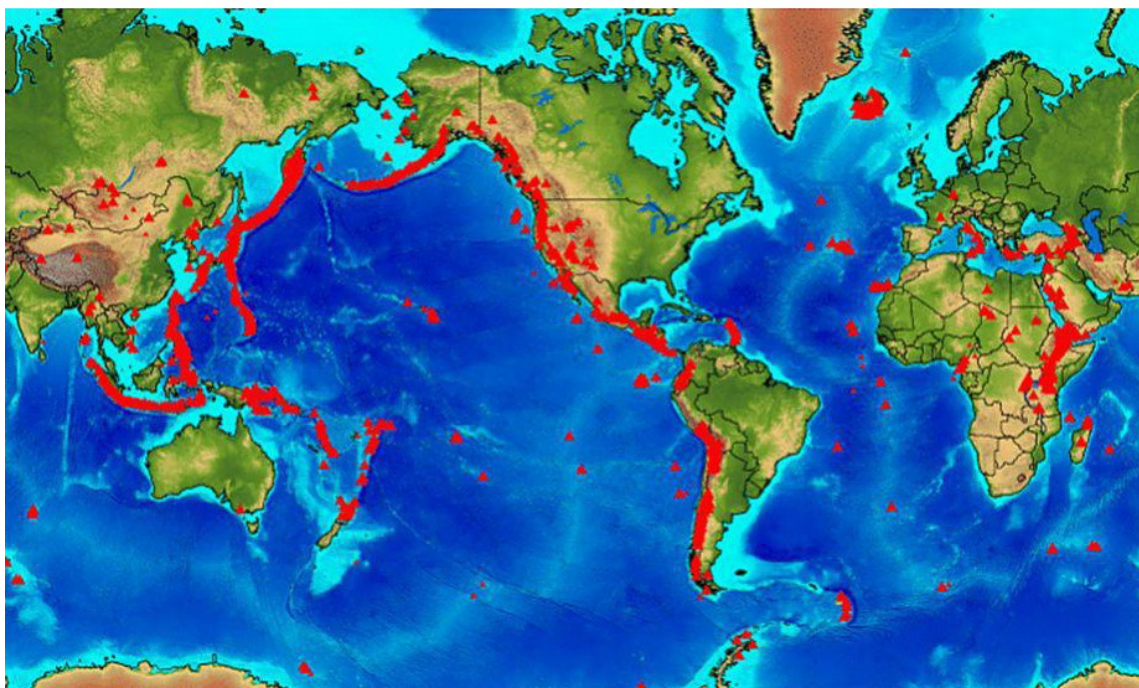


Figura 1.7: *Distribuzione dei vulcani che hanno eruttato almeno una volta negli ultimi 10000 anni.*

I vulcani non sono distribuiti in modo casuale sulla superficie terrestre. Infatti, dall'ana-

lisi della figura (1.7) che mostra attraverso dei triangoli rossi la distribuzione dei vulcani che hanno eruttato negli ultimi 10000 anni, è possibile dedurre che la tettonica a placche giochi un ruolo centrale nella collocazione dei vulcani: più del 90% dei vulcani è distribuito lungo le dorsali oceaniche e lungo le zone di subduzione, mentre il restante 10% si trova intraplacca e formano i così detti *hot spots* di cui le Hawaii sono un esempio. La distribuzione verso Nord-Ovest dei vulcani più vecchi è dovuta al movimento della placca tettonica sottostante verso Sud-Est.

1.2.1 Indice di esplosività vulcanica

Una prima suddivisione delle eruzioni vulcaniche si basa sull'utilizzo di una scala, conosciuta come "indice di esplosività vulcanica" (VEI, dall'inglese "Volcanic Explosivity Index"), che fornisce una misura empirica relativa dell'esplosività delle eruzioni. Tale scala (figura (1.8)) utilizza un numero intero da 0 a 8 per indicare il volume del materiale eruttato, la durata dell'evento e l'altezza raggiunta dalla nube formatasi in seguito all'eruzione. Valori più bassi del VEI indicano una eruzione poco esplosiva, come quelle che caratterizzano le isole Hawaii e lo Stromboli, mentre valori maggiori indicano eruzioni più violente.

In epoca storica, ovvero dall'invenzione della scrittura nel 3500 a.C. ad oggi, non si sono

VEI	TIPO	VOLUME	DURATA	ALTEZZA
0	HAWAIIANA	$> 10^3 \text{ m}^3$	1 giorno	< 100m
1	HAWAIIANA/ STROMBOLIANA	$> 10^4 \text{ m}^3$	1 giorno	100-1000 m
2	STROMBOLIANA/ VULCANIANA	$> 10^6 \text{ m}^3$	10 giorni	1-5 km
3	VULCANIANA	$> 10^7 \text{ m}^3$	1 anno	3-15 km
4	VULCANIANA/ PLINIANA	$> 10^8 \text{ m}^3$	> 10 anni	10-25 km
5	PLINIANA	$> 1 \text{ km}^3$	> 50 anni	> 25 km
6	PLINIANA/ ULTRAPLINIANA	$> 10 \text{ km}^3$	> 100 anni	> 25 km
7	ULTRAPLINIANA	$> 100 \text{ km}^3$	> 1000 anni	> 25 km
8	ULTRAPLINIANA	$> 1000 \text{ km}^3$	> 10000 anni	> 25 km

Figura 1.8: *Indice di esplosività vulcanica.*

mai verificate eruzioni vulcaniche con VEI pari a 8: l'eruzione più violenta, infatti, con un VEI pari a 7 è stata quella del vulcano Tambora (Indonesia) nel 1815, la cui nube coprì interamente il globo, abbassandone la temperatura. Un esempio di eruzione con VEI pari a 8 è quello del vulcano Toba (Sumatra) avvenuta circa 75 mila anni fa con una emissione di circa 2800 km^3 di magma [Pyle, 2015].

1.2.2 Massa dei prodotti eruttivi

La massa dei materiali eruttati durante una eruzione esplosiva può variare di diversi ordini di grandezza. Per esempio la massa emessa durante l'eruzione del Tambora del 1815 è stato di circa $10^{14} - 10^{16} \text{ kg}$, mentre durante le eruzioni del vulcano Augustine (Alaska) del 1986 furono rilasciati circa 10^8 kg di magma.

Nel caso delle eruzioni effusive, la quantità di magma eruttata spazia su un intervallo di ordini di grandezza diverso rispetto a quelle esplosive. Per esempio il magma effuso durante l'eruzione del vulcano Laki (Islanda) nel 1783-1784 fu pari a circa 10^{13} kg mentre, alle scale più piccole, il vulcano Oldoinyo Lengai (Tanzania) nel 1988 eruttò circa 10^5 kg di magma. La quantità di lava eruttata dipende anche dalla durata della singola eruzione; ad esempio l'eruzione più lunga del Santiaguito (Guatemala) ha prodotto più di 10^{12} kg di lava dal 1922 al 2015 [Pyle, 2015].

1.2.3 Energia di una eruzione vulcanica

La maggior parte dell'energia associata ad una eruzione vulcanica viene rilasciata sotto forma di calore. Il rilascio di energia termica dipende sia dalla temperatura che dalla composizione del materiale eruttato, in un range che varia tra 1 MJ/kg per la riolite a $800 \text{ }^\circ\text{C}$ e 1.5 MJ/kg per il basalto a $1150 \text{ }^\circ\text{C}$. La potenza varia da 10^{10} a 10^{12} W per le grandi eruzioni basaltiche e da 10^{13} a 10^{15} W per quelle pliniane, con una energia termica totale di $10^{18} - 10^{21} \text{ J}$. L'eruzione del 1815 del già citato Tambora ha rilasciato una quantità di energia dell'ordine di 10^{20} J , mentre l'eruzione del Vesuvio (Italia) del 79 rilasciò circa 10^{18} J di energia. Le eruzioni del vulcano Augustine del 1986, invece, si

collocano ai valori più bassi del range sopra citato, con una energia variabile tra 10^{13} e 10^{16} J [Pyle, 2015]. Le più grandi eruzioni vulcaniche, corrispondenti ad un VEI pari a 8 e ad una massa eruttata superiore a $10^{15} - 10^{16}$ kg, sono caratterizzate da una energia superiore a $10^{21} - 10^{22}$ J [Mason et al., 2004].

L'energia cinetica dei materiali emessi è solo una piccola percentuale di quella termica. Anche per una grande eruzione esplosiva, dove i materiali piroclastici si muovono alla velocità locale del suono, il rilascio di energia cinetica è solo di circa 50 kJ/kg.

Anche l'energia sismica può essere una importante componente di energia emessa: molte eruzioni sono accompagnate da un rilascio di energia sismica maggiore di 10^{13} J, un valore in ogni caso di diversi ordini di grandezza inferiore rispetto a quella termica [Pyle, 1995].

1.2.4 Onda d'urto

Una delle principali caratteristiche delle eruzioni vulcaniche esplosive sono le onde d'urto. La loro presenza durante una eruzione indica che la perturbazione generata dall'eruzione stessa induce una sovrappressione dell'aria rispetto alle normali condizioni atmosferiche. Questo processo produce nubi di condensazione della durata di pochi secondi [Morrissey e Mastin, 2015], la cui formazione è dovuta alla repentina diminuzione di pressione e raffreddamento adiabatico dell'aria, indotti dal passaggio del fronte dell'onda d'urto, che portano a condensazione il vapore acqueo presente nell'aria. La successiva rievaporazione e scomparsa delle nubi avviene quando la pressione atmosferica ritorna al valore ambientale [Nairn, 1976]. È possibile vedere un esempio di nube di condensazione nella figura (1.4) in alto a destra durante l'eruzione del vulcano Ngauruhoe del 1975.

Le onde d'urto visibili, dovute ad una eruzione vulcanica, furono riconosciute per la prima volta dal vulcanologo Frank Perret durante le eruzioni esplosive del Vesuvio nel 1906 [Nairn, 1976]. In quell'occasione Perret scrisse che "*un sottile arco luminoso lampeggiò verso l'alto e verso l'esterno dal cratere e scomparve nello spazio. Successivamente venne il suono dell'esplosione e la proiezione di gas e detriti sopra la cima del cratere. Il movimento di traslazione degli archi, molto rapido rispetto a quello dei detriti, non era al di sopra del limite di facile osservazione e non ci poteva essere alcun dubbio sulla realtà del fenomeno che è stato ripetuto alcune centinaia di volte*" [Perret, 1912]. Sebbene

questo sia un fenomeno raramente descritto, in quanto necessita di particolari condizioni di visibilità, le onde d'urto accompagnano sempre le forti eruzioni esplosive. Un esempio è dato dal vulcano Tavurvur. Si tratta di uno stratovulcano situato all'interno della caldera di Rabaul, in Papua Nuova Guinea, la cui ultima eruzione è stata quella del 29 agosto 2014. Caratterizzata da uno stile stromboliano e da una colonna di cenere alta più di 18 chilometri, l'eruzione fu accompagnata da forti esplosioni che hanno generato onde d'urto. Le favorevoli condizioni di visibilità hanno reso possibile l'osservazione di

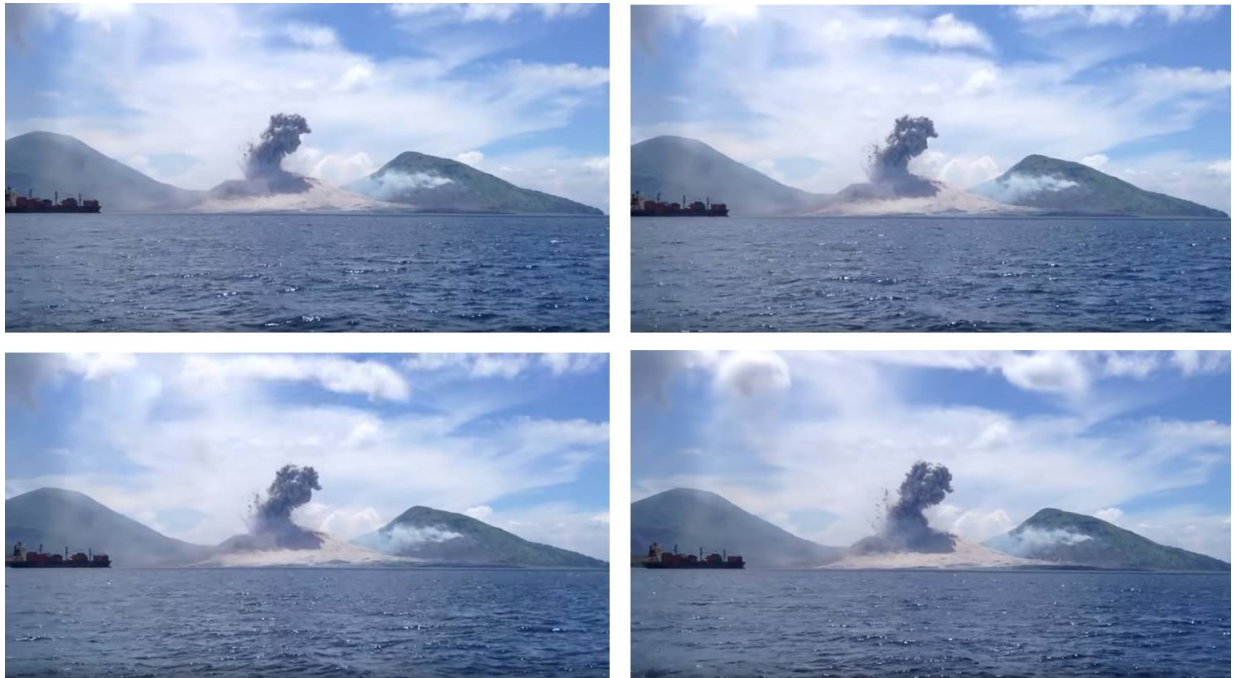


Figura 1.9: *Eruzione del vulcano Tavurvur del 2014 [da <https://www.youtube.com>].*

questi fronti d'onda e la propagazione di una di questi è visibile in figura (1.9) dove, grazie alla formazione della nube di condensazione, è possibile apprezzare il moto del fronte d'onda. I giorni successivi furono caratterizzati da deboli ma numerosi terremoti e da una continua emissione di vapore.

Un altro esempio è dato dal vulcano Bezymianny. Si tratta di uno stratovulcano, composto da andesite basaltica e dacite andesitica, situato nella regione del Kamchatka in Russia considerato estinto fino al 1955. Durante quell'anno furono registrati diversi terremoti, seguiti da una prima eruzione nell'ottobre dello stesso anno [Belousov e Bogoyavlenskaya, 1988]. L'eruzione pliniana del 30 marzo 1956 generò dal cratere una catastrofica onda d'urto con una sovrappressione di 2350 Pa registrata a circa 45 Km dal

cratere. Tale eruzione provocò il cedimento di 0.5 km^3 dell'edificio vulcanico. In questo caso l'energia rilasciata fu pari a 10^{16} J con un volume totale di materiale eruttato pari a 0.2 km^3 [Yokoo *et al.*, 2006]. Da allora si sono seguite numerose eruzioni meno energetiche rispetto a quella del 1956.

Capitolo 2

Dinamica dei gas e onde d'urto

2.1 Dinamica dei gas

Quando la velocità v di un fluido in moto diventa paragonabile a quella del suono c , oppure la supera, gli effetti dovuti alla comprimibilità del fluido diventano importanti. La dinamica dei flussi ad alte velocità prende il nome di *dinamica dei gas* [Landau e Lifshitz, 1987]. La gasdinamica studia quindi il moto dei fluidi comprimibili, cioè di quei fluidi nei quali le variazioni di pressione, dovute al moto, generano variazioni di densità non trascurabili rispetto al valore della densità stessa.

2.1.1 Numero di Mach

Nello studio dei flussi comprimibili appaiono due diverse velocità, quella del fluido e quella del suono. Un parametro che ha una grande rilevanza nel caratterizzare tali flussi è dato dal loro rapporto, ovvero

$$M = \frac{v}{c} \tag{2.1}$$

e prende il nome di *numero di Mach*.

Poichè sia v che c sono in genere variabili da punto a punto del campo fluidodinamico, il numero di Mach ha valore locale anche se a volte, nello studio del moto di un corpo in un fluido, viene indicato come numero di Mach il rapporto tra la velocità della corrente

indisturbata relativa al fluido e la velocità del suono all'interno di essa.

Sulla base dei valori del numero di Mach è possibile classificare i flussi comprimibili nel modo seguente:

flussi subsonici: $M < 1$, ovvero i fluidi viaggiano a una velocità inferiore rispetto a quella del suono.

flussi supersonici: $M > 1$, ovvero i fluidi viaggiano a una velocità maggiore rispetto a quella del suono.

2.2 Definizione di onda d'urto

Una discontinuità in un flusso di un gas si determina attraverso una o più superfici; le variabili come, per esempio, la pressione, la velocità e la densità variano in modo discontinuo attraverso tale superficie, definita *superficie di discontinuità*. In un flusso non stazionario tale superficie non rimane fissa nello spazio, tuttavia la velocità del suo moto non modifica la velocità del flusso del gas stesso.

La superficie di discontinuità deve soddisfare alcune condizioni al contorno. Consideriamo un elemento di tale superficie ed un sistema di riferimento solidale ad esso, con l'asse x normale alla superficie. Innanzitutto, deve valere la conservazione della massa; la massa del gas proveniente da un lato deve essere pari a quella che esce dall'altro lato. Il flusso di massa attraverso l'elemento è pari a ρv_x per unità di area. Quindi, per la conservazione della massa, si ottiene che

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} \quad (2.2)$$

dove i suffissi 1 e 2 si riferiscono ai due lati della superficie di discontinuità.

Si definisce la differenza tra le quantità ai due lati della superficie inserendo tale quantità all'interno di parentesi quadre. Nel caso del flusso di massa si ottiene

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x} \quad (2.3)$$

da cui

$$[\rho v_x] = 0 \quad (2.4)$$

In secondo luogo, anche il flusso di energia deve essere continuo. Si ottiene quindi la condizione

$$\left[\rho v_x \left(w + \frac{1}{2} v_x^2 \right) \right] = 0 \quad (2.5)$$

In ultima analisi, anche il flusso di momento, che in notazione vettoriale è pari a

$$\phi_m = p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \quad (2.6)$$

dove \mathbf{n} è la normale alla superficie lungo l'asse x , deve essere continuo. La continuità della componente x del flusso di momento è data dalla condizione

$$[p + \rho v_x^2] = 0 \quad (2.7)$$

mentre quella nelle direzioni y e z è data dalle condizioni

$$[\rho v_x v_y] = 0 \quad (2.8)$$

e

$$[\rho v_x v_z] = 0 \quad (2.9)$$

Le equazioni dalla (2.4) alla (2.9) formano un sistema completo di condizioni al contorno per la superficie di discontinuità. A partire da queste è possibile dedurre l'esistenza di due diversi tipi di superfici di discontinuità.

Il primo caso è quello in cui non c'è un flusso di massa attraverso la superficie. Questo significa che

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0 \quad (2.10)$$

Poichè ρ_1 e ρ_2 sono diversi da zero, segue immediatamente che

$$v_{1x} = v_{2x} = 0 \quad (2.11)$$

Le condizioni (2.5), (2.8) e (2.9) sono immediatamente soddisfatte e dalla (2.7) si ricava che

$$p_1 = p_2 \quad (2.12)$$

Quindi le componenti delle velocità normali alla superficie e la pressione del gas sono variabili continue sulla superficie di discontinuità, mentre le velocità tangenti v_y e v_z e la densità possono essere discontinue. Questo tipo di discontinuità prende il nome di *discontinuità tangenziale*.

