

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Insegnamento delle coniche.
Storia, classificazioni e vari punti di vista.

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alessandro Gimigliano

Presentata da:
Ilaria Mengucci

Anno Accademico 2017/2018

*Ai miei cari nonni,
Mario e Silvio,
che non hanno potuto concludere insieme a me questo mio percorso.*

Indice

Introduzione	3
1 Le sezioni coniche nell'antica Grecia	5
1.1 Le coniche prima di Apollonio	5
1.2 Apollonio di Perga	7
1.2.1 Vita	7
1.2.2 Opera "Le Coniche"	7
1.3 Breve storia del metodo delle coordinate	16
1.4 Le proprietà fondamentali di Apollonio nel linguaggio della moderna geometria analitica	18
1.4.1 Ellisse	18
1.4.2 Iperbole	20
1.4.3 Parabola	23
2 Le coniche: proprietà geometriche e equazioni cartesiane	25
2.1 Le coniche come luoghi geometrici	25
2.1.1 La Parabola	27
2.1.2 L'ellisse	31
2.1.3 L'iperbole	36
3 Curve algebriche piane	42
3.1 Storia delle curve algebriche	42
3.2 Curve algebriche piane	43
3.3 Equivalenza di curve algebriche	46

Indice	2
3.3.1 Caso affine	46
3.3.2 Caso proiettivo	47
3.4 Passaggio dal piano affine al completamento proiettivo e viceversa	48
3.5 Coniche affini come "curve algebriche di grado 2"	49
4 Classificazione delle coniche	51
4.1 Coniche proiettive.	51
4.2 Classificazione delle coniche proiettive	54
4.3 Coniche affini e coniche euclidee	56
4.4 Classificazione delle coniche affini e coniche euclidee	58
5 Coniche involuppo	65
5.1 Curve involuppo	65
5.2 Costruzione della parabola involuppo	67
5.2.1 Espressione geometrica della famiglia di rette e della parabola involuppo	67
5.2.2 Espressione analitica della famiglia di rette e della parabola involuppo	69
5.3 Costruzione dell'ellisse involuppo	71
5.3.1 Espressione geometrica della famiglia di rette e dell'ellisse involuppo	71
5.3.2 Espressione analitica della famiglia di rette e dell'ellisse involuppo	73
5.4 Costruzione dell'iperbole involuppo	75
5.4.1 Espressione geometrica della famiglia di rette e dell'iperbole involuppo	75
5.4.2 Espressione analitica della famiglia di rette e dell'iperbole involuppo	77
Referenze	79

Introduzione

La matematica è da sempre una delle scienze più affascinanti, che ha segnato il progresso scientifico dell'uomo. Tutt'oggi risulta essere una disciplina di importanza cruciale, anche se purtroppo è spesso poco amata dagli studenti. Una delle ragioni per cui questo può succedere è la mancanza di tempo che si ha a disposizione durante l'anno scolastico (o accademico) e a causa di ciò i vari argomenti previsti dal programma vengono trattati in modo frettoloso, a volte eccessivamente formale, creando quindi un distacco da questa materia, percepita come fredda, data solo da un insieme di procedure astratte e che ha poco a che fare con la realtà.

Le linee guida del Liceo Scientifico in Italia prevedono, riguardo al tema di questa tesi, che le sezioni coniche siano presentate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Lo studente sarà quindi introdotto alla comprensione della specificità dei due approcci, sintetico e analitico, nello studio della geometria delle coniche; inoltre sarà sviluppata la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi e saranno studiate le proprietà di ogni conica. Il punto è: si riuscirà a fare tutto ciò nel migliore dei modi suscitando curiosità e interesse dello studente nello studio di questo argomento?

Lo scopo principale di questa tesi è appunto quello di fornire vari approcci didattici all'introduzione delle coniche, sia per scuole superiori che per l'università.

Il primo capitolo introduce le sezioni coniche il più possibile come sono state viste da Apollonio, (all'epoca conosciuto come "il Grande Geometra"). Verranno analizzate proposizioni e definizioni tratte dalla sua opera le "Coniche" in cui compaiono le proprietà di tali curve. Successivamente, sempre nel primo capitolo, queste proprietà fondamentali verranno studiate nel linguaggio della moderna geometria analitica.

Il secondo capitolo si distacca dall'approccio storico e tratta le coniche come luoghi

geometrici per poi ricavare la loro equazione cartesiana. Oltre alle proprietà analitiche verranno esaminate le proprietà ottiche di queste curve come applicazioni ad una situazione fisica.

Il terzo e il quarto capitolo hanno invece un'impostazione "universitaria" riguardante la geometria proiettiva: il terzo dà un approccio che usa la teoria generale delle curve algebriche piane (sia dal punto di vista affine che proiettivo), mentre il quarto capitolo tratta la classificazione delle coniche, sempre da un punto di vista affine, proiettivo ed euclideo.

Per concludere la tesi si studieranno, nell'ultimo capitolo, le coniche involuppo. Queste ultime verranno trattate sia geometricamente (attraverso il software di geometria dinamica: "GeoGebra") che analiticamente. Quest'ultimo argomento trattato, oltre ad essere un punto di vista inusuale sulla teoria delle coniche, crea un collegamento tra la geometria e l'analisi in un modo nuovo e visuale, rendendo la loro matematica più "tangibile". In questo modo, indirettamente, ho voluto dare importanza al laboratorio di matematica; infatti le attività con i software, opportunamente guidate dall'insegnante, possono stimolare negli allievi il desiderio di passare a dimostrare quanto intuito visualmente e dunque raggiungere i loro obiettivi formativi didattici.

Capitolo 1

Le sezioni coniche nell'antica Grecia

In questo capitolo ci proponiamo di fornire un primo modo di introdurre le coniche: come si trovano in Apollonio e quindi seguendo un approccio storico e poi "tradurre" le sue definizioni e proposizioni tramite equazioni in coordinate cartesiane. (Come riferimenti in questo capitolo vedi [2], [6], [9], [10], [11]).

1.1 Le coniche prima di Apollonio

Prima di tutto è necessario partire dalla definizione di cono in riferimento a Euclide che tratta dei coni nel **libro XI** della sua opera principale gli *Elementi*, testo di riferimento per la geometria elementare almeno fino a tutto il XVIII secolo. La **definizione XI.18** introduce il cono come la figura che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno a un cateto: a seconda che il cateto fisso sia quello minore o quello maggiore si ottiene un cono rispettivamente *ottusangolo* o *acutangolo* (in base cioè, all'angolo al vertice del cono). Se invece il triangolo rettangolo che viene ruotato è isoscele si ottiene un cono *rettangolo*. A questo punto le sezioni coniche (che in seguito saranno chiamate ellisse, parabola e iperbole) si ottengono come sezioni con un piano perpendicolare al lato del cono, rispettivamente quando il cono è acutangolo, rettangolo o ottusangolo. Ai tempi di Euclide, le sezioni coniche erano chiamate *oxytome*, *orthotome* e *amblytome* così chiamati dai termini greci adoperati per indicare rispettivamente l'angolo acuto, retto e ottuso. Quindi in breve, si ottengono sezioni diverse al variare del cono che viene

tagliato, mentre il taglio viene sempre effettuato con un piano perpendicolare al lato del cono stesso (vedi figura 1.1)

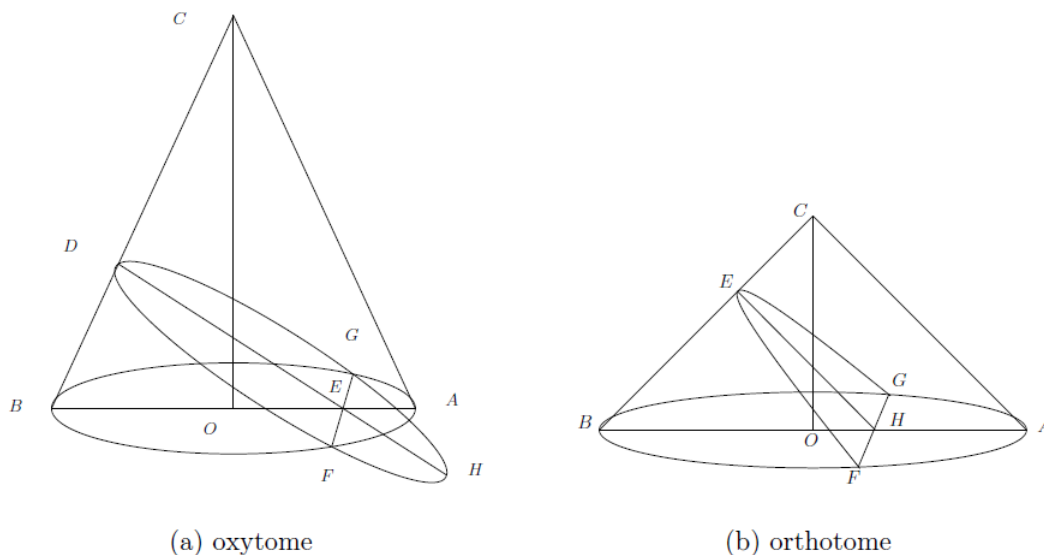


Figura 1.1: Sezioni coniche con piani perpendicolari al lato del cono.

In particolare vogliamo mettere in risalto tre aspetti che si riveleranno fondamentali rispetto all'evoluzione apolloniana della teoria:

- tutti i coni sono retti, cioè l'asse del cono è perpendicolare alla base;
- tutti i coni hanno una sola falda (e quindi anche l'iperbole ha un solo ramo);
- i coni sono non solo finiti, ma "nascono" finiti e non estendibili;
- non è possibile ottenere sezioni di tipo differente nello stesso cono (poiché tutte le sezioni considerate sono perpendicolari al lato del cono).

1.2 Apollonio di Perga

1.2.1 Vita

Le fonti sulla vita e la figura di Apollonio non sono dirette. Qualche secolo d.C. Tolomeo Chenno, erudito dell'epoca, aveva scritto un trattato in sette libri dal titolo: *Nuove storie di erudizione varia*, di cui ci sono rimasti solo frammenti. In base a queste fonti Apollonio sarebbe nato a Perge, città della Panfilia, regione dell'Asia minore, sotto il regno (dal 246 al 221 a.C.) di Tolomeo III Emergete; avrebbe soggiornato a lungo ad Alessandria studiando Matematica sotto la guida dei discepoli di Euclide. Grazie al suo ingegno avrebbe raggiunto grande fama sotto il regno di Tolomeo IV Filopatore (dal 221 al 204 a.C.). In base ad altre fonti cronologiche, Apollonio sarebbe morto nel 170 a.C. La vita di Apollonio si sarebbe svolta circa 30-40 anni dopo Archimede. La critica contemporanea, sulla base anche di analisi di altre testimonianze, ritiene che Apollonio abbia ispirato il proprio lavoro alle opere di predecessori come Aristeo il vecchio e forse anche Euclide, relativamente al suo trattato sull'ottica di cui utilizza il cono visivo, o forse su opere che non ci sono pervenute.

1.2.2 Opera "Le Coniche"

È noto che Apollonio abbia scritto varie opere, ma la sua più importante è *Le Coniche*, cui è stata affidata la sua fama nel tempo. Con Apollonio le cose cambiano subito, a partire dalla definizione di cono. Una definizione diversa implica anche un diverso modo di generare le sezioni.

Per Apollonio il cono si ottiene (**libro I, def. 1**) a partire da una circonferenza data (detta **base**) e da un punto (non complanare alla circonferenza) dato. Se da questo punto (che viene chiamato **vertice**) si traccia una retta che lo congiunga con la circonferenza (e la retta si prolunga da tutte e due le parti rispetto al punto stesso) e, tenendo fisso il punto, si fa muovere la retta lungo la circonferenza, la retta descrive una **superficie conica** o semplicemente cono. Si tratta di una superficie composta da due parti (dette **falde**), opposte rispetto al vertice. Ciascuna di queste due falde cresce verso l'infinito quando la retta che le descrive viene prolungata verso l'infinito. L'asse del cono è la retta

passante per il vertice e il centro della circonferenza. Il cono può quindi essere anche obliquo (cioè il suo asse può formare un angolo qualsiasi con il piano di base); abbiamo due falde (e quindi due rami di iperbole); il cono può essere prolungato verso l'infinito, ma soprattutto possiamo ottenere tutti e tre i tipi di sezioni nello stesso cono, variando semplicemente l'inclinazione del piano secante (che non è più costretto, come prima, a essere perpendicolare a un lato del cono).

Proposizione 1.1 (libro I, prop.3). *Allorché un cono è tagliato da un piano passante per il vertice, la sezione compresa fra il vertice e diametro del cerchio di base è un triangolo.*

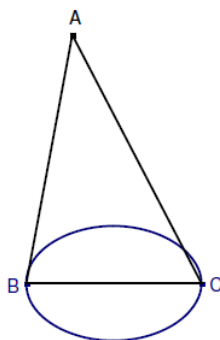


Figura 1.2: Sezione di un cono.

Dimostrazione. Sia dato un cono, il cui vertice sia il punto A , e la cui base è il cerchio BC (è d'uso indicare un cerchio usando un suo diametro).

Tagliamolo con un piano passante per il punto A , esso determina, come sezioni, le rette AB e AC sulla superficie e la retta BC sulla base. Dico che $\triangle ABC$ è un triangolo.

In effetti, poiché la retta AB è la sezione comune del piano secante e della superficie conica, AB è una retta. Accade lo stesso per AC . Ora, BC è pure una retta; di conseguenza $\triangle ABC$ è un triangolo. Da ciò, quando un cono è tagliato da un piano passante per il vertice, la sezione è un triangolo. \square

Osservazione 1.2. Qui, come in Euclide, la parola "retta" è usata per quelli che noi chiamiamo "segmenti" .

Proposizione 1.3 (libro I, prop. 4). *Quando una o l'altra delle due falde disposte di seguito al vertice è tagliata da un piano parallelo al cerchio seguendo il quale si muove la retta che descrive la superficie, il piano intercettato dalla superficie sarà un cerchio avente il suo centro sull'asse, mentre la figura delimitata dal cerchio e dalla superficie conica, separata dal piano secante, dalla parte del vertice, sarà un cono*

Il piano perpendicolare alla base, passante per il vertice e contenente l'asse del cono genera il triangolo massimo, quello che può venire detto **triangolo assiale** o **principale** (vedi figura 1.1). Nel caso di un cono retto, un piano per il vertice, perpendicolare alla base, contiene l'asse del cono, ma se si considera un cono obliquo tale coincidenza può non realizzarsi.

I cerchi non si ottengono solamente come sezioni con piani paralleli alla base ma anche con quella che viene detta **sezione subcontraria**.

Definizione 1.4. Si consideri un piano *perpendicolare* al piano di base BC e sia $\triangle ABC$ un triangolo per l'asse generato da questo piano.

Si immagini ora un altro piano HK perpendicolare al piano del triangolo $\triangle ABC$ che tagli

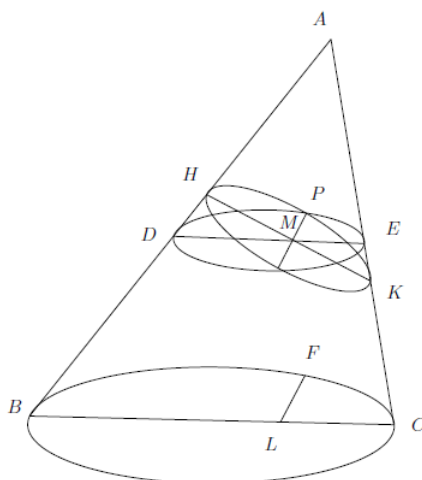


Figura 1.3: Sezione conica subcontraria.

un triangolo $\triangle AHK$ simile ad $\triangle ABC$ ma posto in senso contrario, cioè simmetrico rispetto

all'asse del cono. Avremo che \widehat{AKH} è uguale ad \widehat{ABC} . Tale sezione del cono viene detta *sezione subcontraria*.

Proposizione 1.5 (libro I, prop. 5). *La sezione subcontraria è una circonferenza*

Dimostrazione. Sia P un qualunque punto dell'intersezione fra la superficie conica e il piano HK (subcontrario) e sia F un qualunque punto sulla circonferenza di base BC (vedi figura 1.3). Si traccino i segmenti PM e FL perpendicolari al piano del triangolo $\triangle ABC$; questi segmenti incontreranno le rette HK e BC in due punti, che chiameremo rispettivamente M e L . I segmenti PM e FL saranno paralleli. Si tracci per il punto M la retta DE , parallela a BC ; il piano definito da DME e PM è parallelo alla base del cono (**Euclide libro XI prop 15**). Di conseguenza (**libro I, prop. 4**) la sezione DPE che si ottiene sarà un cerchio e il rettangolo costruito su DM e ME ($DM \times ME$) avrà area uguale al quadrato costruito su PM (PM^2) (**Euclide libro VI corollario della prop. 8**). Poiché DE è parallelo a BC , l'angolo \widehat{ADE} è uguale all'angolo \widehat{ABC} (uguale, per ipotesi, a \widehat{AKH}). Dunque, nei triangoli $\triangle HDM$ e $\triangle EKM$ gli angoli \widehat{HDM} e \widehat{EKM} sono uguali, così come gli angoli in M , opposti al vertice. Quindi i triangoli $\triangle HDM$ e $\triangle EKM$ sono simili (**Euclide libro VI prop. 4**); e, per similitudine di triangoli:

$$HM : DM = ME : MK$$

e possiamo scrivere:

$$HM \times MK = DM \times ME = PM^2 \quad (1.1)$$

Siccome P è un punto qualunque sull'intersezione del piano HK e della superficie conica, la sezione subcontraria sarà una circonferenza, dato che ogni suo punto soddisfa l'equazione (1.1). \square

Le proposizioni 11-13 del libro I negli enunciati forniscono i nomi delle curve coniche, così come noi oggi li conosciamo. Si tratta quindi di Proposizioni fondamentali per questo libro e per l'intero trattato perché finalmente svelano e giustificano il titolo che Apollonio ha adottato per la sua opera. Facendo questa scelta Apollonio si distacca dai suoi predecessori che hanno preferito usare perifrasi per indicare le sezioni, dato che per cambiare conica, cambiavano cono, mentre ora Apollonio mantiene fisso il cono e cambia la posizione dei piani.

Definizione 1.6 (libro I def. 4). Il diametro è quel segmento che biseca tutte le corde di una curva conica tracciate parallelamente a una direzione (detta *direzione delle ordinate*). Tale diametro sarà l'asse della sezione (ovvero l'angolo che forma con le ordinate sarà retto) se e solo se il piano del triangolo per l'asse risulta perpendicolare al piano di base;

Apollonio dimostra che se la sezione non è nè subcontraria nè parallela si ottengono tre tipi di curve, diverse dalla circonferenza.

Le distingue a seconda che:

- il piano secante incontri entrambi i lati del triangolo per l'asse nella stessa falda del cono (**ellisse**);
- sia parallelo a uno dei lati del triangolo (**parabola**);
- incontri entrambi i lati, ma uno in una falda e uno in un'altra (**iperbole**).