Il secondo caso è quello in cui si ha un flusso di massa attraverso la superficie, con v_{1x} e v_{2x} diversi da zero. Quindi, a partire dalle relazioni (2.4), (2.8) e (2.9), si ottiene che

$$[v_y] = 0 \quad (2.13)$$

e

$$[v_z] = 0 \quad (2.14)$$

ovvero le velocità tangenziali sono continue sulla superficie di discontinuità mentre la pressione, la densità e le velocità normali sono discontinue. Sostituendo l'equazione (2.4) nella relazione (2.5) si ottiene che

$$\left[w + \frac{1}{2}v_x^2 \right] = 0 \quad (2.15)$$

Quindi è possibile definire un nuovo insieme di condizioni al contorno per questo tipo di

discontinuità:

$$\begin{cases} [\rho v_x] = 0 \\ \left[w + \frac{1}{2} v_x^2 \right] = 0 \\ [p + \rho v_x^2] = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Una discontinuità di questo tipo si definisce come *onda d'urto*. È quindi possibile definire l'onda d'urto come una regione di piccolo spessore entro il quale le proprietà dinamiche di un flusso (la velocità, la pressione, la densità ecc.) cambiano rapidamente. Da un punto di vista matematico si può trattare questa transizione come una discontinuità attraverso la quale le variabili fisiche subiscono un salto improvviso, rispettando in ogni caso le leggi di conservazione fondamentali [Landau e Lifshitz, 1987].

Ritornando adesso ad un sistema di riferimento fisso nello spazio è necessario sostituire, nelle condizioni al contorno, v_x con la differenza tra la componente v_n della velocità del gas normale alla superficie di discontinuità e la velocità u della superficie stessa, ovvero

$$v_x = v_n - u \quad (2.17)$$

Si può notare che, se v_x è discontinuo, le velocità del gas nei due lati della superficie di discontinuità hanno valori diversi.

2.3 Onda d'urto adiabatica

Si consideri l'onda d'urto come una superficie di discontinuità di spessore infinitesimo. Questo permette di considerare il caso di un'onda d'urto adiabatica, ovvero i processi di dissipazione dell'energia dovuti all'attrito interno o agli scambi di calore durante il moto del fluido possono essere trascurati ovunque e in ogni istante, con l'eccezione del momento in cui il fluido attraversa l'onda d'urto. Si prenda, inoltre, in considerazione un sistema di coordinate nel quale l'elemento di superficie considerato, ovvero l'onda d'urto, è fermo e il fluido è in movimento con l'asse x parallelo alla direzione della sua

velocità: le componenti v_y e v_z sono nulle ed è possibile scrivere la componente v_x come v . Si definiscano le due regioni separate dall'onda d'urto con i termini "1" e "2" (figura (2.1)).

In condizioni stazionarie i flussi di massa, momento ed energia si conservano attraverso

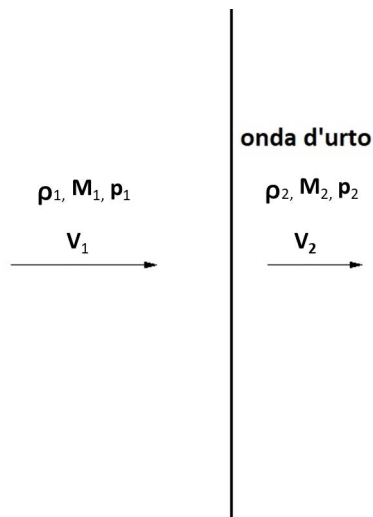


Figura 2.1: Configurazione di un'onda d'urto normale.

sando il fronte, per cui:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j \quad (2.18)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (2.19)$$

$$w_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = w_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (2.20)$$

dove la (2.20) è l'equazione di Bernoulli adiabatica in assenza di forze esterne, w è la densità di entalpia e con j è indicata la densità del flusso di massa in corrispondenza della superficie di discontinuità; si considera j positivo, ovvero il gas si muove da 1 verso 2.

A partire dalla (2.18), usando il volume specifico $V = 1/\rho$ si ottiene

$$v_1 = jV_1 \quad (2.21)$$

$$v_2 = jV_2 \quad (2.22)$$

e, sostituendo in (2.19):

$$p_1 + j^2V_1 = p_2 + j^2V_2 \quad (2.23)$$

che può essere scritta come

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad (2.24)$$

Questa formula, insieme alle (2.21) e (2.22), collega la velocità di propagazione di un'onda d'urto alla pressione ed alla densità del gas su entrambi i lati della superficie. Poichè j è positivo, si ha che $p_2 > p_1$ e $V_1 > V_2$ oppure $p_2 < p_1$ e $V_1 < V_2$.

È interessante valutare la differenza di velocità $v_1 - v_2$, ovvero

$$v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2) \quad (2.25)$$

Sostituendo l'equazione (2.24) si ottiene

$$v_1 - v_2 = (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} \quad (2.26)$$

da cui

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(V_1 - V_2)(p_2 - p_1)} \quad (2.27)$$

ovvero $v_1 > v_2$. Quindi in un sistema di riferimento in cui l'onda d'urto è ferma e il gas è in moto, la velocità con cui il gas esce dal fronte d'onda è minore rispetto a quella con cui entra. Ritornando ad un sistema di riferimento fisso nello spazio, le velocità ai due lati del fronte d'onda si riscrivono come

$$v_1 = |v_1^* - u| \quad (2.28)$$

e

$$v_2 = |v_2^* - u| \quad (2.29)$$

dove v_1^* e v_2^* rappresentano le velocità del gas nel sistema di riferimento fisso e u rappresenta il modulo della velocità del fronte d'onda. Supponendo che v_1^* sia pari a zero, ovvero che il gas davanti al fronte d'onda sia fermo, la velocità del fronte d'onda è

$$u = v_1 \quad (2.30)$$

2.4 Onda d'urto per un gas perfetto

Prendiamo in considerazione il caso di un gas perfetto, ovvero un modello del comportamento del gas le cui molecole sono puntiformi e indistinguibili, non interagenti, in moto casuale e nel quale si conserva l'energia. Il comportamento di un gas perfetto segue la legge

$$pV = nRT \quad (2.31)$$

definita *equazione di stato per i gas perfetti*, dove $R = 8.3144472 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ è la costante dei gas e n il numero di moli contenuto nella quantità di gas considerato. Si definisce anche la costante dei gas specifica \bar{R} che si ottiene dividendo la costante dei gas R per la massa molare del gas stesso. Definiamo il rapporto tra il calore specifico a pressione costante c_p ed il calore specifico a volume costante c_v di un gas come

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.32)$$

Per i gas biatomici $c_v = 3\bar{R}/2$, $c_p = 5\bar{R}/2$ e, di conseguenza, $\gamma = 5/3 = 1.67$. Per i gas monoatomici $c_v = 5\bar{R}/2$, $c_p = 7\bar{R}/2$ e, di conseguenza, $\gamma = 7/5 = 1.4$.

Nel caso di un gas perfetto, la densità di entalpia w all'interno dell'equazione (2.20)

può essere scritta come

$$w = c_p T \quad (2.33)$$

Isolando T nell'equazione (2.31) e sostituendola nella (2.33) si ottiene

$$w = \frac{c_p p V}{\bar{R}} \quad (2.34)$$

che può essere scritta come

$$w = \frac{c_p p V}{c_p - c_v} \quad (2.35)$$

da cui

$$w = \frac{p V}{1 - \frac{c_v}{c_p}} \quad (2.36)$$

Ricordando che la velocità del suono in un gas è pari a

$$c = \sqrt{\gamma p V} \quad (2.37)$$

si sostituiscono le relazioni (2.37) e (2.32) nella (2.36), ottenendo

$$w = \frac{c^2}{\gamma - 1} \quad (2.38)$$

La (2.20) può allora essere scritta come

$$\frac{\gamma p_1 V_1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{\gamma p_2 V_2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (2.39)$$

Sostituendo le equazioni (2.21), (2.22) e (2.24) si ottiene

$$\frac{\gamma p_1 V_1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V_1^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = \frac{\gamma p_2 V_2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V_2^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad (2.40)$$

da cui

$$\frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_1 + V_2) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (2.41)$$

dal quale è possibile ottenere il rapporto tra i volumi specifici V_2/V_1 , ovvero

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1(\gamma + 1) + p_2(\gamma - 1)}{p_1(\gamma - 1) + p_2(\gamma + 1)} \quad (2.42)$$

Usando la formula (2.42), è possibile quindi determinare ciascuna delle grandezze V_1 , p_1 , V_2 e p_2 come funzione delle altre tre. Il rapporto V_2/V_1 è una funzione decrescente in maniera monotona del rapporto p_2/p_1 ; per $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, ricordando che $p_1/p_2 \rightarrow 0$, la (2.42) si può scrivere come

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{p_1}{p_2}(\gamma + 1) + (\gamma - 1) \right] \left[\frac{p_1}{p_2}(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \right]^{-1} \quad (2.43)$$

da cui

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (2.44)$$

Per determinare il rapporto delle temperature ai due lati della superficie di discontinuità, si prenda in considerazione l'equazione di stato per un gas perfetto data dalla relazione (2.31), dalla quale si ricava

$$T = \frac{pV}{nR} \quad (2.45)$$

Sviluppando il rapporto tra T_2 e T_1 , si ottiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{p_1(\gamma + 1) + p_2(\gamma - 1)}{p_1(\gamma - 1) + p_2(\gamma + 1)} \right] \quad (2.46)$$

Per la densità di flusso di massa j , a partire da (2.24) e da (2.42), si ottiene:

$$j^2 = \frac{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]}{2V_1} \quad (2.47)$$

mentre per le velocità di propagazione del gas, sia davanti che dietro l'onda d'urto, si ha:

$$\begin{cases} v_1^2 = \frac{1}{2}V_1[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2] \\ v_2^2 = \frac{1}{2}V_1 \frac{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2}{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]} \end{cases} \quad (2.48)$$

che possono essere scritte come

$$\begin{cases} v_1^2 = \frac{1}{2}V_1 p_1 \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} \right] \\ v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{V_2 [p_1(\gamma - 1) + p_2(\gamma + 1)]}{[p_1(\gamma + 1) + p_2(\gamma - 1)]} \frac{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2}{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]} \end{cases} \quad (2.49)$$

da cui

$$\begin{cases} v_1^2 = \frac{1}{2}V_1 p_1 \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} \right] \\ v_2^2 = \frac{1}{2}V_2 [(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2] \end{cases} \quad (2.50)$$

ricordando che $c^2 = \gamma V p$ si ottiene

$$\begin{cases} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{c_1^2}{\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} \right] \\ v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_1}{p_2} \right] \end{cases} \quad (2.51)$$

È possibile pertanto determinare la differenza tra le velocità davanti e dietro l'onda d'ur-

to:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{1}{2}V_1[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]} - \sqrt{\frac{1}{2}V_1 \frac{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2}{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]}} \quad (2.52)$$

da cui

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{V_1}{2[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]}} \left\{ \sqrt{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]^2} - \sqrt{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2} \right\} \quad (2.53)$$

che può essere riscritto come

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{V_1}{2[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]}} \left[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2 - (\gamma + 1)p_1 - (\gamma - 1)p_2 \right] \quad (2.54)$$

da cui

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{2V_1(p_2 - p_1)^2}{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]}} \quad (2.55)$$

Tornando in un sistema di riferimento fisso, le velocità del gas ai due lati del fronte d'onda sono date dalle relazioni (2.28) e (2.29). Supponendo che v_1^* sia pari a zero, ovvero che il gas davanti al fronte d'onda sia fermo, la velocità del fronte d'onda è

$$u = v_1 \quad (2.56)$$

È possibile scrivere la velocità del gas dietro l'onda d'urto in funzione di quella del fronte d'onda, ovvero

$$v_2^* = |v_2 - u| \quad (2.57)$$

ovvero

$$v_2^* = \left| \sqrt{\frac{1}{2} V_1 \frac{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2}{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]} - u} \right| \quad (2.58)$$

da cui

$$v_2^* = \left| u \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2} - u \right| \quad (2.59)$$

ovvero

$$v_2^* = \left| 2u \left(\frac{p_1 - p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2} \right) \right| \quad (2.60)$$

2.5 Variabili in funzione del numero di Mach

Nello studio delle onde d'urto, risulta particolarmente utile introdurre i rapporti tra le grandezze del fluido, come la densità, la pressione e la temperatura, nelle due regioni 1 e 2.

Determiniamo per primo il rapporto p_2/p_1 . Isolando ρ_2 dall'equazione (2.18), v_2 dall'equazione (2.19) e sostituendoli nell'equazione (2.39) si ottiene:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{(\rho_1 v_1)^2} (p_1 - p_2 + \rho_1 v_1^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 - p_2 + \rho_1 v_1^2}{\rho_1 v_1} \right)^2 \quad (2.61)$$

In seguito ad alcuni semplici passaggi algebrici si ottiene che

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma p_1} - 1 \right) \quad (2.62)$$

Notando che

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma p_1} = \frac{v_1^2}{\gamma RT} = \frac{v_1^2}{c^2} = M_1^2 \quad (2.63)$$

si ottiene

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (2.64)$$

La figura (2.2) mostra in verde il rapporto p_2/p_1 in funzione del numero di Mach M_1 . È possibile notare che tale funzione è monotona e sempre positiva e, per $M_1 > 1$, è maggiore di 1, ovvero la pressione dietro il fronte d'onda è maggiore di quella dell'ambiente imperturbato.

Determiniamo adesso il rapporto ρ_2/ρ_1 , considerando la relazione (2.42). Ricordando che $V = 1/\rho$, se si inverte la relazione (2.42) si ottiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_1(\gamma - 1) + p_2(\gamma + 1)}{p_1(\gamma + 1) + p_2(\gamma - 1)} \quad (2.65)$$

da cui

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[(\gamma - 1) + \frac{p_2(\gamma + 1)}{p_1} \right] \left[(\gamma + 1) + \frac{p_2(\gamma - 1)}{p_1} \right]^{-1} \quad (2.66)$$

Sostituendo i risultati ottenuti tramite la (2.64), si ottiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left\{ (\gamma - 1) + (\gamma + 1) \left[1 + \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1} \right] \right\} \left\{ (\gamma + 1) + (\gamma - 1) \left[1 + \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1} \right] \right\}^{-1} \quad (2.67)$$

da cui

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\gamma M_1^2 (\gamma + 1)}{4\gamma + 2\gamma^2 M_1^2 - 2\gamma M_1^2} \quad (2.68)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (2.69)$$

La figura (2.2) mostra in giallo il rapporto ρ_2/ρ_1 in funzione del numero di Mach M_1 . Si tratta di una funzione positiva e, per $M_1 > 1$, $\rho_2/\rho_1 > 1$, ovvero la densità dietro il fronte d'onda è maggiore di quella dell'ambiente imperturbato.

Per determinare il rapporto T_2/T_1 , si consideri la relazione (2.46). Sostituendo in tale equazione i risultati ottenuti tramite le (2.64) e (2.69), si ottiene

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \right]^{-1} \quad (2.70)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \quad (2.71)$$

La figura (2.2) mostra in viola il rapporto T_2/T_1 in funzione del numero di Mach M_1 . Poichè le temperature assolute sono grandezze positive, la funzione (2.71) è positiva ed è maggiore di uno per ogni valore di M_1 , ovvero la temperatura dietro il fronte d'onda è sempre maggiore di quella dell'ambiente imperturbato.

Determiniamo una relazione tra i numeri di Mach M_2 e M_1 . Poichè

$$\rho v^2 = \rho c^2 M^2 = \rho \frac{\gamma p M^2}{\rho} = \gamma p M^2 \quad (2.72)$$

è possibile riscrivere l'equazione del momento (2.19) come

$$p_1 + \gamma p_1 M_1^2 = p_2 + \gamma p_2 M_2^2 \quad (2.73)$$

da cui

$$M_2^2 = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{1}{\gamma} + M_1^2 \right) - \frac{1}{\gamma} \quad (2.74)$$

Sostituendo il risultato (2.64), si ottiene

$$M_2^2 = \left(\frac{1}{\gamma} + M_1^2 \right) \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{-1} - \frac{1}{\gamma} \quad (2.75)$$

da cui

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \quad (2.76)$$

La figura (2.2) mostra in rosso il numero di Mach M_2 dietro il fronte d'onda in funzione del numero di Mach M_1 . Si tratta di una funzione decrescente sempre positiva. Inoltre per $M_1 < 1$ il numero di Mach M_2 è maggiore di uno, ovvero il flusso è supersonico, mentre, per $M_1 > 1$, M_2 è minore di uno, ovvero il fluido si trova in regime subsonico.

Di particolare interesse fisico risulta essere la variazione di entropia attraverso l'onda d'urto. Si considera la relazione

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \bar{R} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.77)$$

dove \bar{R} è la costante dei gas specifica. Dividendo per il calore specifico c_v , si ottiene

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{\bar{R}}{c_v} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.78)$$

È possibile scrivere c_v e c_p come funzioni di γ e \bar{R} :

$$\begin{cases} c_v = \frac{\bar{R}}{\gamma - 1} \\ c_p = \frac{\gamma \bar{R}}{\gamma - 1} \end{cases} \quad (2.79)$$

Sostituendo le (2.79) in (2.78) si ottiene

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \gamma \ln \frac{T_2}{T_1} - (\gamma - 1) \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.80)$$

da cui

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma-1)} \quad (2.81)$$

Ma nelle trasformazioni adiabatiche reversibili le quantità pV^γ e $TV^{(\gamma-1)}$ sono costanti e, di conseguenza,

$$\begin{cases} \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \\ \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} \end{cases} \quad (2.82)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione (2.81) si ottiene

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\left(\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \right)^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^\gamma \frac{p_2}{p_1} \right] \quad (2.83)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \frac{p_2}{p_1} \right] \quad (2.84)$$

Si sostituiscono la (2.64) e la (2.69) per ottenere

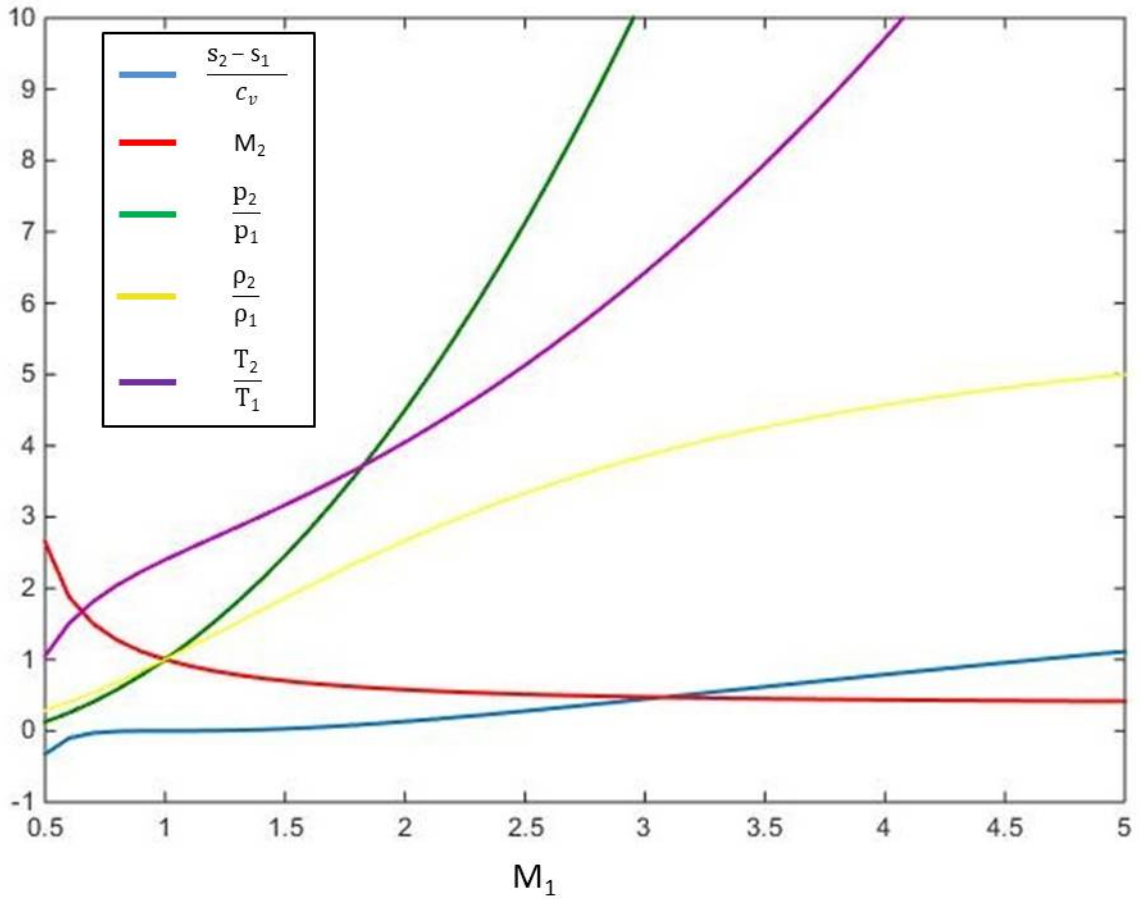


Figura 2.2: Numero di Mach M_2 , rapporto di pressione p_2/p_1 , rapporto di densità ρ_2/ρ_1 , rapporto di temperatura T_2/T_1 e rapporto tra la differenza di entropia e il calore specifico $(s_2 - s_1)/c_v$ in funzione del numero di Mach M_1 .

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left\{ \left(\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right)^\gamma \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \right\} \quad (2.85)$$

La figura (2.2) mostra in blu il rapporto tra la differenza di entropia e il calore specifico $(s_2 - s_1)/c_v$ in funzione del numero di Mach M_1 . Si tratta di una funzione crescente che è positiva per $M_1 > 1$ e negativa per $M_1 < 1$ ma quest'ultimo caso non è permesso perchè l'entropia non può diminuire attraverso l'onda d'urto. Quindi sono possibili solo valori positivi dell'equazione (2.85) che corrispondono a $M_1 > 1$, ovvero è valida per

flussi supersonici. Ciò implica che $M_2 < 1$, ovvero il fluido dietro l'onda d'urto si trova in regime subsonico.

Riassumendo, affinché la seconda legge della termodinamica sia valida, un'onda d'urto può verificarsi solo in un flusso supersonico e il campo di flusso della regione 2, in seguito al passaggio dell'onda, sarà subsonico. Quindi il fluido si comprimerà mentre passa attraverso l'onda d'urto. L'aumento di entropia significa che il moto è irreversibile ovvero che l'energia è dissipata. Allora è possibile asserire che la discontinuità tra le due regioni è un mezzo con il quale l'energia può essere dissipata nel moto di un fluido ideale e il meccanismo con il quale l'entropia aumenta in seguito al passaggio dell'onda d'urto è dovuto ai processi dissipativi che avvengono all'interno del sottile strato dell'onda d'urto stessa, anche se l'entità della dissipazione è interamente determinata dalle leggi di conservazione della massa, del momento e dell'energia.

2.6 Onda d'urto di forte intensità

Nel caso di un'onda d'urto di forte intensità la pressione immediatamente dietro il fronte d'onda, ovvero p_2 nel sistema di riferimento solidale con il fronte d'onda, è molto grande. Tuttavia non basta imporre $p_2 \gg p_1$ poichè, in base alle formule (2.42) e (2.46), i valori di pressione sono scalati tramite i coefficienti $(\gamma + 1)$ (per p_1) e $(\gamma - 1)$ (per p_2). Di conseguenza dovrà essere imposta la relazione

$$(\gamma - 1)p_2 \gg (\gamma + 1)p_1 \quad (2.86)$$

Questo implica che per un gas monoatomico, dove $\gamma = 1.67$, la pressione dietro al fronte d'onda deve essere molto più grande di 3.98 volte la pressione del gas imperturbato, mentre nel caso diatomico ($\gamma = 1.4$) $p_2 \gg 6p_1$.

Dalla (2.42) e dalla (2.46) si trova che:

$$\begin{cases} \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2(\gamma - 1)}{p_2} \left[\frac{1 + p_1(\gamma + 1)p_2^{-1}(\gamma - 1)^{-1}}{(\gamma + 1) + p_1(\gamma - 1)p_2^{-1}} \right] \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_2(\gamma - 1)}{p_2} \left[\frac{1 + p_1(\gamma + 1)p_2^{-1}(\gamma - 1)^{-1}}{(\gamma + 1) + p_1(\gamma - 1)p_2^{-1}} \right] \end{cases} \quad (2.87)$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma - 1)p_2}{(\gamma + 1)p_1} \end{cases} \quad (2.88)$$

Il rapporto T_2/T_1 tende a infinito con p_2/p_1 , quindi la discontinuità di temperatura in un'onda d'urto, come la discontinuità di pressione, può essere arbitrariamente grande. Diversamente, il rapporto di densità tende ad un valore costante; per un gas monoatomico il limite è $\rho_2 = 4\rho_1$, per un gas diatomico il limite è $\rho_2 = 6\rho_1$. Infine le velocità di propagazione di una forte onda d'urto sono

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}V_1(\gamma + 1)p_2 \left[1 + \frac{p_1(\gamma - 1)}{p_2(\gamma + 1)} \right]} \\ v_2 = \sqrt{\frac{V_1(\gamma - 1)^2 p_2^2}{p_2(\gamma + 1)} \left[1 + \frac{(\gamma + 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2} \right]^2 \left[1 + \frac{(\gamma - 1)p_1}{(\gamma + 1)p_2} \right]^{-1}} \end{cases} \quad (2.89)$$

da cui

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}V_1(\gamma + 1)p_2} \\ v_2 = \sqrt{\frac{V_1(\gamma - 1)^2 p_2}{2(\gamma + 1)}} \end{cases} \quad (2.90)$$

Entrambe le velocità sono proporzionali alla radice della pressione dietro il fronte d'onda. Inoltre, passando ad un sistema di riferimento fisso nello spazio e considerando fermo il

gas davanti all'onda d'urto, v_1 rappresenta il modulo della velocità del fronte d'onda u . Quindi è possibile scrivere la velocità v_2 in funzione di u come

$$v_2 = u \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (2.91)$$

ovvero il gas che si trova dietro il fronte d'onda avrà una velocità pari a $1/4$ e $1/6$ di quella dell'onda d'urto rispettivamente nel caso monoatomico e diatomico.

Capitolo 3

Il modello

Si consideri la propagazione di un'onda d'urto sferica (figura (3.1)) originata da una forte esplosione, cioè dal rilascio istantaneo di una grande quantità di energia in un piccolo volume. Si considera il gas nel quale si propaga l'onda come un gas perfetto. Si assume che l'onda sia a piccola distanza dalla sorgente, dove è ancora forte, perciò adottiamo l'approssimazione dell'onda di forte intensità. Queste distanze sono comunque grandi se paragonate con le dimensioni della sorgente: per questo motivo possiamo affermare che l'energia E viene rilasciata in punto. Si assume il mezzo nel quale si propaga l'onda come un fluido isotropo e, poichè si considera l'onda a piccola distanza dalla sorgente, omogeneo. Inoltre si assume il mezzo illimitato, quindi si trascura l'interazione del fronte d'onda con la superficie terrestre. Infine la pressione, la densità e la temperatura del mezzo sono considerate pari a quelle dell'aria a livello del mare.

3.1 Onda d'urto sferica

Poichè si è assunto che l'onda d'urto sia sferica, risulta conveniente prendere un sistema di riferimento in coordinate sferiche con origine nel punto in cui viene rilasciata l'energia E ; in questo modo il problema avrà quindi simmetria sferica e tutte le variabili, come per esempio la velocità, dipenderanno solo dalla coordinata radiale.

L'onda d'urto è forte e, di conseguenza, la discontinuità di pressione è grande. Si può allora supporre che la pressione p_2 dietro l'onda sia molto più grande della pressione p_1

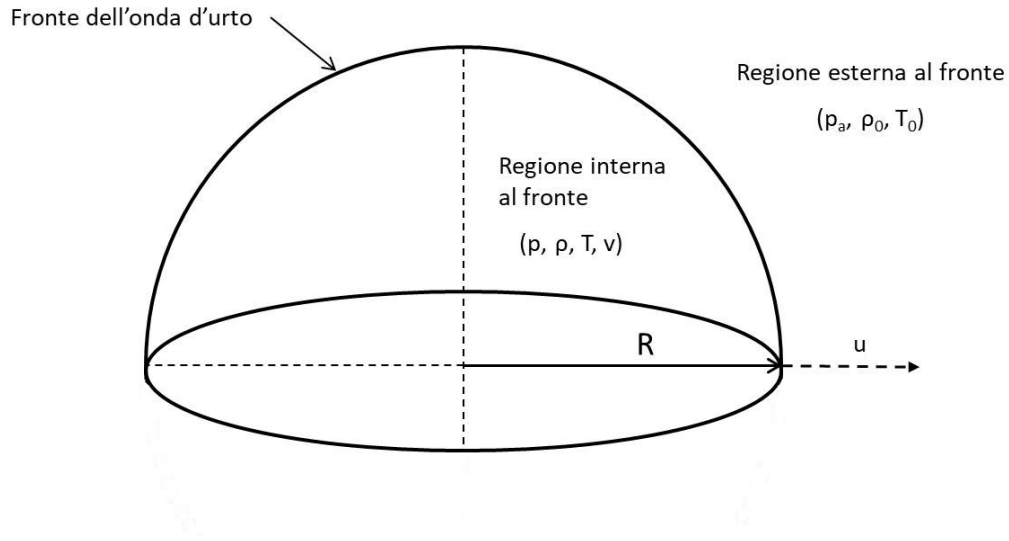


Figura 3.1: *Modello di onda d'urto sferica.*

del gas imperturbato davanti al fronte, in modo tale che valga l'equazione (2.86). Questo permette di trascurare p_1 ovunque rispetto a p_2 e il rapporto di densità ρ_2/ρ_1 ha il suo valore limite pari a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (3.1)$$

L'andamento del flusso del gas è determinato soltanto da due parametri: la densità iniziale del gas ρ_1 e la quantità di energia E rilasciata dall'esplosione. Da questi parametri e da due variabili indipendenti (il tempo t e la coordinata radiale r) è possibile formare soltanto una combinazione adimensionale, che è possibile scrivere come

$$L = r \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \quad (3.2)$$

Di conseguenza si ha un flusso in condizioni di similarità e, per questo motivo, la posizione dell'onda d'urto in ogni istante deve corrispondere ad un multiplo di tale combinazione adimensionale. Questo fornisce informazioni sul modo in cui l'onda d'urto si muove in funzione del tempo: indicando con R la distanza del fronte d'onda dall'origine si ha che

$$R(t) = \beta \left(\frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{1/5} \quad (3.3)$$

dove β è una costante numerica determinabile risolvendo l'equazione del moto. La velocità dell'onda rispetto al gas imperturbato, ovvero relativo ad un sistema di coordinate fisso nello spazio, è

$$u = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{5}\beta \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} (t^2)^{1/5-1} 2t = \frac{2}{5}\beta \frac{E^{1/5}}{\rho_1^{1/5}} t^{-3/5} \quad (3.4)$$

In questo tipo di problema, il movimento dell'onda può essere determinato semplicemente facendo una analisi sulle dimensioni. La pressione p_2 , la densità ρ_2 e il modulo della velocità $v_2^* = |v_2 - u|$ del gas dietro l'onda d'urto, tutti relativi a un sistema di coordinate fisso, possono essere espressi in termini di u , in accordo con le relazioni (2.88) e (2.90):

$$v_2^* = \frac{2u}{\gamma + 1} \quad (3.5)$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (3.6)$$

$$p_2 = 2\rho_1 \frac{u^2}{\gamma + 1} \quad (3.7)$$

La densità è costante nel tempo, mentre v_2^* e ρ_2 decrescono come $t^{-3/5}$ e $t^{-6/5}$ rispettivamente. Si nota inoltre che la pressione p_2 dovuta all'urto aumenta all'aumentare dell'energia totale come $E^{2/5}$.

3.2 La regione interna al fronte d'onda

Si vuole determinare il flusso del gas per la regione dietro l'onda d'urto, dove $r < R$. Invece della velocità del gas v , della densità ρ e del quadrato della velocità

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (3.8)$$

la quale viene usata come variabile in sostituzione della pressione p , si introducono le variabili adimensionali V , G e Z definite a partire da

$$v = \frac{2rV}{5t} \quad (3.9)$$

$$\rho = \rho_1 G \quad (3.10)$$

$$c^2 = \frac{4r^2 Z}{25t^2} \quad (3.11)$$

dalle quali si ricavano

$$V = \frac{5tv}{2r} \quad (3.12)$$

$$G = \frac{\rho}{\rho_1} \quad (3.13)$$

$$Z = \frac{25(ct)^2}{4r^2} \quad (3.14)$$

le quali possono essere scritte come funzioni di una singola variabile adimensionale ξ definita come

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \quad (3.15)$$

I valori delle variabili adimensionali V , G e Z sulla superficie di discontinuità (per $\xi = 1$), tenendo in considerazione le relazioni (3.5), (3.6) e (3.7), sono:

$$V(1) = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (3.16)$$

$$G(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (3.17)$$

$$Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \quad (3.18)$$

Per descrivere le proprietà del gas si ha bisogno di un insieme di equazioni che possano mettere in evidenza come le proprietà in esame varino nel tempo e nello spazio. A tal proposito utilizziamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.19)$$

l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.20)$$

e l'equazione di conservazione dell'entropia:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0 \quad (3.21)$$

dove s è la densità di entropia.

Poichè si è assunto che l'onda d'urto sia sferica, scriviamo tali equazioni in coordinate sferiche. In particolare, la divergenza di un vettore

$$\mathbf{x}(r, \theta, \varphi) = x_r \mathbf{e}_r + x_\theta \mathbf{e}_\theta + x_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (3.22)$$

dove \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_φ sono versori, in coordinate sferiche è pari a

$$\nabla \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 x_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta x_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial x_\varphi}{\partial \varphi} \quad (3.23)$$

mentre il gradiente di uno scalare f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.24)$$

Le equazioni (3.19), (3.20) e (3.21) per il flusso di un gas adiabatico a simmetria centrale, tenendo in considerazione le relazioni (3.23) e (3.24), sono

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

dove la prima è l'equazione del moto, la seconda è l'equazione di continuità e l'ultima è l'equazione di conservazione dell'entropia nella quale

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = c_p \ln \frac{p^{1/\gamma}}{\rho} \quad (3.26)$$

è l'espressione della densità di entropia per un gas perfetto, mentre per la simmetria del problema $v = v_r$. Sostituendo nelle equazioni (3.25) le espressioni (3.9), (3.10) e (3.11) per v , c^2 e ρ , otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie per le funzioni V , G e Z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2rV}{5t} \right) + \frac{2rV}{5t} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2rV}{5t} \right) = -\frac{1}{\rho_1 G} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_1 G \frac{4r^2 Z}{\gamma 25t^2} \right) \\ \frac{\partial \rho_1 G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_1 G \frac{2rV}{5t} \right) + \rho_1 G \frac{2rV}{5t} \frac{2}{r} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2rV}{5t} \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \left(\frac{\rho_1 G}{\gamma (\rho_1 G)^\gamma} \frac{4r^2 Z}{25t^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Si vuole cercare quindi una soluzione per V , G e Z .

3.2.1 Determinazione della variabile Z

Il fatto che si sia trascurata la pressione p_1 del gas imperturbato significa che l'energia iniziale del gas è stata trascurata rispetto all'energia che viene acquisita in seguito all'esplosione. Perciò l'energia totale all'interno della sfera delimitata dall'onda d'urto è costante e pari a E . Inoltre, poichè si ha un flusso in condizioni di similarità, è evidente che l'energia all'interno di una sfera con raggio che aumenta nel tempo in modo tale che

$$\xi = \frac{r(t)}{R(t)} = \text{costante} \quad (3.28)$$

deve rimanere costante. La velocità radiale dei punti su questa sfera è, in accordo con la relazione (3.4),

$$v_n = \frac{2r}{5t} \quad (3.29)$$

Si vuole ricavare l'equazione di tale energia. Da un lato, si ha la quantità di energia

$$dE_1 = 4\pi r^2 \rho v \left(w + \frac{1}{2} v^2 \right) dt \quad (3.30)$$

che lascia la sfera di area $4\pi r^2$ nel tempo dt , dove

$$\phi = \rho v \left(w + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad (3.31)$$

è la densità del flusso di energia e

$$w = c_p T = \frac{\gamma p V}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1} \quad (3.32)$$

è la densità di entalpia; dall'altro lato il volume della sfera aumenta nel tempo di una quantità

$$dV = 4\pi r^2 v_n dt \quad (3.33)$$

e l'energia in questa porzione di volume è

$$dE_2 = 4\pi r^2 \rho v_n \left(\epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) dt \quad (3.34)$$

dove

$$\epsilon = c_v T = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} \quad (3.35)$$

è la densità di energia interna di un gas perfetto. Uguagliando le due espressioni per l'energia si ottiene:

$$4\pi r^2 \rho v \left(w + \frac{1}{2} v^2 \right) dt = 4\pi r^2 \rho v_n \left(\epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) dt \quad (3.36)$$

da cui

$$4\pi r^2 \rho v \left(\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2 \right) = 4\pi r^2 \rho v_n \left[\frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} v^2 \right] \quad (3.37)$$

e sostituendo le espressioni (3.9), (3.10) e (3.11) si ottiene

$$4\pi r^2 \rho \frac{2rV}{5t} \left[\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 \right] = 4\pi r^2 \rho \frac{2r}{5t} \left[\frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 \right] \quad (3.38)$$

che può essere riscritta come

$$V \left[\frac{1}{\gamma - 1} \frac{4r^2 Z}{25t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 \right] = \left[\frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \frac{4r^2 Z}{25t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 \right] \quad (3.39)$$

oppure

$$\frac{Z}{\gamma - 1} \left(V - \frac{1}{\gamma} \right) = V^2(1 - V) \quad (3.40)$$

dalla quale si ricava Z

$$Z = \frac{\gamma V^2(1 - V)(\gamma - 1)}{2(\gamma V - 1)} \quad (3.41)$$

che è la soluzione cercata.

È possibile notare che, sostituendo il valore di V dato dalla (3.16) nella (3.41), si ottiene il valore di Z in $\xi = 1$:

$$Z = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} - 1 \right)^{-1} \quad (3.42)$$

che può essere scritta come

$$Z = \frac{4\gamma(\gamma + 1)(\gamma - 1)^2}{2(\gamma - 1)(\gamma + 1)^3} \quad (3.43)$$

da cui

$$Z = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} = Z(1) \quad (3.44)$$

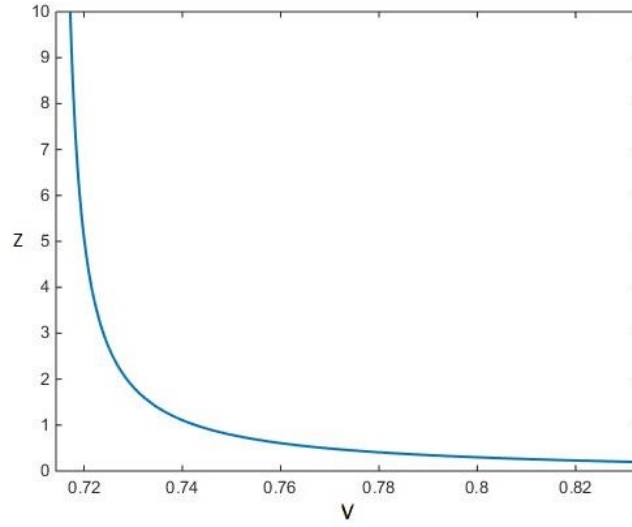


Figura 3.2: Variabile Z in funzione di V .

In figura (3.2) è riportato l'andamento della variabile Z nel caso di un gas diatomico per valori di V . In particolar modo Z è una funzione decrescente di V .