Nel primo caso la curva-sezione che si ottiene sarà limitata, negli altri due prolungabile indefinitamente con il cono.

Proposizione 1.7 (libro I, prop. 11). *Dato il cono ABC di vertice A e base BC si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro PM sia parallelo a uno dei lati del triangolo per l'asse. Sia QV un'ordinata relativa al diametro PM . Se si traccia una retta PL perpendicolare a PM nel piano della sezione, tale che*

$$PL : PA = BC^2 : (BA \times AC)$$

allora

$$QV^2 = PL \times PV \tag{1.2}$$

La sezione così ottenuta si chiama parabola e la retta fissa PL (rispetto alla quale si realizza l'uguaglianza fra il quadrato di una qualsiasi ordinata e il rettangolo costruito sull'ascissa e tale retta fissa) è detta lato retto della parabola.

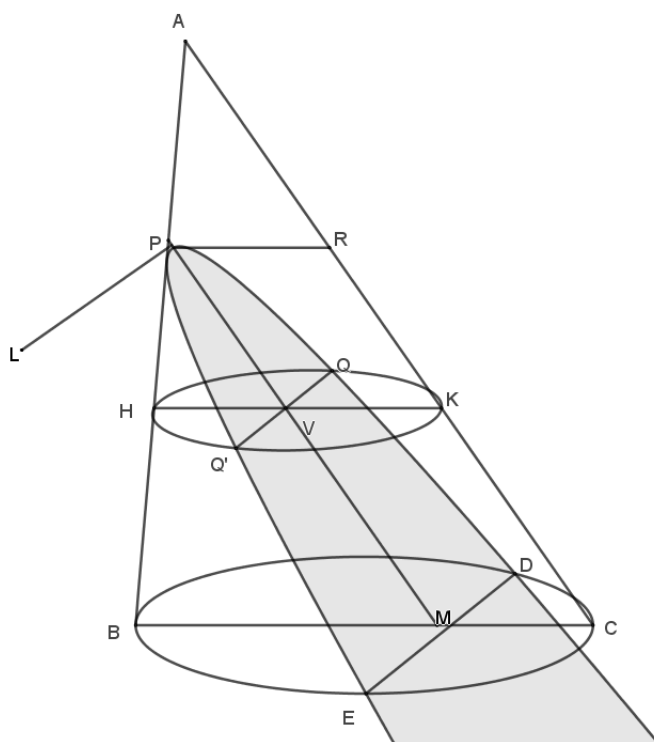


Figura 1.4: La parabola.

Dimostrazione. Sia BC il diametro del cerchio di base del cono; DE l'intersezione fra il piano secante e cerchio di base. Sia HK una parallela a BC passante per il punto V . Poiché l'ordinata QV è anche parallela a DE , il piano passante per i tre punti H, Q, K sarà parallelo alla base del cono e lo taglierà in un cerchio di diametro HK . Inoltre dato che QV è perpendicolare a HK ne segue che

$$HV \times VK = QV^2 . \quad (1.3)$$

Inoltre, per similitudine di triangoli:

$$BC : AC = HV : PV ,$$

$$BC : AB = VK : PA .$$

(per la seconda proporzione, si consideri il parallelogramma $PRKV$ costruito tracciando PR , parallela ad HK passante per P). Di conseguenza,

$$BC^2 : (AC \times AB) = (HV \times VK) : (PV \times PA) . \quad (1.4)$$

Per la (1.2), inoltre, avremo

$$(HV \times VK) : (PV \times PA) = QV^2 : (PA \times PV) .$$

E quindi per la (1.3)

$$BC^2 : (AC \times AB) = QV^2 : (PA \times PV) .$$

Ma per come abbiamo definito PL , si ha

$$PL : PA = BC^2 : (BA \times AC) \tag{1.5}$$

quindi

$$QV^2 : (PA \times PV) = PL : PA .$$

D'altra parte é ovvio che

$$PL : PA = (PL \times PV) : (PA \times PV)$$

e quindi si ottiene la tesi:

$$QV^2 = PL \times PV .$$

□

Definizione 1.8 (libro I, def. 7). Chiamiamo *asse* d'una linea curva o di due linee curve la retta che, diametro di questa curva o di queste curve, taglia le parallele secondo angoli retti.

Proposizione 1.9 (libro I, prop.12,13). Sia $\triangle ABC$ il triangolo assiale. Supponiamo che questo triangolo tagli la conica in PP' (PP' non necessariamente un asse della conica) e sia $PP'M$ la retta determinata dall'intersezione del piano della sezione e da quella del triangolo assiale. Sia poi QQ' una qualsiasi corda della conica parallela a DE , (ove DE è la retta di incontro fra il piano della conica e quello del cerchio BC) e quindi non necessariamente perpendicolare a PP' . Si ha allora che QQ' è bisecata da PP' cosicché VQ è la metà do QQ' (vedi figura 1.5).

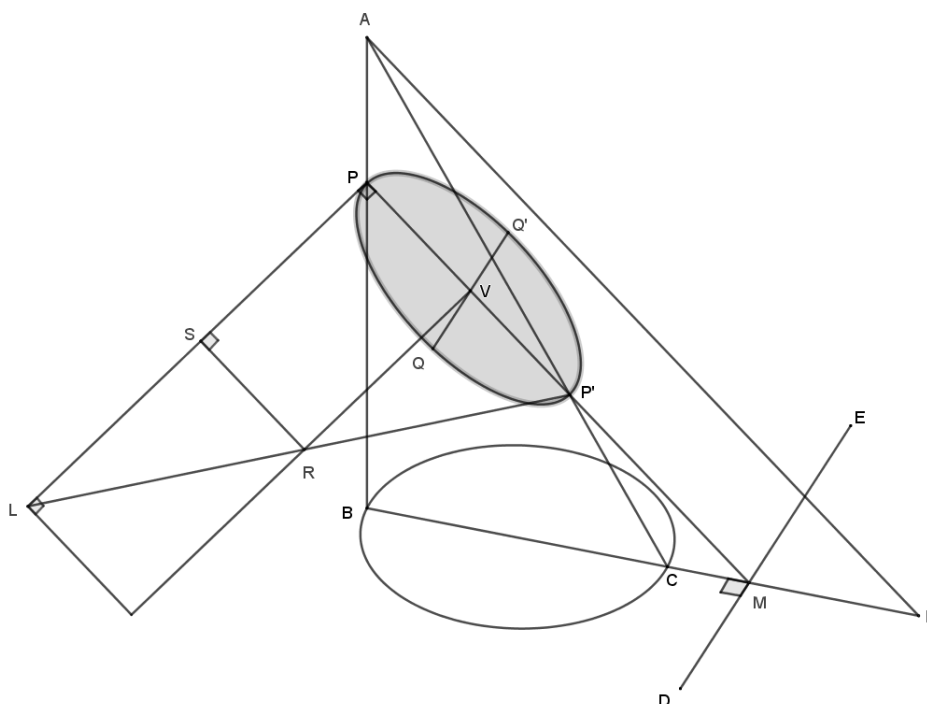


Figura 1.5: L'ellisse.

Si tracci ora AF parallela a PM e che incontri BM in F e PL perpendicolare a PM e nel piano della sezione. Si scelga L tale che sia soddisfatta la condizione:

$$PL : PP' = (BF \times FC) : AF^2 . \quad (1.6)$$

Si tracci ora $P'L$ e si costruisca poi VR parallela a PL e che incontri $P'L$ in R allora

$$QV^2 = PV \times VR \quad (1.7)$$

La sezione così ottenuta si chiama ellisse.

Nel caso dell'iperbole P' è situato sull'altro ramo e $P'L$ deve essere esteso per determinare R . Anche in questo caso si sceglie L tale che sia soddisfatta la (1.6). Inoltre, è ancora valida l'equazione (1.7), ma la costruzione dimostra che VR è più lungo di PL cosicché il rettangolo $PV \times VR$ supera il rettangolo applicato a PL , e cioè $PL \times PV$, per il rettangolo LR che è simile al rettangolo formato da PL e da PP' .

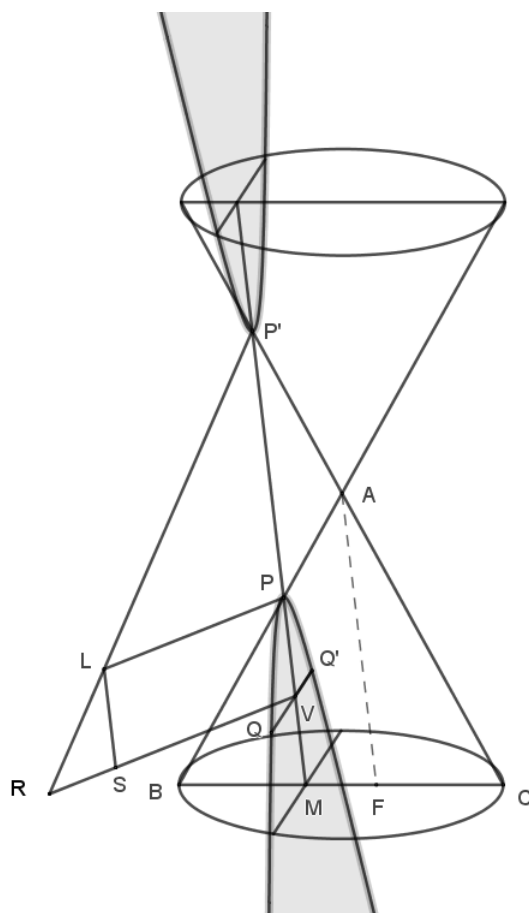


Figura 1.6: L'iperbole.

Apollonio introdusse i termini "ellisse" , "parabola" , "iperbole" per le coniche in luogo dei termini sezione di cono acutangolo, rettangolo e ottusangolo usati da Menecmo. Quando nelle opere di Archimede, come ad esempio nella *Quadratura della parabola*, compaiono le parole "ellisse" , "parabola" , "iperbole" esse furono introdotte da copisti posteriori.

Le equazioni (1.2) e (1.7) sono le proprietà fondamentali delle sezioni coniche. Dopo averle introdotte, Apollonio dimentica il cono e deriva le successive proprietà da queste equazioni. In effetti là dove noi usiamo l'ascissa, l'ordinata e l'equazione di una conica per dedurne le proprietà, Apollonio si serve di PV , dell'ordinata o semicorda QV e di un'uguaglianza geometrica: la (1.2) e (1.7). Naturalmente, nella trattazione di Apollonio non vi è traccia di algebra.

1.3 Breve storia del metodo delle coordinate

Descrivere con precisione la posizione di un oggetto sulla superficie terrestre, su un piano oppure nello spazio è stata un'esigenza ricorrente dai tempi più remoti. I mezzi più efficaci sono sempre stati reperiti facendo ricorso a riferimenti e distanze lineari o angolari. Questi mezzi consentono di instaurare una corrispondenza tra oggetto (o entità) e descrizione di posizione, ma anche tra descrizione e oggetto: si costruisce quindi una corrispondenza biunivoca fra gli oggetti geometrici da descrivere e delle quantità (algebriche) descritte numericamente. I valori delle distanze lineari o angolari rispetto ai riferimenti prendono il nome di coordinate. Prima delle moderne definizioni di coordinate e sistemi di riferimento in ambito scientifico, si ebbero molte applicazioni delle coordinate nell'antichità. Gli antichi studiosi di astronomia furono forse i primi a mettere a punto l'uso di coordinate per descrivere la posizione di corpi celesti mediante valori angolari. Alle mirabili conquiste della scienza greca in ambito geometrico va anche aggiunto l'uso rigoroso delle coordinate per lo studio di entità geometriche. Il più noto studioso greco delle curve coniche, Apollonio di Perga (III sec. a.C.), nel suo trattato 'Le coniche' adopera un metodo di indagine sulle proprietà di queste curve molto vicino a quello usato in tempi moderni dalla geometria analitica. Egli studia le distanze di ogni punto della curva da due rette assunte come riferimento (tangente e diametro passante per il punto di tangenza); è un metodo sostanzialmente coincidente con quello delle coordinate cartesiane, di cui è anticipatore di circa 1800 anni. È però da notare che Apollonio non considera le sue coordinate come un sistema assoluto che prescinde dalla curva studiata, ma dipende da essa. Nel mondo scientifico antico non sembra essere definito un sistema di coordinate che consenta lo studio di qualsiasi entità geometrica per descriverne le proprietà con equazioni o altre espressioni grafiche, simboliche o verbali. Nel Medioevo si avanzò di un passo nella direzione moderna grazie a Nicola Oresme (1323 - 1382), matematico francese. Nello studio di fenomeni, come il moto uniformemente accelerato di un corpo, egli ebbe la brillante idea di rappresentarli graficamente: su una retta orizzontale segna dei punti corrispondenti agli intervalli di tempo da cui partono segmenti perpendicolari

di lunghezza pari alla velocità del corpo. I termini longitudine e latitudine assegnati da Oresme alle diverse coppie di valori equivalgono esattamente a quelli cartesiani di ascissa e ordinata. Anche se limitato allo studio di funzioni a variazione costante e quindi con diagramma rettilineo, il metodo grafico avviato da Oresme ebbe grande fortuna fino ai tempi di Galileo. Nel XVII secolo l'uso consapevole e sistematico delle coordinate divenne uno strumento fondamentale per la nascita di nuove scienze. La geometria analitica fondata da Cartesio (René Descartes, 1596 - 1650) costituisce un formidabile apparato per lo studio e la descrizione di entità geometriche mediante gli strumenti dell'algebra. Con le coordinate cartesiane si possono indicare punti nel piano mediante due valori (ascissa e ordinata) oppure nello spazio mediante tre valori (ascissa, ordinata ed elevazione). Il metodo cartesiano portò a grandi sviluppi perché gli enti geometrici venivano considerati luoghi geometrici, cioè insiemi di punti che godono di specifiche proprietà; le proprietà venivano tradotte in termini matematici attraverso equazioni che descrivevano l'entità geometrica, costruendo così una corrispondenza biunivoca tra entità ed espressione algebrica. In questo modo si potevano descrivere rette, segmenti, curve chiuse (cerchi, ellissi) o aperte (parabole, iperboli, ecc.), superfici o figure solide. Una equazione di primo grado in due variabili ad esempio rappresenta una retta, equazioni di grado superiore descrivono curve (cerchio, curve coniche, ecc.); altre funzioni in tre variabili rappresentano superfici nello spazio. Nello stesso XVII secolo viene definito e impiegato un altro sistema di coordinate: quello delle coordinate polari. Nello studio della spirale di Archimede il matematico italiano Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) applica le coordinate polari, basate su una semiretta di riferimento (asse polare) e due valori, distanza dall'origine (polo) e angolo rispetto all'asse di riferimento. Questo tipo di coordinate era già noto agli antichi greci; Archimede (287 - 212 a.C.) se ne serve per descrivere la sua famosa spirale, mentre l'astronomo Ipparco di Nicea (190 - 120 a.C.) lo applica alla descrizione degli astri. Al matematico svizzero Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero, (1707 - 1783) si deve infine l'impiego sistematico dell'analogo delle coordinate polari nello spazio (coordinate cilindriche e sferiche) e la definizione delle formule di trasformazione tra coordinate cartesiane e polari.

1.4 Le proprietà fondamentali di Apollonio nel linguaggio della moderna geometria analitica

1.4.1 Ellisse

L'equazione (1.7): $QV^2 = PV \times VR$ afferma che la sezione conica rappresenta la curva di un'ellisse quando l'area sottesa dal rettangolo $PSRV$ (S definito come il corrispondente del punto R) è uguale alla superficie del quadrato costruito sul segmento QV .

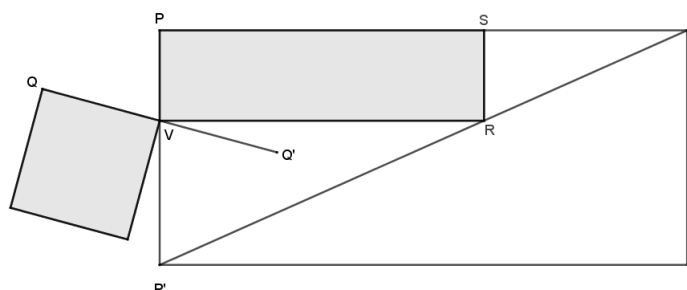


Figura 1.7: Proprietà dell'ellisse.

Apollonio chiama il segmento QV *ordinata della conica*, per cui poniamo $y = QV$. Vogliamo ora riscrivere l'equazione (1.7) in una forma più familiare. Se denotiamo PL , che Apollonio chiama *latus rectum* o parametro delle ordinate, con $2p$, possiamo scrivere

$$VR = 2p - LS .$$

Sia ora x la lunghezza del segmento PV (misurata a partire dal punto P). Poiché il rettangolo LR è simile al rettangolo determinato da PL e da PP' , se d è la lunghezza del diametro PP' della conica vale la proporzione:

$$LS : 2p = x : d \quad \Rightarrow \quad LS = \frac{(2px)}{d} .$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione di VR otteniamo $VR = 2p \cdot (1 - \frac{x}{d})$, per cui possiamo riscrivere la (1.7) come segue:

$$y^2 = PV \cdot VR = x \cdot 2p(1 - \frac{x}{d}) = 2px - \frac{2px^2}{d} . \quad (1.8)$$

Per semplificare il procedimento consideriamo adesso il caso di un cono circolare retto, perché in questo caso si vede facilmente che la retta per PM è perpendicolare alla retta per PS e che PL è parallelo a QQ' . In questo caso l'ordinata $y = QV$ diventa una coordinata retta (altrimenti saremmo costretti a lavorare in un sistema di coordinate oblique come sopra in cui l'origine era rappresentato dal punto P). Per descrivere la conica nelle

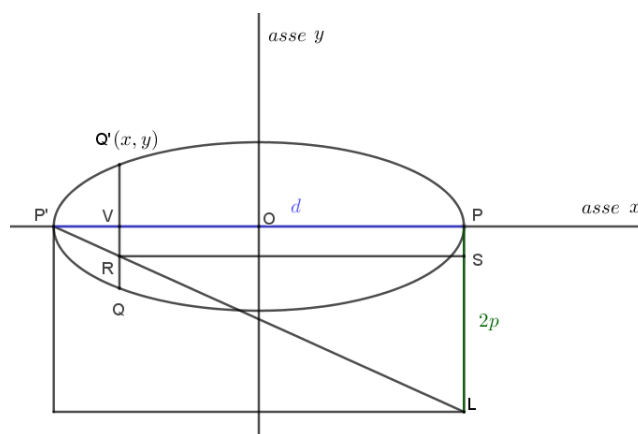


Figura 1.8: L'ellisse in coordinate cartesiane.

coordinate tradizionali x, y (che rappresentano le coordinate del punto Q') procediamo come segue (vedi figura 1.8): consideriamo un sistema di riferimento cartesiano avente come origine il centro O dell'ellisse, il cui asse delle x coincide con la retta passante per PP' . L'asse y allora può essere identificato con la perpendicolare all'asse x passante per il centro della conica. Se indichiamo con a, b i semiassi (al momento incogniti) dell'ellisse avremo $PV = a - x$, con $a = \frac{d}{2}$, per cui la (1.8) diventa:

$$y^2 = \frac{p}{2d} \cdot (d^2 - 4x^2) ,$$

sviluppando la moltiplicazione e portando il termine x^2 a sinistra otteniamo

$$\frac{x^2}{(d/2)^2} + \frac{y^2}{pd/2} = 1$$

che rappresenta un'ellisse sull'origine O e avente semiassi $a = \frac{d}{2}$ e $b = \sqrt{\frac{pd}{2}}$.