3.2.2 Determinazione della variabile V

Si prenda in considerazione la seconda delle equazioni (3.27), riscritta come segue:

$$\rho_1 \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\rho_1 2r}{5t} \frac{\partial GV}{\partial r} + \frac{2\rho_1 GV}{5t} + \frac{4\rho_1 GrV}{5rt} = 0 \quad (3.45)$$

Considerando l'espressione (3.15), si sostituisce

$$dt = -\frac{5\beta}{2r} t^{7/5} \left(\frac{\rho_1}{E} \right)^{-1/5} d\xi \quad (3.46)$$

e

$$dr = \beta \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{-1/5} d\xi \quad (3.47)$$

ottenendo:

$$-\rho_1 \frac{2r}{5t\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \frac{dG}{d\xi} + \frac{2\rho_1 r}{5t} \frac{1}{\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \frac{dGV}{d\xi} + \frac{2\rho_1 GV}{5t} + \frac{4\rho_1 GV}{5t} = 0 \quad (3.48)$$

che può essere scritta come

$$\frac{2\rho_1}{5t} \left[(V-1) \frac{dG}{d \ln \xi} + G \frac{dV}{d \ln \xi} \right] + \frac{6\rho_1 GV}{5t} = 0 \quad (3.49)$$

oppure

$$-\frac{1-V}{G} \frac{dG}{d \ln \xi} + \frac{dV}{d \ln \xi} = -3V \quad (3.50)$$

da cui

$$-(1-V) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} + \frac{dV}{d \ln \xi} = -3V \quad (3.51)$$

Si prenda adesso in considerazione la terza delle equazioni (3.27), riformulata come segue:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2rV}{5t} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\ln \left(\frac{\rho_1}{\gamma \rho_1^\gamma} \frac{4r^2}{25t^2} \right) + \ln G^{1-\gamma} + \ln Z \right] = 0 \quad (3.52)$$

Considerando nuovamente l'espressione (3.15), si sostituisce

$$dt = -\frac{5\beta}{2r} t^{7/5} \left(\frac{\rho_1}{E} \right)^{-1/5} d\xi \quad (3.53)$$

e

$$dr = \beta \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{-1/5} d\xi \quad (3.54)$$

ottenendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2rV}{5t} \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \frac{\rho_1}{\gamma \rho_1^\gamma} \frac{4r^2}{25t^2} + \left[-\frac{2r}{5t\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \frac{d}{d\xi} + \frac{2rV}{5t\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \frac{d}{d\xi} \right] (\ln G^{1-\gamma} + \ln Z) = 0 \quad (3.55)$$

che può essere scritta come

$$\frac{2rV}{5t} \frac{2r}{r^2} - \frac{2t}{t^2} + \left[-\frac{2r}{5t\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \frac{d}{d\xi} + \frac{2rV}{5t\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \frac{d}{d\xi} \right] (\ln G^{1-\gamma} + \ln Z) = 0 \quad (3.56)$$

oppure come

$$\frac{2r}{5t\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} (V-1) \left[\frac{d}{d\xi} \ln Z + (1-\gamma) \frac{d}{d\xi} \ln G \right] = \frac{2}{5t} (5-2V) \quad (3.57)$$

da cui

$$\frac{r}{\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5} \left[\frac{d}{d\xi} \ln Z - (\gamma-1) \frac{d}{d\xi} \ln G \right] = -\frac{5-2V}{1-V} \quad (3.58)$$

si sostituisce la relazione (3.15)

$$\xi \left[\frac{d}{d\xi} \ln Z - (\gamma-1) \frac{d}{d\xi} \ln G \right] = -\frac{5-2V}{1-V} \quad (3.59)$$

dalla quale si ricava

$$\frac{d \ln Z}{d \ln \xi} - (\gamma-1) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} = -\frac{5-2V}{1-V} \quad (3.60)$$

Ricapitolando, la seconda e la terza delle equazioni (3.27) si possono scrivere come

$$\begin{cases} \frac{dV}{d \ln \xi} - (1-V) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} = -3V \\ \frac{d \ln Z}{d \ln \xi} - (\gamma-1) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} = -\frac{5-2V}{1-V} \end{cases} \quad (3.61)$$

Separando le variabili, si ottiene:

$$\begin{cases} -\frac{dV}{3V} + (1-V) \frac{d \ln G}{3V} = d \ln \xi \\ -\left(\frac{5-2V}{1-V}\right)^{-1} d \ln Z + \left(\frac{5-2V}{1-V}\right)^{-1} (\gamma-1) d \ln G = d \ln \xi \end{cases} \quad (3.62)$$

Dopo aver sostituito $d \ln G$ dalla seconda nella prima, si prenda in considerazione la prima equazione:

$$-\frac{dV}{3V} + \frac{1-V}{3V} \left[\frac{d \ln Z}{\gamma-1} + \frac{(5-2V)d \ln \xi}{(\gamma-1)(1-V)} \right] = d \ln \xi \quad (3.63)$$

Sostituendo la relazione (3.41) al suo interno si ottiene:

$$-\frac{dV}{3V} + \frac{1-V}{3V} \left[\frac{1}{\gamma-1} d \ln \frac{\gamma V^2(1-V)(\gamma-1)}{2(\gamma V-1)} + \frac{(5-2V)d \ln \xi}{(\gamma-1)(1-V)} \right] = d \ln \xi \quad (3.64)$$

che può essere scritta come

$$\left[1 - \frac{5-2V}{3V(\gamma-1)} \right]^{-1} \left\{ -\frac{dV}{3V} + \frac{1-V}{3V} \left[\frac{1}{\gamma-1} d \ln \frac{\gamma V^2(1-V)(\gamma-1)}{2(\gamma V-1)} \right] \right\} = d \ln \xi \quad (3.65)$$

oppure come

$$\left[\frac{3V(\gamma-1)}{3V(\gamma-1) - 5 + 2V} \right] \left\{ -\frac{dV}{3V} + \frac{1-V}{3V(\gamma-1)} \left[d \ln V^2 + d \ln(1-V) - d \ln(\gamma V-1) \right] \right\} = d \ln \xi \quad (3.66)$$

da cui

$$\left[\frac{\gamma - 1}{3V(\gamma - 1) - 5 + 2V} \right] \left[-1 + \frac{1 - V}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{V} - \frac{1}{1 - V} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \right] dV = d \ln \xi \quad (3.67)$$

Integrando entrambi i membri, tenendo in considerazione la condizione al contorno (3.16) si giunge alla seguente relazione:

$$\ln \xi = -\frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{5(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)} \ln \frac{\gamma + 1}{7 - \gamma} [5 - (3\gamma - 1)V] + \frac{\gamma - 1}{2\gamma + 1} \ln \frac{(\gamma + 1)(1 - \gamma V)}{1 - \gamma} - \frac{2}{5} \ln \frac{V(\gamma + 1)}{2} \quad (3.68)$$

Calcolando l'esponenziale ed elevando alla quinta potenza si ottiene:

$$\xi^5 = \left[\frac{1}{2}(\gamma + 1)V \right]^{-2} \left\{ \frac{\gamma + 1}{7 - \gamma} [5 - (3\gamma - 1)V] \right\}^{\nu_1} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2} \quad (3.69)$$

dove

$$\nu_1 = -\frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)} \quad (3.70)$$

e

$$\nu_2 = 5 \frac{\gamma - 1}{2\gamma + 1} \quad (3.71)$$

È interessante notare l'andamento della variabile V in funzione di ξ . In figura (3.3) è riportato l'andamento di V nel caso di un gas diatomico per valori di ξ compresi da 0 e 1. In particolar modo $V(0) = 0.7143$ per $\xi = 0$ e rimane circa costante per $\xi < 0.6$, mentre cresce rapidamente per $\xi > 0.6$ fino al valore massimo pari a 0.833 dato dalla (3.16) in $\xi = 1$.

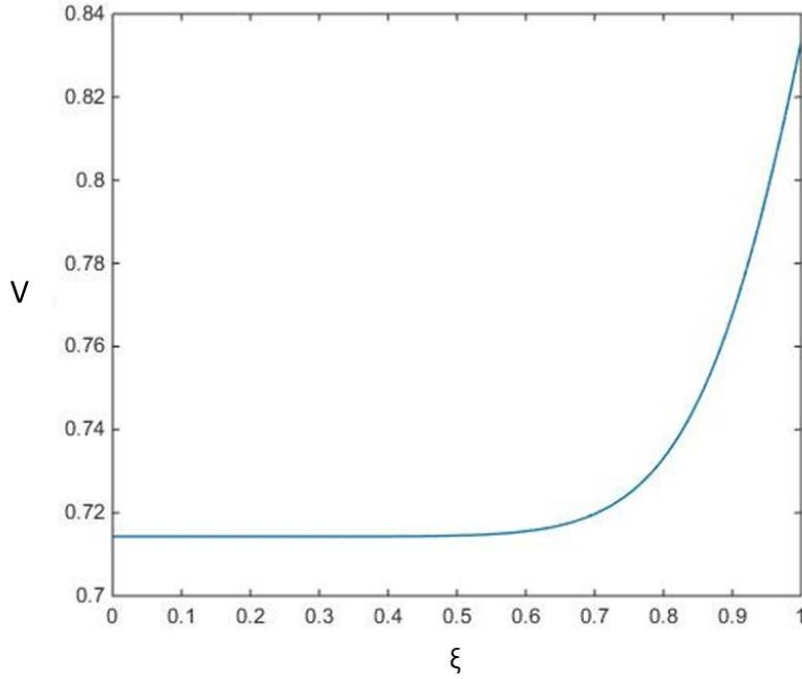


Figura 3.3: Variabile V in funzione di ξ .

3.2.3 Determinazione della variabile G

Sostituiamo adesso la (3.67) nella seconda delle equazioni (3.61):

$$d \ln Z - (\gamma - 1) d \ln G = - \frac{5 - 2V}{1 - V} \left\{ \frac{\gamma - 1}{3V(\gamma - 1) - 5 + 2V} \left[-1 + \frac{1 - V}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{V} - \frac{1}{1 - V} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \right] dV \right\} \quad (3.72)$$

che può essere scritta come

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(d \ln Z + \frac{5 - 2V}{1 - V} \left\{ \frac{\gamma - 1}{3V(\gamma - 1) - 5 + 2V} \left[-1 + \frac{1 - V}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{V} - \frac{1}{1 - V} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \right] dV \right\} \right) = d \ln G \quad (3.73)$$

Dopo aver integrato, tenendo in considerazione le condizioni al contorno (3.16), (3.18) e (3.17), si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{Z}{Z(1)} - \frac{1}{\gamma-1} \left(2 \ln \frac{V}{V(1)} + \frac{2-5\gamma}{2\gamma+1} \ln \frac{1-\gamma V}{1-\gamma V(1)} \right) + \\ & - \frac{1}{\gamma-1} \left[\frac{\gamma}{\gamma-2} \ln \frac{1-V}{1-V(1)} + \frac{13\gamma^3-20\gamma^2+19\gamma-12}{6\gamma^3-11\gamma^2-3\gamma+2} \ln \frac{5+(1-3\gamma)V}{5+(1-3\gamma)V(1)} \right] = \ln \frac{G}{G(1)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

da cui

$$\begin{aligned} & \frac{2(\gamma+1)}{\gamma-2} \ln \frac{(\gamma+1)(1-V)}{\gamma-1} + \frac{3}{2\gamma+1} \ln \frac{(1+\gamma)(1-\gamma V)}{1-\gamma} + \\ & + \frac{13\gamma^3-20\gamma^2+19\gamma-12}{(\gamma-2)(2\gamma+1)(3\gamma-1)} \ln \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5-(3\gamma-1)V] = \ln \frac{G(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Passando all'esponenziale si ottiene:

$$G = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_3} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5-(3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_4} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (1-V) \right]^{\nu_5} \quad (3.76)$$

dove

$$\nu_3 = \frac{3}{2\gamma+1} \quad (3.77)$$

$$\nu_4 = -\frac{\nu_1}{2-\gamma} \quad (3.78)$$

$$\nu_5 = -\frac{2}{2-\gamma} \quad (3.79)$$

In figura (3.4) è riportato l'andamento della variabile G nel caso di un gas diatomico per valori di V . In particolar modo G è una funzione crescente di V .

Ricapitolando, le equazioni

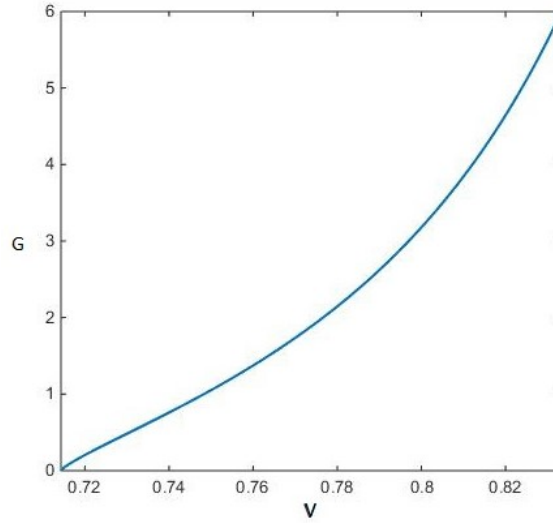


Figura 3.4: Variabile G in funzione di V .

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{\gamma V^2(1-V)(\gamma-1)}{2(\gamma V-1)} \\ \xi^5 = \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-2} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V-1) \right]^{\nu_2} \\ G = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V-1) \right]^{\nu_3} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_4} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (1-V) \right]^{\nu_5} \end{array} \right. \quad (3.80)$$

forniscono la soluzione completa del problema della determinazione delle variabili v , ρ e c^2 nella regione dietro l'onda d'urto.

In figura (3.5) è riportato l'andamento della variabile Z nel caso di un gas diatomico per valori di ξ compresi da 0 e 1. Dal grafico è possibile vedere che Z è prossima a zero per $\xi > 0.4$ mentre diverge per $x \rightarrow 0$.

In figura (3.6) è riportato l'andamento della variabile G nel caso di un gas diatomico per valori di ξ compresi da 0 e 1. Come è possibile vedere dal grafico, G è circa pari a zero per $\xi < 0.5$ mentre cresce rapidamente fino a essere pari a 6 in $\xi = 1$.

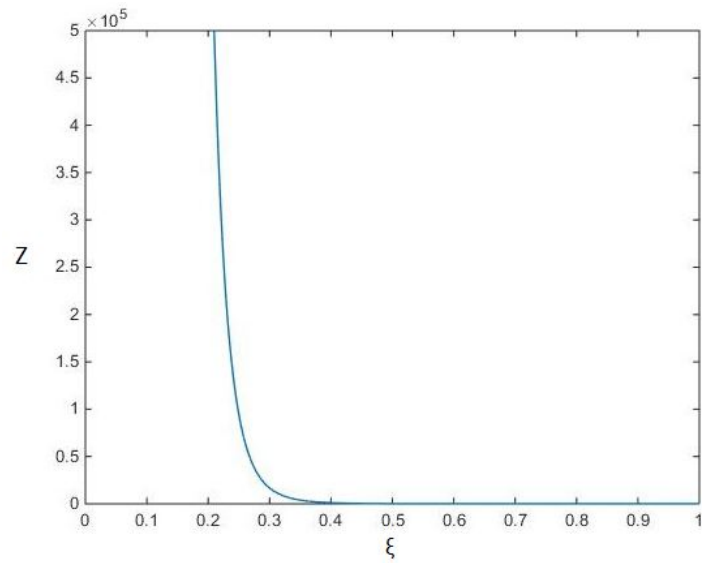


Figura 3.5: Variabile Z in funzione di ξ .

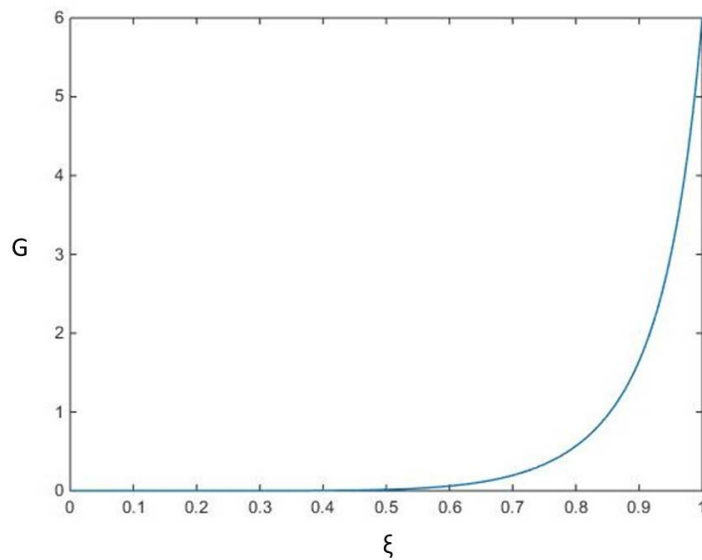


Figura 3.6: Variabile G in funzione di ξ .

3.3 Calcolo della costante β

Nella definizione della variabile indipendente ξ la costante β è determinata dalla condizione

$$E = \int_0^R \rho \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} \right] 4\pi r^2 dr \quad (3.81)$$

che afferma che l'energia totale del gas è pari all'energia E dell'esplosione. In termini di grandezze adimensionali, questa condizione diventa:

$$E = \int_0^R \rho_1 G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 + \frac{4r^2 Z}{\gamma(\gamma-1)25t^2} \right] 4\pi r^2 dr \quad (3.82)$$

oppure

$$E = \int_0^R \rho_1 G \frac{16\pi}{25t^2} \left[\frac{1}{2} V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] r^4 dr \quad (3.83)$$

e, sostituendo $r = R\xi$ e $dr = R d\xi$, segue che

$$E = \int_0^1 \rho_1 G \frac{16\pi}{25t^2} \left[\frac{1}{2} V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 R^5 d\xi \quad (3.84)$$

oppure

$$E = \int_0^1 \rho_1 G \frac{16\pi}{25t^2} \left[\frac{1}{2} V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 \frac{\beta^5 E t^2}{\rho_1} d\xi \quad (3.85)$$

da cui

$$\beta^5 \frac{16\pi}{25} \int_0^1 G \left[\frac{1}{2} V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 d\xi = 1 \quad (3.86)$$

Isolando β nell'equazione (3.86) si ottiene

$$\beta = \left(\frac{25}{16\pi I} \right)^{1/5} \quad (3.87)$$

dove

$$I = \int_0^1 G \left[\frac{1}{2} V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 d\xi \quad (3.88)$$

Poichè $\xi^4 d\xi = d(\xi^5/5)$, la (3.88) si può riscrivere come

$$I = \int_0^1 G \left[\frac{1}{2}V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \frac{1}{5} d\xi^5 \quad (3.89)$$

Derivando l'equazione (3.69) rispetto a V si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^5}{dV} = & \left\{ -\frac{2(\gamma+1)}{2} \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-3} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2} + \right. \\ & -\nu_1 \frac{(\gamma+1)(3\gamma-1)}{7-\gamma} \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-2} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1-1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2} + \\ & \left. +\nu_2 \gamma \frac{(\gamma+1)}{\gamma-1} \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-2} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.90)$$

dal quale si ricava

$$\begin{aligned} d\xi^5 = & \left\{ -\frac{2(\gamma+1)}{2} \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-3} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2} + \right. \\ & -\nu_1 \frac{(\gamma+1)(3\gamma-1)}{7-\gamma} \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-2} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1-1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2} + \\ & \left. +\nu_2 \gamma \frac{(\gamma+1)}{\gamma-1} \left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V \right]^{-2} \left\{ \frac{\gamma+1}{7-\gamma} [5 - (3\gamma-1)V] \right\}^{\nu_1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\gamma V - 1) \right]^{\nu_2-1} \right\} dV \end{aligned} \quad (3.91)$$

Sostituendo le relazioni (3.91), (3.76) e (3.41) in (3.88) e sostituendo agli estremi di integrazione $V(0) = 0.714$ e $V(1) = 0.833$ rispettivamente in $\xi = 0$ e $\xi = 1$ si ottiene un integrale in V .

Determiniamo β nel caso dell'aria. Si considera l'aria come un gas perfetto con calore specifico a pressione costante $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e con costante dei gas specifica $\bar{R} = 287.05 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Dividendo c_p per la costante dei gas specifica \bar{R} , si trova che tale rapporto è pari a $7/2$, valore proprio dei gas biatomici, per i quali il rapporto tra i

calori specifici γ è pari a 1.4.

Per l'aria quindi troviamo che $I = 0.428$ da cui si ricava che $\beta = 1.033$.