1.4.2 Iperbole

l'equazione (1.7) è valida anche nel caso dell'iperbole con la differenza che i punti P e P' si trovano in due falde diverse. Possiamo perciò ripetere i passaggi eseguiti per l'ellisse, con l'accortezza che adesso il segmento VR si ottiene come $PL + LS$.

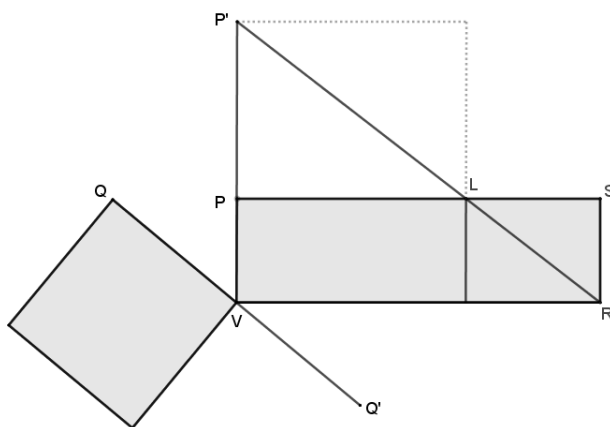


Figura 1.9: Proprietà dell'iperbole.

Il risultato è quindi lo stesso dell'ellisse, ma con un cambiamento di segno.

$$y^2 = PV \cdot VR = x \cdot 2p \left(1 + \frac{x}{d}\right) = 2px + \frac{2px^2}{d} . \quad (1.9)$$

Dove $PV = x$ e $VR = 2p + \frac{2px}{d}$.

Come nel caso dell'ellisse, considerando un cono retto la situazione diventa molto più semplice: in tal caso le rette per QQ' , per PL e la retta r sono parallele, e siccome la retta per PM passa per il triangolo assiale, ne segue che il diametro PP' taglia l'iperbole in due parti uguali. In questa situazione il triangolo $\triangle PP'L$ è isoscele, per cui abbiamo:

$$PP' = d = PL = 2p .$$

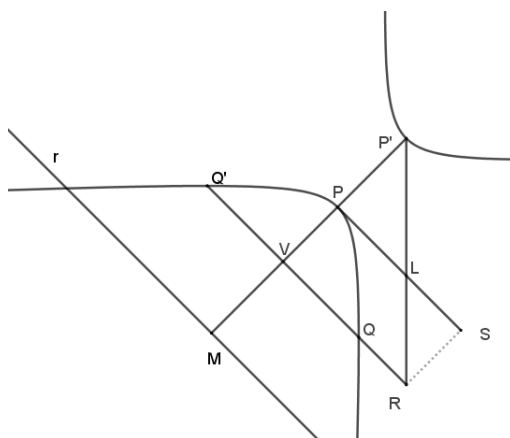


Figura 1.10: L'iperbole sul cono retto

L'equazione (1.9) diventa perciò

$$QV^2 = dx + x^2 = x \cdot (d + x) . \quad (1.10)$$

Al fine di trasformare quest'ultima espressione in quella dell'iperbole tradizionale (riferita agli asintoti), ruotiamo la figura precedente di π e operiamo un cambio di coordinate.

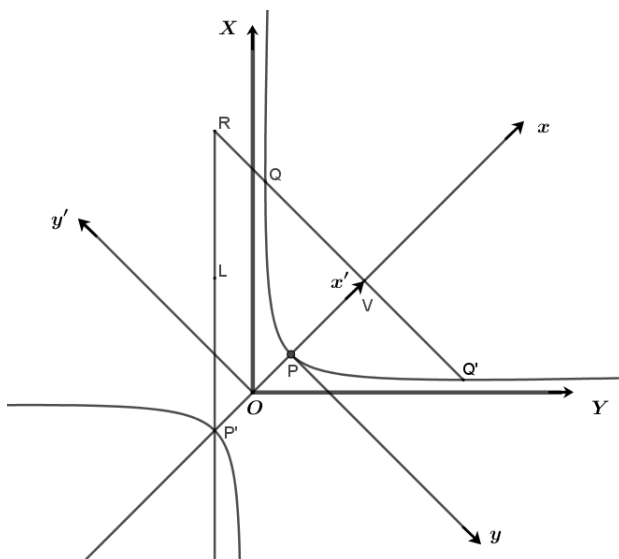


Figura 1.11: L'iperbole in coordinate cartesiane

Apollonio utilizza il sistema di riferimento x, y con origine in P e quindi Q' ha coordinate (x, y) con $x = PV$ e $y = Q'V$.

Traslando l'origine degli assi lungo la direzione x e scegliendo O come punto medio di PP' si ha: $x' = \frac{d}{2} + x$ (ricordiamo $d = PP'$) $\Rightarrow x = x' - \frac{d}{2}$. Quindi la (1.10) diventa:

$$QV^2 = y^2 = (x' - \frac{d}{2}) \cdot (x' + \frac{d}{2}) = x'^2 - \frac{d^2}{4} . \quad (1.11)$$

Quest'ultima espressione descrive la conica nel sistema di coordinate (x', y) nel quale l'iperbole assume la familiare forma $x'^2 - y^2 = d^2/4$. A questo punto, per esprimere l'iperbole nelle coordinate (X, Y) , che corrispondono ai suoi asintoti, dobbiamo passare dalle coordinate (x', y) alle (x', y') e poi ruotare il sistema (x', y') per passare al sistema di coordinate (X, Y) (vedi figura 1.11). Dobbiamo quindi compiere due trasformazioni lineari del piano: prima passiamo dall'ordinata y alla y' mediante una riflessione dell'asse y , dopodichè ruotiamo gli assi di $\frac{\pi}{4}$ per passare al sistema di riferimento cartesiano "tradizionale". Componendo assieme le due trasformazioni, espresse in forma matriciale, otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Da cui otteniamo le relazioni tra i due sistemi di riferimento (centrati entrambi in o):

$$\begin{cases} x' = \cos \frac{\pi}{4} \cdot X + \sin \frac{\pi}{4} \cdot Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot X + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot Y \\ y = \sin \frac{\pi}{4} \cdot X - \cos \frac{\pi}{4} \cdot Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot X - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot Y \end{cases} \quad (1.13)$$

Sostituendo nell'espressione (1.11) otteniamo:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 - \frac{d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad XY = \frac{d^2}{8}$$

1.4.3 Parabola

Nel caso della parabola non esiste alcun punto P' in quanto la sezione conica si sviluppa solamente su una delle due falde del cono.

L'equazione $QV = PL \times PV$ afferma che l'area del quadrato costruito sul lato QV è uguale a quella del rettangolo $PLR'V$.

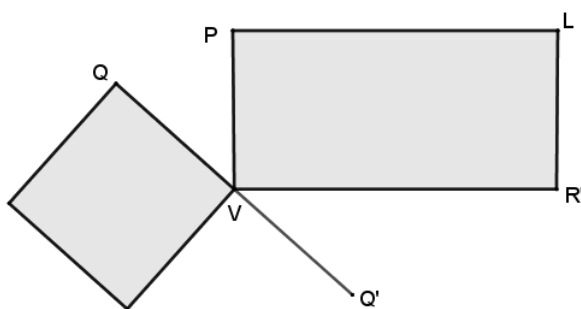


Figura 1.12: Proprietà geometrica della parabola.

Se ora poniamo $y = QV$, $2p = PL$ e $x = PV$ (come nei casi precedenti) l'equazione diventa:

$$y^2 = PV \cdot PL = x \cdot 2p = 2px$$

ovvero:

$$x = \left(\frac{1}{2p}\right) \cdot y^2 \quad (1.14)$$

che rappresenta la parabola descritta nel sistema di riferimento avente come origine il punto P , come 'ascissa' la variabile y e come 'ordinata' la grandezza x (vedi figura 1.13).

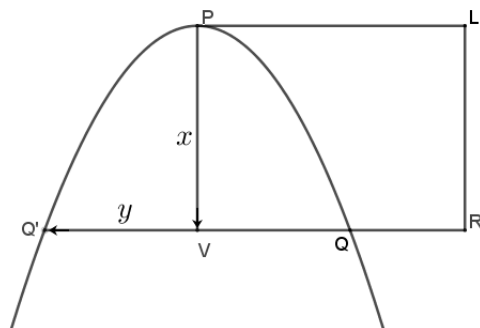


Figura 1.13: La parabola in coordinate cartesiane.

Abbiamo perciò verificato, anche in questo caso, che l'espressione usata da Apollonio descrive la parabola così come la conosciamo.

Osservazione 1.10. L'equazione (1.14) si poteva ottenere dall'equazione dell'ellisse e dell'iperbole facendo tendere d all'infinito. Da ciò segue un'importante generalizzazione delle sezioni coniche:

l'ellisse e l'iperbole sono due casi distinti e separati, mentre la parabola può essere interpretata come il caso "limite" dei due, ovvero come la figura di transizione o "separatrice".

Capitolo 2

Le coniche: proprietà geometriche e equazioni cartesiane

Vediamo qui un approccio alle coniche che è in un certo senso simile al precedente in quanto iniziamo con un approccio che dà la loro descrizione come luogo geometrico di punti nel piano e poi si passerà ad una definizione algebrica (tramite un'equazione di secondo grado in due variabili). In questo capitolo però anche la descrizione geometrica parte dall'uso delle coordinate. (Come referenze vedi [3], [8]).

2.1 Le coniche come luoghi geometrici

Definizione 2.1. Fissati una retta \mathcal{D} del piano \mathbb{R}^2 (*Direttrice*) e un punto $F \in \mathbb{R}^2$ (*Fuoco*) tale che F non appartenga alla retta \mathcal{D} , si definisce *conica* \mathcal{C} il luogo geometrico dei punti $P \in \mathbb{R}^2$ tali che il rapporto tra la distanza di P da F e di P da \mathcal{D} sia costante. Tale costante è chiamata *eccentricità* e viene usualmente indicata con la lettera e .

Vediamo concretamente questa costruzione.

Sia H il punto della retta \mathcal{D} ottenuto come intersezione tra \mathcal{D} e la retta passante per un punto P della conica e perpendicolare a \mathcal{D} allora l'eccentricità e è così ottenuta:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e \quad (2.1)$$

Scegliamo ora un sistema di riferimento cartesiano in modo tale che l'asse x sia ortogonale

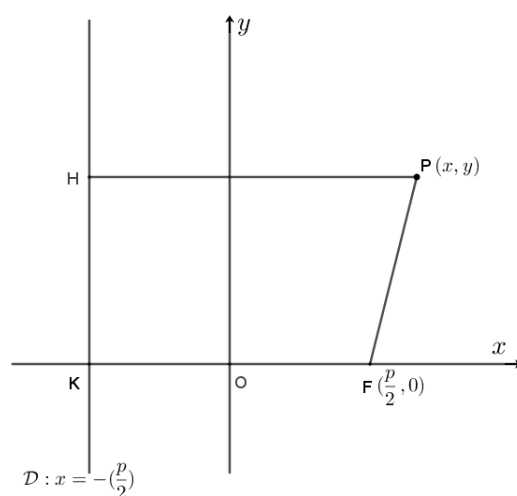


Figura 2.1: Costruzione di una conica come luogo geometrico di punti.

a \mathcal{D} e passi per F . Sia K il punto di intersezione tra l'asse x e la retta \mathcal{D} , e l'asse y intersechi l'asse x nel punto medio di \overline{KF} . In questo sistema di riferimento supponiamo che il punto F abbia coordinate $(p/2, 0)$, cosicché la retta \mathcal{D} avrà equazione $x = -p/2$. Se supponiamo che il punto P abbia le generiche coordinate (x, y) , allora la (2.1) diventa:

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x - p/2)^2}}{x + p/2} = e \quad (2.2)$$

Osservazione 2.2. La (2.2) è ben definita se il denominatore è non nullo; ciò equivale a richiedere che $x \neq -p/2$ ossia che il punto P non appartenga alla retta \mathcal{D} . Ciò significa che l'intersezione delle nostre coniche con la direttrice sarà sempre vuota.

Osservazione 2.3. L'eccentricità, trattandosi di rapporto di distanze tra punti, non potrà mai assumere valori negativi.

Dalla (2.2) si ottiene facilmente l'equazione generale delle coniche:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - p(e^2 + 1)x + (p/2)^2(1 - e^2) = 0 \quad (2.3)$$

Avremo i vari tipi di conica, a seconda del valore assegnato all'eccentricità e :

Definizione 2.4. Una conica si dice un'ellisse se $e < 1$; una parabola se $e = 1$ e un'iperbole se $e > 1$.

Distinguiamo i vari casi e studiamoli separatamente: $e = 1$, $e < 1$ ed $e > 1$.

2.1.1 La Parabola

Equazione canonica della parabola

Se $e = 1$ allora $(1 - e^2) = 0$ perciò la (2.3) diventa $y^2 - 2px = 0$, da cui la seguente equazione canonica della parabola:

$$\mathcal{P} : x = \frac{1}{2p}y^2, \quad \text{con } p > 0. \quad (2.4)$$

Poiché nella (2.4) l'unico termine in cui compare la y è y^2 , \mathcal{P} è simmetrica rispetto all'asse $y = 0$. Questa retta incontra \mathcal{P} nell'origine, che è detta *vertice* di \mathcal{P} .

Dall'equazione segue immediatamente che \mathcal{P} non ha punti $P(x, y)$ tali che $x < 0$, e

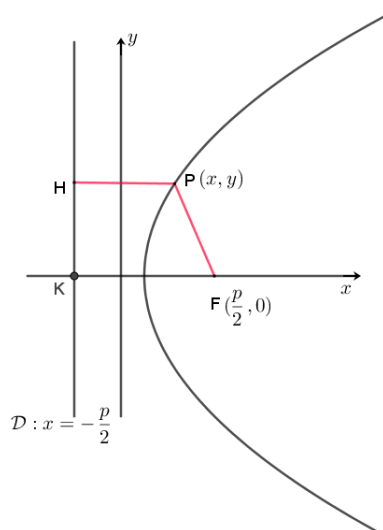


Figura 2.2: La parabola come luogo geometrico.

quindi è contenuta nel semipiano definito dalla condizione $x \geq 0$. Risolvendo la (2.4) rispetto a y otteniamo

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Deduciamo che se x varia da 0 a $+\infty$ e $P(x, y) \in \mathcal{P}$, allora y varia da 0 a $\pm\infty$.

Il punto di coordinate $(p/2, 0)$ è il *fuoco* di \mathcal{P} , e la retta di equazione $x = -p/2$ è la sua direttrice.

Proposizione 2.5. *Il grafico della parabola $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ è contenuto nell'insieme dei punti $P = (x, y)$ del piano tali che:*

$$x \geq 0 \text{ se } p > 0$$

$$x \leq 0 \text{ se } p < 0$$

Dimostrazione. Per dimostrare ciò consideriamo le rette:

- $y = c, \quad c \in \mathbb{R}$ (rette parallele all'asse x),
- $x = c, \quad c \in \mathbb{R}$ (rette parallele all'asse y).

e andiamo a studiare le intersezioni di tali rette con la parabola \mathcal{P} .

- Nel primo caso otteniamo $c^2 = 2px$, cioè $x = \frac{c^2}{2p}$. Quindi le rette del tipo $y = c$ intersecano la parabola in un punto.
- Nel secondo caso, se $c \neq 0$ otteniamo $y^2 = 2pc$, cioè $y = \pm\sqrt{2pc}$. Quindi le rette del tipo $x = c$ ($c \neq 0$) intersecano la parabola in due punti reali e distinti se p e c hanno lo stesso segno, in due punti complessi coniugati se p e c hanno segno opposto. Se $c = 0$, la retta $x = 0$ è tangente alla parabola (cioè ci sono due intersezioni coincidenti nell'origine $O = (0, 0)$ delle coordinate).

□

Osservazione 2.6. Le rette $y = mx$ tagliano la parabola in due punti distinti tranne il caso $m = 0$. Infatti andando a sostituire $y = mx$ a \mathcal{P} otteniamo $m^2x^2 = 2px$.

Se $m \neq 0$ abbiamo che $x(m^2 - 2p) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = \frac{m^2}{2p}$.

Se invece $m = 0$ allora l'unica soluzione è $x = 0$.

Proposizione 2.7. *Un'equazione del tipo*

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0 \tag{2.5}$$

rappresenta ancora una parabola (con asse verticale).

Dimostrazione. Cerchiamo di trasformare l'equazione (2.5) nella forma $Y = aX^2$ mediante una traslazione:

$$\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione (2.5) otteniamo

$$Y + k = a(X + h)^2 + b(X + h) + c$$

cioè

$$Y = aX^2 + X(2ah + b) + (ah^2 + bh + c - k).$$

Imponiamo adesso che

$$\begin{cases} 2ah + b = 0 \\ ah^2 + bh + c - k = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} h = -\frac{b}{2a} \\ k = ah^2 + bh + c \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x = X - \frac{b}{2a} \\ y = Y + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

Riassumendo l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ si riduce alla forma canonica $Y = aX^2$, con $a = \frac{1}{2p}$. \square

Parabola come luogo geometrico

Richiedere che e sia uguale a 1 equivale a richiedere che $\overline{PF} = \overline{PH}$.

Proposizione 2.8. *La parabola è il luogo dei punti del piano le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante uguale ad 1.*

Dimostrazione. $\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = 1 \Rightarrow \overline{PF} = \overline{PH}$ quindi si ha:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - px + y^2 = x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + px$$

$$y^2 = 2px$$

che è proprio l'equazione canonica della parabola con asse coincidente con l'asse delle x . □

Proprietà ottiche della parabola

Conoscendo il calcolo differenziale si può dimostrare che un raggio di luce uscente dal fuoco F e riflesso, secondo le leggi dell'ottica, da un elemento di parabola, (assimilato alla sua tangente in quel punto), prosegue in direzione parallela all'asse della parabola. Questa è una proprietà che viene utilizzata per la realizzazione di riflettori, di fari, di telescopi, ecc. Tutti questi hanno la forma di paraboloidi rotondi, (si può pensare ad una superficie ottenuta dalla rotazione di una parabola intorno al proprio asse di simmetria). Se la parete interna di tale superficie è composta da un materiale riflettente, mettendo una sorgente luminosa (una lampadina, una candela) in corrispondenza del fuoco, si ha che tutti i raggi vengono riflessi secondo una direzione parallela all'asse (vedi figura 2.3). Questo è quello che avviene per esempio nei riflettori parabolici (come i fari delle automobili). Viceversa questa caratteristica può anche essere sfruttata per concentrare in un punto i raggi provenienti da direzioni parallele. Come avviene per esempio nei telescopi a riflessione. Se la superficie interna di un paraboloide di rotazione è uno specchio, si possono concentrare tutti i raggi di luce provenienti da un corpo celeste posto in direzione dell'asse, in uno stesso punto cioè nel fuoco. Così si ottiene una immagine del corpo celeste che può essere osservata in un telescopio.

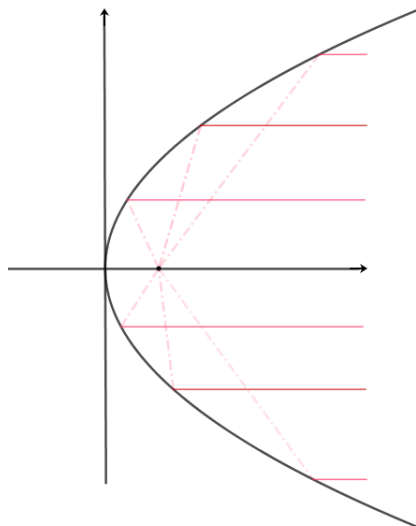


Figura 2.3: Tutti i raggi riflessi si propagano parallelamente all'asse x .

2.1.2 L'ellisse

Equazione canonica dell'ellisse

Se $e < 1$ allora $(1 - e^2) \neq 0$ quindi dividendo la (2.3) per il termine $(1 - e^2)$ si ottiene:

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} - \frac{2d(e^2 + 1)}{1 - e^2} + d^2 = 0$$

da cui, applicando il metodo del completamento del quadrato, cioè aggiungendo e togliendo il termine $\frac{d(e^2 + 1)^2}{(1 - e^2)^2}$ si ha:

$$\left[x - \frac{d(e^2 + 1)}{1 - e^2} \right]^2 + \frac{y^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{4d^2 e^2}{(1 - e^2)^2} = 0$$

Operiamo ora il seguente cambiamento di coordinate (vedi figura 2.4):

$$\begin{cases} X = x - \frac{d(e^2 + 1)}{1 - e^2} \\ Y = y \end{cases}$$

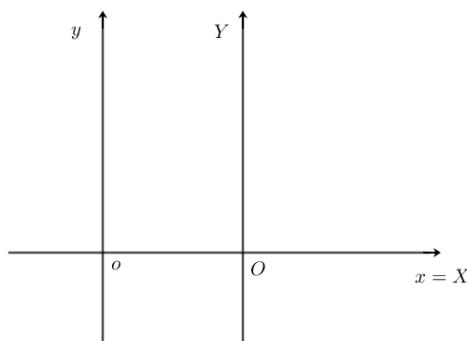


Figura 2.4: passaggio dal sistema di riferimento $\{oxy\}$ a $\{OXY\}$.

Osserviamo che ciò che abbiamo fatto, geometricamente, è di tenere fisso l'asse delle x e traslare l'asse delle y esattamente di $\frac{4d^2e^2}{(1-e^2)^2}$.

Con questo cambiamento di coordinate otteniamo:

$$X^2 + \frac{Y^2}{1-e^2} - \frac{4d^2e^2}{(1-e^2)^2} = 0$$

da cui

$$\frac{(1-e^2)^2}{4d^2e^2}X^2 + \frac{(1-e^2)}{4d^2e^2}Y^2 = 1.$$

Poniamo $\frac{1}{a^2} = \frac{(1-e^2)^2}{4d^2e^2}$ e otteniamo:

$$\frac{X^2}{a^2} + \left(\frac{1-e^2}{4d^2e^2}\right)Y^2 = 1 \quad (2.6)$$

Poiché $e < 1$ il coefficiente di Y^2 è sempre positivo quindi è lecito porre $\frac{1}{b^2} = \frac{1-e^2}{4d^2e^2}$ e ottenere così dalla (2.6) l'equazione canonica dell'ellisse:

$$\mathcal{E} : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a \geq b > 0. \quad (2.7)$$

Osservazione 2.9. Se $a = b$ l'equazione (2.7) diventa

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

ed \mathcal{E} è una *circonferenza* di centro l'origine e raggio a .

Il supporto dell'ellisse \mathcal{E} è contenuto nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni

$$X = \pm a, \quad Y = \pm b,$$

cioè nel piano costituito dai punti $P(x, y)$ tali che

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b.$$

Infatti, se $P(x, y)$ è tale che $|x| > a$, allora $x^2/a^2 > 1$ e quindi, essendo $y^2/b^2 \geq 0$, la (2.7) non può essere soddisfatta dalle coordinate di P .

Definizione 2.10. I punti di coordinate $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ appartengono a \mathcal{E} ; essi sono i *vertici* dell'ellisse.

Dalla forma dell'equazione (2.7) segue immediatamente che \mathcal{E} è *simmetrica rispetto all'origine e rispetto gli assi cartesiani*.

Osservazione 2.11. Se \mathcal{E} è una circonferenza, ogni retta per l'origine è un suo asse di simmetria.

Definizione 2.12. Si chiamano *semiassi* i quattro segmenti di estremi l'origine e uno dei vertici.

I numeri a e b sono le *lunghezze dei semiassi*.

Per avere un'idea della forma di \mathcal{E} si può risolvere l'equazione (1.7) rispetto a Y :

$$Y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - X^2}. \quad (2.8)$$

Se $P(x, y) \in \mathcal{E}$, al variare di x tra $-a$ e 0 i due valori della y dati dalla (2.8) variano tra 0 e $\pm b$, mentre quando x varia tra 0 e a essi variano tra $\pm b$ e 0 . (vedi figura 2.5)

Definizione 2.13. Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, i punti di coordinate $(\pm c, 0)$ sono i *fuochi* dell'ellisse, e il numero $e = c/a$ è la sua *eccentricità*.

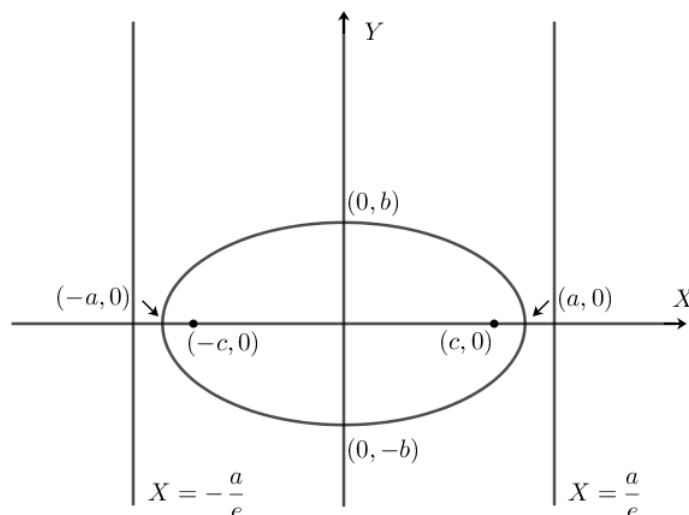


Figura 2.5: Ellisse nel sistema di riferimento $\{OXY\}$.

Osservazione 2.14. Se \mathcal{E} è una circonferenza allora $e = 0$ e i fuochi coincidono tra loro e con il centro.

Definizione 2.15. Se $e < 1$, le due rette di equazioni $X = \pm a/e$ sono dette *direttrici dell'ellisse* (quella con segno \pm nell'equazione si dice *relativa al fuoco* $(\pm c, 0)$).

Ellisse come luogo geometrico

Proposizione 2.16. *L'ellisse è il luogo dei punti del piano le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante uguale a e .*

Dimostrazione. Consideriamo il fuoco $F = (c, 0)$ e $x = \pm \frac{a}{e}$ come la relativa direttrice. Per un punto $P(x, y)$ la condizione per appartenere al luogo è che

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e$$

cioè

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{x - \frac{a}{e}} = e$$

$$(x - c)^2 + y^2 = (ex - a)^2$$

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2 - c^2 + 2cx - 2eax$$

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = 2(c - ea)x + a^2 - c^2$$

ponendo $e = \frac{c}{a}$, $b^2 = a^2 - c^2$, otteniamo l'equazione canonica di un'ellisse. L'altro caso, cioè quello in cui si considerano il fuoco $F = (-c, 0)$ e la direttrice $x = -\frac{a}{e}$ si analizza in modo analogo. \square

Proposizione 2.17. *L'ellisse è il luogo dei punti del piano le cui distanze dai due fuochi hanno somma costante, uguale a $2a$.*

Dimostrazione. Denotiamo con F, F' , rispettivamente, i due fuochi. Fissiamo un sistema cartesiano (O, x, y) tale che l'asse x passi per F e F' . Allora i due fuochi avranno coordinate $(\pm c, 0)$. Il punto $P = (x, y)$ verifica la condizione $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ se e solo se $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$; spostando la seconda radice al secondo membro, e elevando due volte al quadrato, otteniamo:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$(x + c)^2 - (x - c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + c^2 + 2xc - x^2 - c^2 + 2xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$16(xc - a^2)^2 = 16a^2[(x - c)^2 + y^2]$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

si arriva poi all'identità

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1,$$

la quale rappresenta, posto $b^2 = a^2 - c^2$, l'equazione canonica dell'ellisse. \square

Proprietà ottiche dell'ellisse

L'ellisse possiede interessanti proprietà di carattere ottico (o acustico). Infatti, supponiamo di avere un riflettore di forma ellittica. Se si pone una sorgente di luce in uno dei due fuochi, tutti i raggi riflessi passano per l'altro fuoco (vedi figura 2.6). Questo ci dà inoltre, una spiegazione dei nomi dati a tali punti F , F' .

Supponiamo adesso di essere in un ambiente (una sala, una stanza) di forma ellittica. Ogni suono emesso in uno dei due fuochi, anche se molto debole, si sente molto distintamente nell'altro fuoco. Infatti in entrambi i casi, sia le onde luminose che quelle sonore, che sono riflesse dalle pareti, percorrono tutte la stessa distanza e giungono contemporaneamente (in fase) all'altro fuoco.

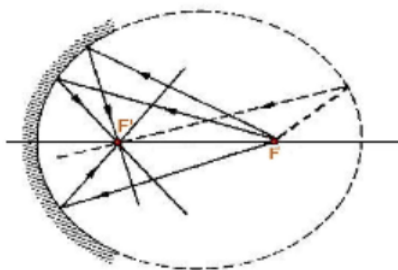


Figura 2.6: proprietà di uno specchio (o di una stanza) di forma ellittica.

2.1.3 L'iperbole

Equazione canonica dell'iperbole

Nel caso dell'iperbole, come nel caso dell'ellisse, si arriva in modo analogo all'equazione (2.6) che riportiamo di seguito

$$\frac{X^2}{a^2} + \left(\frac{1 - e^2}{4d^2e^2}\right)Y^2 = 1$$

Se $e > 1$ si ha che $\frac{1 - e^2}{4d^2e^2} < 0$.

Poniamo dunque $\frac{1}{b^2} = -\frac{1-e^2}{4d^2e^2}$ e otteniamo l'equazione canonica dell'iperbole:

$$\mathcal{J}: \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > 0, b > 0 \quad (2.9)$$

Osservazione 2.18. Se $a = b$ l'equazione (2.9) diventa

$$X^2 - Y^2 = a^2$$

ed \mathcal{J} è detta *iperbole equilatera*.

Come nel caso dell'ellisse, si vede che l'iperbole di equazione (2.9) è *simmetrica rispetto all'origine e rispetto ai due assi coordinati*.

L'asse di simmetria $Y = 0$ incontra \mathcal{J} nei punti $(\pm a, 0)$ che si chiamano *vertici* di \mathcal{J} . Invece l'asse di equazione $X = 0$ non incontra \mathcal{J} .

Dall'equazione (2.9) segue subito che nessun punto $P(x, y)$ per cui si abbia $|x| < a$ appartiene a \mathcal{J} ; quindi \mathcal{J} è contenuta nei due semipiani Σ_- e Σ_+ , definiti rispettivamente dalle condizioni $x \leq -a$ e $x \geq a$. I sottoinsiemi $\mathcal{J} \cap \Sigma_+$ e $\mathcal{J} \cap \Sigma_-$ sono i *rami* dell'iperbole. Risolvendo la (2.9) rispetto alla Y troviamo

$$Y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{X^2 - a^2} .$$

Per cui nessun punto dell'iperbole si troverà nella fascia ove: $-a < X < a$.

Poiché per ogni x tale che $|x| \geq |a|$ si ha:

$$\left| \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right| < \left| \frac{bx}{a} \right| ,$$

\mathcal{J} è contenuta nella parte di piano definita dalla disequazione

$$|Y| \leq \left| \frac{bX}{a} \right| ,$$

e cioè (vedi figura 2.7) nell'unione di due settori di piano: $\{-\frac{b}{a}X \leq Y \leq +\frac{b}{a}X, X > 0\}$, $\{+\frac{b}{a}X \leq Y \leq -\frac{b}{a}X, X \leq 0\}$.

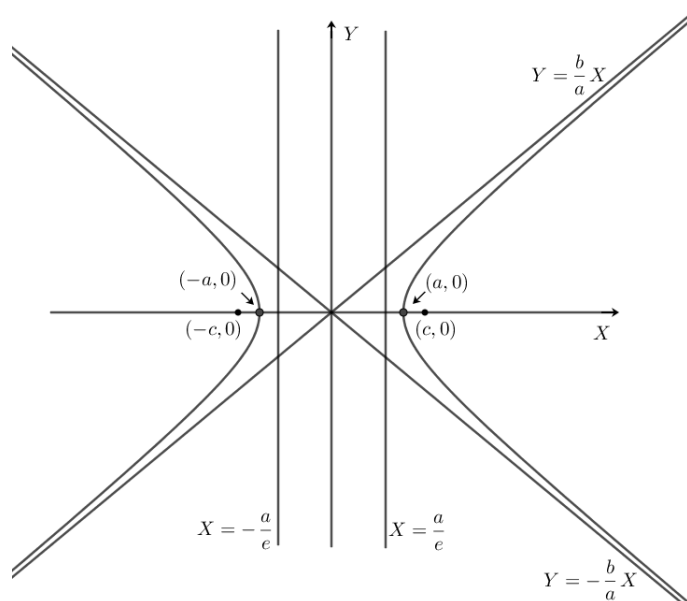


Figura 2.7: Iperbole nel sistema di riferimento $\{OXY\}$.

Definizione 2.19. Le due rette di equazione

$$Y = \pm \frac{bX}{a}$$

sono dette *asintoti* di \mathcal{J} (vedi figura 2.7); mentre, posto

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} ,$$

i punti di coordinate $(\pm c, 0)$ si dicono *fuochi* di \mathcal{J} .

Il numero $e = c/a$ è l'*eccentricità* di \mathcal{J} , e le rette di equazioni $X = \pm(a/e)$ sono le sue *direttrici* (quella con segno \pm nell'equazione si dice *relativa al fuoco* $(\pm c, 0)$).

Iperbole come luogo geometrico

Proposizione 2.20. *L'iperbole è il luogo dei punti del piano le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante uguale ad e .*

Dimostrazione. La prova è analoga a quella della proposizione (2.16). □

Proposizione 2.21. *L'iperbole è il luogo dei punti le cui distanze dai due fuochi hanno differenza costante in valore assoluto, uguale a $2a$.*

Dimostrazione. Denotiamo con F, F' , rispettivamente, i due fuochi. Fissiamo un sistema cartesiano (O, x, y) tale che l'asse x passi per $\overline{FF'}$ e l'origine sia il punto medio del segmento $\overline{FF'}$. Allora i due fuochi avranno coordinate $(\pm c, 0)$.

Il punto $P = (x, y)$ verifica la condizione $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$ se e solo se

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

che equivale

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ (x-c)^2 - (x+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ -a^2 - xc &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},\end{aligned}$$

$$x^2c^2 + a^4 + 2a^2xc = a^2(x^2 + c^2 + 2xc + y^2),$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

e si arriva infine all'identità:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1. \quad (2.10)$$

Adesso consideriamo il triangolo $FF'P$, dove F, F' sono i fuochi e P un punto sull'iperbole.

Poiché in un triangolo la differenza, in valore assoluto, tra due lati è minore del terzo abbiamo $\overline{FF'} > |\overline{PF} - \overline{PF'}|$ cioè $2c > 2a$ da cui $c > a$. Possiamo allora porre $b^2 = c^2 - a^2$, e la (2.10) rappresenta l'equazione canonica dell'iperbole. \square

Proprietà ottiche dell'iperbole

L'iperbole, come l'ellisse, possiede proprietà ottiche. Supponiamo di avere un riflettore di forma iperbolica, e poniamo una sorgente luminosa in uno dei due fuochi. Allora i raggi vengono riflessi lungo una traiettoria ottenuta congiungendo l'altro fuoco con il

punto di riflessione. Si comportano cioè come se provenissero dall'altro fuoco (vedi figura 2.8).

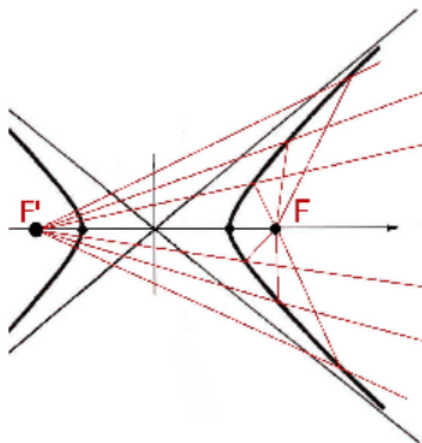


Figura 2.8: Specchio iperbolico.

Dimostrazione. Per dimostrare tale risultato consideriamo la figura (2.9) e supponiamo che in F vi sia una sorgente luminosa di cui uno dei raggi sia incidente in P . Prendiamo ora la retta passante per F' e P . Supponiamo ora (lo dimostreremo poi) che la bisettrice dell'angolo $\widehat{F'PF}$ coincide con la retta tangente all'iperbole nel punto P . Sia ora B un punto qualsiasi della bisettrice dell'angolo $\widehat{F'PF}$ e \overline{FG} sia perpendicolare a \overline{BP} . Prendiamo ora, la retta passante per P e perpendicolare a \overline{BP} ; sia N un punto interno al ramo di iperbole sulla retta per P . Segue che \overline{NP} e \overline{GF} sono rette parallele ed il triangolo $\triangle GPF$ è isoscele, di conseguenza, gli angoli in \widehat{G} ed in \widehat{F} di tale triangolo sono uguali. D'altronde l'angolo \widehat{F} è uguale all'angolo di incidenza \widehat{FPN} essendo questi angoli alterni interni, e l'angolo \widehat{G} è uguale all'angolo in \widehat{NPA} , essendo questi angoli corrispondenti. Pertanto l'angolo di incidenza \widehat{APN} è uguale all'angolo \widehat{NPF} . Da questo risultato e dalla legge di riflessione della luce concludiamo che quest'ultimo angolo è proprio l'angolo di riflessione. Abbiamo quindi dimostrato che il raggio riflesso passa per una traiettoria uscente dall'altro fuoco.