3.4 Variabili all'interno dell'onda d'urto

3.4.1 Pressione

Per prima cosa si vuole determinare la variazione relativa della pressione dietro l'onda rispetto a quella immediatamente dietro il fronte in funzione di ξ . A partire dalla (3.8), si ricava che

$$p = \frac{\rho c^2}{\gamma} \quad (3.92)$$

e, sostituendo la relazione (3.11) a c^2 si ottiene

$$p = \frac{\rho}{\gamma} \frac{4r^2 Z}{25t^2} \quad (3.93)$$

Si divide adesso per la (3.7), ovvero

$$p_2 = 2\rho_1 \frac{u^2}{\gamma + 1} \quad (3.94)$$

ottenendo che

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\rho}{\gamma} \frac{4r^2 Z}{25t^2} \frac{(\gamma + 1)}{2\rho_1 u^2} \quad (3.95)$$

Sostituendo $u = 2R/5t$, $\xi = r/R$ e $\rho = \rho_1 G$ si ottiene:

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\rho_1 G}{\gamma} \frac{4r^2 Z}{25t^2} \frac{25t^2(\gamma + 1)}{8\rho_1 R^2} \quad (3.96)$$

da cui

$$\frac{p}{p_2} = \frac{(\gamma + 1)GZ\xi^2}{2\gamma} \quad (3.97)$$

La figura (3.7) mostra in blu la curva p/p_2 in funzione di ξ nel caso dell'aria ($\gamma = 1.4$),

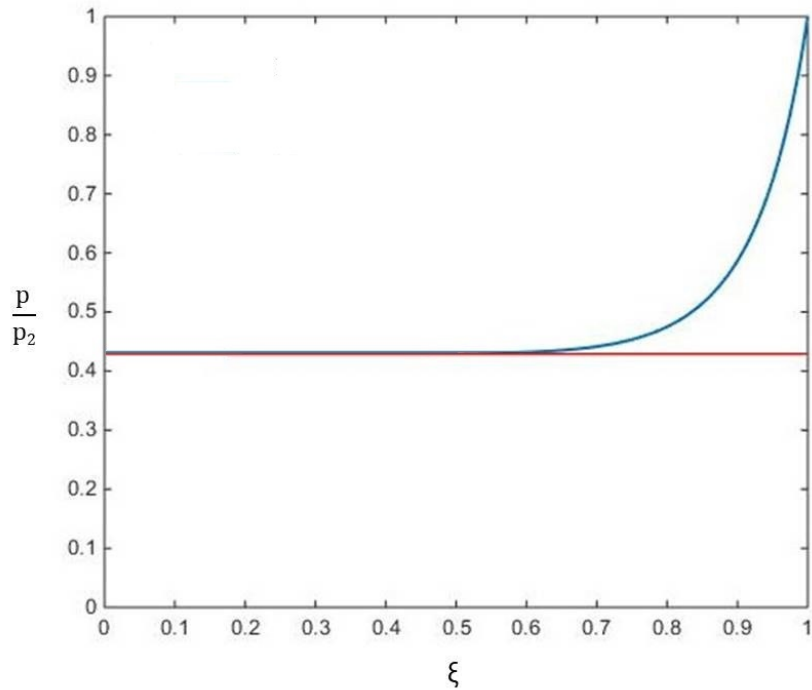


Figura 3.7: Grafico della pressione relativa p/p_2 in funzione di ξ .

ovvero mostra la variazione percentuale della quantità (3.93) rispetto al valore immediatamente dietro il fronte d'onda d'urto. Il valore p/p_2 è pari a uno per $\xi = 1$ mentre tende ad un valore costante, pari a 0.4291, per $\xi \rightarrow 0$. Tale valore costante, viene mantenuto fino a circa il 60 % del raggio del fronte d'onda. In figura (3.7) la retta orizzontale con valore pari a 0.4291 è rappresentata in rosso.

Questa caratteristica può essere interpretata nel seguente modo. Quando l'onda si è espansa a grande distanza dall'origine, la pressione nella regione centrale dietro al fronte

deve ridursi al valore atmosferico.

3.4.2 Velocità

Riportiamo adesso in grafico la variazione relativa della velocità del gas dietro l'onda rispetto a quella immediatamente dietro il fronte d'onda in funzione di ξ . Prendendo l'equazione (3.9), ovvero

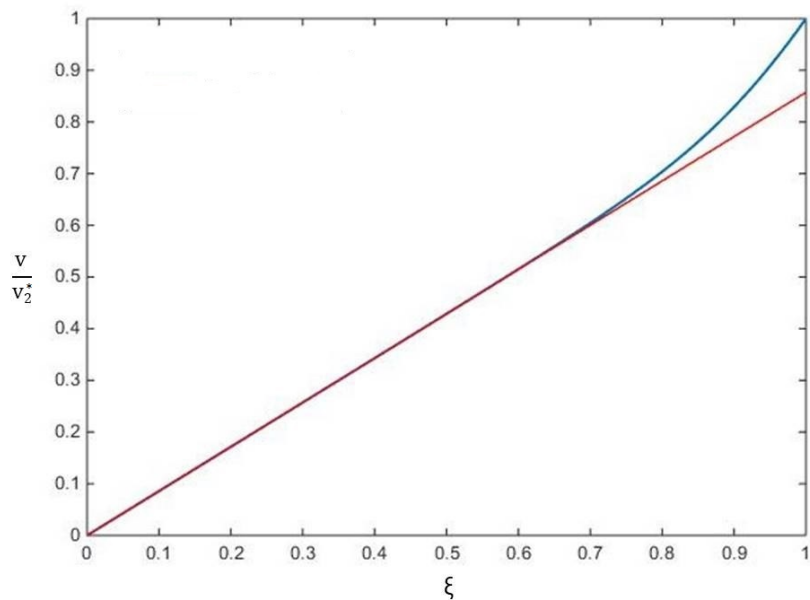


Figura 3.8: *Grafico della velocità relativa v/v_2^* in funzione di ξ .*

$$v = \frac{2rV}{5t} \quad (3.98)$$

e l'equazione (3.5) ovvero

$$v_2^* = \frac{2u}{\gamma + 1} \quad (3.99)$$

e, facendone il rapporto, si ottiene:

$$\frac{v}{v_2^*} = \frac{2rV}{5t} \frac{\gamma + 1}{2u} \quad (3.100)$$

sostituendo nella (3.100) $u = 2R/5t$ e poichè $\xi = r/R$, si ottiene

$$\frac{v}{v_2^*} = \frac{2rV}{5t} \frac{5t(\gamma + 1)}{4R} \quad (3.101)$$

da cui

$$\frac{v}{v_2^*} = \frac{(\gamma + 1)\xi V}{2} \quad (3.102)$$

La figura (3.8) mostra in blu la curva v/v_2^* in funzione di ξ nel caso dell'aria; il grafico mostra la variazione percentuale della quantità (3.9) rispetto al valore immediatamente dietro il fronte d'onda d'urto. Si può notare come v/v_2^* tenda a zero per $\xi \rightarrow 0$ mentre è pari a uno per $\xi = 1$. Come evidenziato nel grafico della figura (3.3), la variabile V è pressochè costante per valori di ξ fino a 0.6 con un valore circa uguale a $V(0) = 0.7143$. Quindi il rapporto di velocità fino a $\xi = 0.6$ è una retta con coefficiente angolare pari a

$$m = \frac{V(0)(\gamma + 1)}{2} = 0.8572 \quad (3.103)$$

Tale retta è evidenziata in rosso nella figura (3.8).

Da quanto sopra si evince che in questa porzione della regione interna l'accelerazione relativa dell'aria è costante, mentre per $\xi > 0.6$ l'accelerazione è crescente con uno scarto massimo del 15 % della velocità relativa dalla retta (3.103) in $\xi = 1$.

3.4.3 Densità

Riportiamo adesso in grafico la variazione relativa della densità dietro l'onda d'urto rispetto a quella immediatamente dietro il fronte d'onda in funzione di ξ . Si considera l'equazione (3.10), ovvero

$$\rho = \rho_1 G$$

e l'equazione (3.6), ovvero

$$\rho_2 = \frac{\rho_1(\gamma + 1)}{\gamma - 1} \quad (3.104)$$

dal loro rapporto si ottiene

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{\rho_1(\gamma - 1)}{\rho_1(\gamma + 1)} G \quad (3.105)$$

da cui

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma + 1} G \quad (3.106)$$

dove ρ/ρ_2 risulta essere pari alla variabile G moltiplicata per un fattore $1/6$.

Il grafico in figura (3.9) mostra ρ/ρ_2 in funzione di ξ nel caso dell'aria, ovvero mostra la variazione percentuale della quantità (3.10) rispetto al valore ρ_2 immediatamente dietro il fronte d'onda. Il rapporto ρ/ρ_2 tende a zero per $\xi \rightarrow 0$ mentre è pari a uno per $\xi = 1$. Di particolare interesse è la rapida diminuzione di densità man mano che ci si allontana dall'onda d'urto fino ad essere praticamente pari a zero per $\xi < 0.5$: quasi tutto il gas è concentrato in uno strato relativamente sottile dietro l'onda d'urto. Ciò si può ricondurre al fatto che, in accordo con la relazione (3.6), il gas sulla superficie di una sfera di raggio R ha una densità pari a sei volte la densità del gas imperturbato ρ_1 . Quindi per raggiungere un valore così grande, la densità deve ridursi in un'altra parte della sfera, in questo caso in prossimità dell'origine.

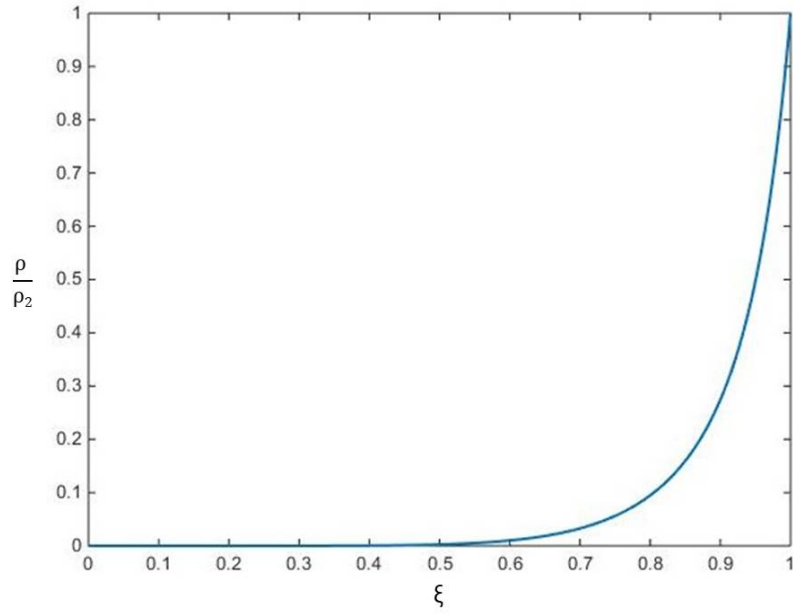


Figura 3.9: Grafico della densità relativa ρ/ρ_2 in funzione di ξ .

3.4.4 Energia

Si vuole adesso determinare come si suddivide l'energia totale E all'interno dell'onda sferica. L'energia all'interno della sfera di raggio r , in accordo con la relazione (3.81), si può scrivere come

$$E_r = \int_0^r \rho \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)} \right] 4\pi r^2 dr \quad (3.107)$$

mentre l'energia E all'interno della sfera di raggio R è data dalla (3.81)

Dividendo l'equazione (3.107) per la (3.81) si ottiene

$$\frac{E_r}{E} = \left\{ \int_0^r \rho \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)} \right] 4\pi r^2 dr \right\} \left\{ \int_0^R \rho \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)} \right] 4\pi r^2 dr \right\}^{-1} \quad (3.108)$$

Sostituendo nell'equazione (3.108) i valori di ρ , v e c^2 provenienti dalle equazioni (3.9),

(3.10) e (3.11) si ottiene

$$\frac{E_r}{E} = \left\{ \int_0^r \rho_1 G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 + \frac{4r^2 Z}{25t^2 \gamma(\gamma-1)} \right] 4\pi r^2 dr \right\} \left\{ \int_0^R \rho_1 G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 + \frac{4r^2 Z}{25t^2 \gamma(\gamma-1)} \right] 4\pi r^2 dr \right\}^{-1} \quad (3.109)$$

che può essere scritta come

$$\frac{E_r}{E} = \left\{ \int_0^r G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 + \frac{4r^2 Z}{25t^2 \gamma(\gamma-1)} \right] r^2 dr \right\} \left\{ \int_0^R G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2rV}{5t} \right)^2 + \frac{4r^2 Z}{25t^2 \gamma(\gamma-1)} \right] r^2 dr \right\}^{-1} \quad (3.110)$$

da cui

$$\frac{E_r}{E} = \left\{ \int_0^r G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] r^4 dr \right\} \left\{ \int_0^R G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] r^4 dr \right\}^{-1} \quad (3.111)$$

Sostituendo $r = R\xi$ e $dr = R d\xi$ si ottiene

$$\frac{E_r}{E} = \left\{ \int_0^\xi G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] R^5 \xi^4 d\xi \right\} \left\{ \int_0^1 G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] R^5 \xi^4 d\xi \right\}^{-1} \quad (3.112)$$

da cui

$$\frac{E_r}{E} = \left\{ \int_0^\xi G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 d\xi \right\} \left\{ \int_0^1 G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 d\xi \right\}^{-1} \quad (3.113)$$

In figura (3.10) è rappresentata la distribuzione relativa dell'energia all'interno del fronte d'onda in funzione di ξ nel caso dell'aria. Il rapporto E_r/E tende a zero per $\xi \rightarrow 0$ mentre è pari a uno per $\xi = 1$. Il 50 % dell'energia è concentrata in uno strato dietro l'onda d'urto compreso tra le sfere con ξ pari a 0.9 e 1.

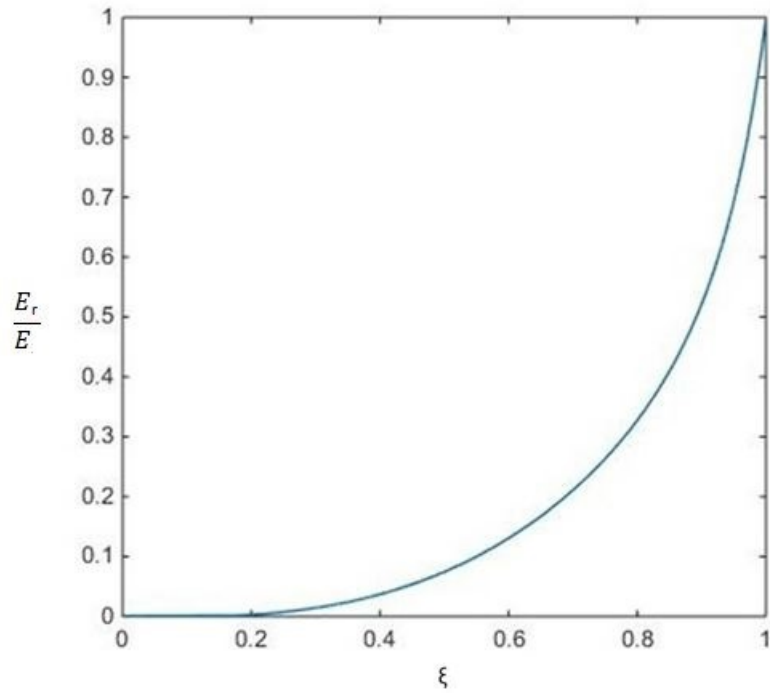


Figura 3.10: Grafico dell'energia relativa E_r/E in funzione di ξ .

3.4.5 Temperatura

Si vuole determinare la variazione relativa della temperatura T dietro l'onda rispetto a quella immediatamente dietro il fronte T_2 in funzione di ξ . A partire dall'equazione di stato per i gas perfetti, si ottiene che

$$\begin{cases} T = \frac{pV}{nR} \\ T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} \end{cases} \quad (3.114)$$

e, facendone il rapporto, si ottiene:

$$\frac{T}{T_2} = \frac{p \rho_2}{\rho p_2} \quad (3.115)$$

Sostituendo nell'equazione (3.115) i valori di p/p_2 e ρ/ρ_2 provenienti rispettivamente dalle relazioni (3.97) e (3.106) , si ottiene:

$$\frac{T}{T_2} = \frac{(\gamma + 1)^2 Z \xi^2}{2\gamma(\gamma - 1)} \quad (3.116)$$

I dati mostrano che il rapporto T/T_2 tende a uno per $\xi = 1$ mentre tende all'infini-

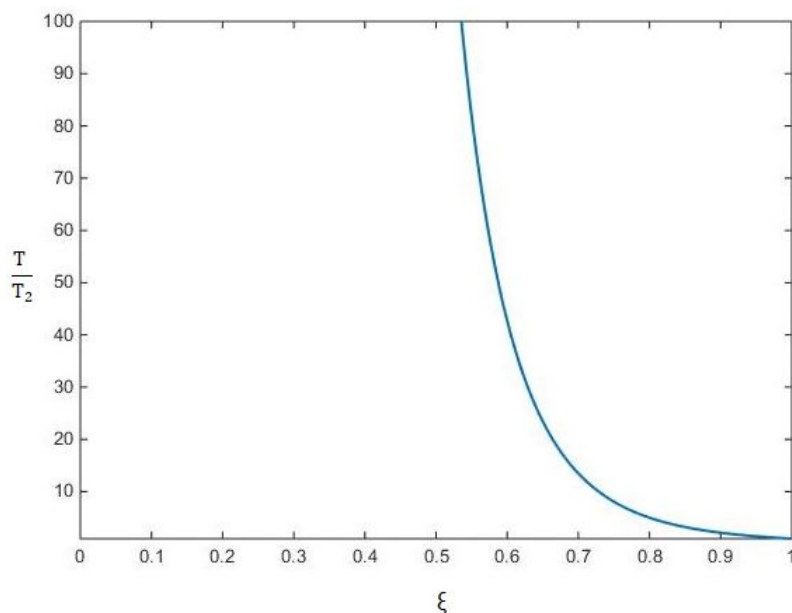


Figura 3.11: *Grafico della temperatura relativa T/T_2 in funzione di ξ .*

to per $\xi \rightarrow 0$; ciò implica che la soluzione per la temperatura non è valida in prossimità della sorgente dell'esplosione e può essere attribuito al fatto che abbiamo assunto una sorgente puntiforme.

Il grafico in figura (3.11) mostra la curva T/T_2 in funzione di ξ nel caso dell'aria, ovvero mostra la variazione percentuale della quantità $T = (pV)/(nR)$ rispetto al valore T_2 immediatamente dietro il fronte d'onda. Si può notare che la temperatura è una funzione decrescente di ξ . Quindi, dopo che l'onda si è propagata e l'aria è ritornata alla pressione atmosferica, questa si trova ad una temperatura maggiore di quella am-

biente. Questo effetto può essere spiegato nel seguente modo: l'energia disponibile per fare lavoro meccanico è più piccola dell'energia termica totale dell'aria. L'aria riscaldata lasciata dietro l'onda d'urto può infatti fare solo lavoro meccanico per poter ritornare alla pressione atmosferica, mentre per convertire interamente l'energia termica in lavoro meccanico con una espansione adiabatica, l'aria dovrebbe essere espansa all'infinito in modo che la pressione sia zero. L'energia richiesta per aumentare la temperatura dell'aria da quella ambientale a T è rilasciata in atmosfera in una forma che non è disponibile per fare lavoro meccanico direttamente nell'atmosfera circostante [Taylor, 1950].