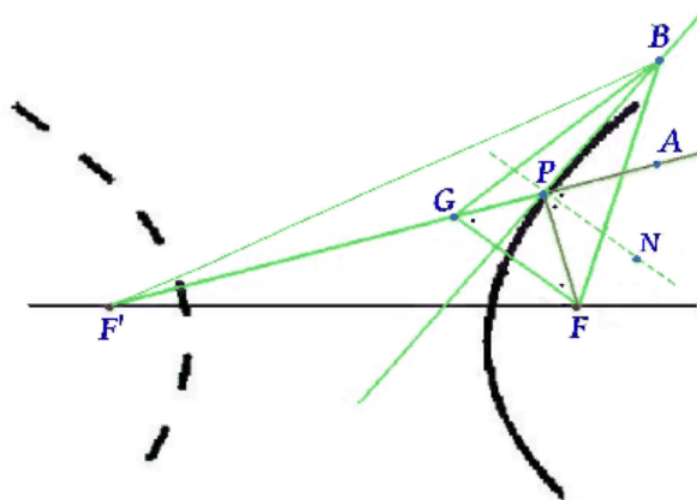


Figura 2.9: La legge di riflessione dice che gli angoli \widehat{APN} e l'angolo \widehat{NPF} sono uguali.

Per dimostrare che la bisettrice \overline{BP} è allo stesso tempo la tangente all'iperbole nel punto P basta vedere che, con riferimento sempre alla figura (2.9), $\overline{BF'} < \overline{BG} + \overline{GF'}$, quindi $\overline{BF'} - \overline{BF} < \overline{BG} + \overline{GF'} - \overline{BF}$, poiché $\overline{BG} = \overline{BF}$ ($\triangle GBF$ triangolo isoscele), allora $\overline{BF'} - \overline{BF} < \overline{GF'} = \overline{PF'} - \overline{PG} = \overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$. Questo mi dice che il punto B è esterno al ramo di iperbole passante per P ; cioè la bisettrice \overline{BP} incontra l'iperbole soltanto nel punto P che è appunto la retta tangente all'iperbole nel punto P . \square

Capitolo 3

Curve algebriche piane

(Come referenze in questo capitolo vedi [1], [5], [8]).

3.1 Storia delle curve algebriche

Uno dei concetti primitivi della nostra intuizione spaziale è quello di linea, o curva piana. Già i geometri dell'antica Grecia consideravano alcune curve particolari, ottenute come luoghi geometrici. Furono infatti studiate diverse curve in modo spesso ingegnoso. La nozione stessa di curva ha subito un'evoluzione. Inizialmente, ad esempio nella scuola pitagorica (VI a.C.), una curva era definita in modo empirico come aggregato di piccoli corpuscoli. Successivamente, con Platone e Aristotele, tale definizione lasciò posto ad altre, ad esempio a quella di luogo descritto da un punto che si muove su un piano. Ancora nel secolo XVIII veniva chiamata "curva piana" qualsiasi linea che si potesse tracciare con un tratto di penna. Tali definizioni sono prive di significato per la matematica di oggi; d'altra parte, alla definizione rigorosa si è giunti solo attraverso approssimazioni successive, di cui le precedenti sono esempi. Questa evoluzione è avvenuta di pari passo all'accrescersi delle nostre conoscenze sulle curve. Per uno studio rigoroso e il più generale possibile occorrerebbe considerare curve definite in uno spazio euclideo, o in un piano affine o proiettivo su un campo \mathbb{K} . Andremo qui a considerare i piani \mathbb{A}^2 , \mathbb{E}^2 , \mathbb{P}^2 , rispettivamente piano affine, euclideo e proiettivo ai quali è sempre possibile ricondursi mediante la scelta di un sistema di coordinate. La definizione intuitiva di "luogo ge-

nerato da un punto mobile" corrisponde a quello di curva definita in \mathbb{A}^2 da equazioni parametriche, come luogo di punti $P(x, y)$ di coordinate

$$\begin{aligned}x &= \alpha(t) \\y &= \beta(t),\end{aligned}$$

dove $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono opportune funzioni non entrambe costanti di un parametro t variabile in \mathbb{K} , o in un suo sottoinsieme. Si può pensare ad esempio (se α e β sono polinomi di primo grado in t) alle equazioni parametriche di una retta. Naturalmente la natura delle curve cambierà se le funzioni α e β sono considerate continue, differenziabili, algebriche, ecc. Un altro punto di vista è quello di definire una curva mediante un'equazione cartesiana. il caso più importante è costituito dalle curve algebriche, che sono ottenute uguagliando a zero un polinomio e comprendono come casi particolari le rette. Il loro studio corrisponde a quello delle soluzioni di un'equazione polinomiale in due variabili (tre nel caso proiettivo).

3.2 Curve algebriche piane

Iniziamo col definire una curva nello spazio affine (o euclideo) tramite un'equazione cartesiana.

Due polinomi non costanti $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ si diranno *proporzionali* se esiste $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $g = \alpha f$; consideriamo qui solo i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

La proporzionalità è una relazione di equivalenza in $\mathbb{K}[X, Y]$.

Definizione 3.1. Una curva algebrica di $\mathbb{A}^2[\mathbb{K}]$ è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $\mathbb{K}[X, Y]$. Se f è un rappresentante della curva, l'equazione

$$f(X, Y) = 0 \tag{3.1}$$

si dice *equazione della curva*, oppure equazione che definisce la curva. Il sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ costituito dai punti le cui coordinate soddisfano l'equazione (3.1) è il *supporto* della curva. Il grado di $f(X, Y)$ si dice *grado della curva* e si denota con $\deg(f)$. Le curve

algebriche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ di grado 1, 2, 3, 4, ... si chiamano *rette*, *coniche*, *cubiche*, *quartiche* ecc.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si può considerare \mathbb{E}^2 al posto di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ottenendo la definizione di curva algebrica di \mathbb{E}^2 .

La definizione di curva algebrica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si dà in modo simile, ma richiede un commento preliminare.

Definizione 3.2. Sia $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate (variabili) x_0, x_1, \dots, x_n . Un polinomio di $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ si dice *omogeneo* se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado.

L'insieme costituito dal polinomio nullo e da tutti i polinomi omogenei di grado d fissato è uno spazio vettoriale rispetto alla somma di polinomi e al prodotto per uno scalare; una base è costituita da tutti i monomi (con coefficienti 1) di grado d . Per esempio se $d = 2$ i seguenti monomi costituiscono una base:

$$x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2.$$

Proposizione 3.3. Un polinomio $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ non nullo di $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ è omogeneo di grado d se e solo se per ogni $t \in \mathbb{K}$ si ha

$$p(tx_0, tx_1, \dots, tx_n) = t^d p(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Dimostrazione. Se p è omogeneo, cioè somma di monomi di grado d , allora la proprietà è vera dato che lo è per monomi di grado d .

Viceversa, raggruppando i monomi dello stesso grado possiamo scrivere $p = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_l$, dove ogni f_i è omogeneo di grado i . Ma se per ogni $t \in \mathbb{K}$ si ha $p(tx) = t^d p(x)$ (qui scriviamo $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ in forma vettoriale per semplicità), allora

$$p(tx) = f_0(tx) + f_1(tx) + f_2(tx) + \dots + f_l(tx) = f_0(x) + t f_1(x) + t^2 f_2(x) + \dots + t^l f_l(x)$$

d'altra parte si ha

$$t^d p(x) = t^d f_0(x) + t^d f_1(x) + t^d f_2(x) + \dots + t^d f_l(x).$$

Osserviamo che possiamo considerare $p(tx)$ e $t^d p(x)$ come polinomi in $\mathbb{K}[t]$, considerando x come coefficiente fissato. Ma i polinomi

$$f_0(x) + tf_1(x) + t^2 f_2(x) + \dots + t^l f_l(x),$$

$$t^d f_0(x) + t^d f_1(x) + t^d f_2(x) + \dots + t^d f_l(x)$$

coincidono se e soltanto se i coefficienti dei monomi (in t) con lo stesso grado coincidono: quindi deve essere che tutti gli f_i sono zero tranne f_d , cioè $p = f_d$ (ovvero, p è omogeneo di grado d). \square

Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Se $[X_0, X_1, X_2]$ sono coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e $f(X_0, X_1, X_2)$ è un polinomio a coefficienti in \mathbb{K} , non ha senso dire che le coordinate omogenee di un punto soddisfano l'equazione

$$f(X_0, X_1, X_2) = 0,$$

perché in generale, assegnati $X_0, X_1, X_2 \in \mathbb{K}$, non tutti e tre nulli, e $\lambda \neq 0$ in \mathbb{K} , può accadere che si abbia $f(X_0, X_1, X_2) = 0$ e $f(\lambda X_0, \lambda X_1, \lambda X_2) \neq 0$. Se ad esempio $f(X_0, X_1, X_2) = X_0 + 1$, si ha $f(-1, 0, 0) = 0$ e $f(1, 0, 0) = 2$. Questo non si verifica se il polinomio che consideriamo è omogeneo cioè un polinomio i cui termini sono tutti del medesimo grado. Infatti, se $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ è omogeneo di grado n , allora, per ogni $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{K}^*$, si ha

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n F(x_0, x_1, x_2)$$

da cui si vede che il primo membro si annulla se e solo se si annulla il secondo. Ha dunque senso dire che le coordinate omogenee di un punto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ annullano il polinomio omogeneo $F(X_0, X_1, X_2)$.

Due polinomi omogenei non costanti $F(X_0, X_1, X_2), G(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ si dicono *proporzionali* se esiste $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tale che $G = \alpha F$.

Definizione 3.4. Una curva algebrica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una classe di proporzionalità di polinomi omogenei di $\mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$. Se $F(X_0, X_1, X_2)$ è un rappresentante della curva, l'equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \tag{3.2}$$

si dice *equazione della curva* ovvero equazione che definisce la curva. il sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ costituito dai punti le cui coordinate soddisfano l'equazione (3.2) è il *supporto* della curva. Il grado di F si dice *grado della curva*.

Esempio 3.1. Se $F = X_0^2$, la curva $X_0^2 = 0$ ha lo stesso supporto della retta $X_0 = 0$, ma è una curva algebrica diversa (di grado 2).

Osservazione 3.5. Una curva algebrica definita in $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ (rispettivamente, in $\mathbb{E}^2(\mathbb{K})$; in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$) è detta *affine (euclidea; proiettiva)*.

Notazione 3.6. Sia $F(x_0, x_1, x_2)$ una curva algebrica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Denoteremo spesso, con un leggero abuso, con \mathcal{C} sia la curva che il supporto della curva, e scriveremo:

$$\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Le curve algebriche possono essere equivalenti dal punto di vista affine, euclideo o proiettivo, a seconda che ci sia una trasformazione affine, una isometria o una proiettività che le trasforma l'una nell'altra.

3.3 Equivalenza di curve algebriche

Poiché una curva non si riduce al suo supporto, cioè non è un sottoinsieme del piano, ma è definita da un'equazione, l'equivalenza va definita in relazione alle equazioni delle curve.

3.3.1 Caso affine

Consideriamo un'affinità $T : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ definita da

$$T(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y + c_1, a_{21}x + a_{22}y + c_2),$$

e sia \mathcal{C} una curva di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ di equazione $f(X, Y) = 0$.

La curva \mathcal{D} di equazione $g(X, Y) = 0$ dove

$$g(X, Y) = f(a_{11}X + a_{12}Y + c_1, a_{21}X + a_{22}Y + c_2) \tag{3.3}$$

è detta *trasformata di \mathcal{C} tramite T^{-1}* , e si denota con

$$\mathcal{D} = T^{-1}(\mathcal{C}). \quad (3.4)$$

Se l'affinità inversa di T è

$$T^{-1}(x, y) = (b_{11}x + b_{12}y + d_1, b_{21}x + b_{22}y + d_2)$$

allora si ha

$$g(b_{11}X + b_{12}Y + d_1, b_{21}X + b_{22}Y + d_2) = f(X, Y) \quad (3.5)$$

e quindi

$$\mathcal{C} = T(\mathcal{D}), \quad (3.6)$$

cioè \mathcal{C} è la trasformata di \mathcal{D} tramite T , e considero le due curve come affinementemente equivalenti.

Dall'identità (3.3) si deduce immediatamente che, se $P(x, y) \in \mathcal{D}$, cioè se (x, y) è soluzione di (3.3), allora $T(P) \in \mathcal{C}$. Viceversa, dalla (3.5) segue che per ogni $Q \in \mathcal{C}$ si ha $T^{-1}(Q) \in \mathcal{D}$. Quindi le relazioni (3.4) e (3.6) sono verificate dai supporti di \mathcal{C} e di \mathcal{D} , e in particolare i supporti di \mathcal{C} e di \mathcal{D} sono affinementemente equivalenti.

Naturalmente nel caso euclideo (come in $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$), la cosa è analoga ma T e T^{-1} devono essere *isometrie*.

3.3.2 Caso proiettivo

Consideriamo ora una proiettività $T : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ definita da

$$T([x_0, x_1, x_2]) = [a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2],$$

e sia \mathcal{C} la curva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$. La curva \mathcal{D} di equazione

$$F(a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2, a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2, a_{20}X_0 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2) = 0$$

si dice *trasformata di \mathcal{C} tramite T^{-1}* . Scriveremo

$$\mathcal{D} = T^{-1}(\mathcal{C}).$$

Come nel caso affine, si verifica che

$$\mathcal{C} = T(\mathcal{D})$$

e le due curve si considerano proiettivamente equivalenti.

Le stesse relazioni sono soddisfatte dai supporti di \mathcal{C} e di \mathcal{D} .

Definizione 3.7. Sia \mathcal{C} una curva di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ (di \mathbb{E}^2 ; di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$). Una curva \mathcal{D} si dice affinementemente equivalente (congruente; proiettivamente equivalente) a \mathcal{C} se esiste un'affinità (un'isometria; una proiettività) T tale che $\mathcal{C} = T(\mathcal{D})$.

3.4 Passaggio dal piano affine al completamento proiettivo e viceversa

Gli spazi proiettivi furono definiti come 'ampliamenti' di spazi affini, ottenuti aggiungendo ad essi 'punti impropri' o 'punti all'infinito'.

Passando dal piano affine al suo completamento proiettivo si possono definire i punti impropri di una curva affine, e la sua chiusura proiettiva.

Definizione 3.8. La *chiusura proiettiva* della curva \mathcal{C} di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ di equazione $f(X, Y) = 0$ è la curva algebrica $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ definita dall'equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, dove $F(X_0, X_1, X_2)$ è il polinomio omogeneizzato di $f(X, Y)$, ove si pone $X = \frac{X_1}{X_0}$, $Y = \frac{X_2}{X_0}$.

Le curve \mathcal{C} e \mathcal{C}^* hanno lo stesso grado.

Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ l'insieme delle rette di $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ passanti per l'origine e sia $i : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ la funzione *immersione*. Segue dalla definizione che:

$$\mathcal{C} \ni P(X, Y) \mapsto [1, X, Y] = \left[1, \frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right] \in \mathcal{C}^*$$

cioè che per ogni punto $P(X, Y) \in \mathcal{C}$, il punto $i(P) = [1, X, Y] = \left[1, \frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right] \in \mathbb{P}^2$ appartiene a \mathcal{C}^* e che ogni punto di $\mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}^2 \setminus \{X_0 = 0\}$ (dove $\{X_0 = 0\}$ è detto *piano*

improprio di $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$) è l'immagine tramite i di un punto di \mathcal{C} .

I punti di $\mathcal{C}^* \cap \{X_0 = 0\}$ si dicono *punti impropri* di \mathcal{C} rispetto a X_0 : sono i punti $[0, X_1, X_2]$ le cui coordinate omogenee soddisfano l'equazione $F(0, X_1, X_2) = 0$.

Scrivendo

$$f(X, Y) = F_0 + F_1(X, Y) + \cdots + F_n(X, Y),$$

dove $F_k(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ è omogeneo di grado k , otteniamo

$$F(X_0, X_1, X_2) = F_0 X_0^n + F_1(X_1, X_2) X_0^{n-1} + \cdots + F_{n-1}(X_1, X_2) X_0 + F_n(X_1, X_2).$$

Allora

$$F(0, X_1, X_2) = F_n(X_1, X_2),$$

e quindi le coordinate $[0, X_1, X_2]$ dei punti impropri di \mathcal{C} sono le soluzioni non banali dell'equazione $F_n(X_1, X_2) = 0$ dove $F_n(X_1, X_2)$ è il polinomio omogeneo costituito dai monomi di grado massimo di $f(X, Y)$.

Viceversa, supponiamo data una curva \mathcal{C} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, dove $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ è un polinomio omogeneo non costante. La curva \mathcal{C}^* di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ di equazione $f(X, Y) = 0$ dove $f(X, Y)$ è il polinomio demogeneizzato di F , ha per supporto $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2 \setminus \{X_0 = 0\}$.

3.5 Coniche affini come "curve algebriche di grado 2"

Osserviamo che l'equazione (2.3) che rappresenta tutti i tipi di coniche è un'equazione di secondo grado nelle variabili x e y . ciò ci porta a generalizzare la definizione di che cosa sia una conica nel modo seguente:

Definizione 3.9. Dato un polinomio di secondo grado $f \in \mathbb{R}[x, y]$, la curva algebrica definita da $f(x, y) = 0$ è detta *una conica* (si ha la definizione analoga anche nel caso complesso, cioè $f \in \mathbb{C}[x, y]$).

Osservazione 3.10. Da quest'ultima definizione si avranno, oltre alle coniche già viste nel capitolo precedente, anche altre "coniche" che costituiranno dei casi "degeneri" di

quelle già viste (coppia di rette, rette doppie). Inoltre nel caso reale il supporto di una conica può anche essere un punto oppure un insieme vuoto.

Esempio 3.2. • se $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \in \mathbb{R}[x, y]$ allora $\mathcal{C} = \emptyset$;

- se $f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \in \mathbb{R}[x, y]$ allora la conica è data da due rette.
- se $f(x, y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ allora il supporto della conica è costituito da un solo punto $(0, 0)$; se invece si considera $f \in \mathbb{C}[x, y]$, la conica è data da due rette in quanto $f(x, y) = (x + iy)(x - iy)$

Supponiamo ora di avere un polinomio di secondo grado di $\mathbb{R}[x, y]$:

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \phi = 0 \quad (3.7)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi \in \mathbb{R}$ e α, β, γ non sono tutti nulli.

Per la definizione (3.9) abbiamo a che fare con una conica; per stabilire di quale conica si tratti le operazioni geometriche che si considereranno sono una traslazione e una rotazione del sistema di riferimento cartesiano. Questa operazione equivale a trasformare l'equazione (3.7) nella sua cosiddetta *forma canonica*.

Nel capitolo successivo ci occuperemo della classificazione delle coniche da questo punto di vista, iniziando col considerarle nel caso del piano proiettivo.

Capitolo 4

Classificazione delle coniche

Lo scopo di questo capitolo è quello di classificare le coniche a partire dalla loro equazione rappresentativa distinguendo le coniche proiettive da quelle affini/euclidee. (Come referenze vedi [1], [3], [5], [7], [8]).

4.1 Coniche proiettive.

Con la definizione (3.9) abbiamo visto le coniche affini come curve algebriche di grado 2; consideriamo qui il caso proiettivo.

Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ il piano proiettivo reale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o complesso ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Definizione 4.1. Una conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una curva algebrica proiettiva data da

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad (4.1)$$

dove f è un polinomio omogeneo a coefficienti in \mathbb{K} di grado 2. Il supporto della conica è l'insieme delle soluzioni dell'equazione (4.1) (detta *equazione della conica*).

Proposizione 4.2. Sia $p(x) = 0$ l'equazione di una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, con $x = (x_0, x_1, x_2)$. Allora esiste una matrice simmetrica 3×3 con coefficienti in \mathbb{K} , $A = (a_{i,j})$, tale che l'equazione della conica si può scrivere come $p(x) = {}^t x A x = 0$, cioè

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Sia $p(x)$ il polinomio omogeneo di grado 2 con coefficienti a, b, c, d, e, f in \mathbb{K} , cioè

$$p(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2.$$

D'altro canto si ha

$${}^t xAx = \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{01} + a_{10})x_0x_1 + (a_{02} + a_{20})x_0x_2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2.$$

Basta quindi porre $a_{00} = a$, $a_{11} = b$, $a_{22} = c$, $a_{01} = a_{10} = d/2$, $a_{02} = a_{20} = e/2$ e $a_{12} = a_{21} = f/2$. \square

Definizione 4.3. La matrice simmetrica A della proposizione (4.2) si dice *matrice associata all'equazione della conica*; naturalmente A è definita (come $p(x)$) a meno di un coefficiente di proporzionalità).

Proposizione 4.4. Sia $T : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una proiettività (isomorfismo proiettivo). Se $p(x) = 0$ è l'equazione della conica \mathcal{C} , allora $p(T^{-1}x) = 0$ è l'equazione della conica $T(\mathcal{C})$. La matrice associata al polinomio omogeneo di secondo grado $p(T^{-1}x)$ è uguale a ${}^t T^{-1}AT^{-1}$, dove A è la matrice associata al polinomio $p(x)$.

Dimostrazione. Ricordiamo che la proiettività si scrive come matrice 3×3 invertibile a coefficienti in \mathbb{K} , per cui possiamo scrivere, semplificando, $T(x) = Tx$ e $T^{-1}x = T^{-1}(x)$. Sia $\mathcal{C}' = \{x = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : p(T^{-1}x) = 0\}$. Osserviamo che se $x \in \mathcal{C}$ (cioè $p(x) = 0$), si ha che $p(T^{-1}Tx) = 0$, cioè Tx è un punto di \mathcal{C}' . In altre parole, $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$. Analogamente $T^{-1}(\mathcal{C}') \supset \mathcal{C}$, e quindi $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Sia A la matrice (simmetrica) associata a $p(x)$, e quindi $p(x) = {}^t xAx$. Allora si ha

$$p(T^{-1}x) = {}^t (T^{-1}x)AT^{-1}x = x {}^t T^{-1}AT^{-1}x.$$

\square

Osservazione 4.5. Se T è una matrice in $GL_3(\mathbb{K})$, segue dalla dimostrazione della proposizione precedente che le coniche di equazioni:

$${}^t xAx = 0 \quad e \quad {}^t x {}^t TATx = 0$$

sono proiettivamente equivalenti.

Osserviamo inoltre che $\det(T) = 0$ se e solo se $\det(A) = 0$; più precisamente, A e T hanno lo stesso rango. Pertanto il rango di A è una proprietà proiettiva della conica \mathcal{C} ; esso si dice *rango di \mathcal{C}* , e si denota con $r(\mathcal{C})$. In particolare l'annullarsi o meno di $\det(A)$ è una proprietà proiettiva di \mathcal{C} . Si noti che sussistono le disuguaglianze

$$1 \leq r(\mathcal{C}) \leq 3$$

perché uno almeno dei coefficienti della matrice A è diverso da zero.

Ricordiamo ora alcuni teoremi relativi alle matrici simmetriche con coefficienti in \mathbb{K} (forme bilineari simmetriche):

Teorema 4.6. *Ogni forma bilineare simmetrica A su \mathbb{K}^n è diagonalizzabile, cioè se A è una matrice $n \times n$ simmetrica allora esiste una matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che tMAM è diagonale.*

Teorema 4.7. *Se \mathbb{K} è algebricamente chiuso (per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), per ogni forma bilineare simmetrica A esiste $M \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che tMAM è diagonale e gli elementi della diagonale sono tutti 1 oppure 0, cioè*

$${}^tMAM = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove I_r è la matrice identità $r \times r$ e il resto della matrice ha coefficienti nulli (r è il rango di A).

Teorema 4.8 (Sylvester). *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, per ogni forma bilineare simmetrica A esiste $M \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che tMAM è diagonale e gli elementi della diagonale sono tutti 1, -1 oppure 0, cioè*

$${}^tMAM = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove I_p è la matrice identica $p \times p$, I_{r-p} analoga e il resto della matrice ha coefficienti nulli.

4.2 Classificazione delle coniche proiettive

Definizione 4.9. Sia A la matrice associata all'equazione della conica \mathcal{C} . Quest'ultima è non degenere se $\det(A) \neq 0$, degenere se $\det(A) = 0$; è semplicemente degenere se $r(\mathcal{C}) = 2$, doppiamente degenere se $r(\mathcal{C}) = 1$.

Consideriamo ora il problema di classificare le coniche di \mathbb{P}^2 , cioè di trovare dei particolari tipi di equazioni

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \quad (4.2)$$

(dette *forme canoniche*) tali che ogni conica di \mathbb{P}^2 sia proiettivamente equivalente ad una di esse. Tratteremo i casi \mathbb{K} algebricamente chiuso e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 4.10. *Ogni conica \mathcal{C} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una e una sola delle seguenti:*

1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica generale senza punti reali: \emptyset);
2. $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (conica generale non degenere);
3. $x_0^2 - x_1^2 = 0$ (conica semplicemente degenere: due rette $x_0 = x_1$, $x_0 = -x_1$);
4. $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (conica semplicemente degenere: un punto $(0, 0, 1)$);
5. $x_0^2 = 0$ (conica doppiamente degenere: due rette coincidenti $x_0 = 0$).

Queste cinque coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti tra loro.

Dimostrazione. Abbiamo visto sopra (Teorema 4.8) che ogni conica nel piano proiettivo può essere riscritta, mediante una proiettività, come una delle coniche dell'elenco. Dobbiamo mostrare che non sono proiettivamente equivalenti per stabilire l'unicità della forma canonica. È chiaro che la 4 non è equivalente alle altre, dato che è formata da solo un punto mentre le altre hanno infiniti punti. Dato che una proiettività porta rette in rette, 3 e 5 non sono equivalenti: altrimenti la proiettività trasformerebbe una retta nell'unione di due rette distinte, cioè una retta coinciderebbe con l'unione di due rette distinte. Per concludere la dimostrazione dobbiamo dimostrare che la conica

generale non è proiettivamente equivalente né ad una retta né all'unione di due rette (cioè che l'insieme delle soluzioni di una equazione con matrice non singolare non può essere proiettivamente equivalente all'insieme di soluzioni di una equazione con matrice singolare). Mostriamo a questo scopo che l'intersezione di una retta con una conica non degenera ha sempre solo al massimo un numero finito di punti. A meno di un cambio di coordinate $x = x_0 + x_1$, $y = x_0 - x_1$ e $z = x_2$ possiamo supporre che l'equazione della conica sia $xy - z^2 = 0$. L'equazione di una retta generica l in coordinate omogenee è $ax + by + cz = 0$. Consideriamo la carta affine di coordinate $[x, y, 1]$. Se la retta l coincide con la retta all'infinito (di equazione $z = 0$), allora le intersezioni sono i due punti $[0, 1, 0]$ e $[1, 0, 0]$. Altrimenti, se assumiamo per assurdo che l'intersezione tra la conica e la retta è composta da infiniti punti, allora ce ne sono infiniti nella parte affine dell'intersezione, dal momento che l'intersezione della conica con l e con la retta all'infinito è contenuta nell'intersezione di l con la retta all'infinito, che ha un punto solo. Ma nella carta affine le intersezioni sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} xy = 1 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

con a oppure b diversi da zero. Questo può avere infinite soluzioni soltanto per $a = b = c = 0$, contro l'ipotesi. \square

Teorema 4.11. *Supponiamo \mathbb{K} algebricamente chiuso. Ogni conica \mathcal{C} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una e una sola delle seguenti:*

1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica generale non degenera);
2. $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (conica semplicemente degenera: due rette);
3. $x_0^2 = 0$ (conica doppiamente degenera: due rette coincidenti $x_0 = 0$).

Queste tre coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

Dimostrazione. Come abbiamo visto, una proiettività di matrice T trasforma la conica di equazione ${}^t x A x = 0$ nella conica di equazione ${}^t x B x = 0$ dove $B = {}^t T A T$. Poiché B è

congruente ad A esiste $M \in GL_3(\mathbb{K})$ tale che B sia una delle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I tre casi corrispondono a $r(\mathcal{C}) = 3, 2, 1$ rispettivamente, e sono le matrici delle tre coniche dell'enunciato. Pertanto \mathcal{C} è proiettivamente equivalente ad una di esse. Poiché tali coniche hanno ranghi diversi, esse sono a due a due non proiettivamente equivalenti. \square

Il teorema precedente può anche enunciarsi così: *se \mathbb{K} è algebricamente chiuso, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ esistono precisamente tre classi di equivalenza proiettiva di coniche, ognuna delle quali è individuata dal rango delle coniche che vi appartengono.*

Se \mathbb{K} invece non è algebricamente chiuso abbiamo visto che le classi di equivalenza proiettiva di coniche sono cinque.

Osservazione 4.12. Dai teoremi precedenti si deduce che una conica proiettiva doppiamente degenere ha per supporto una retta: infatti il polinomio che la definisce è il quadrato di un polinomio di primo grado, sia nel caso reale che in quello di \mathbb{K} algebricamente chiuso.

Una conica semplicemente degenere è invece definita da un polinomio che, nel caso di \mathbb{K} algebricamente chiuso, si spezza nel prodotto di due polinomi distinti di primo grado, e quindi la conica ha per supporto l'unione di due rette distinte. Nel caso reale, lo stesso avviene per la prima delle due coniche semplicemente degeneri (di equazione $x_0^2 - x_1^2 = 0$), mentre l'altra (di equazione $x_0^2 + x_1^2 = 0$) ha per supporto un solo punto.

4.3 Coniche affini e coniche euclidee

In questa sezione studieremo le coniche affini e vedremo come esse possono essere classificate nei casi \mathbb{K} algebricamente chiuso e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ci occuperemo dello stesso problema anche nel caso delle coniche euclidee.

Se $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una conica proiettiva (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure \mathbb{K} algebricamente chiuso) e $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ è una carta affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, allora l'intersezione $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ si dice *conica affine*, o anche *parte affine* (al finito) della conica \mathcal{C} . Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ è anche euclideo, allora

l'intersezione si dice *conica euclidea*. Il problema della classificazione è analogo a quello della classificazione proiettiva.

Una conica \mathcal{C} di $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ ha un'equazione della forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}, \quad (4.3)$$

dove $a_{jk} \in \mathbb{K}$ e a_{11}, a_{22}, a_{12} non sono simultaneamente nulli.

Come nel caso proiettivo, poniamo $a_{21} = a_{12}$, $a_{10} = a_{01}$, $a_{20} = a_{02}$ e consideriamo la matrice simmetrica $A = (a_{jk})$. Possiamo anche rappresentare l'equazione (4.3) in forma più concisa scrivendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Consideriamo $M = (m_{ij}) \in GL_2(\mathbb{K})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. Effettuando nella (4.3) la sostituzione

$$\begin{aligned} x &= m_{11}x' + m_{12}y' + c_1 \\ y &= m_{21}x' + m_{22}y' + c_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

otteniamo l'equazione di una conica \mathcal{D} affinementemente equivalente a \mathcal{C} , e ogni conica affinementemente equivalente a \mathcal{C} si ottiene in questo modo per qualche M, c_1, c_2 .

Per rappresentare in modo conveniente l'equazione di \mathcal{D} esprimiamo le equazioni precedenti nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

o nella forma equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{dove } \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Eseguendo la sostituzione (4.6) nella (4.4) otteniamo l'equazione di \mathcal{D} nelle nuove variabili x', y' :

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0, \quad (4.7)$$

dove

$$B = {}^t \tilde{M} A \tilde{M}. \quad (4.8)$$

Dalla (4.8) si vede che B e A hanno lo stesso rango, e quindi *il rango di A è una proprietà affine della conica \mathcal{C}* , che chiameremo *rango di \mathcal{C}* , e denoteremo con $r(\mathcal{C})$.

4.4 Classificazione delle coniche affini e coniche euclidee

Definizione 4.13. La conica \mathcal{C} è *non degenera*, *degenera*, *doppiamente degenera*, a seconda che si abbia rispettivamente $r(\mathcal{C}) = 3$, $r(\mathcal{C}) < 3$, $r(\mathcal{C}) = 2$, $r(\mathcal{C}) = 1$.

Denotiamo con A_0 la seguente sottomatrice di A :

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e con B_0 la corrispondente sottomatrice di B . Allora

$$B_0 = {}^t M A_0 M. \quad (4.9)$$

Per vederlo si osservi che la sostituzione (4.5) si può ottenere come composizione delle due sostituzioni successive

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.14. La prima sostituzione, che è una traslazione, non modifica i termini di secondo grado dell'equazione di \mathcal{C} . Osservando poi che A_0 è la matrice simmetrica della forma quadratica su \mathbb{K}^2 definita dai termini di secondo grado della (4.3), si deduce che la seconda sostituzione cambia A_0 in B_0 secondo la formula (4.9).

Dalla (4.9) deduciamo che A_0 e B_0 hanno lo stesso rango e quindi *il rango di A_0 è una proprietà affine di \mathcal{C}*

Se $\det(A_0) \neq 0$, \mathcal{C} è una *conica a centro*, e se $\det(A_0) = 0$ è una *parabola*. Nel caso particolare $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la formula (4.9) implica che il segno di $\det(A_0)$ è lo stesso di quello di $\det(B_0)$, e quindi anche $\det(A_0) > 0$ e $\det(A_0) < 0$ sono *proprietà affini di \mathcal{C}* . Se la conica \mathcal{C} di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazione (4.3) è a centro, allora \mathcal{C} è un'*ellisse* o un'*iperbole* a seconda che $\det(A_0) > 0$ o $\det(A_0) < 0$.

Dimostreremo ora il teorema di classificazione delle coniche affini nei casi \mathbb{K} algebricamente chiuso e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 4.15. *Ogni conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ è affinementemente equivalente a una delle seguenti:*

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| (i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ | <i>conica a centro</i> |
| (ii) $x^2 + y^2 = 0$ | <i>conica a centro degenera</i> |
| (iii) $y^2 - x = 0$ | <i>parabola</i> |
| (iv) $y^2 - 1 = 0$ | <i>parabola degenera</i> |
| (v) $y^2 = 0$ | <i>conica doppiamente degenera</i> |

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| (i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ | <i>ellisse</i> |
| (ii) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ | <i>ellisse a punti non reali</i> |
| (iii) $x^2 + y^2 = 0$ | <i>ellisse degenera</i> |
| (iv) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ | <i>iperbole</i> |

(v) $x^2 - y^2 = 0$	<i>iperbole degenera</i>
(vi) $y^2 - x = 0$	<i>parabola</i>
(vii) $y^2 \pm 1 = 0$	<i>parabole degeneri</i>
(viii) $y^2 = 0$	<i>conica doppiamente degenera</i>

Le coniche di ognuno dei gruppi precedenti sono a due a due non affinementemente equivalenti.

Dimostrazione. Parte della dimostrazione sarà data nei due casi simultaneamente. Supponiamo che la conica \mathcal{C} abbia equazione (4.3). Per trasformare \mathcal{C} in una delle coniche dell'enunciato abbiamo a disposizione una sostituzione (4.5), o, equivalentemente, una successione finita di tali trasformazioni. Procediamo in diversi passi.

Passo 1: *eliminazione del termine $2a_{12}xy$*

Sia $M \in GL_2(\mathbb{K})$ tale che la sostituzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

trasformi l'equazione (4.3) nella (4.7) in cui la sottomatrice B_0 sia una matrice diagonale. Possiamo quindi supporre $a_{12} = 0$ cioè che \mathcal{C} abbia equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0. \quad (4.10)$$

Notiamo che \mathcal{C} è una conica a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$.

Passo 2: *eliminazione di termini di primo grado e del termine costante*

Supponiamo che \mathcal{C} sia a centro. Allora, mediante la traslazione

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y &= y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{aligned}$$

l'equazione (4.10) si trasforma nella seguente:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c_{00} = 0, \quad (4.11)$$

dove $c_{00} \in \mathbb{K}$ si esprime per mezzo dei coefficienti dell'equazione (4.10).

Se \mathcal{C} non è una conica a centro possiamo supporre, salvo scambiare fra loro le variabili, che $a_{11} = 0$ e $a_{22} \neq 0$. La traslazione

$$\begin{aligned}x &= x' \\ y &= y' - \frac{a_{01}}{a_{22}}\end{aligned}$$

trasforma la (4.10) nella seguente:

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x' + d_{00} = 0 ,$$

per un opportuno d_{00} . Se $a_{01} = 0$ otteniamo l'equazione

$$a_{22}y'^2 + d_{00} = 0 , \tag{4.12}$$

mentre, se $a_{01} \neq 0$, possiamo eseguire l'ulteriore traslazione

$$\begin{aligned}x' &= x'' - \frac{d_{00}}{2a_{01}} \\ y' &= y'' ,\end{aligned}$$

ottenendo la nuova equazione

$$a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0 . \tag{4.13}$$

Passo 3: *normalizzazione dei coefficienti*

In questo ultimo passo dobbiamo distinguere il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dal caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Se \mathcal{C} è una conica a centro e quindi è stata trasformata nella conica di equazione (4.11), possiamo supporre che c_{00} sia -1 oppure 0 (se $c_{00} \neq 0$ basta moltiplicare primo e secondo membro della (4.11) per $-c_{00}^{-1}$).

Eseguendo la sostituzione

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x}{\sqrt{a_{11}}} \\ y' &= \frac{y}{\sqrt{a_{22}}}\end{aligned}$$

otteniamo rispettivamente la prima e la seconda equazione della lista (1).

Se \mathcal{C} non è a centro ed è stata trasformata nella conica di equazione (4.12) possiamo supporre che d_{00} sia -1 oppure 0.

Mediante la sostituzione

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= \frac{y}{\sqrt{a_{22}}}\end{aligned}$$

ci si riconduce alla quarta e alla quinta equazione rispettivamente (nel caso $d_{00}00$ è sufficiente moltiplicare primo e secondo membro della (4.12) per a_{22}^{-1}).