3.4.6 Entropia

Riportiamo adesso in grafico la differenza $s - s_2$ tra l'entropia dietro l'onda e quella sul fronte d'onda in funzione di ξ . Ricordando che

$$\begin{cases} s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \\ s_2 = c_v \ln \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \end{cases} \quad (3.117)$$

Facciamo la differenza, ottenendo

$$s - s_2 = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} - c_v \ln \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \quad (3.118)$$

da cui

$$s - s_2 = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \frac{\rho_2^\gamma}{p_2} \right) \quad (3.119)$$

Sostituendo nell'equazione (3.119) i valori di p/p_2 e ρ/ρ_2 provenienti rispettivamente dalle relazioni (3.97) e (3.106), si ottiene:

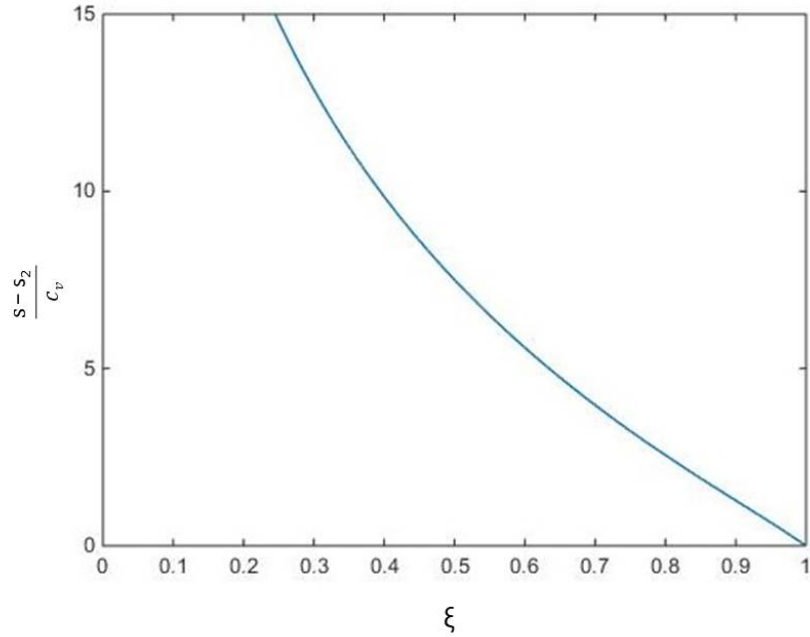


Figura 3.12: Differenza di entropia adimensionalizzata $(s - s_2)/c_v$ in funzione di ξ

$$s - s_2 = c_v \ln \left(\frac{G(\gamma + 1)Z\xi^2}{2\gamma} \frac{(\gamma + 1)^\gamma}{(\gamma - 1)^\gamma G^\gamma} \right) \quad (3.120)$$

$$s - s_2 = c_v \ln \frac{G^{1-\gamma}(\gamma + 1)^{\gamma+1} Z\xi^2}{2\gamma(\gamma - 1)^\gamma} \quad (3.121)$$

dividendo per c_v , otteniamo la quantità adimensionale

$$\frac{s - s_2}{c_v} = \ln \frac{G^{1-\gamma}(\gamma + 1)^{\gamma+1} Z\xi^2}{2\gamma(\gamma - 1)^\gamma} \quad (3.122)$$

Il grafico nella figura (3.12) mostra la differenza di entropia esistente all'interno dell'onda d'urto ($\xi < 1$) e quella immediatamente dietro il fronte ($\xi = 1$) nel caso dell'aria. Tale differenza è una funzione decrescente e si annulla per $\xi = 1$. Il fatto che la differenza di entropia sia positiva indica che il processo è irreversibile.

Capitolo 4

Discussione

È possibile studiare diversi fenomeni fisici associati alle onde d'urto. Per esempio, può essere interessante chiedersi quale sia l'impatto dell'onda sulle costruzioni o la massima distanza alla quale è possibile sentire il boato dell'esplosione. È stato accennato precedentemente che, durante le eruzioni di Vulcano del 1888-1890, le onde d'urto generate da alcune esplosioni vulcaniche ruppero i vetri delle finestre nella città di Lipari a 7 km di distanza mentre l'eruzione del vulcano Asama (Giappone) del 2004 produsse la distruzione dei vetri fino a 11 km di distanza [Yokoo *et al.*, 2006]. Nel secondo caso si può citare l'eruzione del vulcano Ngauruhoe del 1975, quando l'esplosione fu sentita ad una distanza di 80 km dal cratere [Nairn, 1976]. Un altro esempio è dato dall'eruzione del vulcano Krakatoa del 1883, la cui esplosione fu sentita a 4800 km di distanza [Takayama, 2004].

Nel precedente capitolo si è visto come le variabili che descrivono il fronte d'onda siano dipendenti dall'energia E . Tuttavia l'energia dell'onda d'urto associata a eruzioni vulcaniche non è una quantità misurabile direttamente in quanto viene determinata indirettamente in seguito a misure di pressione. Quindi viene fatto il processo inverso di quello che è stato precedentemente trattato. I valori di pressione non sono disponibili per tutti i vulcani e per tutte le eruzioni avvenute nel passato in quanto i relativi calcoli sono iniziati solo da pochi decenni. Per procedere con l'analisi si suppone che i valori di energia dell'onda d'urto siano pari a quelli dell'energia totale dell'eruzione. In questo caso si prende il valore dell'energia pari a 10^{18} J, valore tipico di una eruzione esplosiva medio-grande come, per esempio, l'eruzione del Vesuvio nel 79.

4.1 Caratteristiche del fronte d'onda

Di particolare interesse fisico risulta essere l'ampiezza della discontinuità delle variabili sul fronte d'onda come funzione del tempo o della distanza dal cratere.

Per alcune variabili, come la pressione e la velocità, è interessante analizzare la loro variazione relativa rispetto al loro valore in assenza dell'onda d'urto. Questo permette di determinare, nel caso della velocità, il numero di Mach e, nel caso della pressione, il limite di validità dell'assunzione di forte onda d'urto.

4.1.1 Posizione del fronte d'onda

Si vuole determinare come varia la distanza del fronte d'onda dal cratere in funzione del tempo. Si prenda in considerazione l'equazione (3.3)

$$R(t) = \beta \left(\frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{1/5} \quad (4.1)$$

che rappresenta il raggio del fronte d'onda sferico. Sostituendo $E = 10^{18}$ J, $\beta = 1.033$ e $\rho_1 = 1.225$ kg/m³, ovvero la densità dell'aria in condizioni di pressione e temperatura normali, si ottiene la posizione del fronte d'onda in funzione del tempo. La posizione cresce come $t^{2/5}$ e il fronte d'onda si troverà ad una distanza di 3.95 km dopo $t = 1$ s e a 5.21 km dopo $t = 2$ s. I valori ottenuti per la posizione ci permettono di anticipare che la velocità è una funzione decrescente del tempo.

È possibile a questo punto fare un confronto tra le posizioni del fronte d'onda per diversi valori dell'energia iniziale. Per esempio si consideri, oltre al caso già esaminato, due eruzioni vulcaniche con una energia pari a 10^{16} J, come per esempio quella rilasciata durante eruzione del vulcano Augustine (Alaska) il 27 marzo 1986, e 10^{17} J, come quella

che caratterizzò il Krakatoa nel 1883.

Il grafico in figura (4.1) mostra la distanza del fronte d'onda dal cratere per eruzioni con energie pari a 10^{16} (curva blu), 10^{17} (rossa) e 10^{18} J (verde). La retta tratteggiata viola rappresenta la posizione di un'onda d'urto che si muove alla velocità del suono c per la quale

$$R(t) = ct \quad (4.2)$$

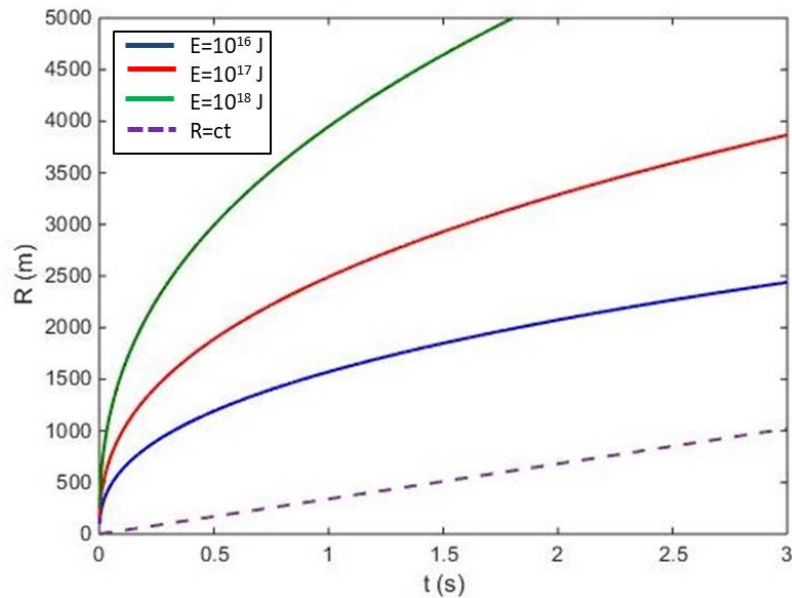


Figura 4.1: Posizione del fronte d'onda in funzione del tempo.

4.1.2 Velocità del fronte d'onda

Si vuole adesso determinare la velocità del fronte d'onda e, per fare questo, si deriva l'equazione (3.3). Questo ci permette di ottenere la velocità in funzione del tempo, ovvero

$$v(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \frac{\beta E^{1/5} t^{-3/5}}{\rho_1^{1/5}} \quad (4.3)$$

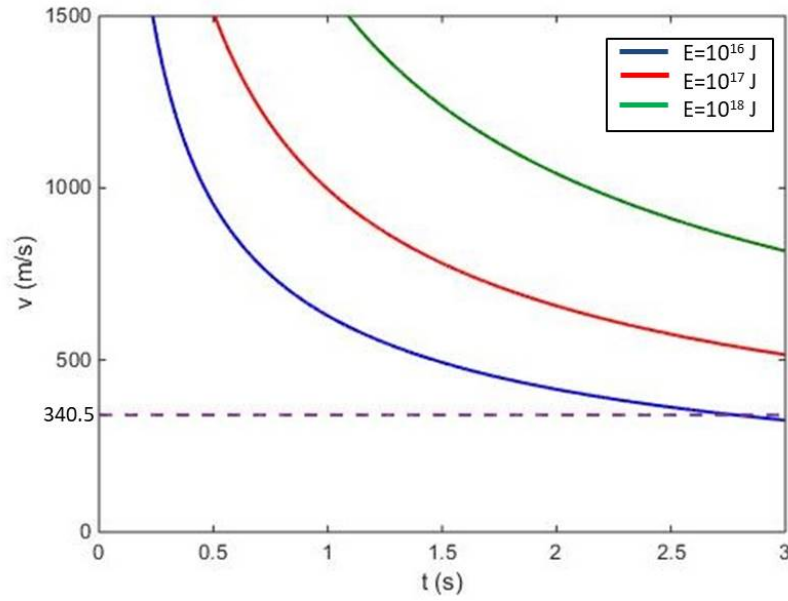


Figura 4.2: *Velocità del fronte d'onda in funzione del tempo.*

La velocità del fronte decresce come $t^{-3/5}$ e, per esempio, dopo un secondo si è ridotta di un fattore 63 e dopo $t = 2$ s di 96.

Il grafico in figura (4.2) mostra la velocità del fronte d'onda in funzione del tempo. È possibile osservare una rapida decrescita nei primi due secondi dall'esplosione, passando da valori molto elevati nell'istante iniziale a 1.58 km s^{-1} dopo un secondo, per poi rallentare, passando a circa 700 m s^{-1} dopo $t = 4$ s.

Di particolare interesse risulta essere il confronto tra la velocità del fronte d'onda e la velocità del suono c in aria, ovvero calcolare il numero di Mach per il fronte d'onda. In condizioni standard di pressione e temperatura la velocità del suono in atmosfera è pari a 340.5 m/s e tale valore è rappresentato nel grafico in figura (4.2) dalla retta viola tratteggiata.

Dividendo la relazione (4.3) per c , si ottiene

$$\frac{v}{c} = \frac{2}{5} \frac{\beta E^{1/5} t^{-3/5}}{c \rho_1^{1/5}} \quad (4.4)$$

È possibile vedere che $v/c > 1$ per tempi inferiori a 12.9 s. Questo implica che per $t < 12.9$ s il fronte d'onda si trova in regime supersonico, mentre per $t > 12.9$ s il fronte d'onda si trova in regime subsonico. Quindi il limite di validità delle relazioni per l'onda d'urto è di circa 13 s. Tuttavia questa analisi condotta sulla velocità non permette di definire il regime di onda d'urto forte che, come abbiamo già anticipato precedentemente, è definito a partire dalla relazione (2.86).

È possibile a questo punto fare un confronto tra le velocità del fronte d'onda per diversi valori dell'energia iniziale. Come è possibile osservare sia analiticamente dalla relazione (4.3) che visivamente dal grafico in figura (4.2), a valori maggiori dell'energia corrispondono valori maggiori della velocità. La curva blu, che corrisponde a una energia pari a 10^{16} J, decresce velocemente a zero e la velocità differisce di un fattore 2.5 rispetto al caso con $E = 10^{18}$ J, rappresentato dalla curva verde. Al contrario la curva rossa, che corrisponde a una energia pari a 10^{17} J, decresce meno velocemente verso zero rispetto al caso precedente e la velocità differisce di un fattore 1.6 rispetto al caso con $E = 10^{18}$ J. Inoltre per 10^{16} J l'onda d'urto entra in regime subsonico dopo $t = 2.78$ s, diversamento dal caso con 10^{17} J dove tale evento si verifica per $t = 5.99$ s.

4.1.3 Discontinuità della pressione

Si vuole determinare adesso la discontinuità della pressione presente sul fronte d'onda come funzione del tempo. Si prende in esame l'equazione (3.7) riscritta nel seguente modo

$$p = 2\rho_1 \frac{u^2}{\gamma + 1} \quad (4.5)$$

dove $u = v$. Sostituendo $\rho_1 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ e l'equazione (4.3) per u , si ottiene la pressione in prossimità del fronte d'onda come una funzione del tempo, ovvero

$$p = \frac{2\rho_1}{\gamma + 1} \left(\frac{2\beta E^{1/5} t^{-3/5}}{5\rho_1^{1/5}} \right)^2 \quad (4.6)$$

da cui

$$p = E^{2/5} t^{-6/5} \frac{4\beta\rho_1^{3/5}}{25(\gamma + 1)} \quad (4.7)$$

In questo caso la pressione, poichè è proporzionale a u^2 , decresce come $t^{-6/5}$; si può notare che dopo un secondo si è ridotta di circa 400 volte, e dopo $t = 2$ s di circa 9000. Il grafico in figura (4.3) mostra in verde l'andamento della pressione in funzione del tempo per una eruzione con energia pari a 10^{18} J, mentre la retta viola tratteggiata rappresenta la pressione atmosferica media sul livello del mare $p_a = 101.325$ kPa. È possibile fare un confronto tra la curva di pressione in esame e quelle ottenute considerando una energia pari a 10^{16} J, in blu nella figura (4.3), e 10^{17} J, in rosso nella (4.3). I due casi risultano essere più piccoli di circa un fattore 6.3 e 2.5 rispettivamente rispetto al caso con 10^{18} J.

È da evidenziare, come meglio si esplicherà in seguito, che il grafico è valido solo per valori di tempo limitati a pochi secondi. Infatti per valori di tempo elevati la relazione (4.7) tenderebbe a zero. Tuttavia, nel momento in cui abbiamo definito l'onda d'urto forte, abbiamo semplificato la relazione (2.64) e, in particolar modo, si era trascurata p_a rispetto a p_2 . Quindi per tempi molto lunghi la relazione (4.7) non è più valida.

Per determinare il limite temporale in cui è valida l'equazione (4.7) introduciamo la pressione relativa. Come abbiamo già anticipato, la relazione (2.86), dove con p_1 si indica la pressione atmosferica in condizioni standard, fornisce il limite per la validità. Dividendo l'equazione (4.7) per la pressione atmosferica p_a , si ottiene

$$\frac{p}{p_a} = E^{2/5} t^{-6/5} \frac{4\beta\rho_1^{3/5}}{25p_a(\gamma + 1)} \quad (4.8)$$

Per garantire l'approssimazione di forte onda d'urto il rapporto tra le pressioni deve essere almeno pari a 6, ovvero

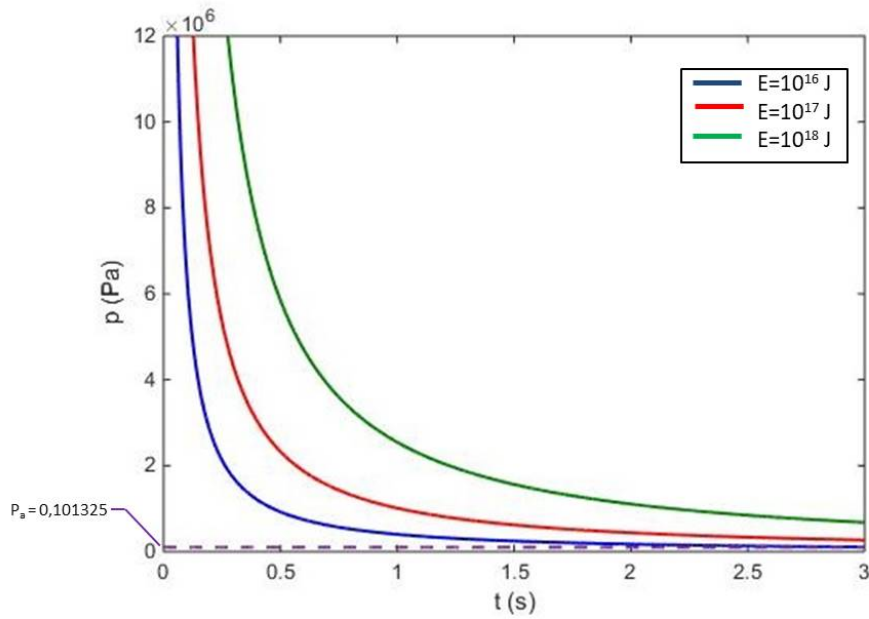


Figura 4.3: *Pressione sul fronte d'onda in funzione del tempo.*

$$\frac{p}{p_a} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 6 \quad (4.9)$$

Poichè il valore medio della pressione al livello del mare è pari a 101.325 kPa, la relazione $p/p_a = 6$, nel caso in esame, risulta valida per $t = 3.3$ s. Da questo si deduce che l'approssimazione di forte onda d'urta è valida al massimo fino a $t = 3.3$ s dall'esplosione. Per $E = 10^{16}$ J tale l'approssimazione è valida fino a $t = 0.7$ s mentre per $E = 10^{17}$ J a $t = 1.5$ s.

4.1.4 Densità del flusso di energia

Si vuole determinare la densità del flusso di energia attraverso la superficie sferica di raggio pari a R . Per fare questo prendiamo in considerazione la quantità (3.31), ovvero

$$\phi = \rho_2 v_2^* \left(w + \frac{1}{2} v_2^{*2} \right) \quad (4.10)$$

che rappresenta la densità del flusso di energia. Sostituendo a ρ e v i loro valori immediatamente dietro il fronte d'onda, ovvero

$$\begin{cases} \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \\ v_2^* = \frac{2v}{\gamma + 1} \end{cases} \quad (4.11)$$

e ricordando che

$$w = \frac{c^2}{\gamma - 1} \quad (4.12)$$

si ottiene

$$\phi = \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{2v}{\gamma + 1} \left[\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2v}{\gamma + 1} \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

da cui

$$\phi = \rho_1 \frac{2v}{\gamma - 1} \left[\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{2v^2}{(\gamma + 1)^2} \right] \quad (4.14)$$

Il grafico in figura (4.4) mostra in verde la variazione della densità del flusso di energia in funzione della posizione R del fronte d'onda rispetto alla sorgente dell'esplosione nel caso con $E = 10^{18}$ J. Data la dipendenza di ϕ da v^3 , la densità del flusso di energia decresce rapidamente; dopo un secondo, ovvero per $R = 3.95$ km ϕ è pari a $1.12 \cdot 10^{10}$ W/m², mentre per $t = 2$ s, corrispondente a $R = 5.2$ km, ϕ è pari a $4.26 \cdot 10^9$ W/m². Le curve blu e rossa, invece, rappresentano la densità del flusso di energia per i casi $E = 10^{16}$ J e $E = 10^{17}$ J. Nel primo caso la curva decade velocemente a zero e differisce di un fattore 6.8 per $t = 1$ s e di un fattore 4.8 per $t = 2$ s rispetto al caso con $E = 10^{18}$ J; nel secondo caso la curva decade meno rapidamente a zero rispetto al caso con $E = 10^{16}$ J e differisce di un fattore 2.9 per $t = 1$ s e di un fattore 2.4 per $t = 2$ s rispetto al caso

con $E = 10^{18}$ J.

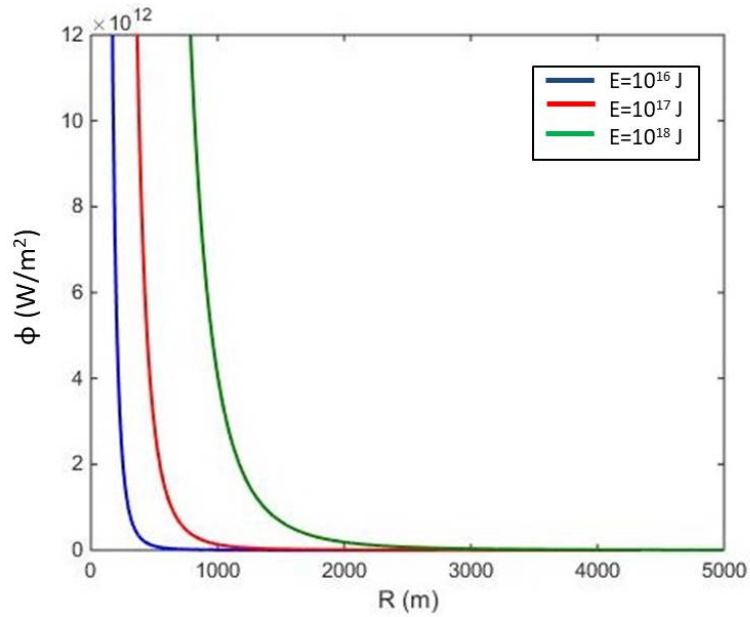


Figura 4.4: Densità del flusso di energia in funzione del raggio R dell'onda d'urto.

4.1.5 Discontinuità della temperatura

Si vuole determinare adesso la temperatura immediatamente dietro il fronte d'onda. Si prenda quindi in considerazione la seconda delle equazioni (2.88) scritta nel seguente modo

$$\frac{T}{T_1} = \frac{(\gamma - 1)p}{(\gamma + 1)p_1} \quad (4.15)$$

Sostituendo a p_1 la pressione atmosferica p_a , a p l'equazione (4.7) e considerando $T_1 = 288$ K, ovvero la temperatura media alla superficie terrestre in condizioni standard, si ottiene

$$T = T_1 \frac{(\gamma - 1)p}{(\gamma + 1)p_a} \quad (4.16)$$

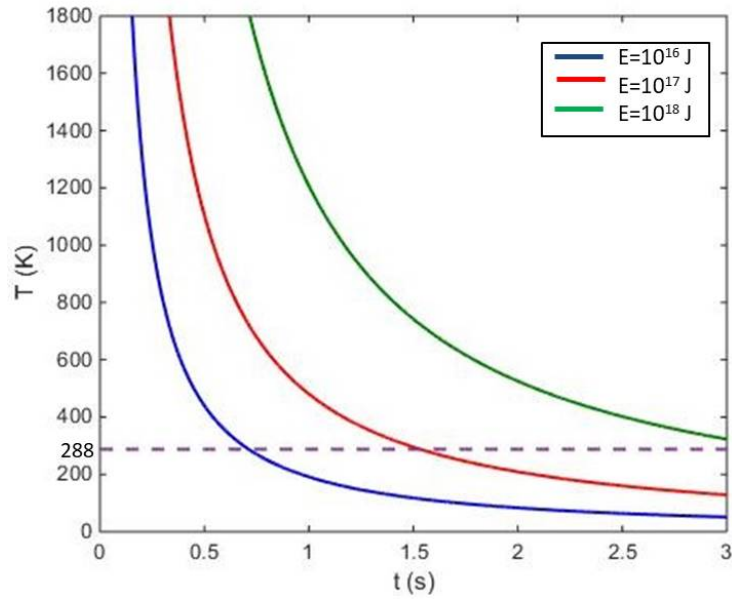


Figura 4.5: *Temperatura sul fronte d'onda in funzione del tempo.*

Il grafico in figura (4.5) mostra in verde la temperatura del fronte d'onda in funzione del tempo nel caso con $E = 10^{18}$ J. Tale relazione fornisce valori molto elevati per la temperatura. Questi valori sono dovuti al fatto che, con l'approssimazione fatta, abbiamo considerato la sorgente come puntiforme e questo comporta una temperatura che tende all'infinito nell'origine.

Le curve blu e rossa, invece, rappresentano la temperatura del fronte d'onda per i casi $E = 10^{16}$ J e $E = 10^{17}$ J. In particolar modo, poichè la temperatura è proporzionale a p/p_a , le due curve differiscono di un fattore 6.3 e 2.5 rispetto al caso con $E = 10^{18}$ J.

Come è possibile osservare dalla relazione (4.16), le temperature dei tre casi sono pari a quella ambientale quando il rapporto di pressione p/p_a è pari a 6. Graficamente questo è rappresentato dall'intersezione delle curve con la retta viola corrispondente a $T = 288$ K.

4.1.6 Differenza di entropia

Di particolare interesse risulta essere la variazione di entropia la regione interna e quella esterna al fronte d'onda. Partendo dalla relazione

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - \bar{R} \ln \frac{p}{p_1} \quad (4.17)$$

dove, in questo caso, $p_1 = p_a$, T_1 è la temperatura ambiente e \bar{R} è la costante dei gas specifica. Sostituendo al posto di p e T i valori ottenuti rispettivamente tramite le equazioni (4.7) e (4.16) si ottiene

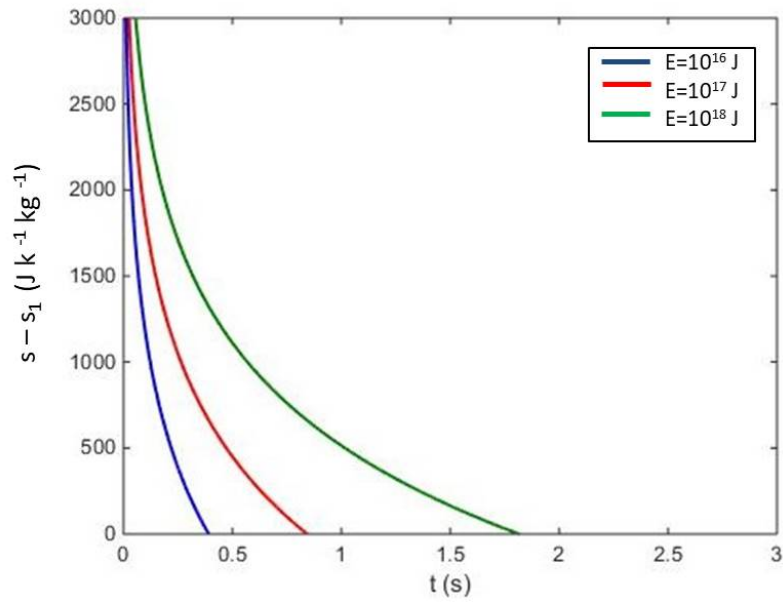


Figura 4.6: *Differenza di entropia in funzione del tempo.*

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{pT_1(\gamma - 1)}{p_a T_1(\gamma + 1)} - \bar{R} \ln \frac{p}{p_a} \quad (4.18)$$

ovvero

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{p(\gamma - 1)}{p_a(\gamma + 1)} - \bar{R} \ln \frac{p}{p_a} \quad (4.19)$$

che può essere scritta come

$$s - s_1 = c_p \left(\ln \frac{p}{p_a} + \ln \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) - \bar{R} \ln \frac{p}{p_a} \quad (4.20)$$

o come

$$s - s_1 = (c_p - \bar{R}) \ln \frac{p}{p_a} + c_p \ln \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (4.21)$$

da cui

$$s - s_1 = c_v \ln \frac{p}{p_a} + c_p \ln \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (4.22)$$

Il grafico in figura (4.6) mostra in verde la differenza di entropia tra il fronte d'onda e l'ambiente davanti al fronte in funzione del tempo per il caso con $E = 10^{18}$ J. Le curve blu e rossa, invece, rappresentano la variazione di entropia tra la regione interna e quella esterna al fronte d'onda per i casi $E = 10^{16}$ J e $E = 10^{17}$ J. Tali curve risultano essere funzioni decrescenti del tempo, ovvero l'entropia è maggiore sul fronte d'onda in prossimità del cratere. Nel limite di forte onda d'urto, la differenza di entropia è positiva. La presenza dell'onda d'urto ha come conseguenza un aumento di entropia, nonostante il fluido sia stato assunto ideale, con viscosità e conduttività termica pari a zero. L'aumento di entropia significa che il moto è irreversibile, ovvero che l'energia è dissipata. Quindi la discontinuità è un mezzo con il quale l'energia può essere dissipata nel moto di un fluido ideale. Il vero meccanismo per il quale l'entropia aumenta nell'onda d'urto giace nei processi dissipativi che avvengono nel sottile strato che è l'onda d'urto. Tuttavia la grandezza di questa dissipazione è interamente determinata dalle leggi di conservazione di massa, energia e momento, quando vengono applicate ai due lati del fronte d'onda. Lo spessore dello strato è tale da produrre l'aumento di entropia richiesto dalle predette leggi di conservazione.

4.1.7 Intensità sonora

Il suono è una perturbazione della pressione del mezzo che si propaga al suo interno, l'aria nel caso in esame. Poichè uno degli effetti di una eruzione vulcanica è la variazione di pressione, potrebbe essere possibile sentire un boato in seguito ed un evento esplosivo. Si consideri l'aria come un mezzo di trasmissione ideale, ovvero si trascurino i fenomeni dissipativi dovuti all'assorbimento dell'aria, alla presenza di gradienti di temperatura o di turbolenza e alla presenza di precipitazioni.

Si definisce la *potenza sonora* come l'energia emessa dalla sorgente nell'unità di tempo, ovvero

$$W = \frac{(\Delta p)^2 A}{\rho v_c} \quad (4.23)$$

dove A è l'area attraversata dall'onda sonora che, nel caso in esame, corrisponde ad una sfera e $\Delta p = p - p_a$ rappresenta la sovrappressione dell'onda d'urto.

Si definisce adesso l'intensità sonora come l'energia che attraversa nell'unità di tempo la superficie perpendicolare al vettore velocità, ovvero

$$I_s = \frac{W}{A} = \frac{(\Delta p)^2}{\rho v_c} \quad (4.24)$$

Una variazione di pressione, per poter essere udibile, deve essere maggiore di un certo valore minimo che, nel caso dell'orecchio umano, è $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$. Nei problemi pratici di acustica, considerato l'enorme campo di variazione delle grandezze in gioco, non conviene esprimere le grandezze acustiche quali la pressione sonora, la potenza e l'intensità in valori assoluti. Si preferisce quindi esprimere dette grandezze tramite il logaritmo del rapporto tra le stesse e determinati valori di riferimento assunti come livelli "zero". Questo sistema è utile sia perché la scala logaritmica comprime i valori numerici, sia perché l'intensità delle sensazioni uditive è in prima approssimazione proporzionale al logaritmo dello stimolo e non al valore assoluto dello stesso. In acustica pertanto per le grandezze energetiche si usa adottare il livello sonoro espresso in decibel (dB) definito come il logaritmo decimale del rapporto tra il valore in esame ed il valore di riferimento. Si definisce quindi il *livello di pressione sonora* come

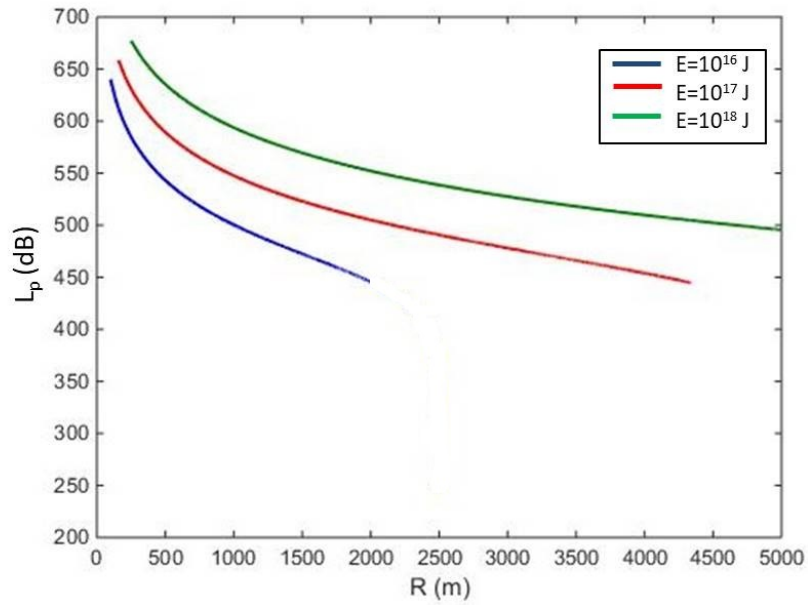


Figura 4.7: Livello di pressione sonora L_p in funzione della posizione del fronte d'onda R .

$$L_p = 10 \log \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 \quad (4.25)$$

$$L_p = 20 \log \frac{p - p_a}{p_0} \quad (4.26)$$

La potenza quadra della pressione è dovuta al fatto che il livello di pressione sonora deriva dal livello di intensità sonora, ovvero

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (4.27)$$

dove $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ e $I \propto p^2$. Per valori positivi di L_p , ovvero quando $p - p_a > p_0$ è possibile sentire il boato provocato dall'esplosione, altrimenti, quando $p - p_a < p_0$, l'orecchio non percepisce alcun suono.

Il grafico in figura (4.7) mostra L_p in funzione della posizione del fronte d'onda rispetto alla sorgente per i casi con energie pari a 10^{16} (curva blu), 10^{17} (rossa) e 10^{18} J (verde). Studi di acustica hanno dimostrato che un valore di livello di pressione sonora superiore a 200 dB è letale per l'uomo mentre un valore superiore a 140 dB provoca la rottura dei timpani, sebbene già a 75 dB il corpo umano presenti dei sintomi legati alla sovrappressione (aumento della pressione arteriosa, disturbi della funzione respiratoria e della visione, ecc.). Dal grafico della figura (4.7) è possibile vedere che per distanze inferiori al limite di validità di forte onda d'urto, ovvero circa 6 km nel caso in cui $E = 10^{18}$ J, il livello di pressione sonora è superiore a 480 dB. Perciò la sovrappressione dovuta all'onda d'urto provocherà danni irreparabili alle persone che si trovano entro questo raggio.

Per poter determinare la distanza massima alla quale è ancora possibile sentire il boato dovuto all'eruzione al posto dell'equazione (4.7), valida per le forti onde d'urto, si dovrebbe utilizzare la generica relazione (2.64), ovvero

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(M_1^2 - 1 \right) \quad (4.28)$$

a patto di trovarsi ancora nelle condizioni di validità di questa espressione.

4.1.8 Conseguenze fisiche dell'onda d'urto

L'entità e la gravità dei danni alle cose in un evento esplosivo sono generalmente soggetti ad una notevole indeterminazione. Nonostante queste incertezze, è possibile però fornire alcune indicazioni sul livello generale dei danni dovuti ad un evento esplosivo in base alle dimensioni dell'esplosione, alla distanza dall'evento ed alle ipotesi circa le caratteristiche di resistenza meccanica dei manufatti in questione. In questo caso si vuole limitare l'attenzione sulla stima dei danni causati ai vetri delle finestre delle abitazioni civili.

Per lo studio di questo caso particolare, si prende in considerazione una finestra di vetro di forma circolare il cui comportamento meccanico viene equiparato a quello di una lastra omogenea. Fissato il valore dello spessore s della finestra, la pressione di rottura P_r è una funzione decrescente del quadrato del diametro del vetro, ovvero

$$P_r = \frac{16\sigma_r s^2}{3d^2} \quad (4.29)$$

dove σ_r è la tensione di rottura che, nel caso del vetro, assume valori compresi tra 20 e 200 MPa [Belluzzi, 1982].

Stabilito un valore di σ_r pari a 90 MPa, il grafico in figura (4.8) mostra l'andamento della pressione di rottura in funzione del diametro del vetro della finestra. Sono riportati, inoltre, gli andamenti per finestre di spessore 3 mm (blu) e 5 mm (rosso). Si precisa

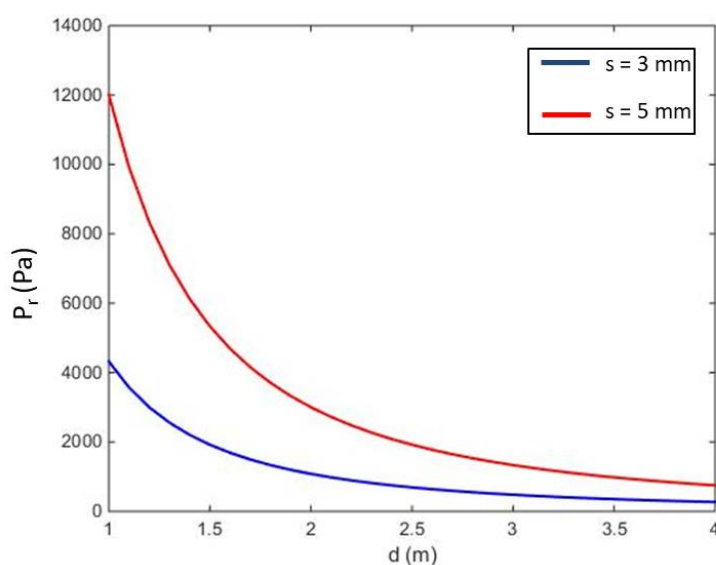


Figura 4.8: *Pressione di rottura in funzione del diametro della finestra di vetro.*

che il valore di pressione di rottura riportato nel grafico è inteso come sovrappressione rispetto a quello della pressione atmosferica. In conclusione, prendendo in considerazione la differenza tra l'equazione (4.7) e la pressione atmosferica, relativamente alle finestre con resistenza maggiore (piccola superficie ed alto spessore) si può determinare che la rottura delle stesse avviene entro un raggio di 11 km dal punto di esplosione nel caso con $E = 10^{18}$ J. Tale distanza si nota essere al di fuori del limite di validità di onda d'urto forte. Rimanendo all'interno di tale range, invece, tutte le finestre con caratteristiche meccaniche pari a quelle sopra descritte saranno soggette a rottura a causa dell'onda d'urto generata dall'eruzione vulcanica. Analogamente a quanto appena esposto, anche considerando i casi di eruzione con energia dell'onda d'urto generata pari a $E = 10^{16}$ J e

$E = 10^{17}$ J, all'interno dei rispettivi range di distanza dall'origine, per i quali vale l'approssimazione di onda d'urto forte, si ha la rottura della totalità delle finestre presenti.

4.2 Confronto con casi reali

Come si evince dal modello elaborato nel presente lavoro, l'onda d'urto si attenua rapidamente col tempo. Considerando la breve durata del fenomeno, in genere pochi secondi, la misura diretta delle caratteristiche dell'onda d'urto è molto difficile.

Prima del 2006 non si era mai registrata una forte onda d'urto, generata da una eruzione vulcanica, con una risoluzione sufficiente ed a breve distanza temporale dalla sorgente. Inoltre, come già accennato, i valori di pressione non sono disponibili per tutti i vulcani e per tutte le eruzioni avvenute nel passato in quanto le elaborazioni dei relativi dati sono iniziate solamente da pochi decenni. Questo permette di asserire che non è possibile confrontare i risultati del modello presentato con le osservazioni reali di tali fenomeni [Yokoo *et al.*, 2006]. Tale confronto, inoltre, è ancora più complesso per le eruzioni vulcaniche di tipo esplosivo con livelli di energia inferiori, come per esempio $E = 10^{16}$ J, per le quali il limite temporale di validità dell'onda d'urto forte è di soli 0.7 secondi. Tuttavia è possibile confrontare almeno l'ordine di grandezza della pressione tra quella ottenuta dall'analisi sopra presentata e quella delle osservazioni disponibili.