Se infine \mathcal{C} è stata trasformata nella conica di equazione (4.13), la sostituzione

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' &= \frac{y}{\sqrt{a_{22}}}\end{aligned}$$

trasforma la (4.12) nella terza equazione dell'enunciato (parabola).

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Se \mathcal{C} è una conica a centro e quindi è stata trasformata nella conica di equazione (4.11), possiamo supporre che c_{00} sia -1 oppure 0 ed eseguire la sostituzione

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ y' &= \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}}\end{aligned}$$

con la quale ci si riconduce a una delle prime cinque equazioni della lista (2).

Se la conica \mathcal{C} non è a centro, ed è stata trasformata nella conica di equazione (4.12), possiamo supporre che d_{00} sia -1 oppure 0 ed eseguire la sostituzione

$$x' = x$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}}$$

con la quale ci si riconduce a una delle ultime tre equazioni della lista (2).

Infine, se \mathcal{C} è stata trasformata nella conica di equazione (4.13), possiamo supporre $a_{22} > 0$. La sostituzione

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' &= \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{aligned}$$

trasforma la (4.13) nella sesta equazione della lista (2) (parabola).

L'ultima asserzione del teorema segue dall'osservazione che, in ognuno dei casi (1) e (2), due coniche diverse della lista possono distinguersi una dall'altra attraverso $r(A)$, o $r(A_0)$, oppure attraverso il fatto che hanno diverso supporto. Ciò conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 4.16. Una conica a centro è così chiamata perché possiede un *centro di simmetria*, cioè esiste un punto $C(x_0, y_0) \in \mathbb{A}^2$ rispetto a cui \mathcal{C} è simmetrica. Il centro di simmetria è unico.

Se \mathcal{C} ha equazione (4.2), il centro C ha per coordinate la soluzione (x_0, y_0) del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

(quest'ultimo sistema ha un'unica soluzione se $\det(A_0) \neq 0$).

Per dimostrarlo si effettua la sostituzione seguente sul primo membro della (4.3)

$$\begin{aligned} x &= 2x_0 - x' \\ y &= 2y_0 - y' . \end{aligned}$$

Si vede subito che il polinomio così ottenuto è proporzionale al primo membro della (4.3), ed è effettivamente uguale ad esso (ma come polinomio nelle nuove variabili) se e solo se (x_0, y_0) è soluzione del sistema (4.14). Pertanto (x_0, y_0) è l'unico centro di simmetria di \mathcal{C} .

Osservazione 4.17. Il significato geometrico della distinzione delle coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in ellissi, iperboli e parabole si può spiegare facilmente se si considerano i punti impropri di \mathcal{C} . Per ottenere le coordinate bisogna risolvere l'equazione omogenea di secondo grado

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \quad (4.15)$$

il cui discriminante è $-\det(A_0)$. Quindi le soluzioni dell'equazione (4.15) sono rispettivamente reali e distinte, reali e coincidenti, oppure complesse coniugate (non reali) a seconda che \mathcal{C} sia un'iperbole, una parabola o un'ellisse, ovvero abbia due, uno, nessun punto improprio reale (ossia, nel caso dell'ellisse, abbia due punti impropri complessi non reali).

In altre parole, la distinzione in tre tipi di coniche corrisponde ad altrettanti possibili comportamenti all'infinito.

Passiamo ora a considerare il caso delle coniche euclidee. Le definizioni di rango, di conica non degenera, degenera, semplicemente degenera o doppiamente degenera, hanno ovviamente senso anche in questo caso. Ha pure senso la definizione di conica a centro, di parabola, di ellisse e di iperbole.

Teorema 4.18. *Ogni conica \mathcal{C} di \mathbb{E}^2 è congruente a una delle seguenti:*

- | | | | |
|---------------|--|------------------|-------------------------------------|
| <i>(i)</i> | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $(a \geq b > 0)$ | <i>ellisse</i> |
| <i>(ii)</i> | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ | $(a \geq b > 0)$ | <i>ellisse a punti non reali</i> |
| <i>(iii)</i> | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ | $(a \geq b > 0)$ | <i>ellisse degenera</i> |
| <i>(iv)</i> | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $(a >, b > 0)$ | <i>iperbole</i> |
| <i>(v)</i> | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ | $(a \geq b > 0)$ | <i>iperbole degenera</i> |
| <i>(vi)</i> | $y^2 - 2px = 0$ | $(p > 0)$ | <i>parabola</i> |
| <i>(vii)</i> | $y^2 - a^2 = 0$ | $(a \geq 0)$ | <i>parabola degenera</i> |
| <i>(viii)</i> | $y^2 + a^2 = 0$ | $(a > 0)$ | <i>parabola degenera</i> |
| <i>(ix)</i> | $y^2 = 0$ | | <i>conica doppiamente degenera.</i> |

Le coniche precedenti sono a due a due non congruenti.

Capitolo 5

Coniche inviluppo

In questo capitolo, dopo aver introdotto sinteticamente il concetto di curva inviluppo, presentiamo le principali costruzioni geometriche delle coniche inviluppo utilizzando un software dinamico: "GeoGebra". Ciascuna costruzione fa uso dei tradizionali strumenti della geometria euclidea cioè della riga e del compasso e di loro combinazioni. Tramite questo software si giunge a definire la retta tangente alla conica in ogni suo punto. L'animazione della retta tangente permette poi di riconoscere la curva studiata come luogo di punti che soddisfano ad opportune condizioni.

(Come referenze in questo capitolo vedi [4], [12]).

5.1 Curve inviluppo

Sia Γ_t una famiglia di curve algebriche dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$F_t(x, y) = F(x, y, t) \subset \mathbb{R}[x, y, t];$$

fissato $t = t_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione $F_{t_0}(x, y) = 0$ definisce una curva algebrica $\Gamma_{t_0} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Definizione 5.1. *Un inviluppo della famiglia di curve Γ_t è una curva \mathcal{C} tangente in ogni punto ad una curva della famiglia.*

Teorema 5.2. Sia $\{\Gamma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una famiglia di curve piane, lisce, definita da $F_t(x, y) = F(x, y, t) = 0$ allora il suo involuppo \mathcal{C} è il luogo dei punti del piano definito da:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Dimostrazione. Supponiamo che la curva involuppo \mathcal{C} sia parametrizzata da

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

e che per ogni t la coppia $(f(t), g(t))$ appartenga alla famiglia di curve $\Gamma_t = \{F_t(x, y) = 0\}$.

Abbiamo che

$$F(f(t), g(t), t) = F_t(f(t), g(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Il vettore tangente a \mathcal{C} nel punto $(f(t), g(t))$ è il vettore $(f'(t), g'(t))$.

Per quanto riguarda Γ_t , la sua tangente nel punto $(f(t), g(t))$ è perpendicolare al gradiente $\nabla_{(f(t), g(t))} F_t(x, y) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$.

Sappiamo inoltre che $(f'(t), g'(t)) \perp \nabla F_t$ cioè :

$$\nabla F_t \cdot (f'(t), g'(t)) = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t), t) \cdot f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t), t) \cdot g'(t) = 0. \quad (5.3)$$

Derivando ora la (5.2) rispetto a t otteniamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t), t) \cdot f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t), t) \cdot g'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(f(t), g(t), t) = 0. \quad (5.4)$$

Mettendo a sistema le equazioni (5.3) e (5.4) otteniamo:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(f(t), g(t), t) = 0. \quad (5.5)$$

Viceversa, prendendo la curva parametrizzata $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ e assumendo vera la (5.5)

segue che $F(f(t), g(t), t) = 0$.

Quest'ultima equazione dice che per ogni punto della curva inviluppo \mathcal{C} passa una e una sola curva della famiglia Γ_t . □

5.2 Costruzione della parabola inviluppo

Diversamente da altre costruzioni in cui si determina geometricamente un punto appartenente a una parabola, in questa costruzione giungeremo alla parabola attraverso la rappresentazione grafica dell'insieme (più correttamente, di un sottoinsieme) delle sue rette tangenti. Intendiamo cioè individuare la parabola come inviluppo delle sue rette tangenti.

5.2.1 Espressione geometrica della famiglia di rette e della parabola inviluppo

Iniziamo la costruzione tramite il software "GeoGebra " tracciando una retta orizzontale a che per semplicità facciamo coincidere con l'asse x del sistema cartesiano (vedi figura 5.1). Sia F (il fuoco) un punto qualsiasi diverso dall'origine appartenente alla retta b che facciamo coincidere con l'asse y del sistema cartesiano. Tale retta rappresenterà anche l'asse della parabola. Inseriamo lo slider c numerico, variabile nell'intervallo $[-10, 10]$ con l'incremento di 0,1, e immettiamo tramite la barra di inserimento algebrico il punto $C(c, 0)$. Costruita la retta d passante per F e C , sia e la retta perpendicolare a d e passante per C . Quest'ultima è la retta tangente alla parabola in un suo punto che chiameremo P . Infatti, attivata la traccia di d e avviata l'animazione dello slider, al variare di C su a , la famiglia di rette e fa emergere il profilo di una parabola che si identifica come l'inviluppo dell'insieme di rette. Selezionando la casella di controllo "mostra la parabola" si evidenzia invece il luogo ottenuto.

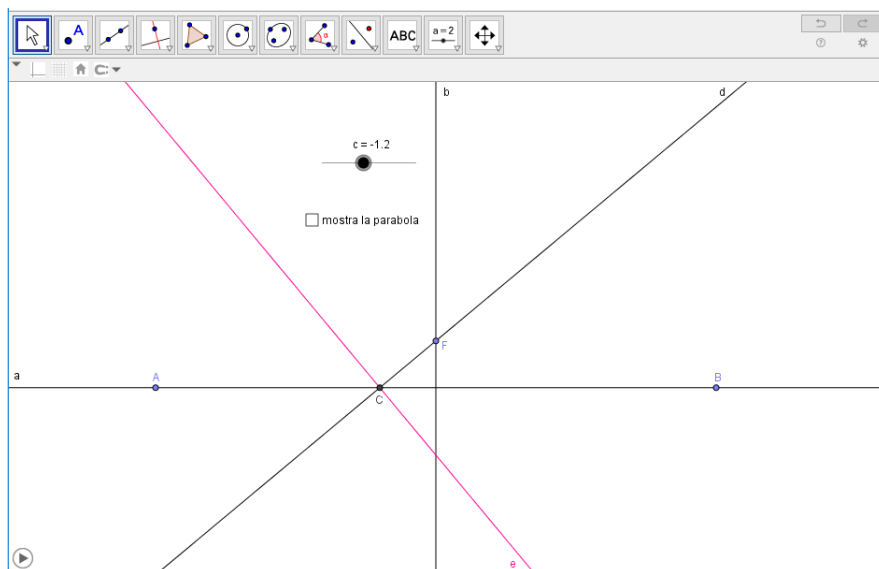


Figura 5.1: Costruzione della parabola a partire dal suo luogo geometrico

Descriviamo ora la costruzione geometrica del punto di tangenza appartenente alla parabola. Tracciamo la retta h parallela ad a avente distanza da quest'ultima pari alla

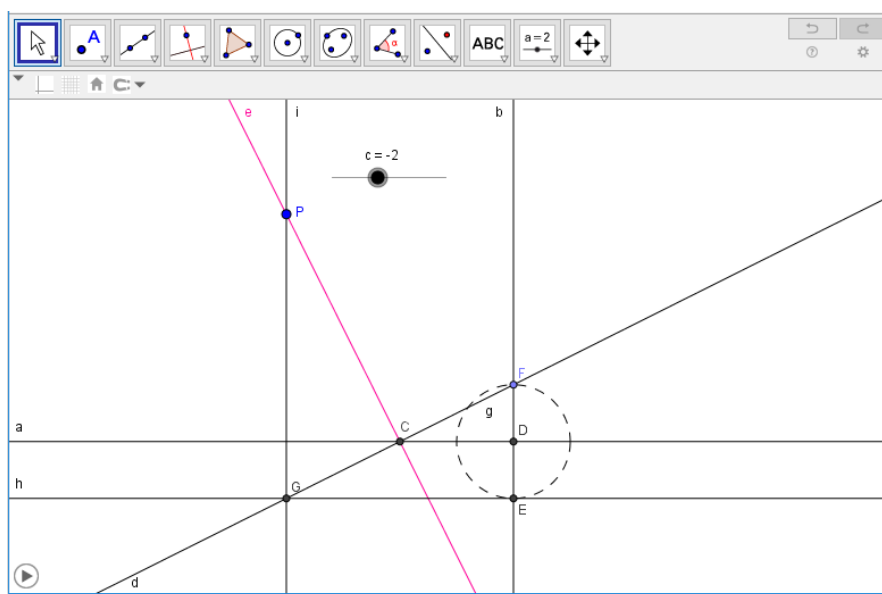


Figura 5.2: Costruzione della parabola a partire dal suo luogo geometrico

distanza di F da a ; per costruzione, la retta h è la direttrice della parabola (vedi figura

5.2). Essendo G il punto di intersezione con la retta d , questo permette di riconoscere la congruenza dei due segmenti \overline{GC} e \overline{CF} applicando il teorema di Talete ai triangoli simili $\triangle GEF$ e $\triangle CDF$. Segue quindi che la retta tangente e è l'asse del segmento \overline{GF} . Infine, se si conduce la perpendicolare a h passante per G , questa incontra la retta e nel punto P appartenente alla parabola e per definizione di "asse di un segmento" otteniamo $\overline{PG} = \overline{PF}$.

Attivando l'animazione verrà visualizzata la traccia delle rette e tangenti alla parabola in tutti i suoi punti P (vedi figura 5.3).

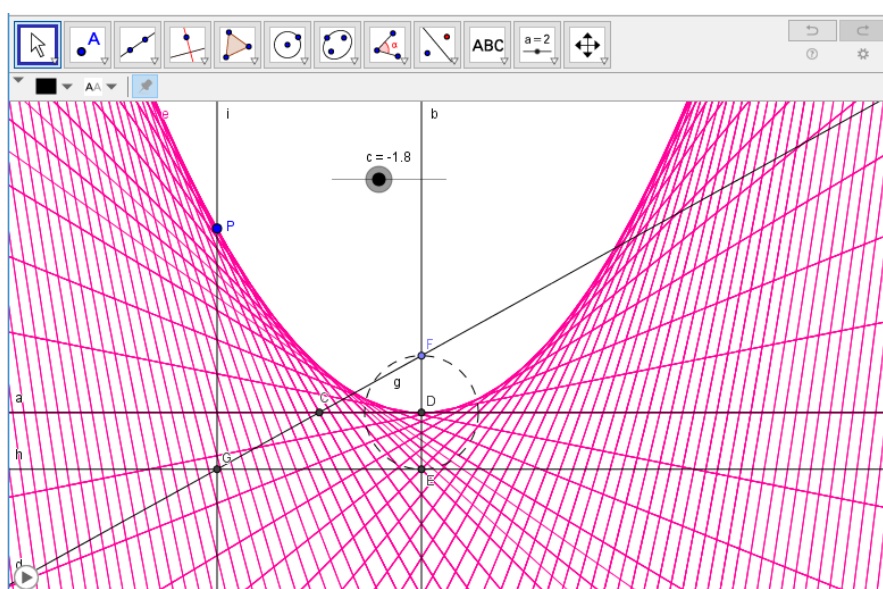


Figura 5.3: Parabola involuppo

5.2.2 Espressione analitica della famiglia di rette e della parabola involuppo

Sulla base delle costruzioni geometriche precedenti intendiamo ora dedurre le espressioni analitiche sia della famiglia di rette tangenti alla parabola sia della parabola stessa. Introdotto pertanto un sistema cartesiano con origine nel punto D della figura precedente, siano $F(0, f)$ le coordinate del fuoco mentre l'ascissa del punto P sia rappresentata dal parametro $x_P = t$. Per determinare l'ordinata di tale punto va innanzitutto ottenuta

l'equazione della retta e , perpendicolare alla retta d e asse del segmento \overline{FG} . Poiché il punto G appartenente alla retta direttrice di equazione $y = -f$ ha, per costruzione, le coordinate $G(t, -f)$, il punto medio C di \overline{FG} è individuato dalla coppia $C(t/2, 0)$. Il coefficiente angolare di d risulta pertanto:

$$m_d = \frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = -\frac{2f}{t}$$

e l'equazione della retta e è invece

$$y - y_C = -\frac{1}{m_d}(x - x_C) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{t}{2f}x - \frac{t^2}{4f}. \quad (5.6)$$

Quest'ultima equazione rappresenta quindi la famiglia di rette cercata in funzione del parametro t . L'equazione della parabola inviluppo si ottiene immediatamente non appena determiniamo l'ordinata corrispondente all'ascissa $x_P = t$ e ciò si ottiene eliminando t dall'equazione (5.6):

$$y = \left(\frac{x}{2f}\right)x - \frac{x^2}{4f} = \left(\frac{1}{4f}\right)x^2.$$

L'equazione cercata è quindi

$$y = \left(\frac{1}{4f}\right)x^2 \quad (5.7)$$

In questo modo siamo stati in grado di giungere all'equazione della curva inviluppo in quanto ci era nota l'ascissa del punto di tangenza tra l'inviluppo e la famiglia di tangenti. Il punto di tangenza però non si conosce a priori, quindi cerchiamo un metodo che prescindano da questo dato.

A tale scopo riprendiamo l'equazione (5.6) e, trasportata la y al secondo membro, definiamo la funzione:

$$F(x, y, t) = \left(\frac{t}{2f}\right)x - y - \frac{t^2}{4f}. \quad (5.8)$$

Applicando ora il sistema del teorema (5.2) si ottiene:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = \left(\frac{t}{2f}\right)x - y - \frac{t^2}{4f} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}F(x, y, t) = 2x - 2t = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Da cui si trovano le seguenti due equazioni che costituiscono la rappresentazione parametrica del luogo dei punti P :

$$x_P = t, \quad y_P = \frac{t^2}{4f}$$

È comunque immediato ottenere l'equazione implicita della curva eliminando la dipendenza dal parametro t : si ottiene in tal modo la (5.7).

5.3 Costruzione dell'ellisse involuppo

In questa sezione vogliamo ottenere l'ellisse come involuppo delle sue rette tangenti. Se nel caso della parabola le rette tangenti passavano tutte per un punto variabile su una retta, qui il punto si muove lungo una circonferenza.

5.3.1 Espressione geometrica della famiglia di rette e dell'ellisse involuppo

Vediamo ora la costruzione tramite il software "GeoGebra ":

Tracciamo la retta asse x scrivendo $y = 0$ nella barra di inserimento (vedi figura 5.4). Va costruita ora la circonferenza c di centro l'origine A e raggio \overline{AB} (nella figura 5.4 appare tratteggiata). La lunghezza del raggio di tale circonferenza è pari alla lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse. Per definire la posizione dei fuochi sull'asse, tracciamo la circonferenza di centro A e raggio $\overline{AC} < \overline{AB}$. Sia E l'ulteriore punto di intersezione tra l'asse x e quest'ultima circonferenza (che, per chiarezza, successivamente nascondiamo). Definito uno slider γ angolare, selezioniamo lo strumento angolo di data misura e quindi definiamo l'angolo \widehat{BAG} avente misura pari a γ con G punto sulla circonferenza iniziale. Disegniamo ora la retta g e quindi la retta perpendicolare a questa passante per G (in figura 5.4 appare di colore verde). È quest'ultima che risulta essere tangente all'ellisse. Al variare quindi del punto G cioè, algebricamente, dell'angolo γ che lo descrive, disponiamo ora di una famiglia di rette dove ciascuna retta ha la proprietà di essere tangente ad una curva che appare essere un'ellisse. La curva che in tal modo emerge costituisce, come sappiamo, l'involuppo di tale famiglia.