Le variazioni dei livelli di pressione dovute al passaggio delle onde d'urto vengono misurate da uno strumento chiamato barografo. Un barografo è un barometro aneroidale dotato di penna scrivente in grado di registrare i cambiamenti della pressione atmosferica su carta che, solitamente, è avvolta attorno a un cilindro azionato da un meccanismo a orologeria. Il barometro aneroidale, più leggero ma meno preciso di quello a mercurio, è costituito da un contenitore metallico all'interno del quale è stato fatto il vuoto. Le variazioni di pressione atmosferica provocano compressioni ed espansioni del contenitore, che, dopo essere state amplificate da un sistema di leve, vengono trasformate in movimenti di una lancetta da un apposito meccanismo. Un'apposita scala graduata posizionata sul quadrante del barometro permette di associare la posizione della lancetta ad un valore di pressione.

La figura (4.9A) mostra la variazione di pressione dovuta all'onda d'urto generata dal-

l'eruzione nel 1995 del vulcano Ruapehu, in Nuova Zelanda, ad una distanza di 9 km dal cratere. Le variazioni di pressione visibili dai tracciati del barografo di figura (4.9B)

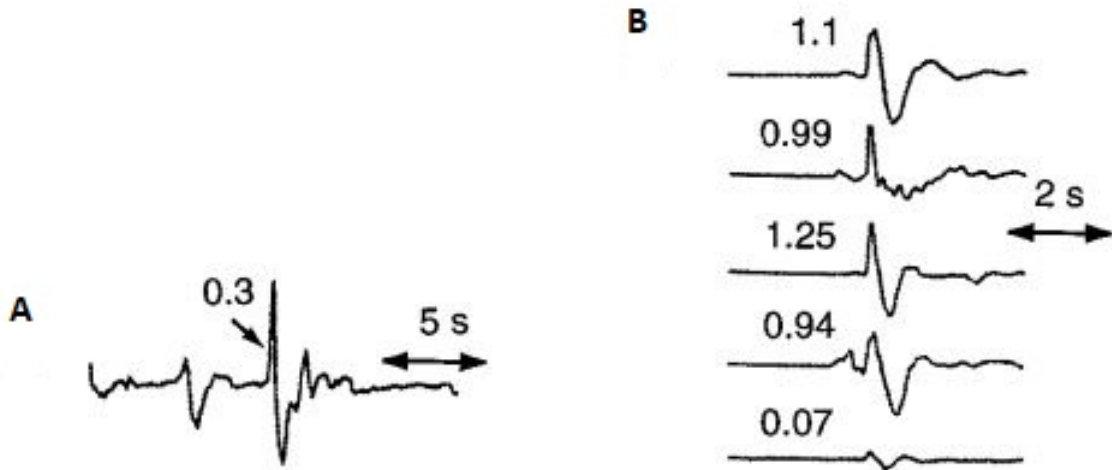


Figura 4.9: Esempi di microbarogrammi ottenuti per le eruzioni del vulcano Ruapehu (A) e per il Monte Tokachi (B) [Morrissey e Chouet, 1997].

sono invece dovute al passaggio delle onde d'urto generate durante le eruzioni negli anni 1988 e 1989 del Monte Tokachi, in Giappone, ad una distanza di 3 km dal cratere. I

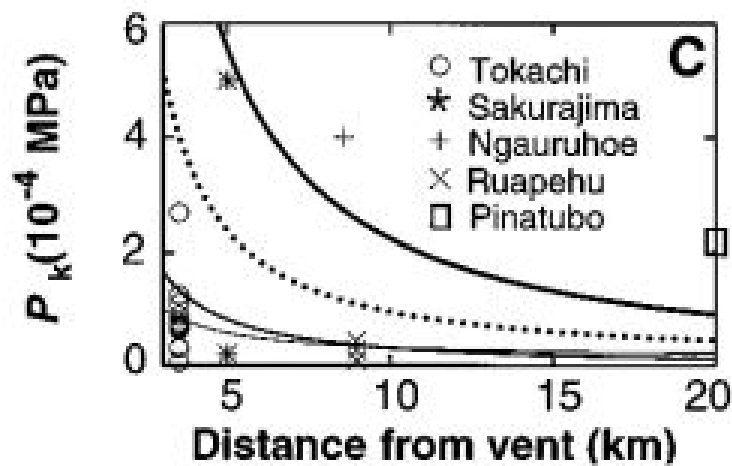


Figura 4.10: Differenza di pressione p_k in funzione della distanza dal cratere [Morrissey e Chouet, 1997].

numeri riportati sopra i singoli barogrammi indicano la differenza p_k in kPa tra il picco massimo e quello minimo. I dati reali mostrano che immediatamente davanti al fronte

d'onda la pressione non è pari a quella atmosferica ma assume valori inferiori, mentre il barogramma assume un andamento a forma di N, comunemente associata alla perturbazione prodotta da singole eruzioni esplosive [Morrissey e Chouet, 1997].

Le simulazioni utilizzate in [Morrissey e Chouet, 1997] hanno permesso di ricavare non solo il valore della pressione di esplosione, ovvero quella in grado di generare le onde d'urto, ma anche l'andamento della differenza di pressione p_k in funzione della distanza dal cratere. Tale andamento è mostrato in figura (4.10) entro un range di 20 km per diversi valori di pressione di esplosione. È possibile creare un grafico simile a quello della figura (4.10) considerando come p_k la differenza tra la pressione sul fronte d'onda e quella atmosferica.

Tale andamento è mostrato, invece, nel grafico in figura (4.11) per energie pari a 10^{16}

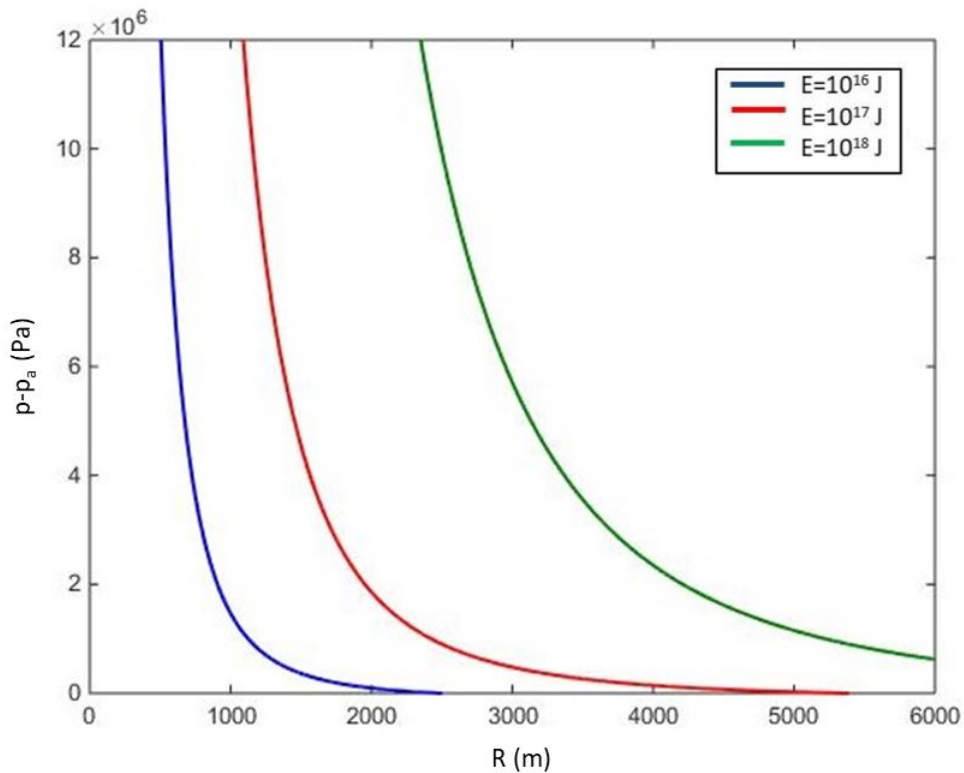


Figura 4.11: *Differenza di pressione p_k in funzione della distanza dal cratere.*

(blu), 10^{17} (rosso) e 10^{18} J (verde). Facendo un confronto con la curva superiore non tratteggiata della figura (4.10) per $R = 5$ km, è possibile vedere che la curva corrispondente a $E = 10^{18}$ J è circa di tre ordini di grandezza maggiore, mentre la curva corrispondente a $E = 10^{17}$ J ha lo stesso ordine di grandezza. Tuttavia a questa distanza

l'approssimazione di forte onda d'urto non è più valida per eruzioni con energia pari a $E = 10^{17}$ J, quindi non è possibile affermare che la curva superiore non tratteggiata della figura (4.10) corrisponda a tale valore di energia. Non è possibile fare ulteriori confronti diretti con la figura (4.11) in quanto le curve nella figura (4.10) corrispondono a valori di p_k inferiori a 6 kPa, che sono associati ad una pressione per l'onda d'urto inferiore a sei volte quella atmosferica. Questo non permette di utilizzare l'approssimazione di onda d'urto forte.

Studi più recenti hanno permesso di effettuare ulteriori confronti tra il modello presentato e le osservazioni. L'ordine di grandezza per la pressione in prossimità del cratere, per esempio, è di 10 MPa per le energie più basse, in accordo con gli studi effettuati sul vulcano Stromboli [Chouet *et al.*, 2002]. Per una eruzione con una energia pari a 10^{16} J, invece, l'ordine di grandezza del MPa è raggiunto ad una distanza di un km, come nel caso dell'eruzione del vulcano Augustine nel 2006 [Medici *et al.*, 2013]. Per una eruzione con una energia pari a 10^{13} J, invece, l'ordine di grandezza del MPa è raggiunto ad una distanza di 100 m, in accordo con gli studi condotti per l'eruzione del vulcano Sakurajima avvenuta nel 1987 [Yokoo e Ishimara, 2007]. Ripetendo l'analisi anche per $E = 10^{15}$ J, l'andamento della sovrappressione è in accordo con altri studi, come quelli effettuati per il Monte Fuji [Saito e Takayama, 2005].

Anche lo studio effettuato sulle condizioni di rottura dei vetri delle finestre come conseguenza dell'onda d'urto trova riscontro con le osservazioni di casi reali. Entro una distanza di circa 10 km dal cratere, infatti, i vetri delle finestre sono soggetti a rottura. È stato accennato precedentemente che, durante le eruzioni di Vulcano del 1888-1890, le onde d'urto generate da alcune esplosioni vulcaniche ruppero i vetri delle finestre nella città di Lipari, a 7 km di distanza, mentre l'eruzione del vulcano Asama (Giappone) del 2004 causò la rottura dei vetri fino a ben 11 km di distanza [Yokoo *et al.*, 2006].

Conclusioni

Nello studio delle onde d'urto è possibile analizzare come variano alcune proprietà dei fluidi in seguito al passaggio di un fronte d'onda. Partendo dalla definizione di onda d'urto come "regione di piccolo spessore entro il quale le proprietà dinamiche di un flusso (la velocità, la pressione, la densità ecc.) cambiano rapidamente" è stata sviluppata analiticamente la predetta transizione come una discontinuità attraverso la quale le variabili fisiche sono soggette ad una variazione improvvisa, seppur rispettando sempre le leggi di conservazione fondamentali.

Considerando il caso specifico di un'onda d'urto forte con sorgente puntiforme, caratterizzata quindi dal rilascio istantaneo di una grande quantità di energia in un piccolo volume, è possibile effettuare alcune semplificazioni: prima fra tutte la pressione atmosferica può essere trascurata rispetto all'aumento di pressione indotto dal passaggio del fronte d'onda, così come si può assumere che il mezzo nel quale si propaga l'onda sia un fluido isotropo e, a piccola distanza dalla sorgente, omogeneo. Nello sviluppo del modello si è, inoltre, considerato il mezzo illimitato, trascurando quindi l'interazione del fronte d'onda con la superficie terrestre; la pressione, la densità e la temperatura del mezzo sono stati considerati pari a quelle dell'aria a livello del mare. Con le ipotesi precedentemente assunte, lo sviluppo del modello ha portato alla determinazione delle variabili di pressione, velocità, densità, energia, temperatura ed entropia sia davanti che dietro al fronte d'onda.

Successivamente si sono utilizzati i risultati ottenuti dal modello per evidenziare alcune delle proprietà di una forte onda d'urto generata da una eruzione vulcanica esplosiva al variare dei livelli di energia liberata. In particolar modo, confrontando la pressione sul fronte d'onda con quella atmosferica, è stato possibile definire che il limite massimo di validità temporale per una forte onda d'urto è di alcuni secondi, valore che corrisponde ad una distanza di alcuni chilometri dal cratere. In aggiunta si è valutato che, all'interno

di un intervallo di tempo di alcuni secondi, la velocità di propagazione in aria dell'onda è maggiore di quella del suono. Dopo che l'onda si è propagata e l'aria è ritornata alla pressione atmosferica, quest'ultima si trova ad una temperatura maggiore di quella ambiente. L'analisi legata all'applicazione del modello ad una eruzione vulcanica esplosiva, della tipologia prima descritta, ha messo in evidenza la suddivisione in due regioni dello spazio interno di una sfera che ha come raggio la distanza tra il fronte d'onda e l'origine. Infatti si è potuto constatare che nella regione compresa entro una distanza pari a circa il 60 % del raggio dell'onda d'urto i rapporti di pressione e densità sono costanti, mentre il rapporto di velocità è una funzione lineare. A distanze minori dal fronte d'onda i rapporti definiti precedentemente subiscono un repentino aumento fino ad assumere valori unitari sul fronte d'onda.

Allo stato attuale, non è possibile effettuare un confronto diretto tra il modello di forte onda d'urto sviluppato ed i dati acquisiti direttamente a seguito di una eruzione vulcanica esplosiva a causa della mancanza di misure effettuate sul terreno, dovuta alla difficoltà di acquisire dati relativi ad un fenomeno di così breve durata e di carattere imprevedibile come la generazione e la propagazione di un'onda d'urto. Tuttavia per diverse eruzioni vulcaniche sono disponibili fotografie, filmati e registrazioni barometriche che confermano i risultati ottenuti dal modello sviluppato. Si vuole comunque sottolineare che la finalità dello studio effettuato e del lavoro presentato è stata in primo luogo quella di analizzare e comprendere le relazioni tra le variabili coinvolte nel fenomeno.

Bibliografia

- Belluzzi O., *Scienza delle costruzioni*. vol. 3, Zanichelli, Bologna, 1982.
- Belousov A.B., Bogoyavlenskaya G.E., *Debris Avalanches of the 1956 Bezymianny eruption*. Proceedings of the Kagoshima International Conference on Volcanoes, Japan, 460–462, 1988.
- Bertagnini A., Métrich N., Landi P., Rosi M., *Stromboli volcano (Aeolian Archipelago, Italy): An open window on the deep-feeding system of a steady state basaltic volcano*, Journal of geophysical research Vol. 108, 2336-2351, 2003.
- Chouet B., Dawson P., Ohminato T., Martini M., Saccorotti G., Giudicepietro F., De Luca G., Milana G., Scarpa R., *Source mechanisms of explosions at Stromboli Volcano, Italy, determined from moment-tensor inversion of very-long-period data*, Journal of geophysical research Vol. 108, 7,1-7,24. 2002.
- Cioni R., Marianelli P., Santacroce R., Sbrana A., *Plinian and subplinian Eruptions*. in Encyclopedia of Volcanoes, edited by Sigurdsson H., 477-494, 2015.
- De la Cruz-Reyna S., Martin Del Pozzo A.L., *The 1982 eruption of El Chichón volcano, Mexico: Eyewitness of the disaster*, Geofísica Internacional Vol. 48, 21-31, 2009.
- Di Vito M.A., Ricciardi G., De Vita S., Cubellis E., Tertulliani A., *Giuseppe Mercalli da Monza al Reale Osservatorio vesuviano: una vita tra insegnamento e ricerca*, INGV, 2014.
- Gudmundsson A., *The mechanics of large volcanic eruptions*, Earth-Science Reviews Vol.163, 72-93, 2016.
- Jackson J.A., Bates R.L., *Glossary of Geology*, American Geological Institute, 1997.
- Landau L.D., Lifshitz E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987.
- Mason B.G., Pyle D.M., Oppenheimer C., *The size and frequency of the largest explosive eruptions on Earth.*, Bulletin of Volcanology Vol. 66, 735–748 2004.
- Medici E.F., Allen J.S., Waite G.P., *Modeling shock waves generated by explosive vol-*

- canic eruptions*, Geophysical Research Letters Vol.41, 414-421, 2013.
- Morrissey M.M., Chouet B.A., *Burst conditions of explosive volcanic eruption recorded on microbarographs*, Science Vol. 275, 1290-1293, 1997.
- Morrissey M.M., Mastin L.G., *Vulcanian Eruptions*. in Encyclopedia of Volcanoes, edited by Sigurdsson H., 463-475, 2015.
- Nairn I.A., *Atmospheric shock waves and condensation clouds from Ngauruhoe explosive eruptions*, Nature Vol. 259, 190-192, 1976.
- Newhall C.G., Punongbayan R.S., *Fire and mud: eruptions and lahars of Mount Pinatubo, Philippines*, University of Washington Press, 1996.
- Perret F.A., *The flashing arcs; a volcanic phenomenon*, American journal of Science Vol.34, 329-333, 1912.
- Pyle D.M., *Sizes of volcanic eruptions*. in Encyclopedia of Volcanoes, edited by Sigurdsson H., 263-269, 2015.
- Sabetta F., *Gasdinamica*, Ed. Ingegneria, 2000.
- Saito T., Takayama K., *Applying shock-wave research to volcanology*, Computing in Science and Engineering, 30-35, 2005.
- Schipper C.I., Jakibsson S.P., White J.D.L Palin J.M., Bush-Marcinowski T., *The Surtsey magma series*, Scientific reports, 2015.
- Sigurdsson H., Cashdollar S., Sparks S.R.J., *The eruption of Vesuvius in A.D. 79: reconstruction from historical and volcanological evidence*, American Journal of Archaeology Vol.86, 1982.
- Simkin T., Siebert L., *Earth's volcanoes and eruptions: an overview*. in Encyclopedia of Volcanoes, edited by Sigurdsson H., 249-261, 2015.
- Swanson D.A., Duffield W.A. Jackson D.B., Peterson D.W., *Chronological narrative of the 1969-71 Mauna Ulu eruption of Kilauea Volcano, Hawaii*, United State Government printing office, 1979.
- Takayama K., Saito T., *Shockwaves/ Geophysical and medical applications*, Annu. Rev. Fluid Mech. Vol.36, 347-379, 2004.
- Taylor G., *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. I. Theoretical Discussion*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences Vol.201, 1950.
- Tilling R.I., *El Chichón's "surprise" eruption in 1982: Lessons for reducing volcano risk*, Geofísica Internacional Vol. 48, 3-19, 2009.

- Vergniolle S., Mangan M., *Hawaiian and strombolian eruptions*. in Encyclopedia of Volcanoes, edited by Sigurdsson H., pag. 447-461, 2015.
- White J.D.L., Houghton B., *Surtseyan and related phreatomagmatic eruptions*. in Encyclopedia of Volcanoes, edited by Sigurdsson H., 495-511, 2015.
- Wohletz K., Valentine G., *Computer simulations of explosive volcanic eruptions*, Magma Transport and storage, 1133-135, 1990.
- Woods A. *A model of volcanic explosions*, Nud. Eng. Des. Vol.155, 345-357, 1995.
- Yokoo A. Ichihara M., Goto A., Taniguchi H., *Atmospheric pressure waves in the field of volcanology*, Shock Waves Vol.15, 295-300, 2006.
- Yokoo A., Ishihara K., *Analysis of pressure waves observed in Sakurajima eruption movies*, Earth Planet and Space Vol.59, 177-181, 2007.
- Yokoyama I., *An interpretation of the 1914 eruption of Sakurajima volcano*, Proceedings of the Japan Academy Vol.73, 53-58, 1997.