Difatti in figura (5.4) è sufficiente attivare la traccia di tale retta, e quindi avviare l'animazione dello slider per far emergere l'ellisse come involuppo delle sue rette tangenti (vedi figura 5.5).

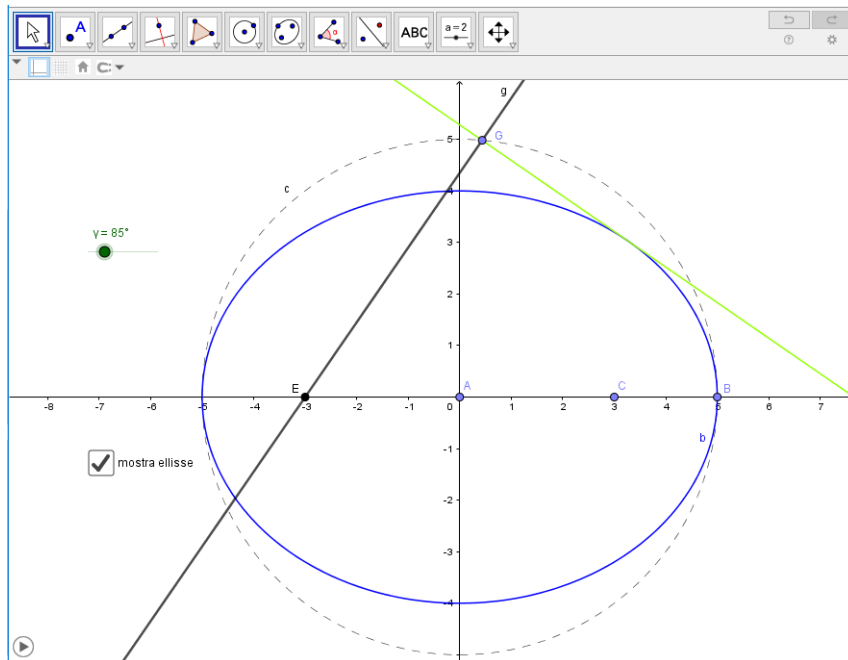


Figura 5.4: Costruzione dell'ellisse tramite la famiglia delle sue rette tangenti

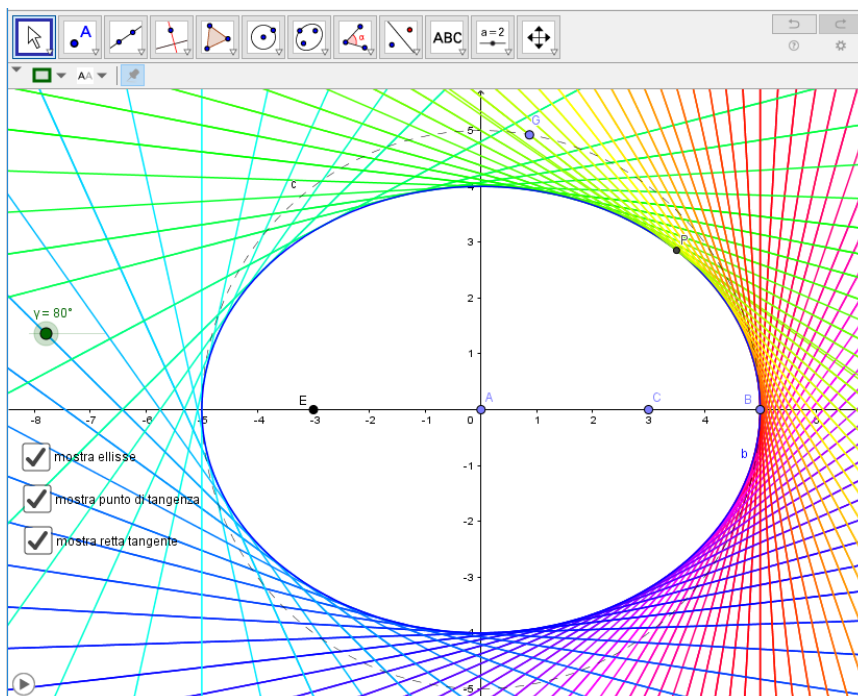


Figura 5.5: Ellisse involuppo

5.3.2 Espressione analitica della famiglia di rette e dell'ellisse involuppo

Nel caso della parabola siamo stati in grado di ottenere, a partire dalla famiglia delle sue rette tangenti, la sua equazione rappresentativa dimostrando così come tale curva sia l'involuppo della famiglia delle sue rette tangenti. Inizialmente la deduzione presentata precedentemente ha coinvolto nozioni elementari di geometria analitica ed è stata possibile in quanto il luogo dei punti G era la stessa retta direttrice e ciò ha permesso di determinare facilmente il punto di tangenza. Nel caso dell'ellisse il punto G varia invece su una circonferenza e non è immediato individuare il punto di tangenza con metodi algebrici.

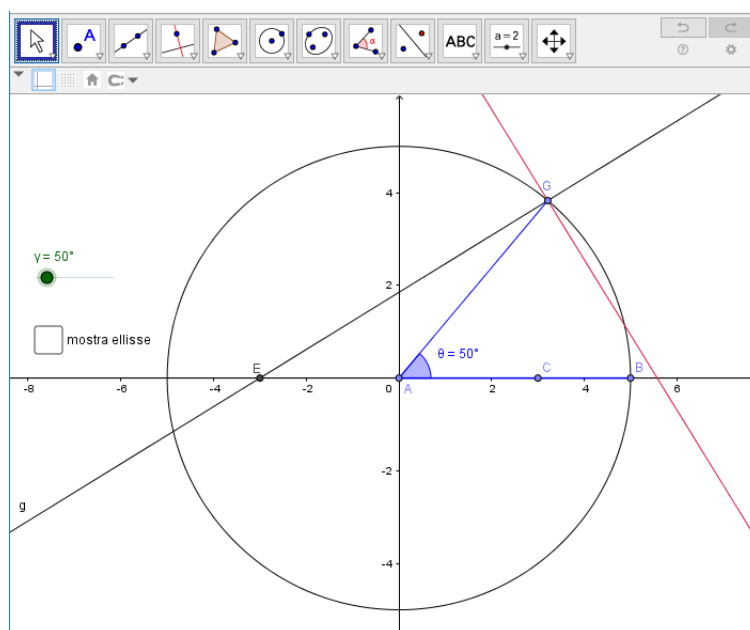


Figura 5.6: Scelta della parametrizzazione nel caso dell'ellisse involuppo

In riferimento alla figura (5.6) scegliamo come parametro l'angolo $\theta = \widehat{BAG}$ che è collegato, e numericamente uguale, allo slider γ . Di conseguenza il punto G è individuato dalle coordinate $G(a \cos \theta, a \sin \theta)$ dove a è il raggio della circonferenza.

Sia E il punto di coordinate $E(-c, 0)$, allora il coefficiente angolare della retta g è:

$$m_g = \frac{y_G - y_E}{x_G - x_E} = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta + c}$$

e l'equazione della famiglia di tangenti:

$$y - y_G = -\frac{1}{m_g}(x - x_G) \quad \Rightarrow \quad y - a \sin \theta = -\frac{a \cos \theta + c}{a \sin \theta}(x - a \cos \theta). \quad (5.10)$$

Definiamo quindi la seguente funzione:

$$F(x, y, \theta) = a y \sin \theta + a(x - c) \cos \theta + cx - a^2 \quad (5.11)$$

e risolvendo il sistema del teorema (5.2):

$$\begin{cases} F(x, y, \theta) = a y \sin \theta + a(x - c) \cos \theta + cx - a^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} F(x, y, \theta) = a y \cos \theta - a(x - c) \sin \theta = 0 \end{cases}$$

si ottengono le equazioni parametriche della curva involuppo che rappresentano anche il punto di tangenza:

$$x = \frac{a(c + a \cos \theta)}{a + c \cos \theta}, \quad y = \frac{(a^2 - c^2) \sin \theta}{a + c \cos \theta}. \quad (5.12)$$

Vogliamo ora eliminare il parametro θ per ottenere l'equazione della curva involuppo. A tale scopo andiamo a ricavare il $\cos \theta$ dalla prima delle due equazioni precedenti e andiamo a sostituire il seguente sistema all'equazione (5.10):

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a(c-x)}{cx-a^2} \\ \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \end{cases}$$

Otteniamo così l'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

5.4 Costruzione dell'iperbole inviluppo

In questa costruzione intendiamo ottenere l'iperbole come inviluppo delle sue rette tangenti per cui, come nel caso della parabola e dell'ellisse, lo scopo è di costruire essenzialmente la famiglia delle rette tangenti associando ciascuna retta di tale insieme ad un punto variabile. Riprodurremo quindi passo passo la medesima costruzione seguita per l'ellisse con l'unica variante nella posizione reciproca tra il punto e la circonferenza definiti inizialmente. Se quindi nel caso dell'ellisse la circonferenza aveva raggio maggiore della lunghezza del semiasse focale e di conseguenza i fuochi erano interni ad essa, qui avrà un raggio minore e i fuochi saranno ad essa esterni.

5.4.1 Espressione geometrica della famiglia di rette e dell'iperbole inviluppo

Tracciamo la retta asse x e costruiamo la circonferenza c di centro l'origine A e raggio \overline{AB} (vedi figura 5.7). La lunghezza del raggio di tale circonferenza rappresenta la lunghezza del semiasse trasverso (o focale) dell'iperbole.

Per definire la posizione dei fuochi sull'asse x , tracciamo la circonferenza di centro A e raggio $\overline{AC} > \overline{AB}$. Si procede ora allo stesso modo che nel caso dell'ellisse. Sia E l'ulteriore punto di intersezione tra l'asse x e quest'ultima circonferenza (che, per chiarezza, abbiamo nascosto). Definito uno slider angolare γ , selezioniamo lo strumento angolo di data misura e quindi definiamo l'angolo \widehat{BAG} avente misura pari ad γ con G punto sulla circonferenza c iniziale. Disegniamo ora la retta g e quindi la retta perpendicolare a questa passante per G . È quest'ultima che risulta essere la tangente all'iperbole.

Al variare quindi del punto G cioè, algebricamente, dell'angolo γ che lo individua, disponiamo di una famiglia di rette dove ciascuna di queste ha la proprietà di essere tangente ad una iperbole che per questo motivo rappresenta l'inviluppo di tale famiglia. A conferma visiva e per far emergere l'iperbole, si attiverà nella figura (5.7) la traccia per tale retta, e si avvierà l'animazione dello slider (vedi figura 5.8).

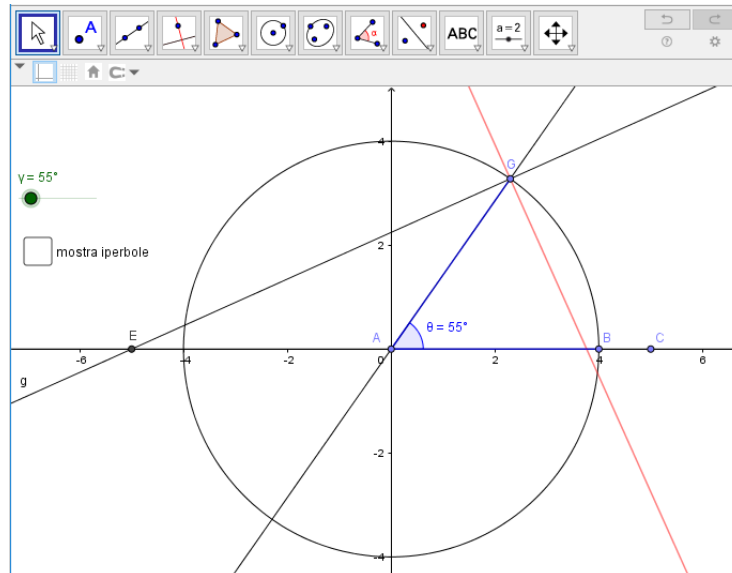


Figura 5.7: Costruzione dell'iperbole tramite la famiglia delle sue rette tangenti

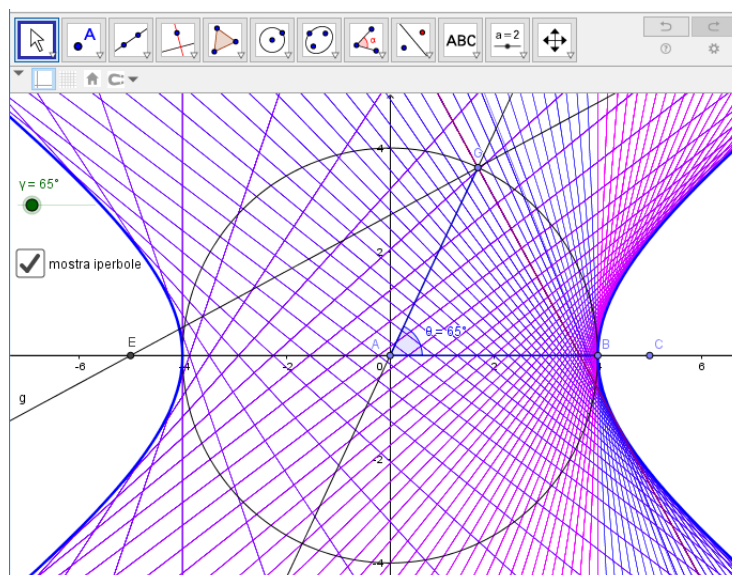


Figura 5.8: Iperbole involuppo

5.4.2 Espressione analitica della famiglia di rette e dell'iperbole inviluppo

Come per la parabola e per l'ellisse, anche per l'iperbole, mostriamo come sia possibile dedurre le equazioni parametriche che descrivono la curva inviluppo della famiglia di rette. I calcoli sono del tutto analoghi a quelli svolti per l'ellisse e si fondano sulla risoluzione del sistema di equazioni del teorema (5.2):

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

già discusso e introdotto nello studio della parabola e dell'ellisse. Ricordiamo quindi che in tale sistema la prima equazione rappresenta la forma implicita della funzione che descrive la famiglia di curve e la seconda è invece la derivata di tale funzione eseguita rispetto al solo parametro t .

Riferendoci alla figura (5.7) scegliamo quindi $AB = a$, $E(-c, 0)$ e dove, come evidenziato nella costruzione, $c > a$. Scelto come parametro l'angolo $\theta = \widehat{BAG}$ le coordinate di G sono $G(a \cos \theta, a \sin \theta)$ e conseguentemente il coefficiente angolare della retta g è dunque analogo a quello della stessa retta nel caso dell'ellisse, così come è analoga la funzione F . Si arriva dunque alle stesse equazioni parametriche definite nella sezione precedente in (5.12) che ricordiamo di seguito:

$$x = \frac{a(c + a \cos \theta)}{a + c \cos \theta}, \quad y = \frac{(a^2 - c^2) \sin \theta}{a + c \cos \theta}.$$

Da queste ultime equazioni vogliamo quindi dedurre l'equazione canonica dell'iperbole. Dividiamo la prima per a elevando il rapporto al quadrato ed eseguiamo il quadrato della seconda:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{(c + a \cos \theta)^2}{(a + c \cos \theta)^2}, \quad y^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 \theta}{(a + c \cos \theta)^2}.$$

Divisi entrambi i membri della seconda per $(a^2 - c^2)$ e sommando membro a membro queste due ultime relazioni otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = \frac{c^2 + 2ac \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - c^2 \sin^2 \theta}{(a^2 + c \cos \theta)^2},$$

ossia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = \frac{c^2(1 - \sin^2 \theta) + 2ac \cos \theta + a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(a^2 + c \cos \theta)^2}.$$

L'identità fondamentale della goniometria permette ora di semplificare la precedente in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = \frac{c^2 \cos^2 \theta + 2ac \cos \theta + a^2}{(a^2 + c \cos \theta)^2}$$

e, notato come il numeratore del secondo membro sia lo sviluppo del denominatore, otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

In conclusione, dato che $c > a$, si arriva all'equazione canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

che è l'equazione aspettata di una iperbole con asse focale coincidente con l'asse delle ascisse e semiassi a e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Referenze

Testi

- [1] Edoardo Sernesi, "Geometria 1 ", Bollati Boringhieri, 2 edizione, 2000.
- [2] Morris Kline, "Storia del pensiero matematico ", vol.1, Einaudi, 1 edizione, 1999.
- [3] A.Bernardi-A.Gimigliano, "Algebra lineare e geometria analitica ", CittàStudi, 2 edizione, 2018.
- [4] Mirella Manaresi (2017-2018), Appunti delle lezioni del corso di "Elementi di algebra e geometria da un punto di vista superiore" presso il dipartimento di matematica di Bologna, a cura di Ilaria Mengucci.
- [5] Robert J. Walker, "Algebraic Curves", Princeton University Press, 1st edition (1950)

Siti Web

- [6] <http://adriani.altervista.org/school/math.php>
- [7] <http://www.matapp.unimib.it/ferrario/geotop-2006/w14.pdf>
- [8] http://progettomatematica.dm.unibo.it/Coniche/index_coniche.htm
- [9] http://online.scuola.zanichelli.it/sammaronedisegno/files/2010/03/Zanichelli_Sammarone_Coordinate.pdf

[10] <http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/>

[11] https://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/Belle-Napolitani-Coniche.pdf

[12] http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/Roi_Inviluppi.pdf

Ringraziamenti

Questa tesi è l'ultimo passo verso l'inizio di un nuovo percorso, una nuova esperienza che attendo da molti anni: l'insegnamento. Vorrei concludere ringraziando tutte le persone che mi hanno sostenuto e aiutato in questo periodo.

Innanzitutto ringrazio il professor Gimigliano, relatore di questa tesi, per la gentile disponibilità e precisione dimostratemi durante tutto il periodo di stesura.

Un ringraziamento speciale alla mia famiglia che con l'instancabile sostegno sia morale che economico ha potuto realizzare il mio sogno.

Ringrazio le persone speciali che ho incontrato durante questo percorso universitario con cui si è instaurata una grande amicizia e con cui ho condiviso gioie e dispiaceri durante questi anni. Tra queste persone ringrazio soprattutto Elena, forse non smetterò mai di ringraziarla, per essere stata al mio fianco sempre ed avermi aiutata ad affrontare ogni difficoltà incontrata.

Ringrazio infine tutte le mie amiche e il mio ragazzo perché senza di loro non sarei la persona che sono oggi. Loro sono stati e saranno sempre il mio punto di riferimento, il mio rifugio, la mia seconda casa.

Un sentito grazie a tutti!